ION S. ANTONIU

BAZELE ELECTROTEHNICII

Vol. II

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI – 1974

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Dr. doc. ing. ION S. ANTONIU
Membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Profesor la Institutul politehnic București

BAZELE ELECTROTEHNICII

VOLUMUL II





EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
București — 1974

TABLA DE MATERII

Capitolul VI

STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV ÎN REGIM PERMANENT

Capitolul VII

CIRCUITE ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV ÎN REGIM NESTAȚIONAR (TRANZITORIU)

PARTEA a III-a

FUNCȚIONAREA SISTEMELOR DE CURENT ALTERNATIV ÎN REGIM ANORMAL

Capitolul VIII

CURENTUL ALTERNATIV POLIFAZAT NESIMETRIC. REGIMUL DEZECHILIBRAT

Pag.

Capitolul IX

CURENTUL ALTERNATIV MONOFAZAT NESINUSOIDAL. REGIMUL DEFORMANT

Capitolul X

METODE SPECIALE DE CALCUL ALE REGIMULUI TRANZTORIU

Capitolul XI

SISTEME NELINIARE ÎN CURENT ALTERNATIV

Partea a IV-a

PROPAGAREA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE

Capitolul XII

TEORIA LINIILOR ELECTRICE LUNGI

Pag.

Capitolul XIII

LANȚURI DE CUADRIPOLI

Capitolul XIV

PROPAGAREA CURENȚILOR ELECTRICI ȘI CÎMPURILOR ELECTROMAGNETICE ÎN CONDUCTOARE MASIVE, ÎN REGIM ARMONIC SINUSOIDAL

Pag.

Capitolul XV

PROPAGAREA UNDELOR ELECTROMAGNETICE

Capitolul VI

STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV ÎN REGIM PERMANENT

6.1. METODE GENERALE DE STUDIU

6.1.1. GENERALITĂŢI

Majoritatea aplicaţiilor tehnice utilizează astăzi energia electrică sub forma curentului alternativ, curentul continuu fiind utilizat numai pentru anumite aplicaţii tehnice — foarte importante şi ele — la care curentul alternativ nu oferă aceleaşi avantaje.

Chiar în cazul în care energia electrică este utilizată sub forma de curent continuu, alimentarea întreprinderilor respective se face tot în curent alternativ urmînd ca, în interiorul acestor întreprinderi să se facă transformarea curentului alternativ în curent continuu.

Reţelele electrice de distribuire a energiei electrice urmăresc în mod necesar traseul complex al străzilor unui oraş sau aglomeraţiile de consumatori. Chiar reţelele primare de alimentare (feederii) formează circuite destul de complexe.

Pentru stabilirea unui proiect de distribuţie sau pentru verificarea funcţionării unei asemenea reţele, este necesar să se calculeze anumite elemente. Dintre acestea, în primul rînd trebuie stabilită circulaţia de energie, sau, dacă tensiunile sînt constante, circulaţia curenţilor.

Pe baza acestei circulaţii se poate dimensiona reţeaua însăşi şi se poate stabili protecţia ei sau urmările unui defect oarecare.

De asemenea, în cursul exploatării, se pot vedea încărcările ulterioare ce se pot da reţelei sau întăririle necesare ce trebuie făcute pentru a se putea răspunde cererilor de energie.

Calculul reţelelor electrice de curent alternativ este mai complicat decît acela al reţelelor de curent continuu, din cauza apariţiei defazajului dintre curent şi tensiune, defazaj ce se datorează faptului, că în reţelele de curent alternativ, mai apare, în afară de rezistenţa conductoarelor şi inductivitatea sau capacitatea lor.

În afară de acestea, fenomenele care apar în aparatele electrice utilizate în curent alternativ au uneori un caracter mai complex decît cel care rezultă din schema circuitelor electrice ale aparatului. Acest lucru se datoreşte fie faptului că în curent alternativ apar fenomene noi — din care vom menţiona pierderile de energie în dielectric şi în circuitul magnetic, efectul pelicular şi efectul de vecinătate* — fie faptului că între elementele schemei există anumite cuplaje parazite capacitive sau inductive. Pentru a ţine seamă şi de aceste

---

* Vezi cap. XIV

fenomene schema circuitelor electrice se completează cu elemente suplimentare, obținîndu-se o nouă schemă, denumită *schema echivalentă*. În unele cazuri, de exemplu la transformatoare, mașini sincrone și mașini asincrone, la care schema circuitelor electrice conține două circuite cuplate pur inductiv, prin schema echivalentă se urmărește obținerea unei scheme obișnuite mai simple și mai sugestive, fără cuplaje inductive*.

Rezolvarea rețelelor de curent alternativ sinusoidal se poate face prin diferite metode, care se pot grupa după cum urmează :

1. *Metoda diagramelor fazoriale*. Se scriu ecuațiile fazoriale ale rețelei și cu ajutorul lor se construiește diagrama fazorială corespunzătoare. Segmentele de dreapta din diagramă reprezintă, la o scară bine definită, curenți sau tensiuni (căderi de tensiuni) iar unghiurile între fazori reprezintă defazaje. Pe baza proprietăților geometrice ale figurii construite se deduc elementele necunoscute. De observat că diagrama fazorială se poate construi în multe cazuri fără a scrie ecuațiile circuitului. Metoda se aplică de obicei în cazuri simple, cînd rețeaua nu este prea complicată și are o singură forță electromotoare.

2. *Metode analitice de calcul, fără utilizarea fazorilor*. Această categorie de metode cuprinde : metoda separației puterilor și metoda transfigurării circuitului într-un circuit serie sau derivație, cu ajutorul parametrilor Z, R, X, Y, G, B, pe care o vom denumi metoda separației elementelor active și reactive ale rețelei.

3. *Metode analitice de calcul, folosind fazorii*. Se scriu ecuațiile fazoriale ale rețelei, exprimînd tensiunile, curenții și impedanțele cu ajutorul fazorilor. Se rezolvă apoi aceste ecuații, aplicînd regulile de calcul corespunzătoare.

Prin introducerea cantităților complexe, dificultățile de calcul dispar. În adevăr, s-a văzut că, în acest caz, se introduce în calcul impedanța complexă, se consideră tensiunile și curenții tot cantități complexe și, în aceste condiții, calculul se face ca și în curent continuu. Rămîne ca la sfîrșit să se interpreteze rezultatele, stabilind defazajele, curenții activi, curenții reactivi etc.

În consecință, utilizînd fazorii, metodele de calcul folosite în curentul continuu vor fi folosite și în curentul alternativ, fără nici un fel de modificare, cu menționea că diversele relații sînt scrise cu cantități complexe.

Dintre aceste metode, primele două nu pot fi utilizate decît la calculul circuitelor electrice în *regim permanent* sau *cuasistaționar*, ultima metodă poate fi utilizată pentru calculul circuitelor electrice atît în regim permanent, cît și în *regim tranzitoriu***.

În acest capitol se vor studia numai circuitele electrice funcționînd în regim permanent, regimul tranzitoriu urmînd a fi studiat în capitolul VII.

6.1.2. SCHEMELE ECHIVALENTE ALE CIRCUITELOR ELECTRICE

6.1.2.1. Considerații generale. Schemele electrice ale circuitelor sînt constituite din elemente ale căror parametri (rezistențe, inductanțe sau capa-

---

* Vezi [10] pag. 152.

** Se reamintește definiția acestor două regimuri de funcționare ale circuitelor electrice : *Regimul permanent* este regimul de funcționare al unui circuit electric, în care curenții electrici din circuit, sub acțiunea surselor aplicate, își păstrează indefinit aceeași formă — constantă sau periodic variabilă în timp.

Regimul tranzitoriu este regimul de funcționare al unui circuit electric în timpul trecerii de la o stare de funcționare în regim permanent la o altă stare de funcționare tot în regim permanent.

cităţi) pot fi constanţi sau variabili, circuitul electric fiind în primul caz liniar, în al doilea neliniar.

Schemele electrice cu parametri constanţi pot fi reduse întotdeauna fie la impedanţa $\underline{Z}_e$ cuprinzînd o rezistenţă R_e în serie cu o reactanţă X_e, fie la admitanţa $\underline{Y}_e$ conţinînd o conductanţă G_e în paralel cu o susceptanţă B_e.

La schemele cu parametri variabili, în general nu se poate face o asemenea reducere decît pentru o anumită valoare dată a parametrului variabil*.

Determinarea parametrilor $\underline{Z}_e$, R_e, X_e sau $\underline{Y}_e$, G_e, B_e se poate face prin calcul sau experimental.

Pentru determinarea experimentală se alimentează receptorul cu o tensiune U măsurată cu voltmetrul. Receptorul absoarbe curentul I măsurat cu un ampermetru şi puterea activă P, măsurată cu un wattmetru. Cu ajutorul acestor date măsurate se deduce:

$$Z_e = \frac{U}{I}\ ;\ R_e = \frac{P}{I^2}\ ;\ X_e = \pm\sqrt{Z_e^2 - R_e^2}\ ;$$

sau

$$Y_e = \frac{I}{U}\ ;\ G_e = \frac{P}{U^2}\ ;\ B_e = \pm\sqrt{Y_e^2 - G_e^2}\,.$$

Factorul de putere al circuitului echivalent este

$$\cos\varphi_e = \frac{R_e}{Z_e} = \frac{P}{UI}$$

Cu privire la aceste determinări, trebuie precizate următoarele:

— Rezistenţa R_e sau conductanţa G_e corespunde atît energiei transformate de circuit în căldură prin efectul trecerii curentului prin rezistenţe, cît şi energiei transformate în căldură prin pierderile din cîmpul magnetic sau electric şi de asemenea energiei transformate în lucru mecanic, radiaţii, energie chimică etc. În consecinţă, în general nu există o legătură obligatorie între rezistenţa echivalentă determinată ca mai sus şi rezistenţele fizice ale reţelei.

— Determinările făcute mai sus sînt valabile numai pentru frecvenţa la care au avut loc măsurătorile; ne referim aici nu atît la faptul că reactanţa X_e sau susceptanţa B_e depind de frecvenţă după o lege cunoscută, cît la faptul că prin schimbarea frecvenţei, în general prin mărirea ei, pot apărea fenomene noi sau cuplaje parazite noi, neglijabile la frecvenţe mici, aşa după cum se va arăta ulterior.

6.1.2.2. **Schema echivalentă a condensatorului real.** Dielectricii folosiţi în construcţia condensatoarelor, cablurilor, maşinilor etc. sub forma diferiţilor izolanţi, nu sînt dielectrici perfecţi. Ei au oarecare conductivitate, ceea ce face ca izolanţii să fie parcurşi de curenţi electrici, foarte mici, atît în cîmp electric constant (curent continuu) cît şi în cîmp alternativ (curent alternativ). Acestor curenţi le corespunde un consum de putere activă, care se transformă în căldură şi reprezintă pierderi.

* Vezi [10] pag. 152; vezi şi [13] pag. 144

Într-un cîmp alternativ apar în plus şi alte pierderi, de obicei mai mari decît cele precedente, datorită fenomenului de polarizare a dielectricilor şi fenomenului de histerezis dielectric*. Aceste pierderi sînt proporţionale cu frecvenţa şi cu pătratul valorii maxime a cîmpului electric,

$$p_D = k_D f E^2$$

în care k_D este o constantă caracteristică dielectricului. Pierderile menţionate mai sus sînt mici pentru aer, mică, parafină de calitate şi porţelanuri speciale, sînt însă mari la hîrtia electroizolantă obişnuită. Din acest motiv, condensatoarele etalon şi cele pentru frecvenţă înaltă se construiesc cu dielectric aer, mică sau alte materiale de calitate.

Curentul absorbit de un condensator este teoretic defazat cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea tensiunii, factorul de putere al condensatorului şi puterea activă absorbită fiind nule. La un condensator real, alimentat cu tensiune sinusoidală curentul este defazat cu mai puţin de $\frac{\pi}{2}$ faţă de tensiune, iar cu timpul dielectricul se încălzeşte. În consecinţă, un condensator real absoarbe şi o putere activă care se transformă în căldură, datorită fenomenelor legate de pierderile în dielectric.

Unghiul $\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ pe care-l face fazorul reprezentativ al curentului în condensator cu normala pe direcţia fazorului tensiunii U se numeşte *unghi de pierderi*.

Ţinînd seama de pierderile de putere în condensator, schema condensatorului real trebuie să cuprindă şi o rezistenţă, montată fie în paralel cu o capacitate (fig. 6.1, *a*) fie în serie cu o capacitate (fig. 6.1, *b*), ambele scheme fiind deopotrivă folosite în schemele electrice în curent alternativ. În ambele scheme impedanţa totală Z şi unghiul φ sau δ trebuie să aibă aceeaşi valoare.

Fig. 6.1. Schemele echivalente ale unui condensator.

a) Schema derivaţie ; *b)* Schema serie

Se deduce imediat :

— pentru schema echivalentă derivaţie

$$G_1 = Y\cos\varphi = Y\sin\delta;$$

$$B_1 = Y\sin\varphi = Y\cos\delta$$

şi deci

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{G_1} = \frac{1}{Y\sin\delta} = \frac{Z}{\sin\delta}, \\ X_1 &= \frac{1}{B_1} = \frac{1}{Y\cos\delta} = \frac{Z}{\cos\delta} \\ \text{sau } X_1 &= \frac{1}{C_1\omega} = \frac{Z}{\cos\delta} \end{aligned}\right\} \quad (6.1)$$

— pentru schema echivalentă serie

$$R_2 = Z\cos\varphi = Z\sin\delta; \quad X_2 = \frac{1}{C_2\omega} = Z\sin\varphi = Z\cos\delta. \quad (6.2)$$

* Vezi 1.5.2.

Împărţind relaţiile (6.1) şi (6.2) între ele rezultă:

$$\frac{R_2}{R_1} = \sin^2 \delta; \quad \frac{C_1}{C_2} = \cos^2 \delta.$$

Întrucît unghiul de pierderi δ este în general foarte mic, rezultă că $\sin^2 \delta$ este foarte apropiat de zero, iar $\cos^2\delta$ este foarte apropiat de unitate, deci

$$R_2 \ll R_1 \text{ şi } C_1 \simeq C_2 = C.$$

Pierderile în dielectric depinzînd de frecvenţă, parametrii R_1, R_2, $C_1 \simeq \simeq C_2 = C$, tg δ, depind şi ei de frecvenţă. În practică, condensatoarele se caracterizează prin capacitatea C şi tangenta unghiului de pierderi tg δ la o frecvenţă dată, ceea ce permite să se determine şi parametrii R_1 sau R_2.

Într-adevăr, ţinînd seama de expresiile din care se deduce valoarea defazajului φ în circuitul serie şi cel derivaţie rezultă:

— pentru schema echivalentă derivaţie

$$\text{tg}\delta = \text{ctg}\varphi = \frac{X_1}{R_1} = \frac{1}{R_1 C_1 \omega} = \frac{1}{R_1 C\omega};$$

— pentru schema echivalentă serie

$$\text{tg}\,\delta = \text{ctg}\varphi = \frac{R_2}{X_2} = R_2\, C_2\, \omega = R_2\, C\omega.$$

Din relaţiile precedente, în care se cunoaşte tg δ şi $C\omega$ se poate deduce rezistenţa R_1 sau R_2, după cum se lucrează cu circuitul echivalent derivaţie sau serie.

Determinarea valorii capacităţii echivalente C şi a mărimii tg δ se face în laborator prin metode exacte de punte (puntea Dr. SCHERING).

6.1.2.3. **Bobinaje; scheme echivalente.** La frecvenţe mici, de exemplu 50 Hz, un bobinaj oarecare (reostat, bobină de reactanţă, bobinaj de transformator sau maşină electrică) poate fi considerat ca avînd o rezistenţă R în serie cu o inductanţă L. La frecvenţe mari sau foarte mari apar fenomene suplimentare care complică schema echivalentă şi anume:

a) Rezistenţa firului de bobinaj R creşte datorită efectului pelicular şi datorită efectului de vecinătate cu celelalte spire *.

b) Între spirele bobinajului există anumite capacităţi, foarte mici, trasate punctat pe figura 6.2,*a*. La frecvenţe mici reactanţa corespunzătoare capacităţilor este mare, curenţii prin aceste capacităţi sînt mici şi deci neglijabili. La frecvenţe mari reactanţa corespunzătoare capacităţilor scade, curenţii prin capacităţi devin importanţi şi nu mai pot fi neglijaţi. Datorită acestor curenţi, derivaţi între spire, curentul nu mai este constant pe întreaga lungime a firului de bobinaj. Fenomenul este foarte complex, dar de obicei se simplifică considerînd că toate capacităţile dintre spire se reduc la o capacitate C, în paralel la bornele bobinajului (fig. 6.2,*b*).

* Vezi 14.1.2.3 şi 14.3.3.

c) Cîmpul electric alternativ dintre spire, corespunzător capacităţilor între spire, produce pierderi de putere activă în dielectric. Pentru a ţine seama de aceste pierderi se introduce o rezistenţă R_s tot în paralel cu bornele bobinajului (fig. 6.2,*b*).

d) Cîmpul magnetic alternativ produs de bobină produce pierderi de putere activă în circuitul magnetic. Aceste pierderi sînt mai mari sau mai mici, depinzînd de construcţia circuitului magnetic şi se ţine seamă de ele prin introducerea unei rezistenţe suplimentare R_0 în serie cu circuitul bobinajului.

Scheme electrice complexe ca cele din figura 6.2 intervin în practică pentru reostatele şi bobinajele folosite în radiotehnică, cum şi în tehnica curenţi-

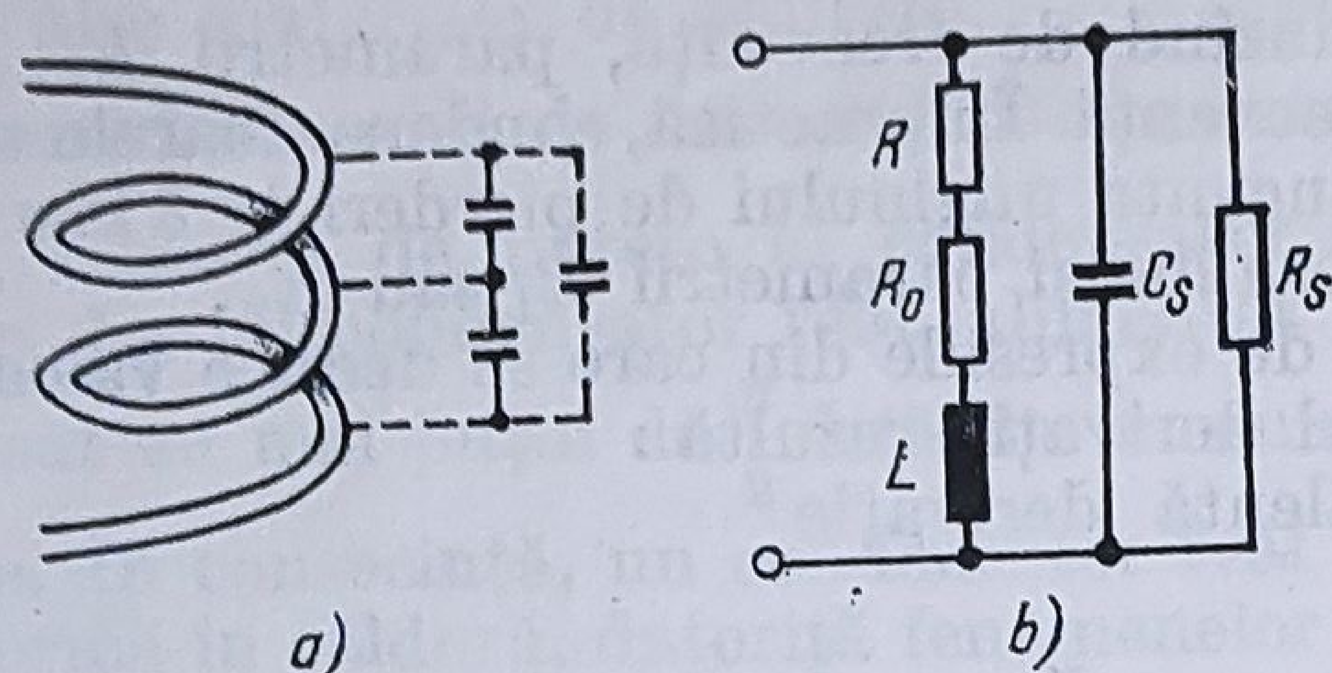


Fig. 6.2. Bobinaj şi schema sa echivalentă.

lor industriali la frecvenţa normală de 50 Hz, în studiul efectului supratensiunilor atmosferice asupra bobinajului maşinilor şi transformatoarelor, deoarece aceste supratensiuni sînt fenomene oscilatorii cu o frecvenţă foarte mare. Mai frecvente sînt însă schemele echivalente care ţin seamă de pierderile în fier*.

6.1.3. REZOLVAREA CIRCUITELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV CU AJUTORUL DIAGRAMELOR FAZORIALE

6.1.3.1. **Circuite serie.** Fie un circuit format dintr-un rezistor de rezistenţă R, o bobină de inductanţă L şi un condensator de capacitate C legate în serie şi căruia i se aplică o tensiune alternativă sinusoidală avînd valoarea efectivă U. Diagrama fazorială a acestui circuit se construieşte** luîndu-se ca origine de fază curentul necunoscut I, căruia i se atribuie o valoare arbitrară. Alegerea curentului necunoscut ca element de bază pentru construirea diagramei fazoriale se face deoarece curentul este elementul comun celor trei părţi constitutive ale circuitului, fazorii reprezentînd tensiunea la bornele diverselor elemente ale circuitului, construindu-se apoi în raport cu acesta mult mai uşor.

Diagrama obţinută este deci o diagramă de tensiuni; scara la care s-a efectuat construcţia respectivă este arbitrară dat fiind valoarea arbitrară ce s-a luat pentru curentul necunoscut. Scara tensiunilor se determină uşor, deoarece se cunoaşte valoarea tensiunii aplicate circuitului şi deci modulul fazorului U reprezentat prin segmentul OC (fig. 6.3); se deduce apoi scara curentului prin împărţirea scării tensiunii cu valoarea rezistenţei R.

Din diagrama fazorială obţinută, se deduce apoi expresia impedanţei circuitului, a curentului şi a defazajului acestuia faţă de tensiunea aplicată la bornele circuitului.

---

* Vezi [10] pag. 152; vezi şi [14] pag. 380.

** Vezi 4.3.4.

În curent alternativ impedanţa joacă un rol analog rezistenţei din curent continuu* ; această analogie nu poate fi făcută şi în cazul mai multor circuite de impedanţă diferită legate în serie. În acest caz impedanţa totală a circuitului este diferită de suma aritmetică a impedanţelor elementelor constitutive.

Fie R_1 şi X_1, R_2 şi X_2, R_3 şi X_3, ..., R_n şi X_n rezistenţele şi reactanţele circuitelor legate în serie. Rezistenţa totală a circuitului este

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

iar reactanţa totală este

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

astfel că impedanţa totală a circuitului este

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2 + \ldots + R_n)^2 + (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2}$$

expresie care este, în general, diferită de

$$\sqrt{R_1^2 + X_1^2} + \sqrt{R_2^2 + X_2^2} + \ldots + \sqrt{R_n^2 + X_n^2}.$$

De asemenea, tensiunea efectivă, la bornele circuitului rezultant nu mai este egală cu suma algebrică a tensiunilor la bornele circuitelor constitutive, ca în curentul continuu. Pentru a arăta aceasta să considerăm un circuit format — spre exemplu — din trei circuite legate în serie (fig. 6.3). Luînd ca origine de fază curentul $\underline{I}$, comun tuturor elementelor legate în serie, tensiunea la bornele circuitului 1 va fi

$$\overline{OA} = \underline{U}_1 = \underline{Z}_1\underline{I},$$

rezultanta căderilor de tensiune $R_1\underline{I}$ şi $X_1\underline{I}$.

Tensiunea la bornele circuitului 2 va fi

$$\overline{AB} = \underline{U}_2 = \underline{Z}_2\underline{I},$$

rezultanta căderilor de tensiune $R_2\underline{I}$ şi $X_2\underline{I}$, iar aceea de la bornele circuitului 3,

$$\overline{BC} = \underline{U}_3 = \underline{Z}_3\,\underline{I}.$$

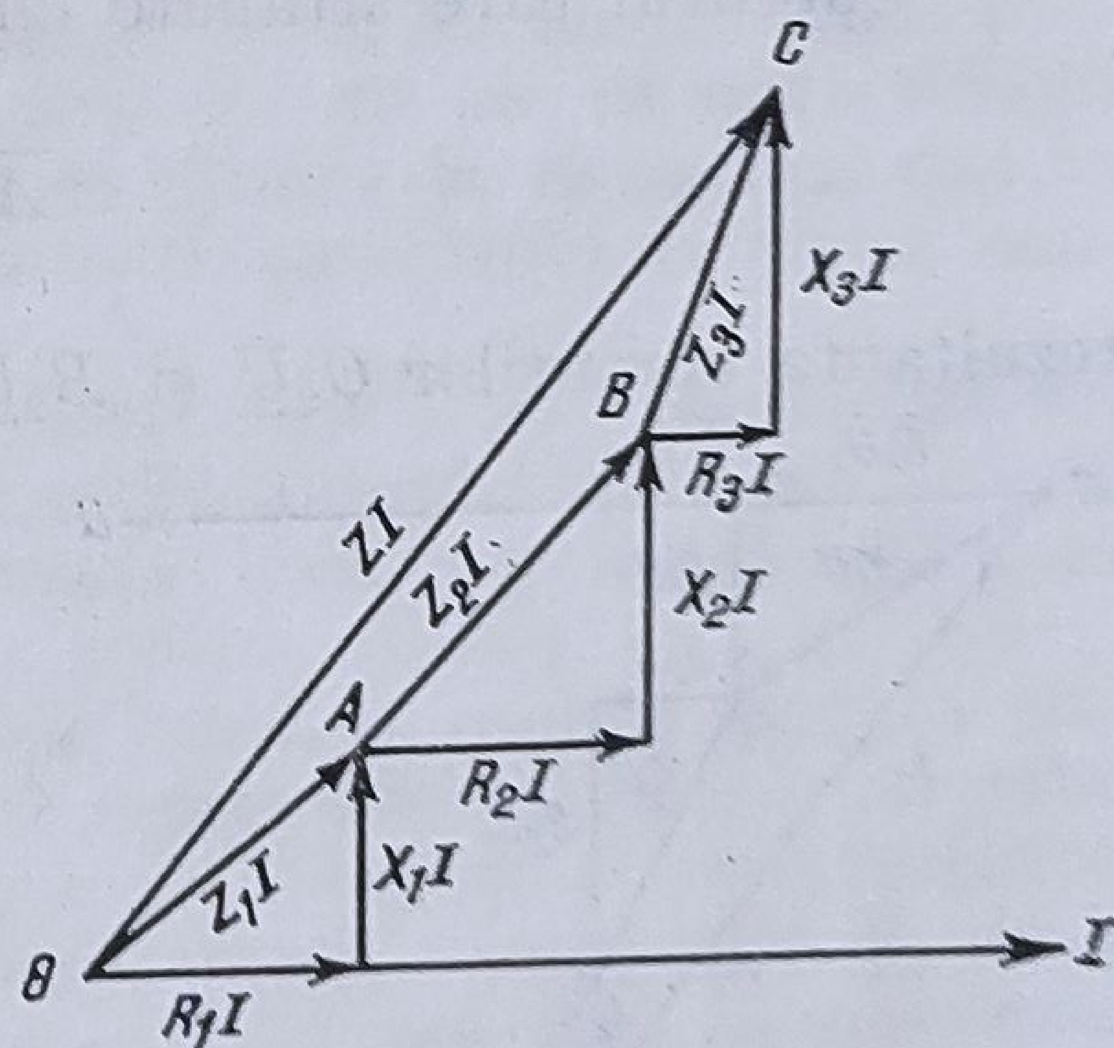


Fig. 6.3. Diagrama fazorială a unui circuit serie.

Tensiunea la bornele întregului circuit este

$$\overline{OC} = \underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I};$$

rezultă din figură

$$\overline{OC} < \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC}$$

* Vezi 4.3.6.3.

şi deci

$$\underline{U} < \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3;$$

împărţind ultima relaţie cu $\underline{I}$, rezultă

$$\underline{Z} < \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3.$$

Cele ce preced pot fi extinse la oricîte circuite s-ar lega în serie pentru a forma circuitul rezultant.

6.1.3.2. **Circuite derivaţie.** Diagrama se realizează* luîndu-se ca origine de fază tensiunea comună la bornele tuturor circuitelor legate în paralel şi rezolvîndu-se apoi, fiecare circuit serie component în parte în raport cu această tensiune; curentul rezultant se obţine apoi sumînd diverşii curenţi parţiali.

Este uşor de văzut, că în cazul circuitelor în derivaţie, admitanţa totală a circuitului complet este mai mică decît suma admitanţelor fiecărui circuit component, iar curentul total absorbit de circuit este mai mic decît suma curenţilor absorbiţi de fiecare circuit în parte. Într-adevăr, fie G_k şi B_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ conductanţele şi susceptanţele echivalente ale fiecărui circuit component în parte. Luînd ca origine de fază tensiunea $\underline{U}$, comună la bornele tuturor elementelor legate în paralel, curentul care străbate circuitul 1 este

$$\overline{OA_1} = \underline{I}_1 = \underline{Y}_1\underline{U},$$

rezultanta curenţilor $G_1\underline{U}$ şi $B_1\underline{U}$.

Curentul care străbate circuitul 2 este

$$\overline{A_1A_2} = \underline{I}_2 = \underline{Y}_2\underline{U},$$

rezultanta curenţilor $G_2\underline{U}$ şi $B_2\underline{U}$; în general, curentul care străbate circuitul k este

$$\overline{A_{k-1}A_k} = \underline{I}_k = \underline{Y}_k\underline{U},$$

rezultanta curenţilor $G_k\underline{U}$ şi $B_k\underline{U}$ (fig. 6.4).

Curentul absorbit de întregul circuit este deci

$$\overline{OA_n} = \underline{I} = \underline{Y}\,\underline{U}$$

şi din figură rezultă

$$\overline{OA_n} < \overline{OA_1} + \overline{A_1A_2} + \ldots + \overline{A_{k-1}A_k} + \\ + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n}.$$

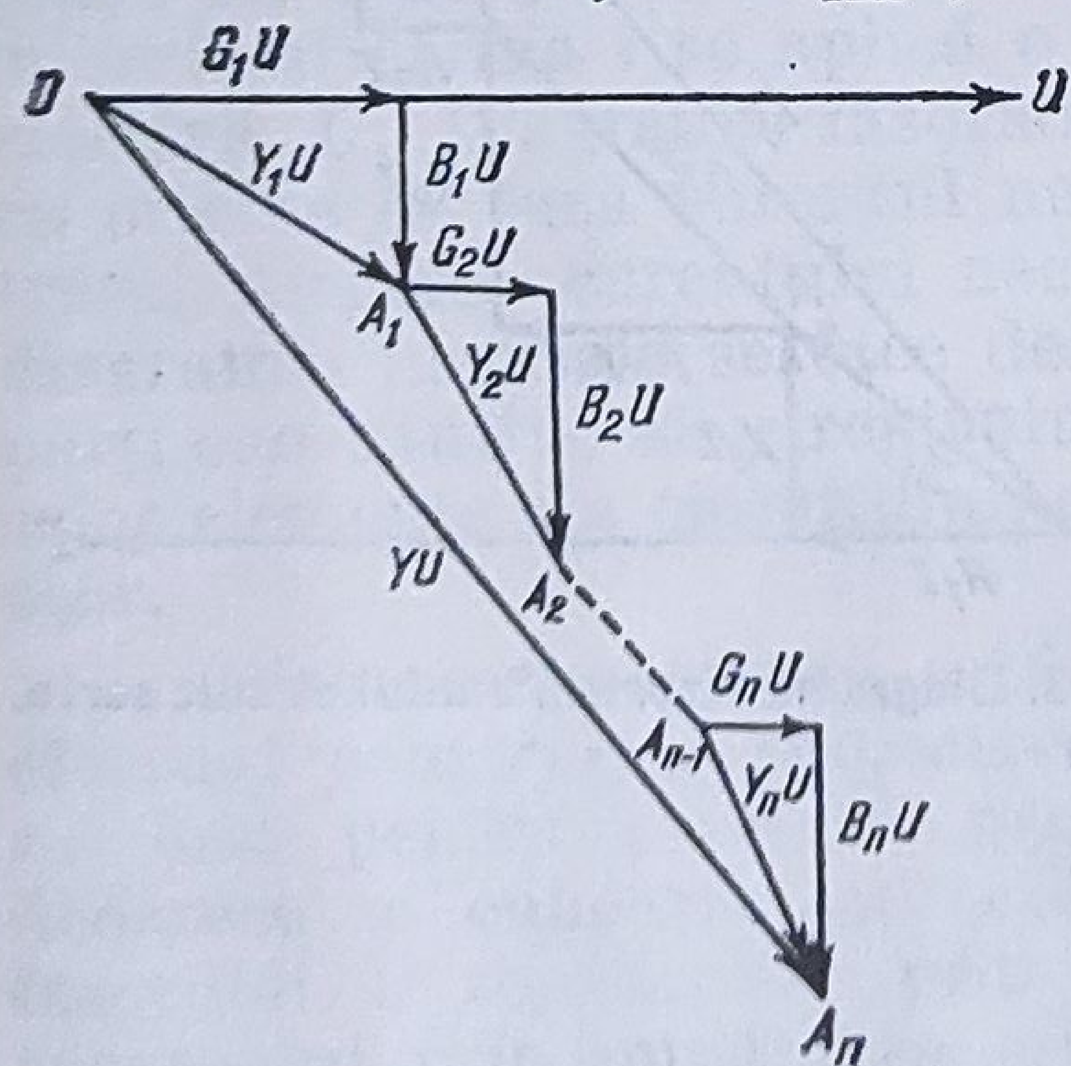


Fig. 6.4. Diagrama fazorială a unui circuit derivaţie.

* Vezi 4.3.5.1

În consecinţă,

$$\underline{I} < \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \ldots + \underline{I}_k + \ldots + \underline{I}_n$$

şi, împărţind această relaţie cu $\underline{U}$ rezultă

$$\underline{Y} < \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \ldots + \underline{Y}_k + \ldots + \underline{Y}_n.$$

6.1.3.3. Circuite mixte. Circuitete mixte sînt circuite compuse din circuite formate din elemente simple — rezistenţe, inductanţe şi capacităţi legate în serie — cuplate între ele într-un mod oarecare în serie şi în paralel. Pentru un asemenea circuit nu se poate da o regulă generală de rezolvare prin metoda diagramelor fazoriale, problema fiind cu atît mai greu de rezolvat, cu cît circui-

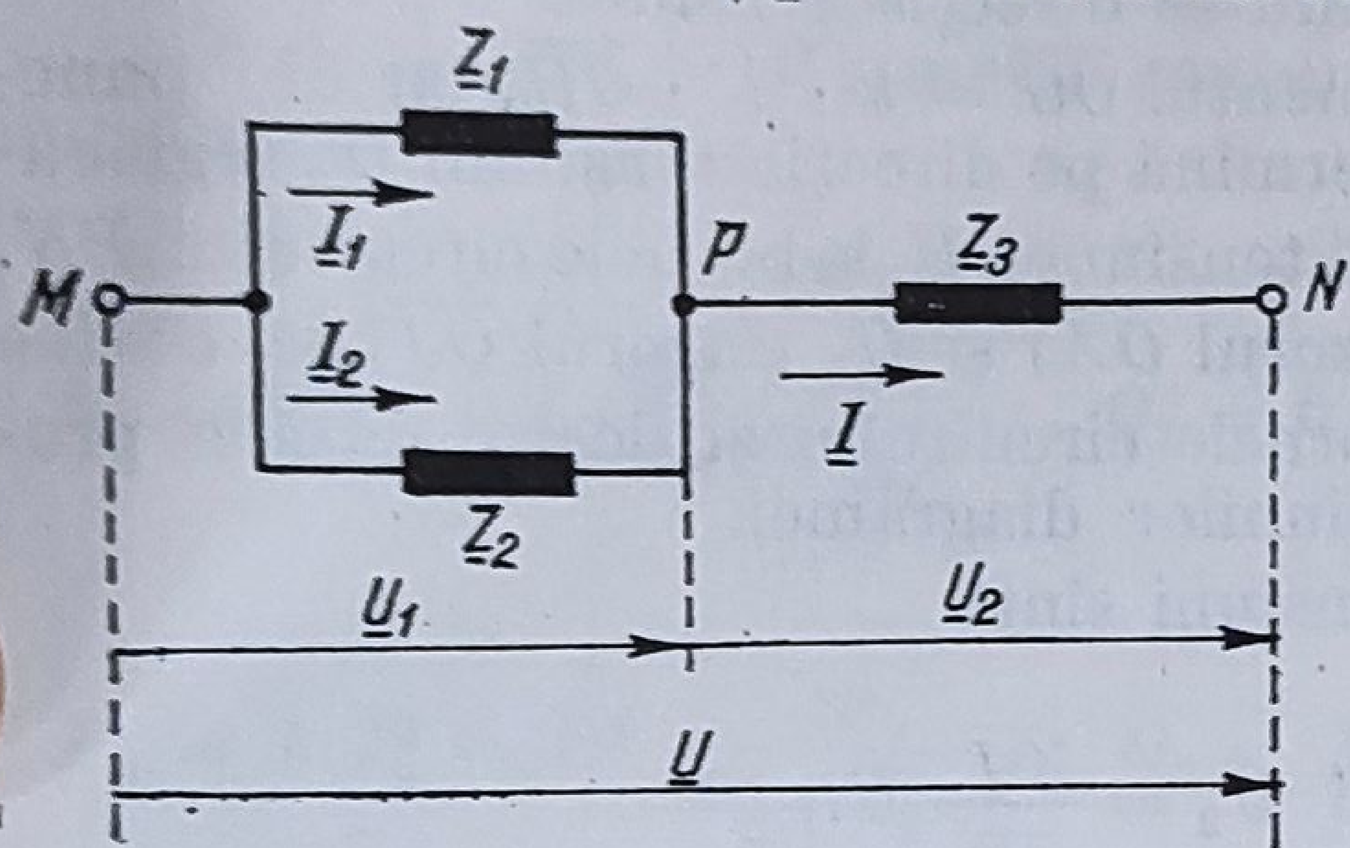


Fig. 6.5. Circuit mixt.

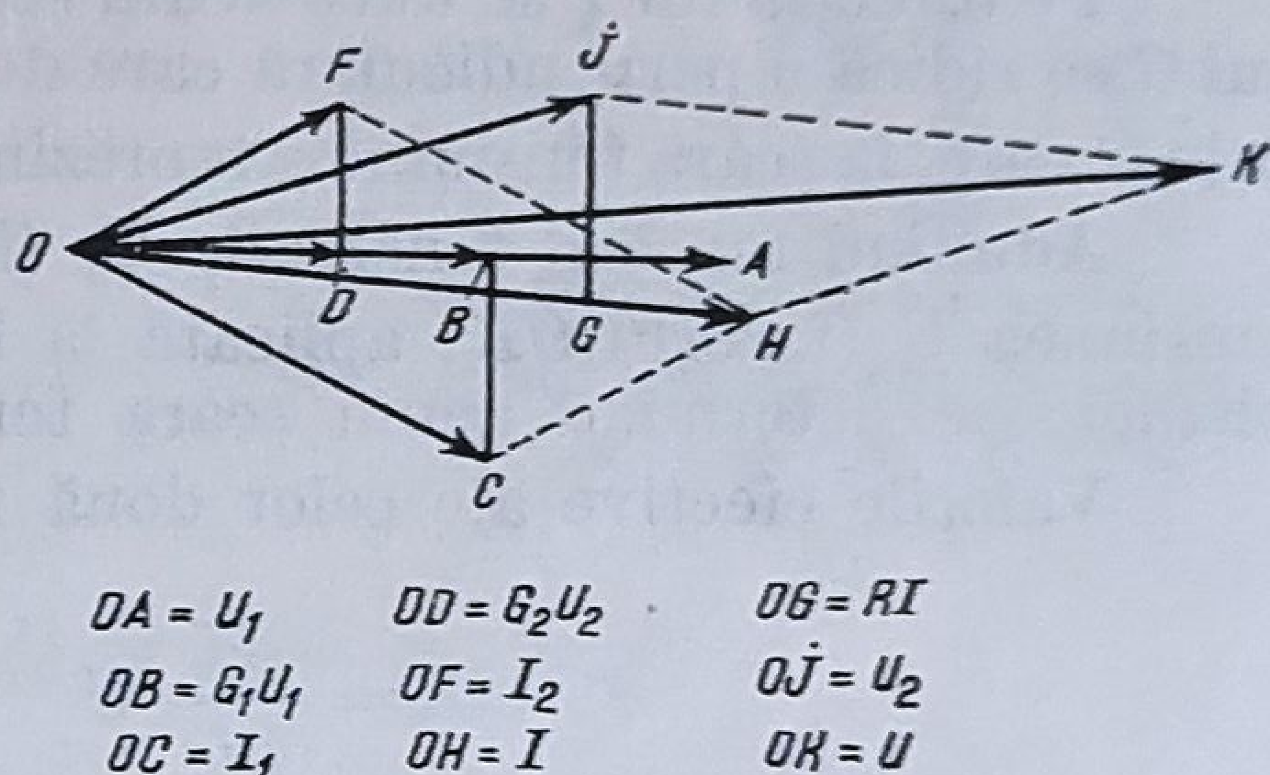


Fig. 6.6. Diagrama fazorială a unui circuit mixt

tul este mai complicat. Ca linie conducătoare în rezolvarea acestui tip de probleme se indică următoarele : se atacă problema de la un element simplu (circuite în paralel în general) care se combină apoi cu un alt element simplu rezolvat în prealabil, şi aşa mai departe pînă se ajunge la elementul dat în problema studiată, în general tensiunea la bornele circuitului complex considerat.

Pentru ilustrarea celor de mai sus, fie circuitul serie — paralel format din impedanţele $\underline{Z}_1$ şi $\underline{Z}_2$ legate în paralel, circuitul astfel format fiind legat în serie cu impedanţa $\underline{Z}$ (fig. 6.5). La bornele MN ale acestui circuit se aplică tensiunea $\underline{U}$; se caută curenţii din diversele ramuri ale acestui circuit.

Rezolvarea acestui circuit nu se poate face luînd ca origine de fază tensiunea $\underline{U}$, cunoscută, deoarece nu se poate şti nimic asupra curentului total absorbit de circuit. În acest caz este indicat a se porni de la elementele în paralel, $\underline{Z}_1$ şi $\underline{Z}_2$, luîndu-se ca origine de fază tensiunea *necunoscută* $\underline{U}_1$ de la bornele MP. Diagrama se trasează deci la o scară arbitrară pînă în momentul în care se va determina pe această diagramă un fazor care reprezintă o dată a problemei; lungimea acestui fazor va determina astfel scara diagramei şi astfel, valorile diverselor mărimi din circuit.

În aceste condiţii, rezolvarea problemei se face după cum urmează (fig. 6.6) :

Luînd tensiunea necunoscută U_1 ca origine de fază şi ca unitate, se desenează la o scară arbitrară oarecare fazorul $\overline{OA}$ reprezentînd această tensiune. Fie a (mm/V) scara aleasă.

Se calculează, cu ajutorul relaţiilor (4.84), conductanţele şi susceptanţele echivalente ale impedanţelor Z_1 şi Z_2; fie G_1, G_2, B_1 şi B_2 aceste mărimi. Se determină apoi argumentele ψ_1 şi ψ_2 ale celor două impedanţe cu ajutorul rela-

ției (4.63); aceste argumente dau direcția curenților $\underline{I}_1$ și $\underline{I}_2$ față de originea de fază aleasă.

Curentul în conductanța G_1 este reprezentat la o nouă scară arbitrară (scara curenților), prin fazorul $\overline{OB} = k \cdot G_1 (\overline{OA})$, a cărui direcție este confundată cu aceea a lui $\underline{U}_1$, k fiind o constantă oarecare, aleasă pentru comoditatea trasării diagramei. Din vîrful B se ridică o perpendiculară pînă întîlnește direcția curentului $\underline{I}_1$. Se determină astfel, la scara aleasă pentru curenți, mărimea curentului $\underline{I}_1$.

Procedînd în același mod, se determină și curentul $\underline{I}_2$.

Se efectuează apoi rezultanta curenților $\underline{I}_1$ și $\underline{I}_2$ obținîndu-se curentul rezultant $\underline{I}$, care străbate impedanța $\underline{Z}$. Se calculează argumentul impedanței $\underline{Z}$ cu ajutorul relației (4.63), determinîndu-se direcția tensiunii $\underline{U}_2$.

Pe direcția lui $\underline{I}$ se duce acum segmentul $\overline{OG} = k \cdot R \cdot \overline{OH}$, iar din punctul G se ridică o perpendiculară care determină pe direcția tensiunii $\underline{U}_2$ segmentul $\overline{OJ}$ care, la scara tensiunilor reprezintă tensiunea $\underline{U}_2$ la bornele circuitului PN.

Adunînd fazorial tensiunile $\underline{U}_1$ (fazorul $\overline{OA}$) și $\underline{U}_2$ (fazorul $\overline{OJ}$) se obține tensiunea $\underline{U}$ (fazorul $\overline{OK}$) aplicată la bornele circuitului și deci o dată a problemei; se determină acum scara tensiunilor diagramei.

Valorile efective ale celor două tensiuni sînt

$$U_1 = \frac{\overline{OA}}{\overline{OK}} U \quad \text{și} \quad U_2 = \frac{\overline{OJ}}{\overline{OK}} U.$$

Pentru a deduce scara curenților avem

$$RI = \frac{\overline{OG}}{\overline{OK}} U \quad \text{și} \quad k \cdot R \cdot \overline{OH} = \overline{OG},$$

de unde rezultă valorile efective ale acestora

$$I = k \frac{\overline{OH}}{\overline{OK}} U, \quad I_1 = k \frac{\overline{OC}}{\overline{OK}} U, \quad I_2 = k \frac{\overline{OF}}{\overline{OK}} U.$$

În ceea ce privește diversele defazaje dintre curenți și tensiuni, acestea se pot măsura direct pe epură, unghiurile fiind independente de scările alese.

6.1.4. REZOLVAREA CIRCUITELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV SINUSOIDAL PRIN METODE ANALITICE, FĂRĂ UTILIZAREA FAZORILOR

6.1.4.1. Metoda separației puterilor (Metoda Boucherot). În unele cazuri, *la rețele compuse din circuite derivație, necuplate inductiv*, se cunosc sau se pot determina ușor puterile active și reactive consumate de fiecare din circuitele rețelei. Fie $P_1, P_2, \ldots, P_n$ puterile active și $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ puterile reactive. Ținînd seamă de principiul conservării puterilor active și reactive, se deduce puterea activă și cea reactivă furnizată de sursă

$$\left.\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + \ldots + P_n = \Sigma P_i, \\ Q &= Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = \Sigma Q_i. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

În consecință, puterea aparentă, curentul și factorul de putere al sursei au valorile

$$S = \sqrt{P^2+Q^2}; \quad I = \frac{S}{U}; \quad \cos\varphi = \frac{P}{S}, \qquad (6.4)$$

în care P și Q au semnificațiile din relațiile (6.3).

Ca exemplu de aplicație a metodei fie o rețea formată din trei impedanța Z_1, Z_2, Z_3, montate în derivație (fig. 6.7), în care Z_1 reprezintă o rezistență R_1, Z_2 reprezintă o rezistență R_2 în serie cu o inductanță L_2, iar Z_3 reprezintă o capacitate C_3, alimentate cu tensiunea $\underline{U}$.

Puterile active și reactive consumate de aceste impedanțe sînt :

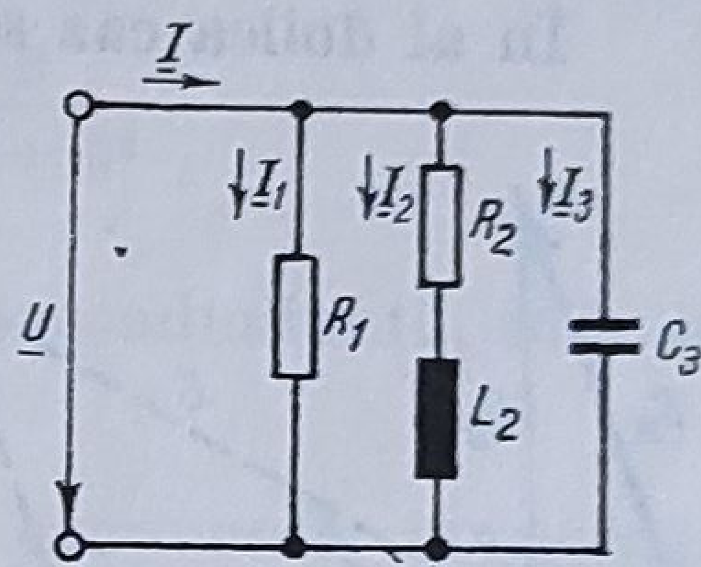


Fig. 6.7. Exemplu de rețea cu circuite în derivație.

$$P_1 = R_1 I_1^2 = R_1 \frac{U^2}{R_1^2} = \frac{U^2}{R_1}; \qquad Q_1 = 0;$$

$$P_2 = R_2 I_2^2 = R^2 \frac{U^2}{R_2^2 + L_2^2\omega^2}; \quad Q_2 = X_2 I_2^2 = L_2\omega \frac{U^2}{R_2^2 + L_2^2\omega^2};$$

$$P_3 = 0; \qquad Q_3 = X_3 I_3^2 = -\frac{1}{C_3\omega} U^2 C_3^2 \omega^2 = -U^2 C_3 \omega.$$

Puterea activă și reactivă la sursă vor fi

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = U^2\left[\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2^2 + L_2^2\omega^2}\right],$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = U^2\left[\frac{L_2\omega}{R_2^2 + L_2^2\omega^2} - C_3\omega\right].$$

Din ultimele două relații se deduce puterea aparentă S, curentul total I și unghiul φ de defazaj dintre curent și tensiune :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U^2\sqrt{\left[\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2^2 + L_2^2\omega^2}\right]^2 + \left[\frac{L_2\omega}{R_2^2 + L_2^2\omega^2} - C_3\omega\right]^2}$$

$$I = \frac{S}{U} = U\sqrt{\left[\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2^2 + L_2^2\omega^2}\right]^2 + \left[\frac{L_2\omega}{R_2^2 + L_2^2\omega^2} - C_3\omega\right]^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Q}{P} = \frac{\dfrac{L_2\omega}{R_2^2 + L_2^2\omega^2} - C_3\omega}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{R_2}{R_2^2 + L_2^2\omega^2}}$$

În unele cazuri, puterea consumată de receptoarele derivaţie este cunoscută prin puterea aparentă S_i şi valoarea factorului de putere cos φ_i. În acest caz problema se rezolvă fie grafic, fie analitic.

În primul caz, se întocmeşte o diagramă vectorială a puterilor aparente (fig. 6.8). Ţinînd seama că puterile aparente se conservă vectorial, se deduce mai întîi puterea aparentă S furnizată de sursă, prin însumarea vectorilor S_1, $S_2, \ldots, S_n$. Pe acest grafic rezultă puterea activă P furnizată de sursă, puterea reactivă Q şi defazajul φ sau factorul de putere $\cos\varphi$, după care se folosesc ultimele două relaţii (6.4).

În al doilea caz se deduc puterile active şi reactive ale receptoarelor, cu relaţiile $P_i = S_i \cos\varphi_i$, $Q_i = S_i \sin\varphi_i$, după care se aplică relaţiile (6.3) şi (6.4).

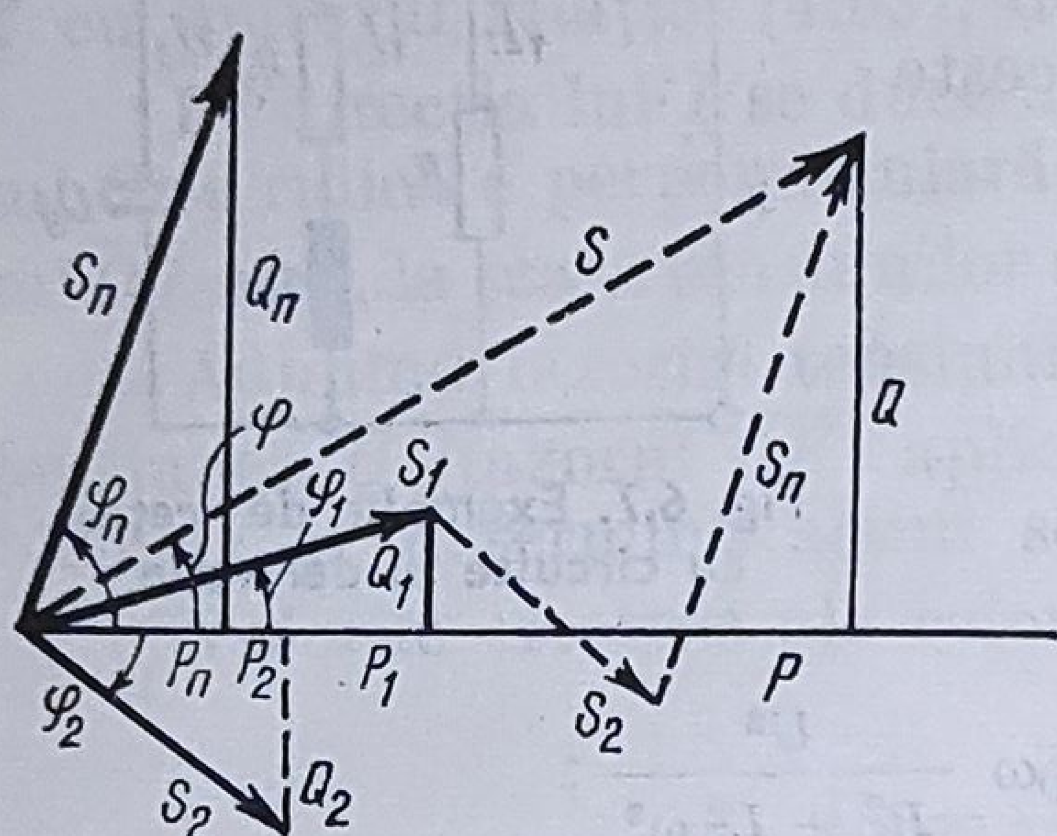


Fig. 6.8. Diagrama vectorială a puterilor aparente.

În alte cazuri, puterea consumată de receptoare este cunoscută prin puterea activă P_i şi factorul de putere cos φ_i. În acest caz se deduce $\mathrm{tg}\varphi_i$ şi apoi puterile reactive $Q_i = P_i \,\mathrm{tg}\varphi_i$, după care se aplică relaţiile (6.3) şi (6.4).

Ca aplicaţie numerică să considerăm două motoare, de putere 6 kW şi 10 kW, cu randament 0,75 respectiv 0,833 şi factor de putere $\cos\varphi_1 = 0{,}707$ şi $\cos\varphi_2 = 0{,}8$ montate în paralel la o reţea de 220 V. Puterile absorbite de la reţea sînt $P_1 = 6/0{,}75 = 8$ kW, $P_2 = 10/0{,}833 = 12$ kW. Pentru primul motor $\sin\varphi_1 = 0{,}707$; $\mathrm{tg}\varphi_1 = 1$, iar pentru al doilea $\sin\varphi_2 = 0{,}6$; $\mathrm{tg}\varphi_2 = 0{,}75$. Puterile reactive absorbite de la reţea sînt $Q_1 = P_1 \,\mathrm{tg}\varphi_1 = 8 \cdot 1 = 8$ kVAR, $Q_2 = P_2 \,\mathrm{tg}\,\varphi_2 = 12 \cdot 0{,}75 = 9$ kVAR. Reţeaua furnizează în total puterea activă $P = P_1 + P_2 = 8 + 12 = 20$ kW şi puterea reactivă $Q = Q_1 + Q_2 = 8 + 9 = 17$ kVAR. Puterea aparentă furnizată este $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{20^2 + 17^2} = 26{,}2$ kVA, curentul furnizat este $I = S/U = 26\,200/220 = 119$ A, iar factorul de putere rezultant este $\cos\varphi = P/S = 20/26{,}2 = 0{,}764$.

6.1.4.2. **Metoda separaţiei elementelor active şi reactive ale circuitului.** Această metodă este de fapt o metodă de transfigurare care urmăreşte să reducă reţeaua la o singură impedanţă, caracterizată prin rezistenţa şi reactanţa echivalentă sau conductanţa şi susceptanţa echivalentă. Transfigurarea se bazează pe următoarele reguli:

1. Mai multe impedanţe Z_1 (R_1, X_1), Z_2 $(R_2, X_2), \ldots, Z_n(R_n, X_n)$ în serie, se înlocuiesc cu o impedanţă care are rezistenţa R şi reactanţa X date de relaţiile

$$R = \Sigma R_i = R_1 + R_2 + \ldots + R_n; \; X = \Sigma X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

2. Mai multe admitanţe Y_1 (G_1, B_1), Y_2 $(G_2, B_2), \ldots, Y_n$ (G_n, B_n) montate în paralel se înlocuiesc cu o admitanţă care are conductanţa G şi susceptanţa B date de relaţiile

$$G = \Sigma G_i = G_1 + G_2 + \ldots + G_n; \; B = \Sigma B_i = B_1 + B_2 + \ldots + B_n.$$

3. Unei impedanțe $Z(R, X)$ îi corespunde o admitanță Y (G, B) echivalentă cu conductanța G și susceptanța B date de relațiile

$$G = \frac{R}{Z^2} = \frac{R}{R^2 + X^2}; \quad B = \frac{X}{Z^2} = \frac{X}{R^2 + X^2}.$$

4. Unei admitanțe $Y(G, B)$ îi corespunde o impedanță Z (R, X) echivalentă cu rezistența R și reactanța X date de relațiile

$$R = \frac{G}{Y^2} = \frac{G}{G^2 + B^2}; \quad X = \frac{B}{Y^2} = \frac{B}{G^2 + B^2}.$$

După reducerea rețelei la o singură impedanță sau admitanță, se aplică una din metodele cunoscute de rezolvare.

6.1.4.3. **Metoda vectorială.** Metoda geometrică examinată în paragraful 6.1.3 a scos în evidență caracterul de vector pe care îl poate căpăta reprezentarea tensiunilor și curenților periodici alternativi sinusoidali. Aceasta a condus la elaborarea unei metode de calcul a circuitelor de curent alternativ, bazată pe calculul vectorial.

Fazorii reprezentativi ai tensiunilor și curenților alternativi sinusoidali nefiind vectori în sensul acestei noțiuni, din întreg calculul vectorial nu se vor putea utiliza decît anumite elemente, care vor putea soluționa un număr de probleme cu un caracter particular.

Fie un vector oarecare, $\overline{OA}$, care să reprezinte o tensiune sau un curent (fig. 6.9). Raportîndu-l la un sistem de referință în plan, Ox, Oy, se obțin cele două proiecții ale sale $\overline{OB} = A'$ și $\overline{OC} = A''$. Dacă $\bar{x}$ și $\bar{y}$ sînt versorii celor două axe, se poate scrie

$$\bar{A} = \bar{x}A' + \bar{y}A''.$$

Să considerăm un circuit format din două receptoare legate în serie și străbătute de curentul I, raportat la sistemul de referință Oxy. Fie $\overline{U}_1$ (U_1', U_1'') și $\overline{U}_2$ (U_2', U_2'') tensiunea la bornele celor două receptoare. Se poate scrie

$$\overline{U}_1 = \bar{x}U_1' + \bar{y}U_1''; \quad \overline{U}_2 = \bar{x}U_2' + \bar{y}U_2''.$$

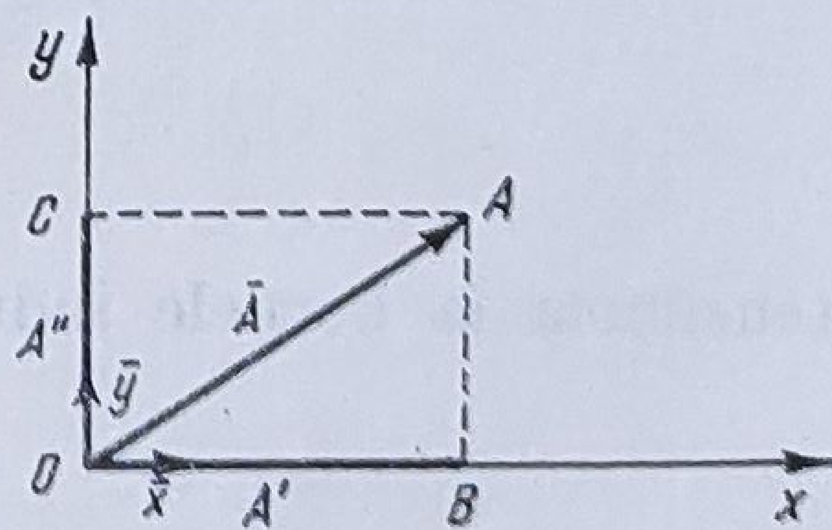


Fig. 6.9. Reprezentarea vectorială a unei mărimi de curent sau de tensiune.

Tensiunea totală la bornele circuitului considerat va fi $\overline{U} = \overline{U}_1 + \overline{U}_2 = \bar{x}U_1' + \bar{y}\ U_1'' + \bar{x}\ U_2' + \bar{y}\ U_2'' = \bar{x}(U_1' + U_2') + \bar{y}\ (U_1'' + U_2'')$.

Fie tensiunea

$$u = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha),$$

reprezentată prin vectorul

$$\overline{U} = \bar{x}U_1 + \bar{y}U_2$$

și curentul

$$i = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \beta),$$

reprezentat prin vectorul

$$\bar{I} = \bar{x}\ I_1 + \bar{y}\ I_2.$$

Făcînd produsul scalar între aceşti doi vectori se obţine

$$\bar{U} \cdot \bar{I} = (\bar{x}\ U_1 + \bar{y}\ U_2)(\bar{x}\ I_1 + \bar{y}\ I_2) = U_1 I_1 + U_2 I_2, \tag{6.5}$$

o mărime scalară care reprezintă *puterea activă* absorbită de un circuit sau produsă de o sursă. Într-adevăr, ţinînd seama că

$$U_1 = U \cos \alpha,\ \ U_2 = U \sin \alpha,\ \ I_1 = I \cos \beta,\ \ I_2 = I \sin \beta$$

şi punînd $\alpha - \beta = \varphi$, relaţia (6.5) devine

$$\bar{U} \cdot \bar{I} = UI \cos \alpha \cos \beta + UI \sin \alpha \sin \beta = UI \cos \varphi = P.$$

Făcînd produsul vectorial între aceiaşi vectori se obţine

$$\bar{I} \times \bar{U} = (\bar{x}\ I_1 + \bar{y}\ I_2) \times (\bar{x}\ U_1 + \bar{y}\ U_2) = (U_2 I_1 - U_1 U_2)\bar{n}, \tag{6.6}$$

o mărime vectorială a cărui modul reprezintă *puterea reactivă* absorbită de circuit sau produsă de sursă. Într-adevăr, în acest caz avem :

$$\bar{I} \times \bar{U} = \bar{n}\ (UI \sin \alpha \cos \beta - UI \sin \beta \cos \alpha) = \bar{n}.\ UI \sin \varphi = \bar{n} \cdot Q,$$

în care $\bar{n} = \bar{x} \times \bar{y}$.

Pentru a vedea cum se aplică această metodă la studiul circuitelor electrice, să examinăm următoarele probleme simple :

1. Fie un circuit format dintr-o rezistenţă R şi o reactanţă X legate în serie şi străbătute de curentul $\bar{I} = \bar{x} I$; curentul este astfel luat ca origine de fază.

Tensiunea la bornele rezistenţei este

$$\bar{U}_1 = \bar{x}\ RI\ ;$$

tensiunea la bornele inductanţei este

$$\bar{U}_2 = \bar{y}\ XI\ ;$$

tensiunea totală, la bornele circuitului va fi

$$\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 = \bar{x}\ RI + \bar{y}\ XI$$

a cărei valoare efectivă — egală cu modulul vectorului — este

$$U = I\ \sqrt{R^2 + X^2}$$

şi care are argumentul

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{X}{R}.$$

2. Fie acum un circuit format din impedanţa $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2}$ legată în paralel cu impedanţa $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2}$, căruia i se aplică la borne tensiunea

$$\overline{U} = \bar{x}U,$$

luată ca origine de fază.

Curentul în impedanţa Z_1 este

$$\bar{I}_1 = \bar{x}\frac{U}{Z_1}\cos\varphi_1 + \bar{y}\frac{U}{Z_1}\sin\varphi_1 = \bar{x}\frac{R_1 U}{Z_1^2} + \bar{y}\frac{X_1 U}{Z_1^2}$$

căci $\text{tg}\,\varphi_1 = \frac{X_1}{R_1}$ şi deci $\cos\varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1}$ şi $\sin\varphi_1 = \frac{X_1}{Z_1}$.

Curentul din impedanţa Z_2 este, în mod analog,

$$\bar{I}_2 = \bar{x}\frac{R_2 U}{Z_2^2} + \bar{y}\frac{X_2 U}{Z_2^2}.$$

Curentul total absorbit de circuit este deci

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{x}\left(\frac{R_1}{Z_1^2} + \frac{R_2}{Z_2^2}\right)U + \bar{y}\left(\frac{X_1}{Z_2^2} + \frac{X_2}{Z_2^2}\right)U,$$

avînd valoarea efectivă

$$|\bar{I}| = U\sqrt{\left(\frac{R_1}{Z_1^2} + \frac{R_2}{Z_2^2}\right)^2 + \left(\frac{X_1}{Z_2^2} + \frac{X_2}{Z_2^2}\right)^2}$$

şi defazajul faţă de tensiune

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{X_1 Z_2^2 + X_2 Z_1^2}{R_1 Z_2^2 + R_2 Z_1^2}.$$

6.2. METODE GENERALE DE CALCUL FOLOSIND FAZORII

6.2.1. GENERALITĂŢI

Metodele de calcul indicate în paragraful 6.1 au un domeniu de aplicaţie restrîns, ele utilizîndu-se în general numai în cazul circuitelor simple.

Circuitele electrice complexe se rezolvă folosind cele două teoreme ale lui KIRCHHOFF sau teoreme derivate din acestea, exprimate cu ajutorul fazorilor.

Ecuaţiile matematice de rezolvare se obţin scriind ecuaţiile reţelei pentru valorile instantanee ale mărimilor electrice, după care se trece de la valori instantanee la vectorii asociaţi, exprimaţi în cantităţi complexe, conform principiilor indicate la paragraful 4.2.4.7.

Ecuaţiile reţelei pot fi scrise şi direct în cantităţi complexe. Sub acest aspect, rezolvarea reţelelor de curent alternativ sinusoidal, în regim permanent, nu se deosebeşte formal de rezolvarea reţelelor de curent continuu decît prin instrumentul de calcul folosit.

Scrierea ecuaţiilor unei reţele electrice necesită însă introducerea unei anumite convenţii în ceea ce priveşte sensul forţei electromotoare a diverselor surse şi sensul curentului alternativ.

Trebuie observat, că în curent alternativ, curentul îşi schimbă sensul de circulaţie de două ori pe perioadă. Prin urmare sensul pozitiv poate fi ales oricare, fără a mai fi necesară corectarea lui, după determinarea valorilor numerice. Este totuşi necesar să se definească sensul curentului electric în raport cu o origine de fază întrucît alegerea unui sens pozitiv sau al altuia influenţează defazajul, rotind faza mărimii în cauză cu π. Să presupunem că într-o latură a unei reţele există o forţă electromotoare $\underline{E}$ şi pentru un sens pozitiv AB ales pentru curent, curentul este reprezentat prin fazorul $\underline{I}$ (fig. 6.10). Dacă se consideră pozitiv sensul contrar BA, curentul va fi reprezentat prin fazorul $\underline{I}'$ egal, dar în opoziţia de fază cu $\underline{I}$; în primul caz curentul este defazat cu unghiul α înaintea lui $\underline{E}$, în ultimul caz cu unghiul $\pi - \alpha$ în urma lui $\underline{E}$.

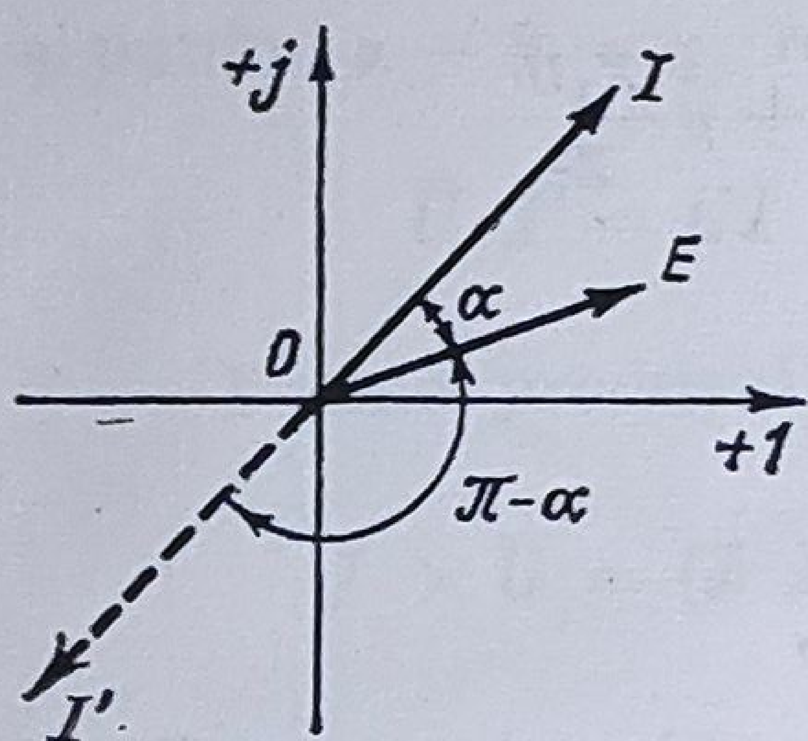


Fig. 6.10. Influenţa alegerii sensului curentului electric alternati.

În general, sensul care se atribuie curentului alternativ, este sensul de curgere a energiei electrice corespunzătoare şi anume, se consideră sensul pozitiv sensul socotit de la sursă către receptor. Dacă din calcul iese pentru curent un sens contrar acelui fixat arbitrar, înseamnă că şi sensul de curgere a energiei este contrar celui presupus.

Metoda de calcul cu fazori conduce mai repede la rezultat şi poate fi aplicată în orice reţea — oricît de complicată ar fi ea — în timp ce metodele arătate anterior sînt mai laborioase şi pot fi aplicate numai în cazuri simple. Are însă dezavantajul că mecanizează în mare măsură calculul, pierzînd oarecum legătura cu fenomenele fizice; din acest motiv se recomandă, cel puţin pentru început, să se întocmească şi diagrama vectorială a reţelei, chiar dacă acest lucru nu este direct util rezolvării.

Ţinînd seama de cele ce preced, întreaga teorie a reţelelor electrice de curent continuu şi metodele corespunzătoare de studiu, expuse în subcapitolul 2.3 pot fi transpuse în reţelele electrice de curent alternativ dacă rezistenţele, respectiv conductanţele, circuitului se înlocuiesc cu impedanţele complexe, respectiv admitanţele complexe, corespunzătoare din circuitul electric în curent alternativ, iar curenţilor şi tensiunilor electrice alternative instantanee li se asociază fazorii respectivi.

Apar unele diferenţe datorite inductanţelor mutuale, care nu există în reţelele electrice de curent continuu şi care introduc în laturile respective ale reţelei anumite forţe electromotoare suplimentare.

În concluzie, în cele ce urmează se va arăta modul cum se aplică teoria reţelelor electrice stabilită pentru curentul continuu în cazul reţelelor de curent alternativ, fără a se repeta cele arătate în subcapitolul 2.3, indicîndu-se numai particularităţile corespunzătoare.

6.2.2. STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV CU AJUTORUL TEOREMELOR LUI KIRCHHOFF ȘI A METODELOR DERIVATE DIN ACESTEA

6.2.2.1. **Datele fundamentale ale unei rețele electrice.** Să considerăm o rețea electrică formată din L elemente care leagă între ele N noduri. Între bornele sale A și B un element oarecare $j (j = 1, 2, \ldots, L)$ este constituit, în cazul cel mai general, dintr-un generator de forță electromotoare $\underline{E}j$, fără impedanță interioară, legat în serie cu o impedanță $\underline{Z}_{jj}$, totul șuntat cu un injector de curent $\underline{J}_j$ fără admitanță interioară (fig. 6.11).

Valoarea acestor mărimi poate fi oarecare, chiar nulă, simultan sau nu. Două laturi oarecare j și k pot fi cuplate electromagnetic; ele au astfel impedanțe mutuale $\underline{Z}_{jk}$ și $\underline{Z}_{kj}$. Dacă $\underline{Z}_{jk} = \underline{Z}_{kj}$ cuplajul este simetric; el este asimetric dacă $\underline{Z}_{jk} \neq \neq \underline{Z}_{kj}$ și nul dacă $\underline{Z}_{jk} = \underline{Z}_{kj} = 0$.

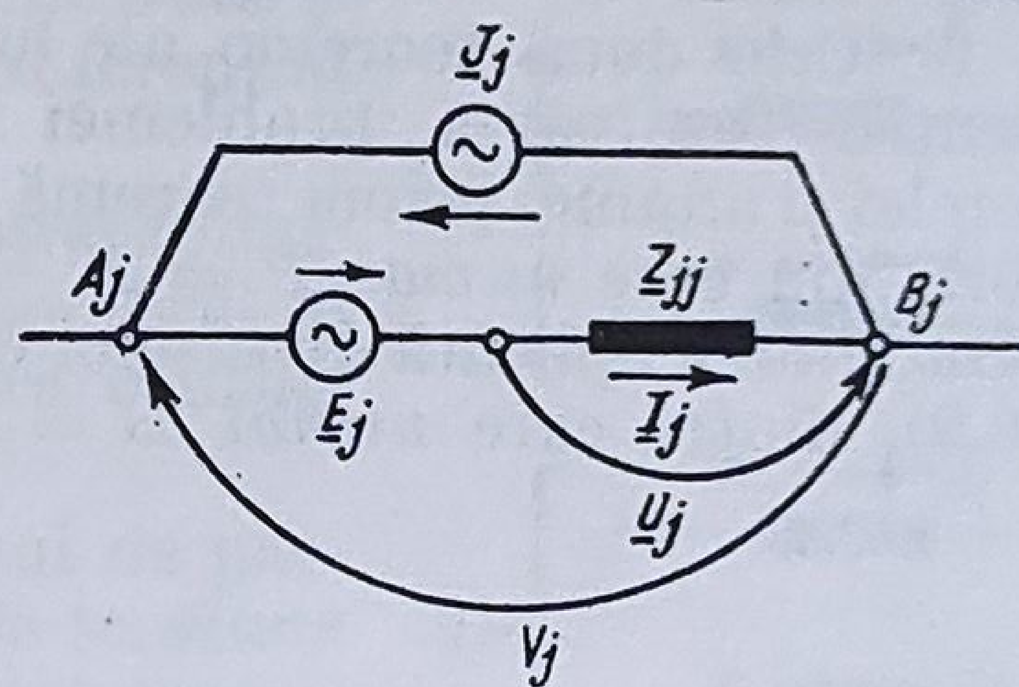


Fig. 6.11. Element general de rețea.

Ca și în curentul continuu, o rețea este complet determinată în curent alternativ dacă se dă:

1. O schemă în care să se arate cum sînt legate între ele diversele elemente;
2. Totalitatea surselor din rețea, poziția lor în rețea, modulul și defazajul lor față de o origine de fază comună, indiferent dacă sînt surse de tensiune sau de curent;
3. Totalitatea receptoarelor din rețea, valoarea impedanțelor lor echivalente și poziția lor;
4. Totalitatea impedanțelor proprii și mutuale ale diverselor elemente de legătură dintre sursă și receptoare.

Trebuie observat, că odată aleasă, în mod arbitrar, o origine de fază, toate elementele rețelei trebuiesc raportate la aceasta.

Numerele topologice L, N și S sînt de asemenea date fundamentale ale unei rețele electrice și reamintim caracterul lor arbitrar*.

În ceea ce privește reprezentarea sensului forțelor electromotoare, tensiunilor și curenților acesta este pur convențional și pe schemele electrice de curent alternativ se adoptă aceiași convenție ca pentru curentul continuu**, aceasta întrucît, utilizînd fazorii, modul de lucru este același. Trebuie observat, că *în curent alternativ sensul unui curent poate fi dat atît de modulul lui cît și de argumentul pe care îl are față de originea de fază*, întrucît

$$-I \underline{|\varphi} = I \underline{|\pi + \varphi}$$

6.2.2.2. **Metoda teoremelor lui Kirchhoff.** Cele două teoreme ale lui Kirchhoff*** pot fi transcrise cu ajutorul fazorilor sub una din forme

$$\Sigma \underline{I}_i = \Sigma \underline{I}_e$$

sau

$$\Sigma \underline{I} = 0 \tag{6.7}$$

pentru prima teoremă și

$$\Sigma \underline{E} = \Sigma \underline{Z}\, \underline{I} \tag{6.8}$$

* Vezi 2.3.1.4.

** Vezi 2.3.2.1 și 2.3.2.2.

*** Vezi 2.3.4.

sau

$$\Sigma(\underline{E} - \underline{Z}\,\underline{I}) = \Sigma(\underline{V}_j - \underline{V}_k) = \Sigma\underline{U} = 0 \qquad (6.9)$$

pentru cea de a doua teoremă.

Toate lemele stabilite pentru curenţii continui sînt valabile şi în cazul curenţilor alternativi. Trebuie observat de asemenea că relaţiile (6.7) la (6.9) *sînt valabile numai pentru mărimile fazoriale* : ele nu sînt valabile pentru modulele acestor mărimi, ceea ce se poate arăta imediat.

Calculul unei reţele electrice constă în determinarea circulaţiei curenţilor — respectiv energiei — şi în determinarea căderilor de tensiune în diversele ramuri ale acesteia.

Cele două teoreme ale lui KIRCHHOFF dau numărul suficient de ecuaţii pentru rezolvarea problemei de găsire a curenţilor în diversele laturi ale reţelei şi anume, prima teoremă aplicată la cele N noduri dă N ecuaţii de forma (6.7) din care *numai* $P = N - S$ ecuaţii *sînt distincte;* a doua teoremă a lui KIRCHHOFF aplicată diverselor circuite închise ale reţelei dă B ecuaţii de forma (6.9), dintre care *numai* $B = L - N + S$ *sînt distincte.* Se obţin astfel

$$P + B = L$$

ecuaţii distincte, cu ajutorul cărora se determină cei L curenţi necunoscuţi, din laturile reţelei.

Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul de ecuaţii obţinut să fie distinct este ca ecuaţiile ce se scriu prin aplicarea relaţiilor (6.8) să se obţină prin parcurgerea tuturor laturilor reţelei cel puţin o dată, parcurgîndu-se deci bucle fundamentale.

În cazul reţelelor în care există cuplaje inductive, trebuie să se ţină seama şi de forţele electromotoare induse în laturi prin inducţie mutuală. Presupunînd că o latură k, parcursă de curentul i_k, este cuplată inductiv cu o latură l, parcursă de curentul i_l, inductanţa mutuală fiind M_{kl}, în latura k se va induce o forţă electromotoare $e_{kl} = -M_{kl}\frac{di_l}{dt}$, a cărei expresie complexă este

$$\underline{E}_{kl} = -\mathrm{j}\,\omega\,M_{kl}\,\underline{I}_l = -\mathrm{j}\,X_{kl}\,\underline{I}_l.$$

Termenul $X_{kl} = \omega M_{kl}$ se numeşte *reactanţa mutuală,* iar $\mathrm{j}X_{kl} = \mathrm{j}\,\omega M_{kl} = \underline{Z}_{kl}$ se numeşte *impedanţa mutuală* a laturii l faţă de latura k.

În consecinţă

$$\underline{E}_{kl} = -\underline{Z}_{kl}\,\underline{I}_l.$$

În cazul cînd inductanţa mutuală M_{kl} este egală cu inductanţa M_{lk}, indicii l şi k nu mai sînt necesari $M_{lk} = M_{kl} = M$, $X_{lk} = X_{kl} = X_m$; $\underline{Z}_{kl} = \underline{Z}_m = \mathrm{j}\omega M = \mathrm{j}X_m$, deci forţa electromotoare de inducţie mutuală se scrie

$$\underline{E}_m = -\mathrm{j}\,X_m\,\underline{I}_l = -\underline{Z}_m\,\underline{I}_l.$$

Forţele electromotoare de inducţie mutuală $\underline{E}_{kl}$ sau $\underline{E}_m$ trebuie adăugate primului termen din relaţia (6.8). Aceste forţe electromotoare pot fi privite

ca fiind căderi de tensiune produse de curentul $\underline{I}_l$ în latura k. Valoarea acestor căderi de tensiune este

$$\underline{U}_m = -\underline{E}_m = \underline{Z}_m \underline{I}_l .$$

Căderile de tensiune $\underline{U}_m$ trebuie adăugate în al doilea membru din relația (6.8).

Cuplajele inductive pot fi adiționale (fluxul propriu are același sens cu fluxul indus) sau diferențiale (fluxul propriu are sens contrar cu fluxul indus).

Pentru a identifica modul în care sînt făcute cuplajele, se notează pe scheme, prin steluțe, bornele polarizate ale inductanțelor; dacă ambii curenți intră sau ies simultan prin bornele polarizate, cuplajul este adițional (fig. 6.12, *a*); dacă un curent intră prin borna polarizată și celălalt prin borna nepolarizată, cuplajul este diferențial (fig. 6.12, *b*).

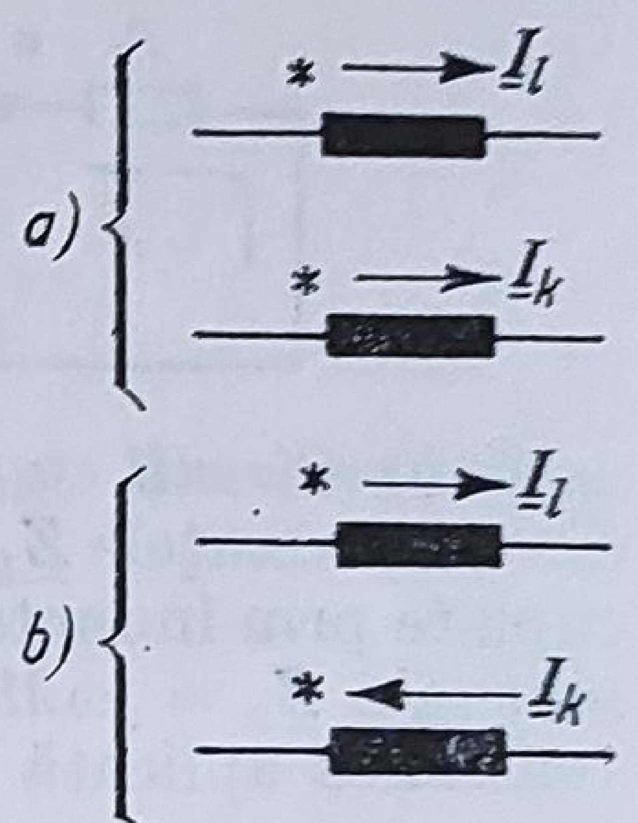


Fig. 6.12. Cuplarea inductanțelor.
a) adițională; *b)* diferențială

Pentru stabilirea practică a semnului cu care trebuie introdusă căderea de tensiune $\underline{U}_m$ sau $\underline{U}_{kl}$ în membrul al doilea al ecuației (6.8) scrisă pentru circuitul care conține latura k, se ține seamă de următoarea regulă:

— în cazul cuplajului adițional, dacă sensul de parcurs coincide cu sensul curentului $\underline{I}_k$, căderea de tensiune $\underline{U}_{kl} = \underline{Z}_{kl}\, \underline{I}_l$ se introduce cu semn pozitiv, iar dacă sensul de parcurs este contrar cu sensul lui $\underline{I}_k$, $\underline{U}_{kl}$ se introduce cu semn negativ;

— în cazul cuplajului diferențial, dacă sensul de parcurs coincide cu sensul curentului $\underline{I}_k$, termenul $\underline{U}_{kl}$ se introduce cu semn negativ, iar dacă sensul de parcurs este contrar cu sensul lui $\underline{I}_k$, termenul $\underline{U}_{kl}$ se introduce cu semn pozitiv.

Uneori se obișnuiește ca reactanța $X_m = \omega M$ să fie considerată cu valoarea numerică pozitivă în cazul cuplajului adițional și cu valoare numerică negativă în cazul cuplajului diferențial. În acest caz se aplică numai regula dată pentru cuplajul adițional. În cele ce urmează s-a adoptat această convenție.

Să examinăm acum cazurile generale care pot apărea în rețelele electrice și care se pot rezolva cu ajutorul teoremelor lui KIRCHHOFF folosind fazorii.

a) Circuite serie fără cuplaje inductive. Fie impedanțele $\underline{Z}_i = R_i + jX_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, legate în serie și alimentate cu tensiunea $\underline{U}$. Aplicînd relația (6.8) se obține

$$\underline{U} = \sum_i \underline{Z}_i \underline{I} = \underline{I} \sum_i \underline{Z}_i = \underline{Z}\, \underline{I}$$

unde

$$\underline{Z} = \sum_i \underline{Z}_i \tag{6.10}$$

este impedanța echivalentă a circuitului, relație analoagă cu (2.3.4.5). Scriind relația (6.10) dezvoltat se obține

$$\sum_i \underline{Z}_i = \sum_i R_i + j \sum_i X_i = R + jX,$$

unde R şi X sînt rezistenţa şi reactanţa echivalentă a circuitului ; modulul impedanţei rezultante este

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(\sum_i R_i)^2 + (\sum_i X_i)^2}$$

şi argumentul său

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum_i X_i}{\sum_i R_i},$$

rezultate găsite şi pe altă cale*.

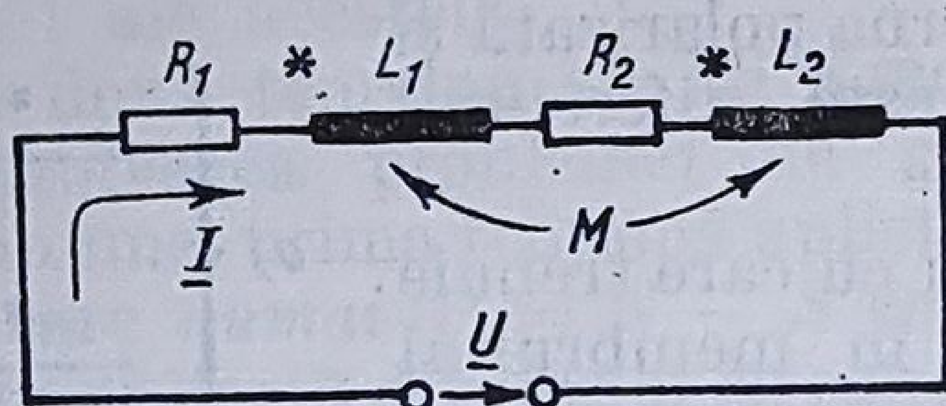


Fig. 6.13. Circuit cu impedanţe serie cuplate inductiv.

b) *Circuit cu impedanţe serie, cuplate inductiv.* Fie un circuit serie format din impedanţele $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$, inductanţele L_1 şi L_2 fiind cuplate prin inductanţa mutuală M (fig. 6.13) căreia îi corespunde o impedanţă mutuală $\underline{Z}_m = j\omega M$. Pentru curentul $\underline{I}$ se ia acelaşi sens pozitiv ca şi pentru tensiunea aplicată $\underline{U}$. Teorema a doua a lui Kirchhoff dă

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$$

în care: $\underline{U}_1 = \underline{I}\,\underline{Z}_1 + \underline{I} \cdot \underline{Z}_m = \underline{I}\,(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_m)$ este căderea de tensiune în prima impedanţă; căderea de tensiune $\underline{I}\,\underline{Z}_1$ este produsă de curentul $\underline{I}$ în rezistenţa R_1 şi inductanţa L_1, iar căderea de tensiune $\underline{I}\,\underline{Z}_m$ este produsă tot de curentul I şi tot în inductanţa L_1, dar prin inducţie mutuală între L_2 şi L_1, în mod analog

$$\underline{U}_2 = \underline{I}\,\underline{Z}_2 + \underline{I}\,\underline{Z}_m = \underline{I}\,(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_m)$$

este căderea de tensiune în a doua impedanţă.

Cu acestea ecuaţia circuitului devine

$$\underline{U} = \underline{I}\,(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_m) + \underline{I}\,(\underline{Z}_2 + Z_m) = \underline{I}\,(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\,\underline{Z}_m),$$

aşa încît

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\,\underline{Z}_m} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$$

unde

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\,\underline{Z}_m$$

este impedanţa echivalentă a circuitului.

c) *Circuit cu impedanţe derivaţie necuplate inductiv.* Fie impedanţele $\underline{Z}_i = R_i + j\,X_i\,(1 = 1, 2, \ldots, n)$, legate în paralel şi alimentate de la o sursă de tensiune $\underline{U}$. Curentul din diversele admitanţe este dat de relaţia

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_i},$$

* Vezi 6.1.3.1.

curentul total absorbit de întreg circuitul fiind

$$\underline{I} = \sum_i \underline{I}_i = \underline{U} \sum_i \frac{1}{\underline{Z}_i} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \underline{Y}\,\underline{U} \tag{6.11}$$

$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \sum_i \frac{1}{\underline{Z}_i}$ fiind inversul impedanței echivalente sau a admitanței echivalente a circuitului.

Dacă în relația (6.11) se scrie

$$\underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i},$$

se deduce imediat

$$\underline{Y} = \sum_i \underline{Y}_i = \sum_i (G_i - \mathrm{j}\,B_i)$$

și deci conductanța echivalentă G și susceptanța echivalentă B a circuitului format din impedanțe legate în paralel sînt

$$G = \sum_i G_i \text{ și } B = \sum_i B_i,$$

astfel că modulul admitanței este

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{(\sum_i G_i)^2 + (\sum_i B_i)^2}$$

rezultat găsit și pe altă cale*.

d) Rețea cu circuite derivate cuplate inductiv. Fie rețeaua formată din impedanțele $\underline{Z}_1$ și $\underline{Z}_2$ legate în paralel și cuplate inductiv între ele** (fig. 6.14).

Curenții în cele două circuite sînt $\underline{I}_1$ și $\underline{I}_2$ iar curentul total este $\underline{I}$.

Pentru primul circuit, teorema a doua a lui KIRCHHOFF se scrie sub forma

$$\underline{U} = \underline{U}_{R1} + \underline{U}'_{L1} + \underline{U}_{12}, \tag{6.12}$$

iar pentru al doilea circuit sub forma

$$\underline{U} = \underline{U}_{R2} + \underline{U}'_{L2} + \underline{U}_{21}, \tag{6.13}$$

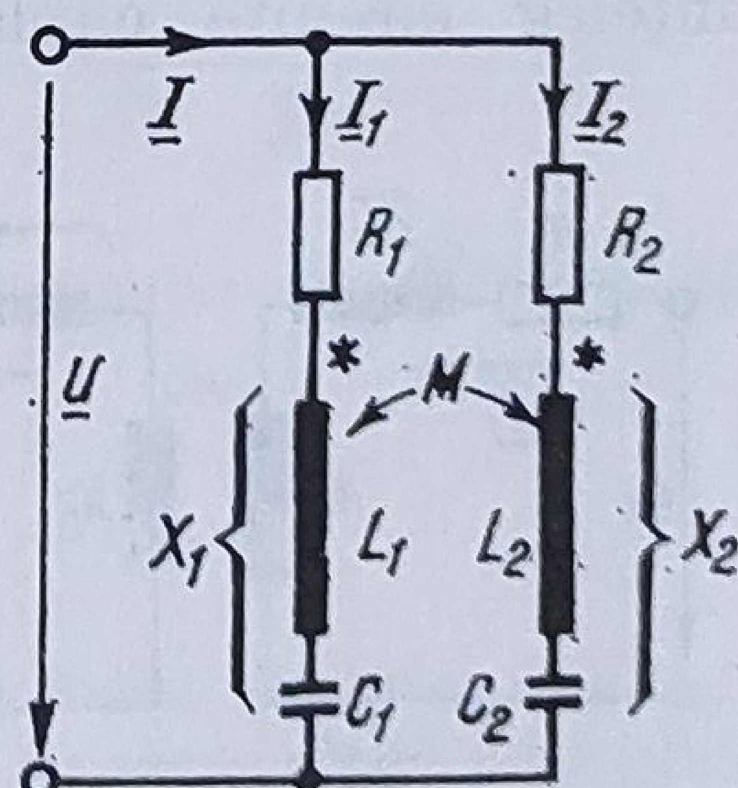


Fig. 6.14. Circuit cu impedanțe derivație cuplate inductiv.

în care :

Fazorul $\underline{U}_{R1} = R_1 \underline{I}_1$, în fază cu $\underline{I}_1$, este cădere de tensiune produsă în primul circuit de curentul $\underline{I}_1$ prin rezistența R_1.

* Vezi 6.1.3.2.

** Problema se rezolvă analog și în cazul a n impedanțe legate în paralel și cuplate inductiv între ele.

Fazorul $\underline{U}'_{L1} = \mathrm{j}X_1\underline{I}_1$, defazat cu $\pi/2$ înainte faţă de $\underline{I}_1$, este căderea de tensiune produsă în primul circuit de curentul I_1 prin reactanţa X_1.

Fazorul $\underline{U}_{12} = \mathrm{j}X_m\underline{I}_2 = \underline{Z}_m\underline{I}_2$, defazat cu $\pi/2$ înainte faţă de $\underline{I}_2$, este cădere de tensiune tot în primul circuit, dar produsă de curentul $\underline{I}_2$ din al doilea circuit, prin efectul inducţiei mutuale.

Fazorii $\underline{U}_{R2} = R_2\underline{I}_2$, $\underline{U}'_{L2} = \mathrm{j}\,X_2\underline{I}_2$, $\underline{U}_{21} = \mathrm{j}\,X_m\,\underline{I}_1 = \underline{Z}_m\,\underline{I}_1$ au semnificaţii asemănătoare.

Cu acestea relaţiile (6.12) şi (6.13) devin

$$\underline{U} = \underline{U}'_1 + \underline{U}_{12} \quad \text{şi} \quad \underline{U} = \underline{U}'_2 + \underline{U}_{21}$$

sau

$$\underline{U} = \underline{I}_1\underline{Z}_1 + \underline{I}_2\underline{Z}_m,$$

$$\underline{U} = \underline{I}_2\underline{Z}_2 + \underline{I}_1\underline{Z}_m,$$

din care se obţin curenţii $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$ din cele două laturi şi curentul total $\underline{I}$. Vom avea deci:

$$\underline{I}_1 = \underline{U}\,\frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m}{\underline{Z}_1\,\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^2}\,; \quad \underline{I}_2 = \underline{U}\,\frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_m}{\underline{Z}_1\,\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^2}\,;$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{U}\,\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_m}{\underline{Z}_1\,\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^2}\,. \tag{6.14}$$

Din relaţia (6.14) se poate deduce impedanţa echivalentă a reţelei

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_m}\,.$$

e) *Circuite cuplate pur inductiv.* Prin circuite cuplate pur inductiv se înţeleg circuite cuplate exclusiv inductiv, deci fără cuplaje galvanice (prin conductoare), un exemplu fiind arătat în figura 6.15. Primul circuit, alimentat cu tensiunea $\underline{U}_1$ are rezistenţa R_1 şi reactanţele X'_1 şi X''_1, $X_1 = X'_1 + X''_1$; al doilea circuit este alimentat cu tensiunea $\underline{U}_2$, are rezistenţa R_2 şi reactanţele X'_2 şi X''_2, $X_2 = X'_2 + X''_2$; cele două circuite sînt cuplate inductiv prin intermediul reactanţelor X''_1 şi X''_2, reactanţa mutuală fiind X_m.

Fig. 6.15. Reţea cu circuite pur inductive

Aplicînd cea de a doua teoremă a lui Kirchhoff, celor două circuite se obţine:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1R_1 + \mathrm{j}\,X'_1\,\underline{I}_1 + \mathrm{j}\,X''_1\,\underline{I}_1 + \mathrm{j}\,X_m\,\underline{I}_2,$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2\,R_2 + \mathrm{j}\,X'_2\,\underline{I}_2 + \mathrm{j}\,X''_2\,\underline{I}_2 + \mathrm{j}\,X_m\,\underline{I}_1$$

sau

$$\left.\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{Z}_1\,\underline{I}_1 + \underline{Z}_m\,\underline{I}_2\\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_2\underline{I}_2 + \underline{Z}_m\underline{I}_1\end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

în care

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}\,(X_1' + X_2'') = R_1 + \mathrm{j}\,X_1.$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j}\,(X_2' + X_2'') = R_2 + \mathrm{j}\,X_2,$$

$$\underline{Z}_m = \mathrm{j}\,X_m.$$

Curenţii $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$ se deduc prin rezolvarea sistemului (6.15).

Transformatoarele electrice funcţionează după schema din figura 6.15; în acest caz rezistenţa R_1 reprezintă rezistenţa primului circuit (bobinajul primar); reactanţa X_1' reprezintă reactanţa de dispersiuni a bobinajului primar, iar reactanţa X_1'' reprezintă reactanţa corespunzătoare fluxului comun (reactanţa utilă) a bobinajului primar; rezistenţa R_2 reprezintă rezistenţa celui de al doilea circuit (bobinajul secundar), iar reactanţele X_2' şi X_2'' reprezintă reactanţa de dispersiuni a bobinajului secundar şi reactanţa sa utilă. Tensiunea $\underline{U}_2$ se înlocuieşte cu tensiunea produsă la bornele transformatorului. Dacă se cunoaşte impedanţa receptorului, $\underline{Z}_r = R_r + \mathrm{j}\,X_r$, alimentată de secundarul transformatorului, ţinînd seama că $\underline{U}_2$ este o cădere de tensiune şi nu o tensiune aplicată circuitului din exterior, rezultă că între tensiunea $\underline{U}_2$, impedanţa $\underline{Z}_r$ şi curentul $\underline{I}_2$ există relaţia

$$\underline{U}_2 = -\underline{I}_2\,\underline{Z}_r.$$

Cu aceasta sistemul (6.15) devine

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1\,\underline{I}_1 + \underline{Z}_m\,\underline{I}_2$$

$$0 = \underline{Z}_m\,\underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_r)\,\underline{I}_2$$

şi rezultă

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_r}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_r) - \underline{Z}_m^2}, \qquad \underline{I}_2 = -\,\underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_m}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_r) - \underline{Z}_m^2}.$$

În funcţie de inductanţele de dispersiuni L_1' şi L_2', reactanţele de dispersiuni se calculează cu relaţiile

$$X_1' = \omega L_1' \text{ şi } X_2' = \omega L_2'.$$

6.2.2.3. **Metoda superpoziţiei.** În cazul reţelelor electrice de curent alternativ liniare (în care impedanţele sînt liniare), metoda superpoziţiei se aplică în acelaşi mod ca şi în curentul continuu*, diversele mărimi intervenind în calcul fiind reprezentate prin fazorii respectivi, iar impedanţele reţelei prin mărimile complexe corespunzătoare. Tehnica de aplicare a metodei este deci următoarea: dacă reţeaua conţine m surse, curentul într-o latură oarecare se determină adunîndu-se curenţii produşi în acea latură de fiecare sursă în parte, celelalte $m-1$ surse fiind pasivizate.

---

* Vezi 2.3.5.

Metoda superpoziţiei nu poate fi aplicată decît circuitelor a căror configuraţie este invariabilă. În caz contrariu, principiul superpoziţiei nu mai poate fi aplicat direct, ci este necesar a se face anumite artificii. Astfel, în cazul unui dipol activ, dacă se scurtcircuitează cele două borne libere ale sale, A şi B (fig. 6.16) prin scurtcircuitul respectiv va circula un curent I care nu poate fi determinat direct prin metoda superpoziţiei. Curentul respectiv se poate determina cu ajutorul teoremei lui THÉVENIN* în care se face $\underline{Z} = 0$.

Dealtfel însăşi teorema lui THÉVENIN a fost stabilită aplicînd principiul superpoziţiei în reţelele electrice.

De asemenea, în cazul cînd se caută tensiunea care apare la bornele unui întreruptor care deschide un circuit al unui dipol activ, aceasta se determină utilizînd teorema lui NORTON**, în care se face $\underline{Y} = 0$; teorema lui NORTON a fost dedusă de asemenea utilizînd principiul superpoziţiei.

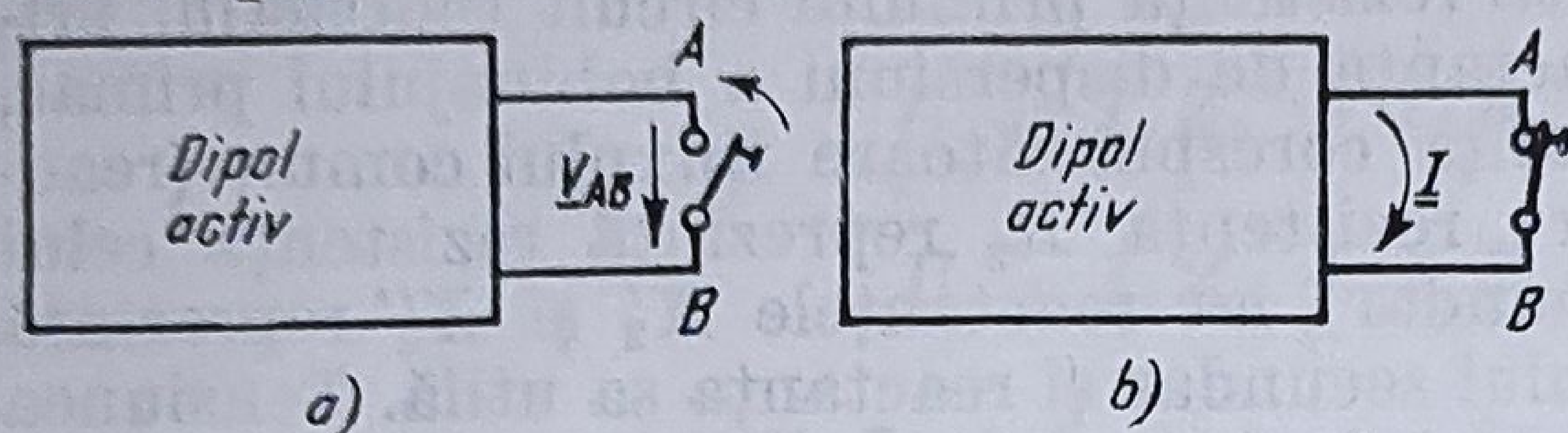


Fig. 6.16. Scurtcircuitarea bornelor unui dipol activ.

6.2.2.4. **Metoda buclelor.** Prin utilizarea fazorilor şi utilizarea impedanţelor complexe, utilizarea metodei buclelor este aceeaşi ca şi în curent continuu***. Tehnica aplicării metodei buclelor este următoarea:

— Se descompune reţeaua dată într-un număr B de circuite independente, arbitrar alese, B fiind numărul topologic dat de relaţia (2.70).

— Se presupune că, în fiecare din aceste circuite, circulă un curent $\underline{J}$, avînd un sens de circulaţie fixat de asemenea arbitrar.

— Pentru fiecare circuit în parte se scrie a doua teoremă a lui KIRCHHOFF, observînd că în circuitul respectiv produc căderi de tensiune şi curenţii din circuitele vecine care au impedanţe comune. Se va obţine astfel un sistem de B ecuaţii liniare de forma

$$\underline{Z}_{n1}\underline{J}_1 + \underline{Z}_{n2}\underline{J}_2 + \ldots + \underline{Z}_{nn}\underline{J}_n = \underline{E}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, B). \quad (6.16)$$

În care $\underline{Z}_{nn}$ reprezintă impedanţele totale ale circuitelor independente, $\underline{Z}_{pq} = \underline{Z}_{qp}$ reprezintă impedanţele comune circuitelor independente p şi q, iar $\underline{J}_n$ curentul ciclic independent din circuitul n.

— Se rezolvă sistemul de ecuaţii (6.16) astfel obţinut, determinîndu-se curenţii $\underline{J}_1, \underline{J}_2, \ldots, \underline{J}_n$.

Curenţii reali din laturile reţelei se obţin făcînd suma algebrică a curenţilor ciclici din circuitele independente, care conţin latura respectivă

$$\underline{I}_j = \Sigma\, C_{jk}\underline{J}_k, \qquad \begin{Bmatrix} j = 1, 2, \ldots, L \\ k = 1, 2, \ldots, B \end{Bmatrix} \quad (6.17)$$

în care coeficienţii C_{jk} putînd avea una din valorile 0, ± 1, care depinde de sensul arbitrar ales pentru circulaţia curenţilor din laturi, respectiv din bucle, valoarea zero apare acolo unde latura respectivă nu este străbătută de curentul unei anumite bucle.

---

* Vezi 2.3.7.4; 6.2.3.4 şi 6.2.3.5.
** Vezi 2.3.7.5.
*** Vezi 2.3.6.

6.2.2.5. **Metoda perechilor de noduri.** Analog cu metoda buclelor se utilizează şi metoda perechilor de noduri*. Tehnica de aplicare a metodei perechilor de noduri este următoarea :

— Se alege în reţeaua dată un număr de P perechi de noduri independente, arbitrare alese, P fiind numărul topologic dat de relaţia (2.71).

— Se presupune că, la fiecare din aceste perechi de noduri există o diferenţă de potenţial $\underline{E}$, avînd un anumit sens de polaritate, de asemenea arbitrar ales.

Pentru fiecare nod în parte se scrie teorema I a lui KIRCHHOFF Se va obţine astfel un sistem de P ecuaţii liniare de forma

$$\underline{Y}_{N1}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{N2}\underline{V}_2 + \ldots + \underline{Y}_{Nn}\underline{V}_n = \Sigma\, \underline{J}_n \ (N = 1, 2, \ldots, P) \quad (6.18)$$

în care $\underline{Y}_{Nn}$ reprezintă admitanţa laturilor care converg în nodul N, $\underline{Y}_{Nn}$ reprezintă admitanţa laturii care uneşte perechea de noduri N_n, iar V_n, tensiunea independentă de la bornele acestei perechi de noduri. În ecuaţiile (6.18)

$$\underline{J}_n = \sum_{j=1}^{n} \underline{Y}_{Nj}\,\underline{E}_{Nj}$$

este suma curenţilor injectaţi în nodul n, $\underline{E}_{Nj}$ fiind forţele electromotoare respective. De asemenea $\underline{J}_n$ poate reprezenta suma curenţilor injectaţi în nod din exterior. Curenţii $\underline{J}_n$ pot fi pozitivi (curenţi injectaţi în noduri de la sursele exterioare) sau negativi (curenţi ejectaţi din noduri alimentînd receptoarele exterioare reţelei).

— Se rezolvă ecuaţiile (6.18) astfel obţinut determinîndu-se potenţialele $\underline{V}_n$ ($n = 1, 2, \ldots, P$), potenţiale raportate toate la acelaşi potenţial de referinţă.

— Se determină potenţialele celorlalte noduri în raport cu acestea.

— Curenţii din laturile reţelei se determină apoi aplicînd legea lui OHM fiecărui element în parte.

Pentru a se putea aplica această metodă, este necesar să se transforme, în prealabil, sursele de tensiune în surse de curent, precum şi să se găsească echivalentul inductanţelor şi inductanţei mutuale în cazul circuitelor cuplate magnetic.

Transformarea surselor de tensiune în surse de curent, în cazul surselor de curent alternativ, se face cu ajutorul teoremei lui NORTON.

Alegerea între metoda circuitelor independente sau a perechilor de noduri pentru studiul circuitelor electrice depinde de numărul necunoscutelor ce sînt de determinat.

Astfel, dacă $B < P$, este mai avantajoasă se utilizează metoda buclelor, iar dacă $B > P$, este mai avantajos să se utilizeze metoda perechilor de noduri. În aceste condiţii, numărul necunoscutelor ce urmează a fi determinat este cel mult $\frac{1}{2}L$.

* Vezi 2.3.8.

3 — c. 229

6.2.3. TEOREME ASUPRA REŢELELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV COMPLEXE SERVIND LA STUDIUL ACESTORA

6.2.3.1. **Generalităţi.** La studiul reţelelor electrice de curent continuu au fost enunţate şi demonstrate o serie de teoreme* cu ajutorul cărora se poate simplifica într-o oarecare măsură studiul reţelelor electrice. Prin utilizarea fazorilor aceste teoreme pot fi transpuse şi pentru reţelele electrice de curent alternativ fiind necesare pentru aceasta anumite precizări suplimentare care vor fi arătate în paragrafele următoare. Teoremele respective vor fi numai enunţate, demonstraţia lor făcîndu-se în acelaşi mod ca şi în cazul reţelelor de curent continuu.

6.2.3.2. **Teorema lui Vaschy.** Într-o reţea buclată, pe toate ramurile pornind dintr-un acelaşi nod A se pot adăuga forţe electromotoare $\underline{E}_{Aj}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, n fiind numărul de laturi adiacente nodului, egale între ele ca modul şi fază, avînd toate acelaşi sens faţă de nod, fără ca prin aceasta să se schimbe circulaţia de curenţi existentă anterior în reţea.

6.2.3.3. **Teorema reciprocităţii a lui Maxwell.** Dacă o forţă electromotoare $\underline{E}$, montată în latura AB a unei reţele pasive, produce în latura CD a aceleiaşi reţele un curent $\underline{I}$, montarea forţei electromotoare $\underline{E}$ în latura CD va produce acelaşi curent $\underline{I}$ în latura AB.

Această teoremă are următoarea consecinţă: dacă între două noduri oarecare M şi N ale unei reţele buclate se conectează o sursă de forţă electromotoare $\underline{U}$ care va face să circule în reţea un curent suplimentar $\underline{I}$ a cărui efect este de a produce între alte două noduri oarecare P şi Q o diferenţă de potenţial suplimentară $\Delta\underline{V}$, reciproc, injectarea unui curent suplimentar $\underline{I}$ între nodurile P şi Q va produce între nodurile M şi N o creştere de potenţial $\Delta\underline{V}$.

Notînd perechea de borne A, B cu indicele 1 şi bornele C, D cu indicele 2, teorema lui Maxwell se poate scrie sub forma

$$\frac{\underline{E}_1}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} \quad \text{sau} \quad \frac{\underline{I}_1}{\underline{E}_2} = \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21},$$

unde $\underline{Z}_{12}$ este, prin definiţie, *impedanţa de transfer* între perechile de borne 1 şi 2 iar $\underline{Y}_{12}$ este admitanţa de transfer între cele două perechi de borne.

6.2.3.4. **Teorema lui Thévenin.** Dacă două borne libere A şi B ale unei reţele active — sau dipol activ — între care există o diferenţă de potenţial $\underline{U}_{AB}$ sînt legate printr-un element pasiv de impedanţă $\underline{Z}$, acest element va fi străbătut de curentul

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}}, \tag{6.19}$$

în care $\underline{Z}_{AB}$ este impedanţa echivalentă a reţelei dată văzută prin bornele A şi B înainte de introducere a elementului pasiv de impedanţă $\underline{Z}$, reţeaua dată fiind pasivizată (toate sursele sale scurtcircuitate).

---

* Vezi 2.3.7.

Reciproca teoremei lui THÉVENIN se poate enunța după cum urmează : Fiind o dată rețea activă dacă se deschide o latură oarecare AB de impedanță $\underline{Z}$ și străbătută înainte de deschidere de curentul $\underline{I}$, la bornele A și B a laturii deschise apare tensiunea

$$\underline{U}_{AB} = (\underline{Z}_{AB} + \underline{Z})\,\underline{I}, \qquad (6.20)$$

$\underline{Z}_{AB}$ fiind impedanța echivalentă a rețelei date, pasivizată, văzută prin bornele A și B.

Ca o consecință a teoremei lui THÉVENIN se poate enunța următoarea teoremă :

O rețea electrică activă, avînd două borne terminale A și B poate fi înlocuită printr-un circuit electric echivalent format dintr-o sursă ideală* de forță electromotoare $\underline{E}'$ în serie cu o impedanță $\underline{Z}'$. Valoarea forței electromotoare $\underline{E}'$ este egală cu tensiunea $\underline{U}_{AB}$ existentă la bornele A și B în gol, iar impedanța $\underline{Z}'$ este impedanța rețelei dată, pasivizată, văzută prin bornele libere A și B.

6.2.3.5. **Teorema lui NORTON**. Dacă la două borne A și B ale unei rețele electrice active se leagă o admitanță $\underline{Y}$, tensiunea la bornele acestei admitanțe este dată de relația

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{AB\ sc}}{\underline{Y}_{AB} + \underline{Y}} \qquad (6.21)$$

în care $\underline{I}_{AB\,sc}$ este curentul de scurtcircuit al rețelei între bornele A și B, acestea fiind legate în scurtcircuit ($\underline{Y} = \infty$) iar $\underline{Y}_{AB}$ este admitanța echivalentă a rețelei electrice dată, pasivizată, văzută prin bornele A și B, la funcționarea în gol a rețelei ($\underline{Y} = 0$).

Din teorema lui NORTON rezultă următoarea consecință : între două noduri oarecare A și B a unei rețele electrice active, o sursă de tensiune, de forță electromotoare $\underline{E}$ și fără impedanță interioară, dar legată în serie cu o impedanță $\underline{Z}$, poate fi înlocuită cu o sursă de curent, de intensitate $\underline{I}$ fără admitanță interioară, șuntată cu admitanța $\underline{Y}$ fără ca parametrii electrici la bornele A și B — tensiunea la borne $\underline{U}_b$ și curentul $\underline{I}_b$ debitat prin aceste borne — să se schimbe, între mărimile caracteristice ale celor două surse existînd relațiile

$$\underline{I} = \underline{Y}\,\underline{E} \quad \text{și} \quad \underline{Y}\,\underline{Z} = 1$$

În ceea ce privește echivalentul inductanțelor și inductanței mutuale inversate în cazul circuitelor cuplate magnetic, acestea se determină aplicînd cea de a doua teoremă a lui KIRCHHOFF circuitului respectiv, determinîndu-se valorile curenților $\underline{I}_1$ și $\underline{I}_2$.

Fie un asemenea circuit făcînd parte dintr-o rețea electrică oarecare din care este indicat numai nodul de referință (Fig. 6.17). Se presupune că acest circuit nu mai are nici un alt cuplaj magnetic cu vreun alt element al rețelei. Fie $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$ și $\underline{V}_4$ potențialele la cele patru noduri ale elementelor date și $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ curenții care le străbat. Ecuațiile de funcționare ale acestui circuit sînt

$$\mathrm{j}\,\omega\,L_1\,\underline{I}_1 + \mathrm{j}\,\omega\,M\,\underline{I}_2 = \underline{V}_1 - \underline{V}_2,$$
$$\mathrm{j}\,\omega\,M\,\underline{I}_1 + \mathrm{j}\,\omega\,L_2\,\underline{I}_2 = \underline{V}_3 - \underline{V}_4.$$

* Vezi 2.3.7.6.

Eliminînd pe $\underline{I}_2$ se obține

$$j\omega (L_1 L_2 - M^2)\, \underline{I}_1 = L_2 (\underline{V}_1 - \underline{V}_2) - M (\underline{V}_3 - \underline{V}_4).$$

Eliminînd acum pe $\underline{I}_1$ se obține

$$j\omega (L_1 L_2 - M^2)\, \underline{I}_2 = - M (\underline{V}_1 - \underline{V}_2) - L_1 (\underline{V}_3 - \underline{V}_4).$$

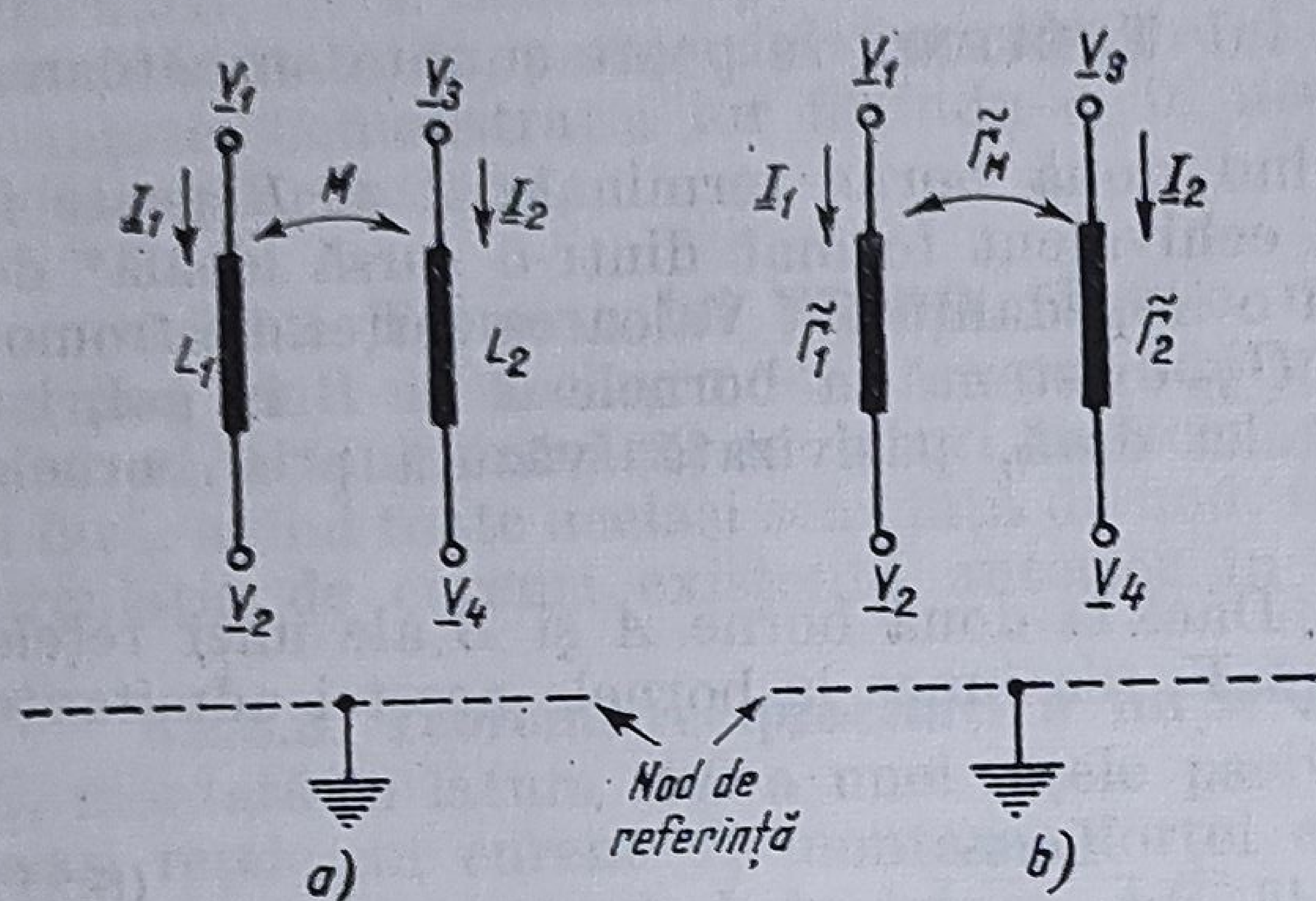


Fig. 6.17. Circuite electrice cuplate magnetic.
a) forma folosită pentru calculul lui $\underline{Z}$; *b)* forma folosită pentru calculul lui $\underline{Y} = \underline{Z}^{-1}$

Din aceste relații rezultă imediat

$$\underline{I}_1 = -j \frac{\widetilde{\Gamma}_1}{\omega} (\underline{V}_1 - \underline{V}_2) + j \frac{\widetilde{\Gamma}_M}{\omega} (\underline{V}_3 - \underline{V}_4)$$

$$\underline{I}_2 = j \frac{\widetilde{\Gamma}_M}{\omega} (\underline{V}_1 - \underline{V}_2) - j \frac{\widetilde{\Gamma}_2}{\omega} (\underline{V}_3 - \underline{V}_4),$$

în care s-a notat *

$$\widetilde{\Gamma}_1 = \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2}, \quad \widetilde{\Gamma}_2 = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2}, \quad \widetilde{\Gamma}_M = \frac{M}{L_1 L_2 - M^2},$$

care sînt inversele echivalente ale inductanțelor proprii și mutuale ale circuitului dat.

6.2.3.6. Transfigurarea rețelelor electrice. Transfigurarea unei rețele electrice consistă în transformarea configurației ei într-una adecuată unor calcule mai ușoare ce se efectuează pentru rezolvarea ei.

Condițiile pe care trebuie să le îndeplinească rețeaua electrică, sau numai elementul de rețea, ce urmează a fi transfigurat și care au fost enunțate în cazul rețelelor electrice de curent continuu rămîn valabile și în cazul rețelelor electrice de curent alternativ**. Pentru utilizare, relațiile stabilite urmează a fi transcrise cu ajutorul fazorilor, demonstrațiile reproducîndu-se întocmai.

---

* Semnul ~ a fost pus pentru a arăta că aceste inverse nu sînt inversele mărimilor simple L_1, L_2 sau M.

** Vezi 2.3.9.

a) Transfigurarea circuitelor serie şi paralel. Un circuit format dintr-un număr de impedanţe legate în serie poate fi înlocuit printr-o impedanţă echivalentă definită de relaţia

$$\underline{Z} = \sum_i \underline{Z}_i .$$

Un circuit format dintr-un număr de impedanţe legate în paralel poate fi înlocuit printr-o impedanţă echivalentă definită de relaţia

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \sum \frac{1}{\underline{Z}_i},$$

sau exprimată prin admitanţele corespunzătoare,

$$\underline{Y} = \sum \underline{Y}_i .$$

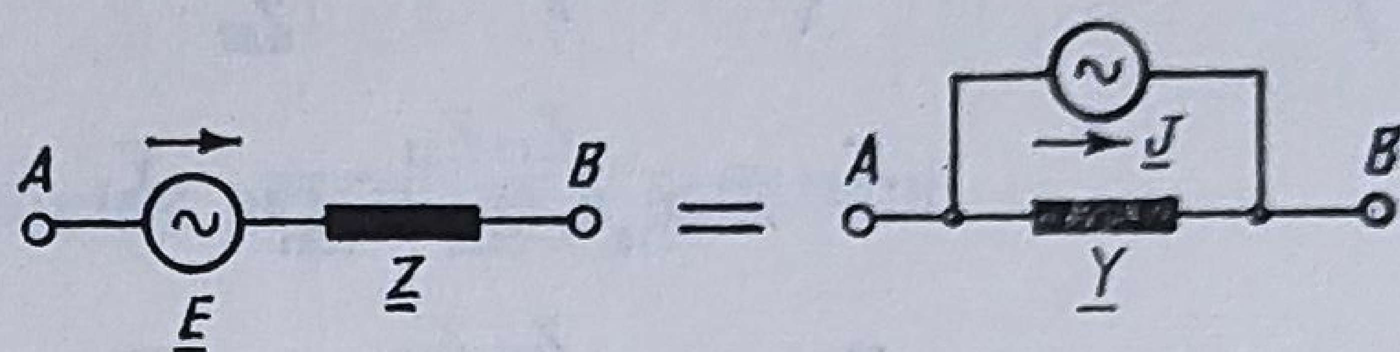


Fig. 6.18. Surse de tensiune şi de curent echivalente.

b) Sursele de tensiune şi de curent echivalente. O sursă de tensiune, de forţă electromotoare $\underline{E}$ şi de impedanţă interioară $\underline{Z}$ poate fi înlocuită printr-o sursă de curent, de intensitate $\underline{J}$ şi de admitanţă interioară $\underline{Y}$ (fig. 6.18) dacă sînt îndeplinite condiţiile

$$\underline{Y}\,\underline{Z} = 1 \text{ şi } \underline{J} = \underline{Y}\,\underline{E}.$$

Reciproc, o sursă de curent, $\underline{J}$, $\underline{Y}$, poate fi înlocuită cu o sursă de tensiune, $\underline{E}$, $\underline{Z}$, dacă

$$\underline{Z}\,\underline{Y} = 1 \text{ şi } \underline{E} = \underline{Z}\,\underline{J}.$$

c) Sursa echivalentă a mai multor surse în paralel (*Teorema lui* MILLMAN). Un număr de surse reale de tensiune legate în paralel poate fi înlocuit printr-o sursă de tensiune echivalentă avînd impedanţa interioară

$$\underline{Z} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{\underline{Z}_i}}$$

şi tensiunea la borne

$$\underline{U} = \underline{Z} \sum_i \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}_i}.$$

Sursa echivalentă de tensiune poate fi înlocuită eventual printr-o sursă de curent prin utilizarea transformării *b)*.

d) Transfigurarea circuitelor stea-triunghi (*Teorema lui* KENNELLY). Orice circuit în triunghi poate fi transfigurat într-un circuit în stea şi reciproc. Valo-

rile impedanțelor, respectiv admitanțelor corespunzătoare sînt date de relațiile (fig. 6.19):

Transfigurarea din triunghi în stea:

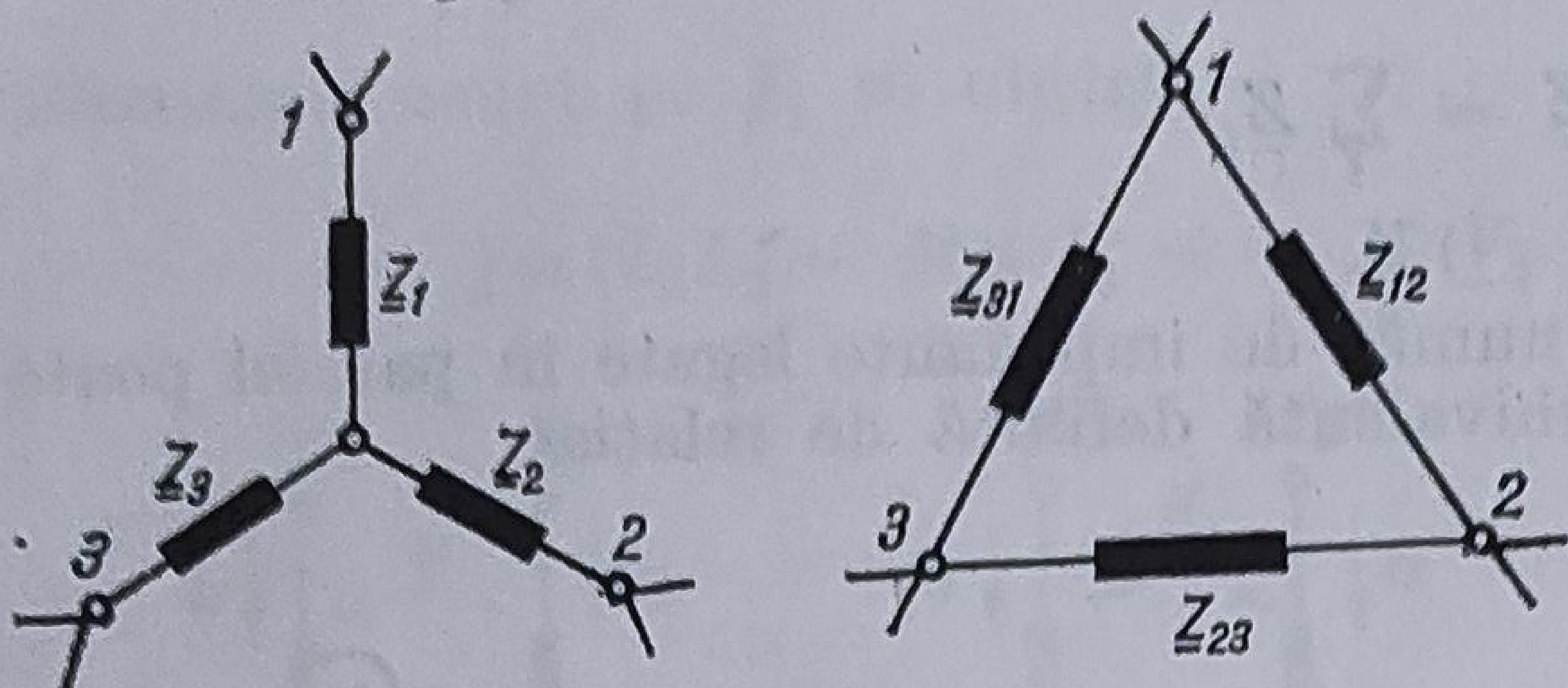


Fig. 6.19. Circuite stea și triunghi.

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12}\,\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}, \quad \underline{Y}_1 = \underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{31} + \frac{\underline{Y}_{12}\,\underline{Y}_{31}}{\underline{Y}_{23}},$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{23}\,\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}, \quad \underline{Y}_2 = \underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{12} + \frac{\underline{Y}_{23}\,\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{31}},$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{31}\,\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}, \quad \underline{Y}_3 = \underline{Y}_{31} + \underline{Y}_{23} + \frac{\underline{Y}_{31}\,\underline{Y}_{23}}{\underline{Y}_{12}},$$

Transfigurarea din stea în triunghi:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1\,\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}, \quad \underline{Y}_{12} = \frac{\underline{Y}_1\,\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3},$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2\,\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{Y}_{23} = \frac{\underline{Y}_2\,\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3},$$

$$\underline{Z}_{31} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3\,\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{Y}_{31} = \frac{\underline{Y}_3\,\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}.$$

e ul general al unei stele cu n laturi într-un poligon complet cu n noduri. Impedanța $\underline{Z}_{ik}$ a unei laturi a poligonului este dată, în funcție de impedanțele $\underline{Z}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ale stelei prin relația

$$\underline{Z}_{jk} = \frac{\underline{Z}_j\,\underline{Z}_k}{\underline{Z}_0}$$

unde

$$\underline{Z}_0 = \frac{1}{\sum_j \frac{1}{\underline{Z}_j}}$$

Transformarea nu este reversibilă decît în anumite cazuri particulare*.

f) Transfigurarea circuitelor în T și în π. Este ușor de văzut că circuitele T și π nu sînt decît circuite în stea și în triunghi care pot fi transfigurate unul într-altul prin aplicarea teoremei lui KENNELLY (fig. 6.20).

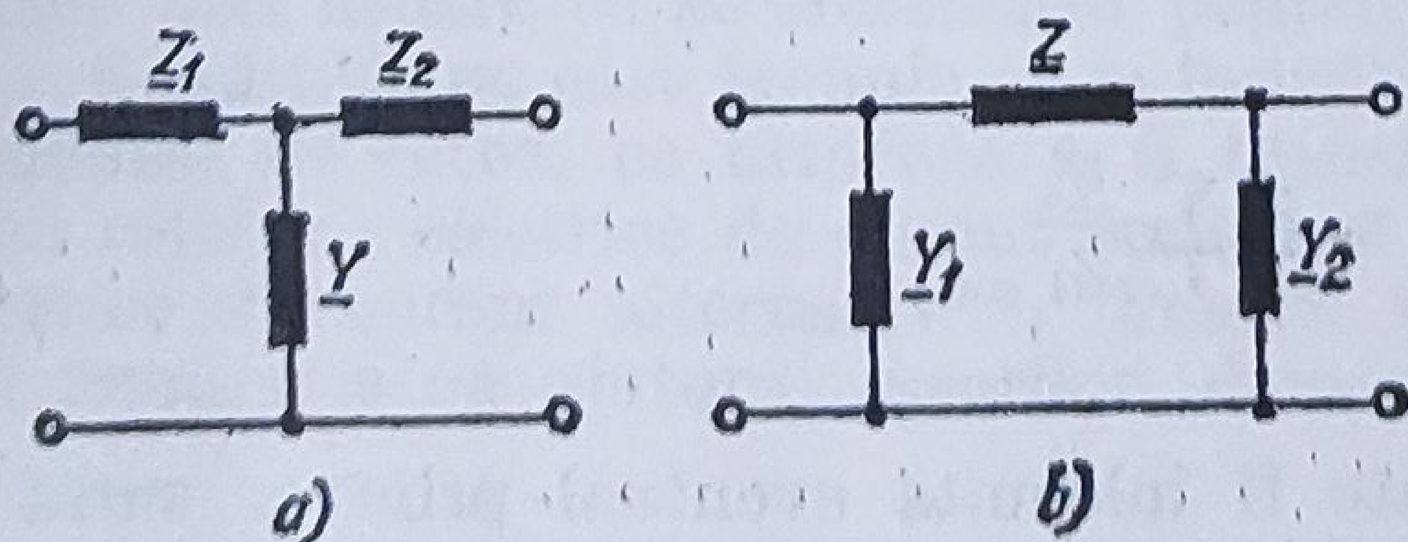


Fig. 6.20. Circuitele T(a) și π (b)

* Vezi 2. 3. 9. 2.

În practică se utilizează însă relații care se deduc direct din acelea care determină parametrii respectivi în funcție de parametrii generali ai unui cuadripol oarecare*. Aceste relații sînt :

— La trecerea de la schema T la schema π

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}, \quad \underline{Y}_1 = \underline{Y} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}}, \quad \underline{Y}_2 = \underline{Y} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}};$$

— La trecerea de la schema π la schema T

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}, \quad \underline{Z}_1 = \underline{Z} \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}}, \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z} \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2}.$$

6.2.4. METODE MATRICEALE DE REZOLVARE A REȚELELOR ELECTRICE

6.2.4.1. **Generalități.** Avantajele pe care le oferă calculul matriceal la rezolvarea rețelelor electrice sînt cunoscute și metodele corespunzătoare, elaborate de G. KRON, au fost arătate la studiul rețelelor electrice de curent continuu **.

De la primele jaloane puse de KRON și pînă astăzi numeroși cercetători au îmbunătățit metodele matriceale de calcul a rețelelor electrice, adaptîndu-le situației actuale cînd se dispune de mijloace moderne de investigație și calcul, de calculatoare electronice.

Utilizarea fazorilor face tot atît de lesnicios calculul matriceal și pentru studiul rețelelor electrice în curent alternativ. Trebuie observat că, de data aceasta matricea de conexiune poate fi și complexă, cum este în cazul utilizării componentelor simetrice ***. De asemenea, din cauză că expresia puterii în cantități complexe este

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^*;$$

invariantul puterii, în virtutea căruia în lucrarea de față au fost stabilite formulele de transformare **** este

$$P = [E]_t\,[I]^* = [E']_t\,[I']^* = \ldots$$

sau

$$P = [I]_t\,[E]^* = [I']_t\,[E']^* = \ldots$$

În aceste condiții, formulele de transformare la schimbarea sistemului de referință sînt :

— la trecerea de la spațiul laturilor la spațiul buclelor (metoda buclelor)

$$[E'] = [C]_t^*[E]$$

și

$$[Z'] = [C]_t^*[Z]\;[C],$$

---

* Vezi 6.4.4.9.

** Vezi 2.4.

*** Vezi 8.3.

**** Se convine ca, în scrierea matricelor, să nu se indice fazorul cu bară dedesubt, pentru a nu se îngreuia scrierea.

$[C]$ fiind matricea de conexiune în spațiul buclelor definită prin relația (2.132);

— la trecerea de la spațiul laturilor la spațiul perechilor de noduri (metoda perechilor de noduri)

$$[J'] = [K]_t^*[J]$$

și

$$[Y'] = [K]_t^*[Y]\,[K],$$

$[K]$ fiind matricea de conexiune în spațiul perechilor de noduri definită de relația (2.147).

O altă observație este de făcut asupra matricei de impedanță. Un element al acestei matrice este definit de relația

$$[Z_{jk}] = [R_{jk}] + \mathrm{j}\,\omega\,[L_{jk}] + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}[S_{jk}],$$

S_{jk} fiind elastanța elementului capacitiv și care, pentru $j = k$ reprezintă impedanța laturii j, iar pentru $j \neq k$ reprezintă impedanța laturii comune dintre buclele j și k ale rețelei. Cum diversele laturi ale rețelei pot fi cuplate magnetic între ele, în matricea de impedanță vor putea exista și elemente de forma

$$\mathrm{j}\,\omega\,[L_{mn}] = \mathrm{j}\,\omega\,[L_{nm}],$$

în care $m, n \neq j, k$, egalitatea putînd să nu existe dacă elementele L_{mn} și L_{nm} nu sînt reciproce, semnul polarității inductanței mutuale fiind cuprins în expresia ei și definit ca mai înainte *.

Aceeași observație se face și pentru elementele matricei de admitanță.

6.2.4.2. **Ecuațiile generale.** Fie o rețea oarecare, buclată, formată din L laturi, fiecare latură fiind constituită (fig. 6.11) dintr-o impedanță $\underline{Z}_j = R_j + \mathrm{j}X_j$ $\left[j = 1, 2, \ldots, L \text{ și } R_j \in [0, +\infty),\ X_j \in (-\infty, +\infty)\right]$ dintr-o sursă de tensiune — caracterizată prin forța electromotoare $\underline{E}_j$ — și dintr-o sursă de curent — caracterizată prin intensitatea $\underline{J}_j$.

În elementul considerat, necunoscutele sînt curentul $\underline{I}_j$, care circulă între cele două extremități ale sale A, B — bornele elementului — și diferența de potențial $\underline{V}_j$ la aceste borne.

Rezolvarea rețelei electrice constă în a determina aceste necunoscute — curenții $\underline{I}_j$ și tensiunile $\underline{V}_j$ — și în consecință, circulația puterilor în rețeaua respectivă. Determinarea acestor mărimi se face cu ajutorul celor două teoreme ale lui Kirchhoff, scrise sub forma

$$\Sigma \underline{J}_j = \Sigma \underline{I}_j, \tag{6.22}$$

$$\Sigma \underline{E}_j = \Sigma \underline{U}_j, \tag{6.23}$$

$$\underline{U}_j = \underline{Z}_j\,\underline{I}_j \tag{6.24}$$

$$\underline{V}_j = \underline{U}_j - \underline{E}_j \tag{6.25}$$

---

* Vezi 6.2.2.2.

Într-o rețea electrică cu L laturi și N noduri, ecuația (6.22) poate fi scrisă de

$$P = N - S$$

ori, S fiind numărul de subrețele a rețelei date, ecuația (6.23) poate fi scrisă de

$$B = L - N + S$$

ori, iar ecuația (6.24) de L ori. Numărul total de ecuații ce se obține este

$$P + B + L = 2\,L,$$

adică suficient pentru rezolvarea întregii rețele.

Scrise matriceal, ecuațiile de mai sus devin

$$[A]\,([I] - [J]) = 0 \tag{6.26}$$

$$[B]\,([U] - [E]) = 0 \tag{6.27}$$

$$[U] - [Z][I] = 0 \tag{6.28}$$

$$[U] - [E] = [V] \tag{6.29}$$

unde $[A]$ și $[B]$ sînt matrice — în general singulare — formate din $+1$, -1 sau 0; ele arată modul cum sînt conectate diversele elemente ale rețelei, cifra ± 1 corespunzînd atunci cînd sensul de circulație al curentului coincide sau este opus sensului atribuit surselor, iar cifra zero, atunci cînd elementul considerat nu aparține circuitului respectiv din rețea.

În rezolvarea rețelelor electrice pot apărea trei cazuri:

cazul I, în care $[E] \neq 0$ și $[J] = 0$, care corespunde *metodei buclelor*;

cazul II, în care $[E] = 0$ și $[J] \neq 0$, care corespunde *metodei perechilor de noduri*;

cazul III, în care $[E] \neq 0$ și $[J] \neq 0$, care corespunde *cazului general*.

6.2.4.3. **Metoda buclelor.** Făcînd în ecuația (6.25) $[J] = 0$, sistemul de ecuație devine

$$[A]\,[I] = 0;$$

$$[B]\,[U] = [B]\,[E]; \tag{6.30}$$

$$[U] = [Z]\,[I].$$

Notînd $[I']$ matricea curenților ciclici din bucle și $[E']$ matricea forțelor electromotoare totale din bucle — care pot fi numite *forțele electromotoare ciclice* — avem relațiile cunoscute *

$$[I] = [C]\,[I']$$

* Vezi 2.4.4.4.

şi

$$[E'] = [C_t]\ [E],$$

unde $[C]$ este matricea de conexiune a reţelei *.

Punînd

$$[C]_t = [B] \tag{6.31}$$

rezultă

$$[B]\ [E] = [E'] \tag{6.32}$$

şi

$$[I] = [B]_t\ [I']. \tag{6.33}$$

Pentru efectuarea calculului se urmează calea cunoscută **. Se scrie succesiv

$$[B][E] = [E'] = [B][U] = [B][Z][I] = [B][Z][B]_t\ [I'] = [Z'][I'] \tag{6.34}$$

în care s-a notat

$$[Z'] = [B]\ [Z]\ [B]_t = [C]_t\ [Z]\ [C], \tag{6.35}$$

matricea de impedanţă a reţelei trecută în spaţiul buclelor. Matricea $[Z']$ fiind nesingulară, din relaţia (6.34) rezultă

$$[I'] = [Z']^{-1}\ [E'] \tag{6.36}$$

şi din relaţia (6.33), ţinînd seama de (6.32) şi (6.35), rezultă

$$[I] = [B]_t\ [I'] = [B]_t\ ([B]\ [Z]\ [B]_t)^{-1}\ [B]\ [E] \tag{6.37}$$

şi din (6.30)

$$[U] = [Z]\ [B]_t\ ([B]\ [Z]\ [B]_t)^{-1} [B]\ [E]. \tag{6.38}$$

Relaţiile (6.37) şi (6.38) rezolvă întreaga problemă în funcţie de elementele date.

6.2.4.4. **Metoda perechilor de noduri.** Dacă în sistemul de ecuaţii ale lui KIRCHHOFF se face în ecuaţia (6.27) $[E] = 0$ acesta devine

$$[A]\ [I] = [A]\ [J], \tag{6.39}$$

$$[B]\ [U] = 0, \tag{6.40}$$

$$[I] = [Y]\ [U]. \tag{6.41}$$

---

* Nu s-a mai pus $[C]^*$ întrucît, în cazul examinat, matricele de conexiune sînt reale.

** Vezi 2.4.4.5.

Notînd $[U']$ matricea potențialelor celor $N-1$ noduri față de nodul de referință — matricea potențialelor independente — și $[J']$ matricea curenților nodali, avem relațiile cunoscute *

$$[U] = [K]\,[U']$$

și

$$[J'] = [K]_t\,[J]$$

unde $[K]$ este matricea de conexiune.

Dacă se notează

$$[K]_t = [A]$$

se obține

$$[A]\,[J] = [J'] \tag{6.42}$$

și

$$[U] = [A]_t\,[U']. \tag{6.43}$$

Cu aceste elemente, pentru efectuarea calculului se urmează calea cunoscută **, obținîndu-se succesiv

$$[J'] = [A]\,[J] = [A]\,[I] = [A]\,[Y]\,[U] = [A]\,[Y]\,[A]_t\,[U'] = = [Y']\,[U'] \tag{6.44}$$

unde s-a notat

$$[Y'] = [A]\,[Y]\,[A]_t = [K]_t\,[Y]\,[K],$$

matricea de admitanță a rețelei trecută în spațiul perechilor de noduri.

Matricea $[Y']$ nu este singulară, din relația (6.44) rezultă

$$[U'] = [Y']^{-1}[J'] \tag{6.45}$$

de unde, din relația (6.43) rezultă $[U]$ și apoi din relația (6.41) se deduce $[I]$.

Vom avea astfel

$$[U] = [A]_t\,[U'] = [A]_t[Y']^{-1}\,[J'] = [A]_t([A]\,[Y]\,[A]_t)^{-1}\,[A]\,[J] \tag{6.46}$$

și

$$[I] = [Y]\,[U] = [Y]\,[A]_t([A]\,[Y]\,[A]_t)^{-1}\,[A]\,[J]. \tag{6.47}$$

6.2.4.5. **Cazul general.** Să presupunem că $[E] \neq 0$ și $[J] \neq 0$, adică sistemul are atît surse de tensiune, inserate în laturile rețelei, cît și surse de curent care injectează curenți în nodurile sale.

---

* Vezi 2.4.5.2.

** Vezi 2.4.5.5.

Prin analogie cu metoda buclelor * să notăm

$$[I] - [J] = [B]_t [J'], \tag{6.48}$$

în care $[J']$ reprezintă curenţi ciclici.

Notînd şi în acest caz

$$[E'] = [B][E] = [B][U] \tag{6.49}$$

şi ţinînd seama de relaţiile (6.28) şi (6.48) se obţine succesiv

$$[E'] = [B] [U] = [B] [Z] [I] = [B] [Z] ([B]_t [J'] + [J]) =$$

$$= [B] [Z] [B]_t [J'] + [B] [Z] [J].$$

Rezultă apoi — ţinînd seama de (6.49) —

$$[J'] = ([B] [Z] [B]_t)^{-1} ([E'] - [B] [Z] [J]) =$$

$$= ([B] [Z] [B]_t)^{-1} [B] ([E] - [Z] [J])$$

şi deci — ţinînd seama de relaţia (6.48) — se obţine

$$[I] = [J] + [B]_t [Z']^{-1} [B] ([E] - [Z] [J]) \tag{6.50}$$

în care s-a notat

$$[Z'] = [B] [Z] [B]_t.$$

Notînd acum — prin analogie cu metoda perechilor de noduri ** —

$$[U] - [E] = [A]_t [U'], \tag{6.51}$$

în care $[U']$ reprezintă potenţiale la noduri în raport cu un potenţial de referinţă arbitrar ales, dacă se scrie

$$[J'] = [A] [J] = [A] [I]$$

şi se ţine seama de relaţiile (6.41) şi (6.51), se obţine succesiv

$$[J'] = [A] [I] = [A] [Y] [U] = [A] [Y] ([A]_t [U'] + [E]) =$$

$$= [A] [Y] [A]_t [U'] + [A] [Y] [E].$$

Rezultă

$$[U'] = [Y']^{-1} [A] ([J] - [Y] [E])$$

---

* Relaţia (6.33).

** Relaţia (6.43).

şi deci

$$[U] = [E] + [A_t]\ [Y']^{-1}[A]([J] - [Y]\ [E]),$$

în care am notat

$$[A]\ [Y]\ [A]_t = [Y'].$$

Iar

$$[V] = [U] - [E] = [A_t]\ [Y']^{-1}\ [A]\ ([J] - [Y]\ [E]) \qquad (6.52)$$

Relaţiile (6.50) şi (6.52) dau cele $2L$ necunoscute ale problemei.

6.3. METODE DE CALCUL FOLOSIND SCHEME SPECIALE

6.3.1. SCHEMELE FUNCŢIONALE ALE CIRCUITELOR ELECTRICE

6.3.1.1. Generalităţi şi definiţii. Studiul circuitelor electrice constă în determinarea comportării unei reţele electrice atunci cînd la una sau mai multe perechi de borne ale sale se aplică semnale electrice (surse de tensiune sau surse de curent). Aplicînd teoremele lui KIRCHHOFF, se va obţine un număr de ecuaţii, suficient pentru găsirea mărimilor necesare (curenţi, potenţiale, sau energii) care să caracterizeze funcţionarea reţelei. Rezolvarea acestui sistem de ecuaţii — oricare ar fi metoda folosită — conduce întotdeauna la rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale, de un ordin oarecare, între un *anumit* semnal aplicat reţelei date şi un *anumit* răspuns pe care îl dă reţeaua; de exemplu se aplică la o anumită pereche de borne a reţelei electrice o tensiune electrică şi se cere să se determine curentul electric care circulă într-o anumită latură a reţelei *.

În cazul unei reţele electrice liniare invariante, cu parametri localizaţi, legătura dintre *răspuns* sau *semnalul* de ieşire $y(t)$, datorit unei *excitaţii* exterioare sau *semnalul de intrare* $x(t)$ este dată deci de o ecuaţie diferenţială de forma

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n x = b_0 \frac{d^m y}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m y. \qquad (6.53)$$

Analizarea unui asemenea sistem se face mult mai comod dacă se introduce simbolul lui HEAVISIDE ** $p = \frac{d}{dt}$, care transformă ecuaţia diferenţială (6.53) de ordinul n în ecuaţia algebrică

$$(a_0\ p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)\ x = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m) y \qquad (6.54)$$

sau

$$\mathrm{N}(p) \cdot x = \mathrm{M}(p) \cdot y, \qquad (6.55)$$

în care $\mathrm{N}(p)$ şi $\mathrm{M}(p)$ sînt polinoamele în p din relaţia (6.54). Relaţia (6.55) poate fi scrisă simbolic sub forma

$$\frac{y}{x} = \frac{\mathrm{N}(p)}{\mathrm{M}(p)} = \mathrm{T}(p). \qquad (6.56)$$

---

* Vezi 3.6.1.
** Vezi 10.2.1.

Fracţia algebrică $T(p)$, care dă legătura dintre răspunsul y şi semnalul x se numeşte *transmitanţă* sau *funcţia de transfer* a reţelei considerată. Este uşor de văzut că de la ecuaţia (6.56) respectiv (6.54) se poate uşor ajunge la ecuaţia diferenţială (6.53) dacă se înlocuieşte p cu $\frac{d}{dt}$.

Cu ajutorul noţiunii de transmitanţă se poate reprezenta grafic legătura între un semnal de intrare x şi un semnal de ieşire y (fig. 6.21). O astfel de schemă se numeşte o *schemă funcţională* sau *schemă bloc* şi arată că x este o excitaţie care acţionînd asupra unui sistem de transmitanţă $T(p)$ produce semnalul de ieşire y, ca răspuns al acestei excitaţii.

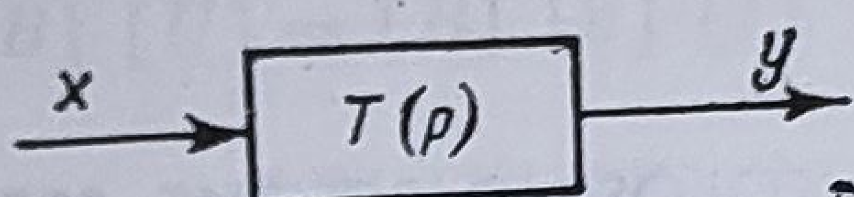


Fig. 6.21. Schemă funcţională.

Construirea schemelor funcţionale este utilă prin aceea că transmitanţa unui sistem oarecare poate fi determinată prin simpla citire a schemei funcţionale, asupra căreia urmează a se face uneori unele transformări simple. Cunoscînd transmitanţa sistemului respectiv, se poate deduce apoi ecuaţia de funcţionare (6.53) a sistemului prin procedeul indicat, operaţia apare astfel mult mai simplă decît obţinerea ecuaţiei (6.53) prin eliminarea succesivă a necunoscutelor sistemului dat.

Dacă în ecuaţia (6.55) se face $x = 0$, se obţine ecuaţia

$$M(p).y = 0$$

care reprezintă *regimul liber* de funcţionare a reţelei date. În consecinţă, *ecuaţia caracteristică* a sistemului dat este

$$M(p) = 0$$

şi deci rădăcinile ecuaţiei caracteristice sînt polii transmitanţei.

O altă noţiune necesară în studiul circuitelor electrice, sau a sistemelor în general, este aceea de *clasă a sistemului*. Făcînd în expresia transmitanţei $p = 0$ aceasta înseamnă că în ecuaţia diferenţială respectivă au fost anulate toate derivatele, ceea ce înseamnă că în sistemul corespunzător $x = Const.$ şi $y = Const.$ Se obţine astfel *starea de repaus* a sistemului, cu condiţia ca transmitanţa să aibă o valoare constantă pentru $p = 0$. Astfel, în cazul ecuaţiei (6.53), starea de repaus e dată de relaţia

$$a_n x = b_m y$$

şi transmitanţa corespunzătoare

$$[T(p)]_{p=0} = \frac{a_n}{b_m}$$

se reduce la o valoare constantă.

În general însă

$$\lim_{p \to 0} T(p) = f\left(\frac{1}{p^n}\right) \quad n \in (-\infty, +\infty).$$

În acest caz se zice că sistemul dat este un *sistem de clasa n* sau de *ordinul n* *.

Astfel sistemul considerat mai înainte este un sistem de *clasa 0*, transmitanța sa comportîndu-se ca o constantă pentru $p = 0$.

Pentru un sistem de *clasa 1*, pentru $p = 0$ transmitanța se comportă ca o funcție de $\frac{1}{p}$, astfel, că pentru o valoare constantă a mărimii de intrare x, mărimea de ieșire y variază proporțional cu *integrala temporală* a lui x, adică liniar în funcție de timp.

În general, pentru $n > 0$, un sistem de clasă n se comportă, în regim permanent, ca un *integrator* de ordinul n, a cărui mărime de ieșire variază ca t^n pentru o valoare constantă de intrare.

Dacă $n < 0$, sistemul se comportă ca un *diferențiator* de ordinul n, a cărui mărime de ieșire este nulă pentru orice valoare constantă de intrare.

6.3.1.2. **Elementele circuitelor electrice.** Elementele pasive fundamentale ale unei rețele electrice sînt rezistorul de rezistență R, bobina de inductanță L și condensatorul de capacitate C. Între tensiunea aplicată la bornele oricărui din aceste elemente și curentul rezultant care le străbate și reciproc, între curentul ce străbate aceste elemente și tensiunea ce apare la bornele respective (căderea de tensiune în elementul corespunzător) există relațiile funcționale cunoscute **. Aceste relații funcționale și schemele funcționale corespunzătoare sînt date în figura 6.22. Din aceste scheme se deduc și transmitanțele corespunzătoare.

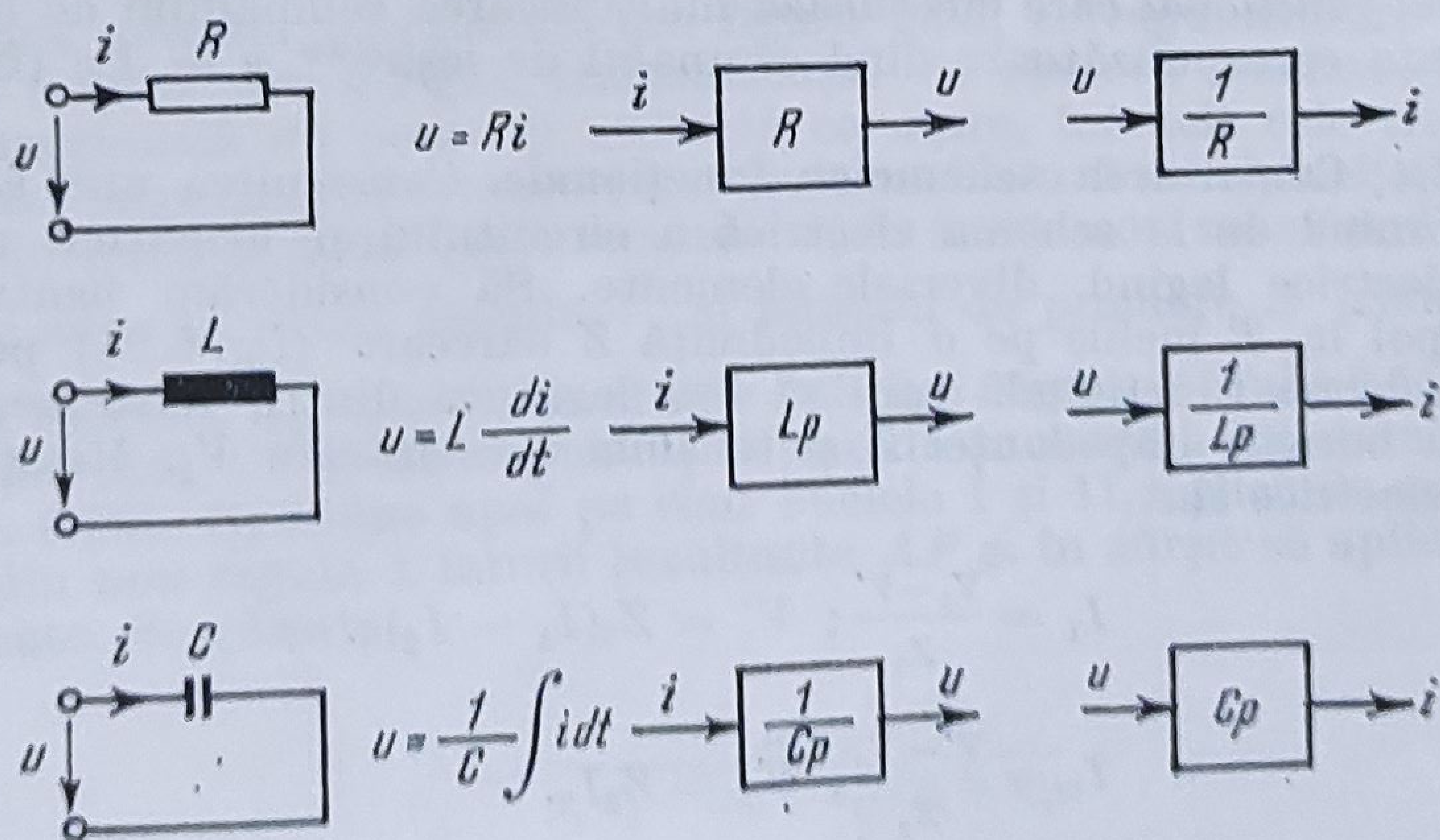


Fig. 6.22. Schemele funcționale ale elementelor pasive fundamentale ale unei rețele electrice

* care nu trebuie confundat cu ordinul unei ecuații diferențiale.

** Vezi 4.3.4.

Trebuie observat, că dacă în expresia transmitanţelor se înlocuieşte p cu jω, acestea se transformă în impedanţele (reactanţele) respectiv admitanţele (susceptanţele) circuitelor corespunzătoare în funcţionarea în regim cuasistaţionar în circuitele electrice de curent alternativ. Transmitanţele pot fi considerate ca impedanţe, respectiv admitanţe generalizate ale circuitelor electrice.

6.3.1.3. Elementele fundamentale ale schemelor bloc. Pentru construirea schemelor bloc sînt necesare unele elemente caracteristice acestui fel de scheme şi anume:

Sumatorul este elementul cu ajutorul căruia se face suma sau diferenţa semnalelor * (fig. 6.23, *a*); în acest din urmă caz, acestui element i se mai spune şi *detector de abatere*.

Captatorul este elementul care culege un semnal dat de-a lungul unei linii de transmitere a unei informaţii (fig. 6.23, *b*).

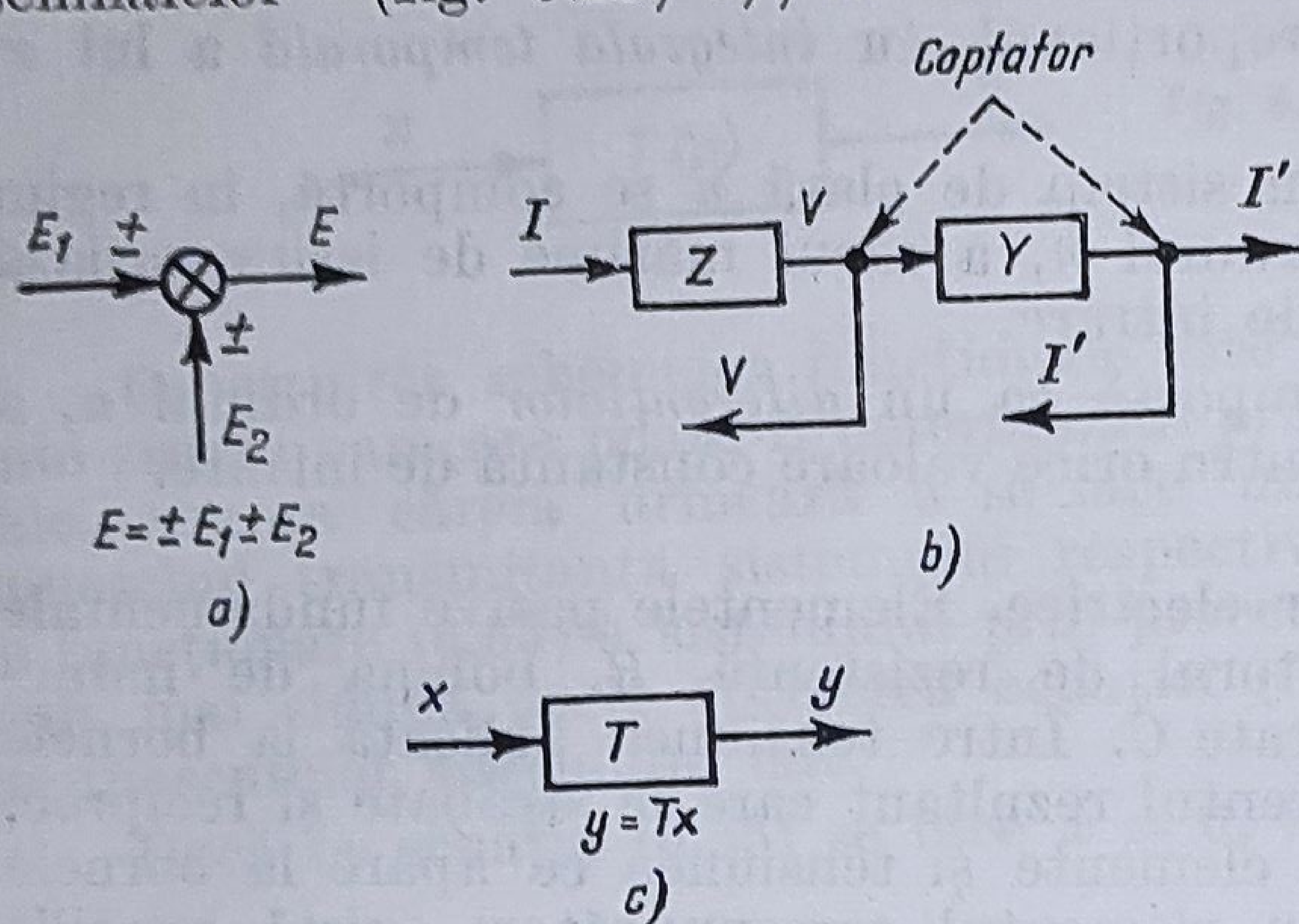


Fig. 6.23. Elementele fundamentale ale unei scheme funcţionale
a) Sumator; b) Captator; c) Element funcţional

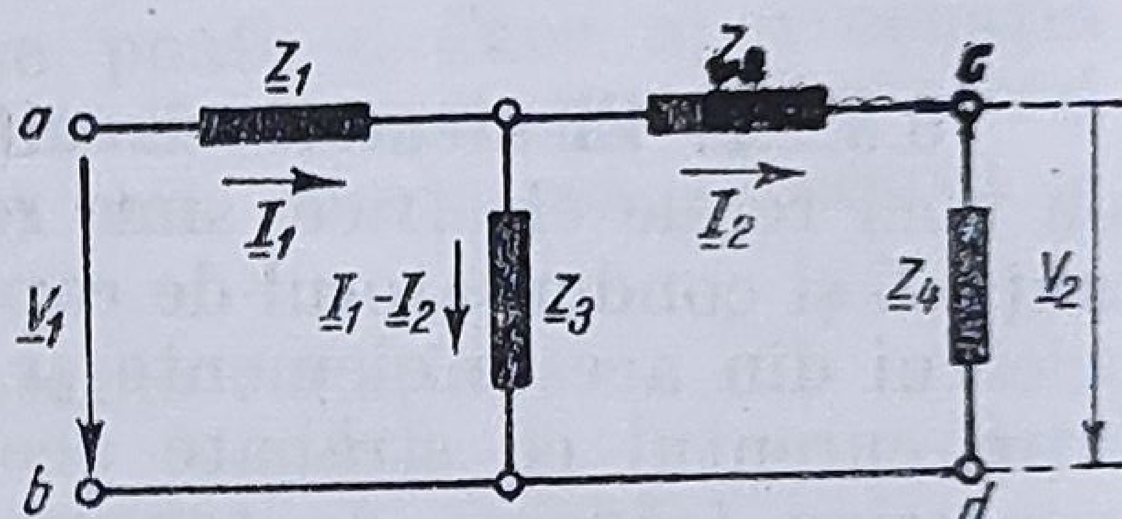


Fig. 6.24. Cuadripol în sarcină.

Blocul funcţional care efectuează multiplicarea semnalului de intrare prin transmitanţa corespunzătoare dînd semnalul de ieşire** $y = Tx$ (fig. 6.23, *c*).

6.3.1.4. Construirea schemelor funcţionale. Construirea unei scheme bloc se face pornind de la schema electrică a circuitului şi urmărind pas cu pas relaţiile electrice legînd diversele elemente. Să considerăm pentru aceasta un cuadripol în *T* închis pe o impedanţă *Z* oarecare (fig. 6.24) pentru care se caută schema funcţională care să dea legătura dintre tensiunea de ieşire V_2, de la bornele impedanţei *Z* şi tensiunea de intrare V_1. Relaţiile dintre mărimile electrice sînt

$$I_1 = \frac{V_1 - V'}{Z_1}; \quad V' = Z_3(I_1 - I_2);$$

$$I_2 = \frac{V' - V_2}{Z_2}; \quad V_2 = Z_4 I_2.$$

---

* Se obişnuieşte ca sumatorul să-şi păstreze numai funcţia de *sumare* a semnalelor. Pentru a obţine *o diferenţă* se utilizează un bloc funcţional care să schimbe semnul semnalului respectiv, pentru care $T = -1$.

** Cele două semnale *x* şi *y* pot fi de natură diferită, de exemplu unul electric şi unu mecanic, blocul funcţional operînd în acelaşi timp şi o transformare de energie.

Construcția schemei funcționale se face imediat urmărind aceste relații (fig. 6.25).

6.3.1.5. **Reguli pentru reducerea schemelor funcționale.** Pentru a se putea calcula transmitanța cu ajutorul unei scheme bloc este necesar a se reduce această schemă la o schemă simplă de tipul celei arătate în figura 6.21. Reducerea schemei constă în modificarea diverșelor elemente ale ei în elemente mai simple și astfel, din aproape în aproape, să se obțină transmitanța dintre semnalul de intrare și cel de ieșire. Această reducere se face utilizînd unele reguli simple care sînt date în tabloul 6.1 *.

6.3.1.6. **Exemple de scheme funcționale pentru circuite electrice tip.** În tabloul 6.2 sînt date două circuite electrice simple pentru care s-a dat schema

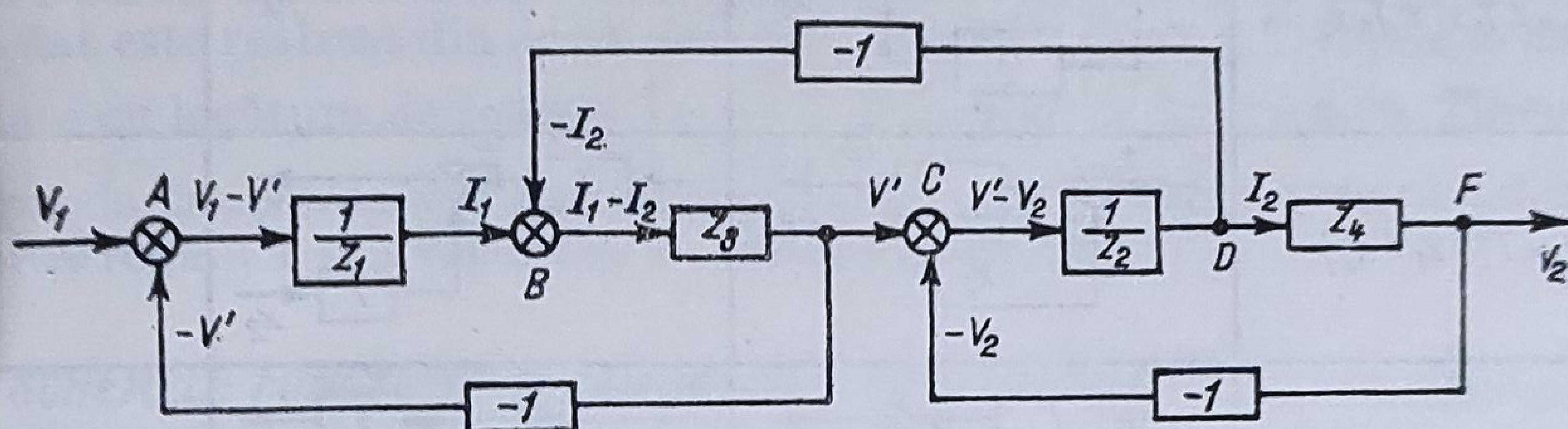


Fig. 6.25. Schema funcțională a cuadripolului din figura 6.24.

electrică, schema funcțională corespunzătoare și transmitanța respectivă. Determinarea acestor elemente se face imediat urmînd regulile indicate în tabloul 6.1.

6.3.1.7. **Exemplu de aplicație.** Fie să aplicăm regulile date în tabloul 6.1 reducerii schemei funcționale din figura 6.25, corespunzătoare circuitului din figura 6.24 pentru a-i găsi transmitanța. Se observă imediat că, această schemă funcțională nu poate fi utilizată ca atare, întrucît cele trei bucle se intersectează între ele și în consecință, trebuie modificată astfel, încît să comporte o buclă principală și două bucle secundare; în acest scop sumatorul B trebuie deplasat și adus la stînga blocului $\frac{1}{Z}$ și punctul de preluare D trebuie mutat la dreapta blocului Z_4, ceea ce se obține aplicînd regula 4 (Tab. 6.1). Se aplică apoi laturilor AC, CF și AF regula 1, obținîndu-se schema funcțională echivalentă (fig. 6.26). Se reduc apoi pe rînd buclele I și II, aplicîndu-se regula 8; se aplică din nou regula 1 laturii rezultante AF și în sfîrșit se aplică regula 8 buclei rămase. Se găsește

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_3 + (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)} \tag{6.57}$$

care este expresia transmitanței căutate.

---

* În exemplul nr. 8 din tabloul 6.1, circuitul care conține transmitanța T_2 poartă numele de *buclă de reacție* și poate apărea în numeroase scheme funcționale reprezentînd circuite electrice.

REGULI DE TRANSFORMARE A SCHEMELOR FUNCȚIONALE

Tabloul 6.1.

Nr. crt.	Expresia algebrică	Schema funcțională corespunzătoare	Schema funcțională echivalentă	Expresia algebrică rezultantă
1	Regula înmulțirii $x_2 = T_1 x_1$ $x_3 = T_1 x_2$ $x_3 = T_1 \cdot T_2 \cdot x_1$	x_1 → T_1 → x_2 → T_2 → x_3	x_1 → $T_1 \cdot T_2$ → x_3	$x_3 = T_1 T_2 x_1$
2	Regula adunării $x_2 = \pm T_1 x_1 \pm T_2 x_2$	x_1; T_1; T_2; ±; ±; x_2	x_1 → $\pm T_1 \pm T_2$ → x_2	$x_2 = (\pm T_1 \pm T_2) x_1$
3	$x_3 = T(\pm x_1 \pm x_2)$	±; x_1; ±; x_2; T; x_3	x_1; T; ±; ±; x_3; T; x_2	$x_3 = \pm T x_1 \pm T x_2$
4	$x_3 = \pm T x_1 \pm x_2$	x_1; T; ±; ±; x_2; x_3	±; x_1; ±; $\frac{1}{T}$; x_2; T; x_3	$x_3 = T(\pm x_1 \pm \frac{1}{T} x_2)$
5	$x_2 = T x_1$ $x_3 = x_1$	x_1; T; x_2; x_3	x_1; T; x_2; $\frac{1}{T}$; x_3	$x_2 = T x_1$ $x_3 = T \cdot \frac{1}{T} x_1 = x_1$
6	$x_2 = T x_1$	x_1; T; x_2; x_2	x_1; T; x_2; T; x_2	$x_2 = T x_1$
7	$x_2 = (x_1 + x_2) T$	+; x_1; +; x_2; T; x_2	x_1 → $\frac{T}{1-T}$ → x_2	$x_2 = \frac{T}{1-T} x_1$
8	$x_2 = (x_1 + T_2 x_2) T_1$	+; x_1; +; $T_2 x_2$; T_1; x_2; T_2	$\frac{T_1}{1-T_1 T_2}$	$x_2 = \frac{T_1}{1-T_1 T_2} x_1$
9	Bucla proprie (Autotransformare) $x_2 = T_1 x_1 + T_2 x_2$ $x_3 = T_3 x_2$	x_1; T_1; +; +; x_2; T_3; x_3; T_2	x_1 → $\frac{T_1 T_3}{1-T_2}$ → x_3	$x_3 = \frac{T_1 T_3}{1-T_2} x_1$

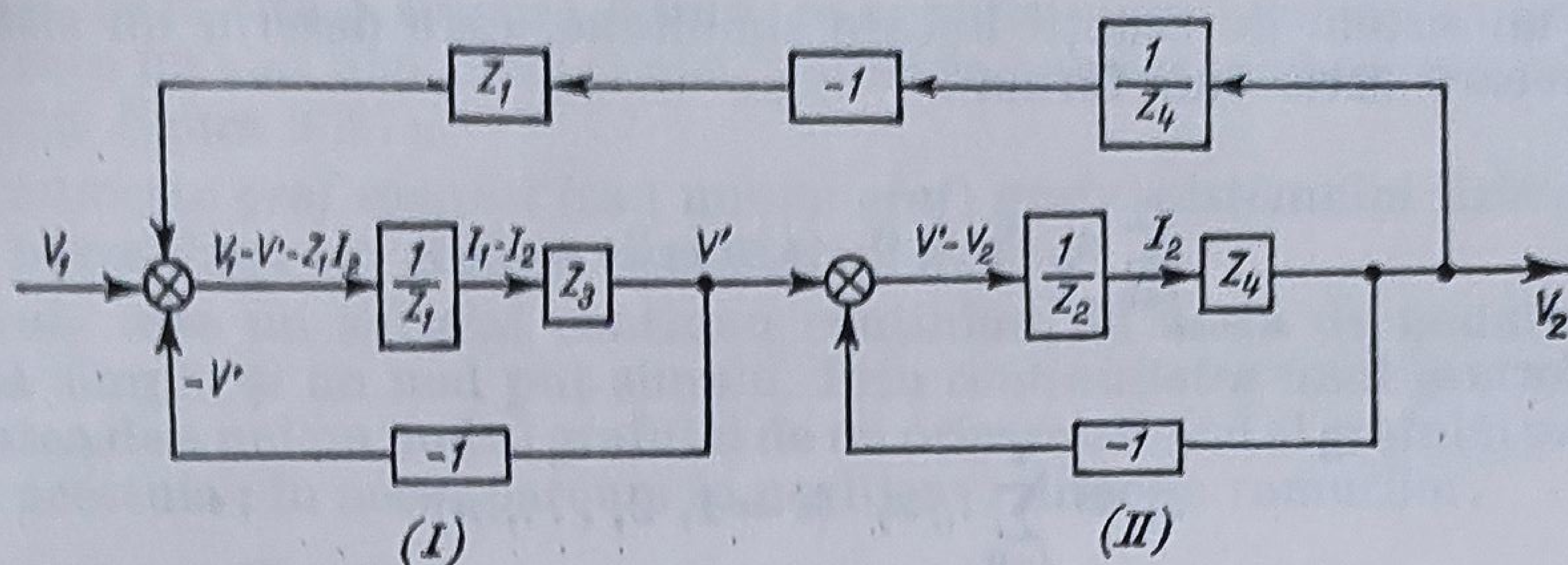


Fig. 6.26. Schema funcțională modificată

OBSERVAȚIE. Calculul se poate face imediat dacă se observă că circuitul dat este realizat din două structuri de tip 1 (Tab. 6.2) legate în cascadă * și podate cu legătura de reacție $\left(-\frac{Z_1}{Z_4}\right)$ realizîndu-se figura 6.26. Ținînd seama de expresia transmitanței structurilor de tip 1 și reducînd această schemă prin aplicarea regulii 1 și a regulii 8, se regăsește relația (6.57).

SCHEMELE FUNCȚIONALE A UNOR CIRCUITE ELECTRICE TIP *Tabloul 6.2.*

Nr. crt.	Schema electrică	Schema funcțională corespunzătoare	Transferanța $\frac{V_2}{V_1}$
1	Z_1, I, V_1, Z_2, V_2	V_1, V_1-V_2, $\frac{1}{Z_1}$, I, Z_2, V_2, $-V_2$, -1	$\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$
2	Z_1, Z_2, I, V_1, Z_3, V_2	V_1, V_1-V_2, $\frac{1}{Z_1+Z_2}$, I, Z_3, V_2, $-V_2$, -1	$\frac{Z_3}{Z_1+Z_2+Z_3}$

6.3.2. METODA GRAFURILOR DE TRANSFER

6.3.2.1. **Generalități și definiții.** Metoda grafurilor de transfer ** este — în principiu — identică cu metoda schemelor funcționale. Această metodă este totuși mai simplă prin simplificarea schemelor care se obțin și a unei raționalizări mai complete ce se face.

* Două structuri sînt legate în cascadă sau în lanț cînd bornele de ieșire a uneia din ele sînt legate la bornele de intrare a celeilalte. Vezi 6.4.4.10, α.

** Unii autori numesc aceste grafuri, *grafuri de fluență*. Vezi [83, 162, 245].

Fie un sistem de ecuaţii lineare simultane, care descriu un sistem fizic liniar oarecare scris sub forma

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.58}$$

sau sub forma

$$x_i = \sum_{j=0}^{n} t_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.59}$$

în care

$$t_{ij} = a_{ij} \text{ pentru } i \neq j \quad \text{şi} \quad t_{ii} - 1 = a_{ii}.$$

Variabila x_0 este singura variabilă independentă a sistemului, variabilele $x_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt variabile dependente. Pentru un sistem fizic liniar cu constante repartizate, coeficienţii a_{ij}, respectiv t_{ij}, reprezintă în general operaţii integro-diferenţiale; transformarea LAPLACE * dă posibilitatea transformării lor în ecuaţii algebrice, condiţiile iniţiale modificînd termenii $a_{i0}\,x_0$, respectiv $t_{i0}\,x_0\ (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Se numeşte *graf de transfer* o schemă formată dintr-un număr de laturi avînd un sens de parcurgere definit, numite *laturi* sau *ramuri dirijate*, interconectate în anumite puncte numite *noduri* şi care defineşte în mod univoc sistemul de ecuaţii algebrice liniare.

Nodurile reprezintă *variabilele* sistemului — dependente sau independente; ele sînt staţiile unde apar semnalele şi unde se face sumarea acestor semnale.

Laturile sau *ramurile* corespund relaţiilor între variabile; orientarea acestor ramuri constituie o *cale unică* pentru transmiterea semnalului. Fiecărei ramuri i se asociază un coeficient numit *transmitanţă* astfel că semnalul dintr-un nod de ieşire a ramurii este egal cu produsul dintre semnalul din nodul de intrare a ramurii prin transmitanţa acesteia. Relaţiile dintre variabile rezultă din legile fizice care intervin în funcţionarea sistemului (legea lui OHM, teoremele lui KIRCHHOFF etc.) **.

Laturile sînt *convergente* dacă orientarea lor este convergentă *către* un nod; ele sînt *divergente* dacă ea este *dinspre* un nod.

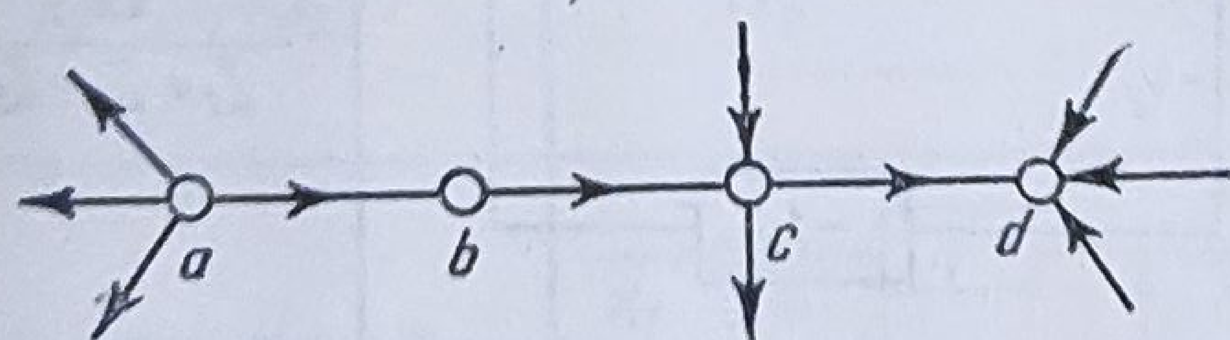


Fig. 6.27. Diverse tipuri de noduri.

Un nod care are o latură, şi numai una singură, convergentă şi o latură, şi numai una singură, divergentă se numeşte un *nod lanţ* (Ex.: nodul *b* din figura 6.27).

Se numeşte *nod sursă* nodul din care *ies* una sau mai multe laturi (Ex: nodul *a* din figura 6.27) şi *nodul puţ* sau *nod absorbant*, nodul în care *intră* una sau mai multe laturi (Ex.: nodul *d* din figura 6.27); nodurile sursă sau puţ,

* Vezi 10.4.

** Grafurile care reprezintă sistemul de ecuaţii (6.58) se numeşte *graf de confluenţă* sau *graf Coates* [85]; acela care reprezintă sistemul de ecuaţii (6.59) se numeşte *graf de fluenţă* sau *graf de transfer* sau *graf* MASON [181]. În expunerea de faţă nu ne ocupăm decît de grafurile de transfer.

care nu au decît cîte o singură latură, se numesc noduri sursă sau puț *simple*. Nodurile care nu sînt nici surse și nici puțuri se numesc *noduri secundare* (Ex : nodul *c* din figura 6.27).

Se numește *graf complet* (sau numai *graf*) graful sistemului fizic corespunzător ; o parte dintr-un graf se numește *subgraf*.

O *cale* este un subgraf continuu conținînd, în afară de noduri lanț, un nod sursă simplu și un nod puț simplu. Prin *continuitatea* unui graf se înțelege posibilitatea de a uni un nod al grafului de un oricare alt nod al grafului parcurgînd ramurile acestuia ; în acest parcurs se neglijează direcția ramurilor.

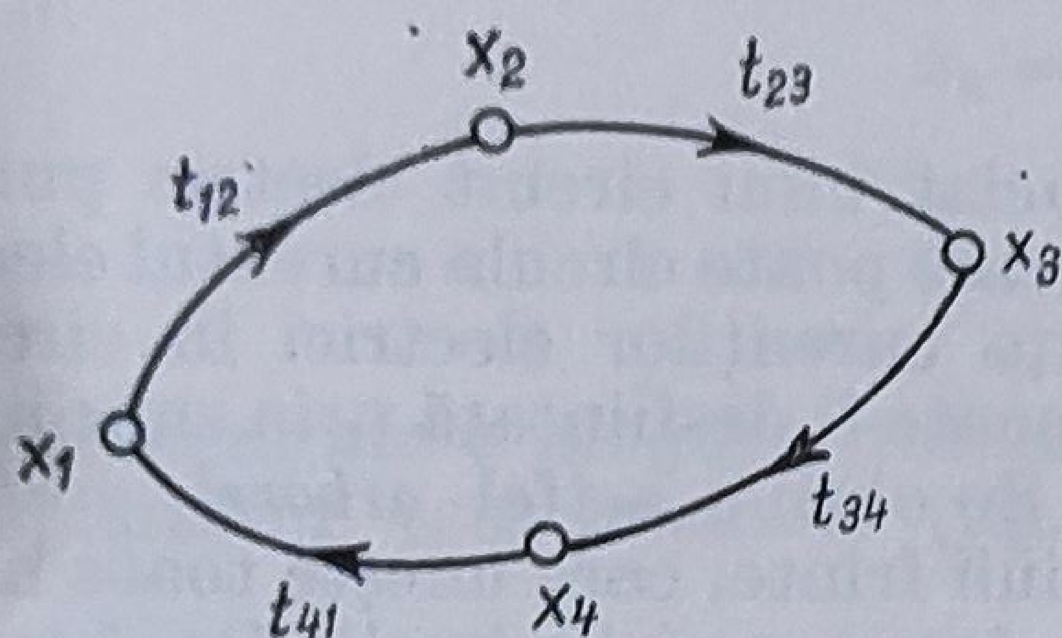


Fig. 6.28. Buclă.

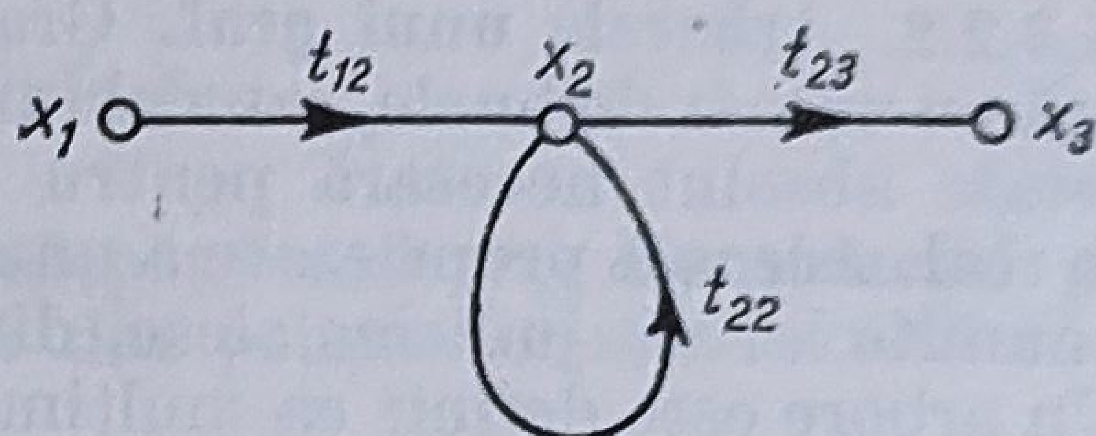


Fig. 6.29. Buclă proprie.

Dacă nodul sursă simplu și nodul puț simplu al unei căi sînt nodurile sursă și puț ale grafului complet ale sistemului, atunci calea se numește o *cale directă*.

Cînd un semnal parcurge o porțiune dintr-un graf de transfer de-a lungul diverselor laturi și în sensul orientării acestora se zice că semnalul parcurge un *lanț*.

Orice lanț care pleacă dintr-un anumit nod (o sursă) pentru a ajunge la un nod de natură diferită (un puț) constituie o *cascadă*. Laturile și nodurile care aparțin acestui lanț sînt laturile și nodurile cascadei.

O *buclă* este un subgraf continuu care nu conține decît noduri lanț (fig. 6.28).

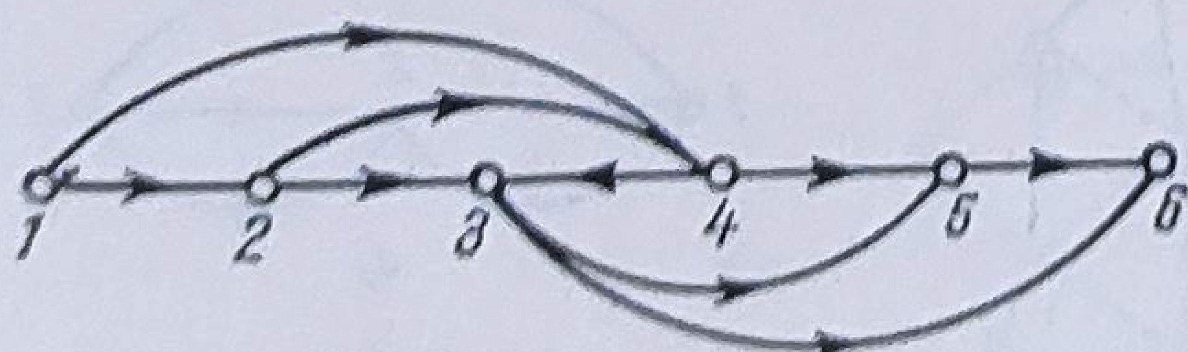
O *buclă proprie* este o buclă avînd un singur nod lanț (fig. 6.29) ; transmitanța unei asemenea bucle se numește uneori *transmitanța proprie*.

Un graf care comportă numai cascade se numește un *graf de cascade* (fig. 6.30, *a*) ; dacă graful conține numai bucle, se numește un graf de bucle (fig. 6.30, *b*).

Se numește *nod esențial* nodul asociat unei bucle proprii ; un *nod esențial izolat* este deci un nod lanț.

Nodul neesențial este nodul care nu este asociat unei bucle simple ; un nod lanț este un exemplu de nod neesențial.

Pentru exemplificare să considerăm graful din figura 6.31 care este constituit din cinci noduri, șase laturi, o buclă și o buclă proprie, fiecare nod reprezentînd o variabilă a sistemului.



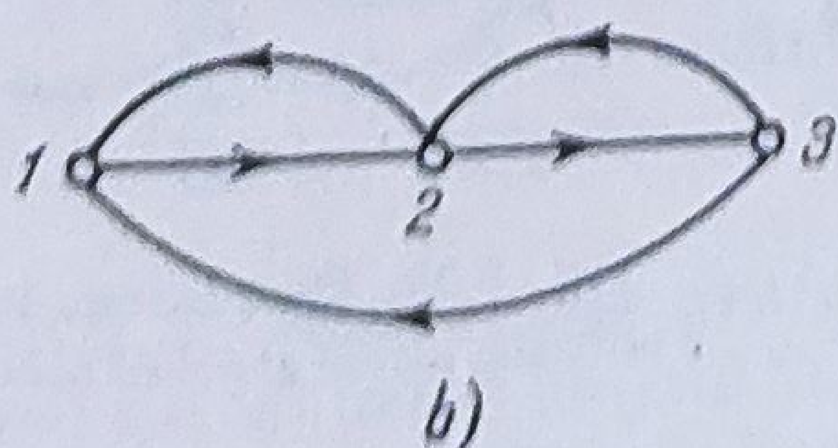


Fig. 6.30. Graf de cascade (a) și graf de bucle (b).

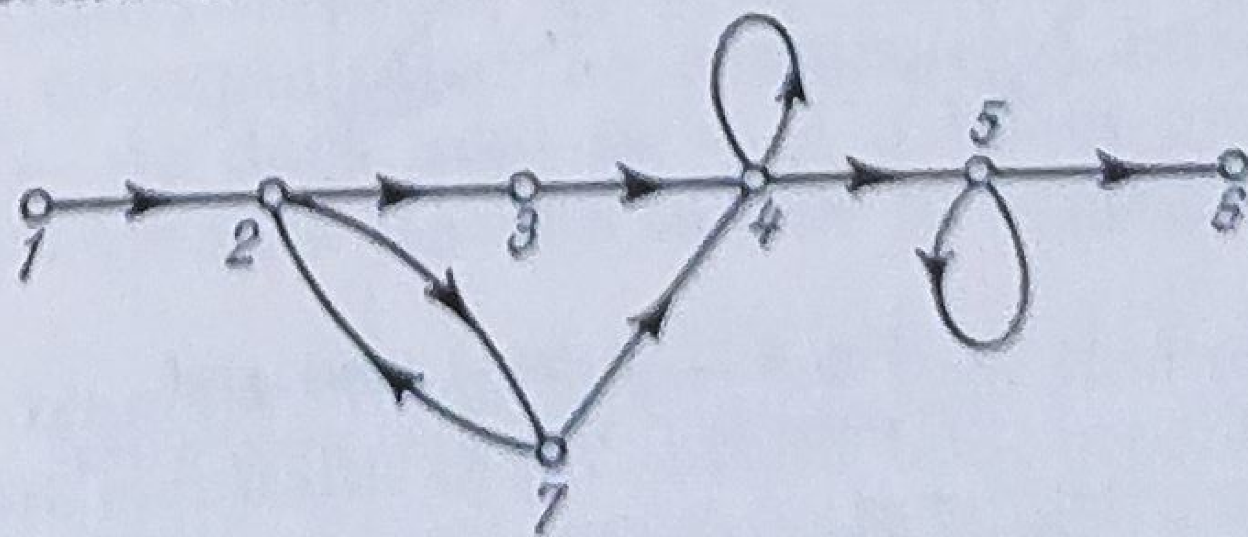


Fig. 6.31. Exemplu de graf de transfer.

Conform definiţiilor date, acest graf are
— şapte *noduri* (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
— opt *laturi* (1—2, 2—3, 3—4, 4—5, 5—6, 2—7, 7—2, 7—4)
— două *căi directe* (1—2—3—4—5—6, 1—2—7—4—5—6)
— o *buclă* (2—7—2)
— două *bucle simple* (4—4, 5—5)
— două *noduri esenţiale* (4, 5)
— patru *noduri neesenţiale* (1, 2, 3, 6, 7)
— un *nod sursă* (1)
— un *nod puţ* (6)
— cinci *noduri secundare* (2, 3, 4, 5, 7).

6.3.2.2. **Arborele unui graf.** Graful asociat unui circuit electric pune în evidenţă un număr de bucle, sau ochiuri, prin care poate circula curentul electric, proprietate absolut necesară pentru existenţa curenţilor electrici în circuitul electric real. Această proprietate a unui graf poate fi desfiinţată prin suprimarea unor anumite laturi, judicios alese, din graf. Se obţine astfel *arborele grafului.*

Un arbore este definit ca mulţimea de linii frînte, care uneşte toate nodurile unei reţele, astfel ca în graful asociat să nu formeze nici o buclă. Dacă numărul de noduri ale reţelei este N, numărul minim de laturi care uneşte aceste noduri între ele este egal cu

$$P = N - 1.$$

Se vede că acest număr coincide cu numărul de perechi de noduri independente ale reţelei*. Aceste $N-1$ legături se numesc *laturile* sau *ramurile* arborelui. Dacă L este numărul total de laturi ale reţelei, atunci, numărul de laturi suprimate pentru a desface buclele este

$$B = L - N + 1,$$

care coincide chiar cu numărul total de bucle independente al reţelei **.

Este uşor de văzut că pentru un anumit graf pot exista mai multe posibilităţi de a realiza un arbore (fig. 6.32).

6.3.2.3. **Despicarea unui nod. Indicele unui graf.** Despicarea unui nod constă în separarea unui nod secundar în două părţi, o jumătate constituind o sursă, cealaltă jumătate constituind un puţ (fig. 6.33). Despicarea unui nod are drept consecinţă deschiderea unei bucle.

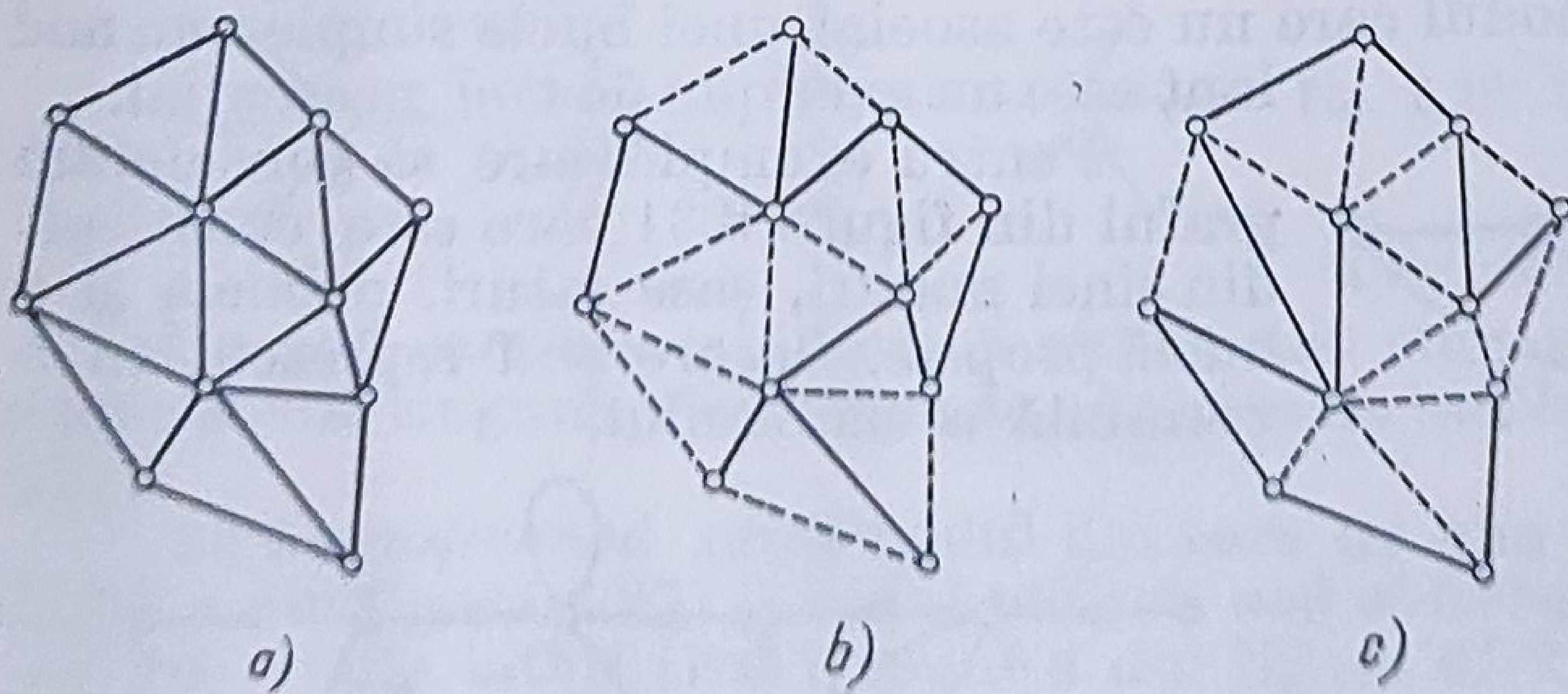


Fig. 6.32. Arborii unui graf.
a) graful dat ; b) şi c) doi arbori diferiţi

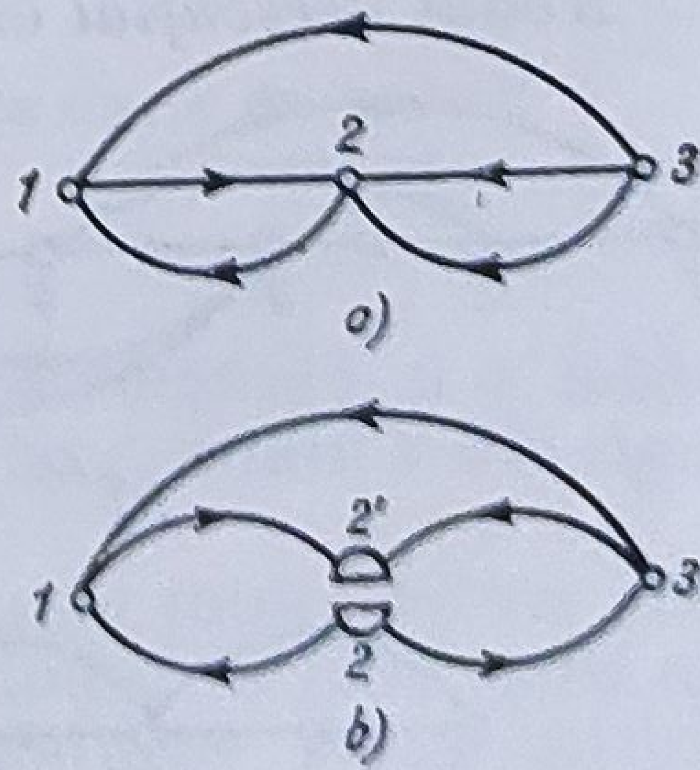


Fig. 6.33. Despicarea unui nod.
a) Graful dat; b) graful cu nodul 2 despicat

* Vezi 2.3.1.3.
** Vezi 2.3.1.3.

Se definește *indicele unui graf* ca fiind numărul total de noduri care trebuie despicate pentru a suprima toate buclele unui graf. Astfel indicele grafului din figura 6.33 este egal cu unu; graful din figura 6.31 este de indice trei întrucît, pentru a suprima toate buclele trebuie despicate trei noduri (nodurile 2, 4 și 5); un graf cascadă este de indice zero.

6.3.2.4. **Legătura funcțională dintre grafurile de transfer și sistemul de ecuații algebrice lineare.** Fie sistemul de ecuații

$$x_2 = t_{12}x_1 + t_{32}x_3,$$

$$x_3 = t_{13}x_1 + t_{23}x_2.$$

Acest sistem are o singură variabială independentă x_1. Construcția grafului corespunzător este imediată (fig. 6.34): din prima ecuație rezultă că nodul

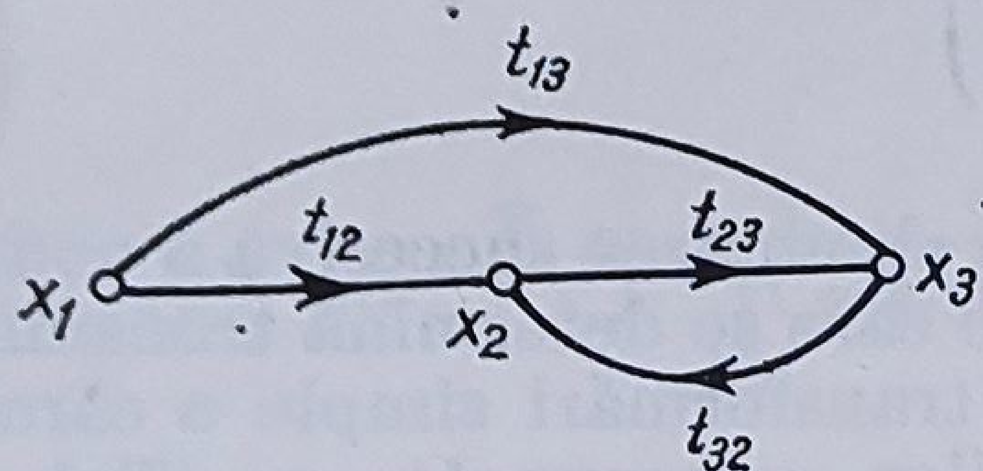


Fig. 6.34. Trasarea unui graf cu o singură variabilă independentă

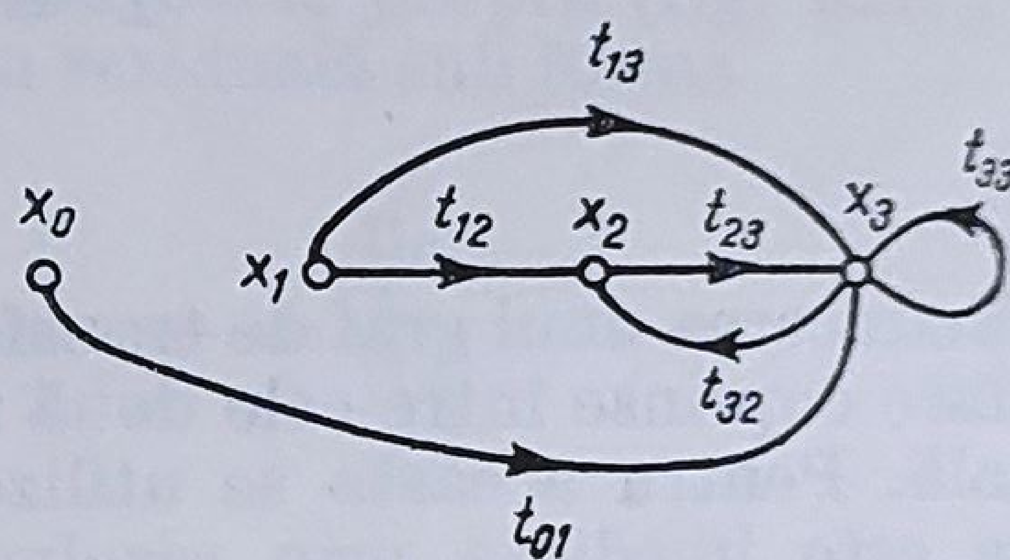


Fig. 6.35. Trasarea unui graf cu două variabile independente

x_2 primește semnale atît de la nodul x_1, cît și de la nodul x_3, iar nodul x_3 primește semnale de la nodurile x_1 și x_2.

Reciproc, cunoscînd graful sistemului dat, se poate stabili cu ușurință sistemul de ecuații corespunzător: se observă că nodul x_1 este un nod sursă iar nodurile x_2 și x_3 sînt noduri secundare; de asemenea se vede că nodul x_2 primește semnale de la nodurile x_1 și x_3, iar nodul x_3 primește semnale de la nodurile x_1 și x_2. Scriind relațiile respective, se obțin ecuațiile respective.

Fie acum sistemul de ecuații

$$x_2 = t_{12}x_1 + t_{32}x_3$$

$$x_3 = t_{03}x_0 + t_{13}x_1 + t_{23}x_2 + t_{33}x_3.$$

De data aceasta, sînt două variabile independente, x_0 și x_1. Urmînd aceeași regulă ca în cazul precedent, graful corespunzător se construiește imediat. Trebuie observat că în nodul x_3 este — de data aceasta — și o buclă proprie de transmitanță proprie t_{33} (fig. 6.35). Operația inversă se face în același mod.

6.3.2.5. **Reducerea grafurilor de transfer. Metoda pas cu pas.** Reducerea unui graf de transfer constă în a exprima semnalul la un anumit nod, considerat ca răspunsul sistemului, în funcție de unul sau mai multe semnale la alte noduri, considerate ca excitații sau mărimi de intrare. Reducerea grafului constă deci

în eliminarea anumitor noduri ale grafului inițial pentru a se obține un *graf rezidual* conținînd numai variabilele care interesează.

Pentru a se realiza practic reducerea grafului se separă nodul de intrare și nodul de ieșire, între care urmează să se determine *transmitanța reziduală* căutată. Dacă x_e este nodul de ieșire și x_i nodul de intrare, atunci expresia acestei transmitanțe este

$$T = \frac{x_e}{x_i};$$

Transmitanța reziduală se poate calcula și între două noduri de ieșire oarecare; astfel, dacă x_i e nodul de intrare, iar nodurile de ieșire sînt x'_e și x''_e, atunci transmitanța reziduală între aceste noduri e dată de relația

$$T' = \frac{x''_e}{x'_e} = \frac{\left(\frac{x''_e}{x_i}\right)}{\left(\frac{x'_e}{x_i}\right)}.$$

Reducerea unui graf de transfer constă în eliminarea succesivă a nodurilor secundare cuprinse între cele două noduri între care se determină transmitanța reziduală. Pentru aceasta se utilizează unele transformări simple a căror justificare este imediată prin rezolvarea ecuațiilor corespunzătoare (Tab. 6.3).

Transformarea unui graf prin eliminarea nodurilor secundare conduce la un reziduu care nu conține decît surse, puțuri și noduri esențiale la care sînt legate bucle proprii. Aceste bucle proprii au o influență particulară asupra transmitanței reziduale pe care voim să o calculăm. Fie un graf format din nodurile x_1, x_2 și x_3, avînd transmitanțele a_1 și a_2 și o buclă proprie, avînd transmitanța g (fig. 6.36, *a*). Să despicăm nodul x_2 și fie x'_2 și x''_2 semnalele corespunzătoare celor două jumătăți (fig. 6.36, *b*). Se pot scrie următoarele ecuații:

$$x'_2 = a_1x_1 + gx''_2,$$

$$x_3 = a_2x''_2.$$

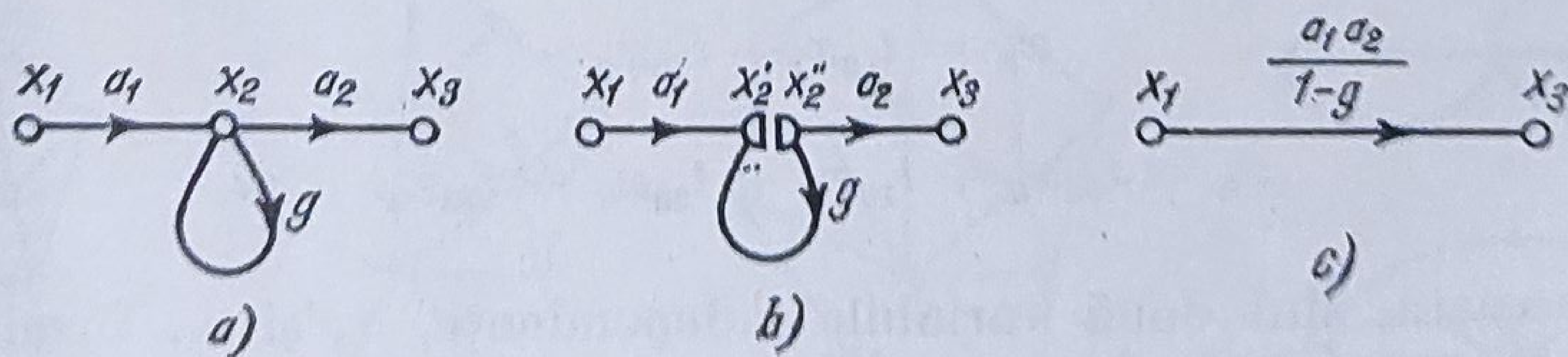


Fig. 6.36. Graf cu buclă proprie și reducerea lui.

Scriind că cele două semnale x'_2 și x''_2 sînt identice la nodul x_2, rezultă

$$a_1x_1 + \frac{g}{a_2}x_3 = \frac{1}{a_2}x_3$$

și deci (fig. 6.36, c),

$$x_3 = \frac{a_1 a_2}{1-g}\, x_1. \tag{6.60}$$

Relația (6.60) arată cum se reduce o buclă proprie. Transmitanța buclei proprii, g, se numește *cîștigul buclei* și diferența $d = 1-g$, se numește *diferența de buclă* sau *diferența de întoarcere*.

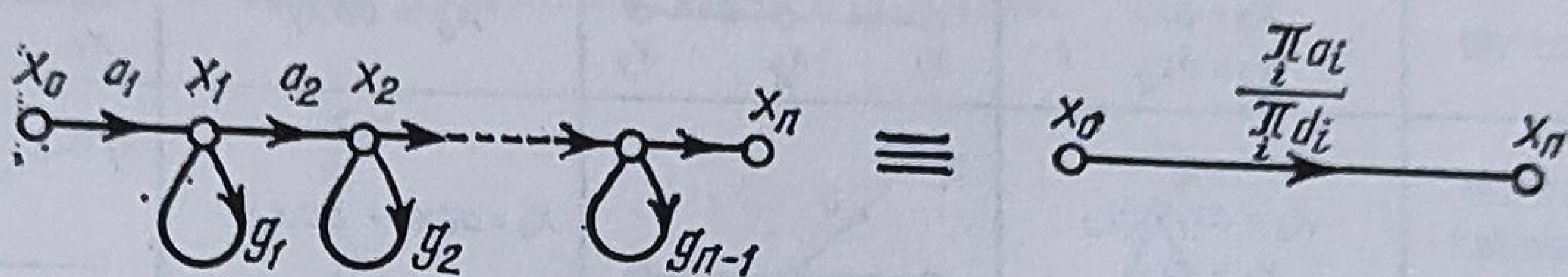


Fig. 6.37. Graf cascadă cu bucle proprii.

În cazul unui graf în cascadă comportînd bucle proprii (fig. 6.37), printr-un calcul analog se determină transmitanța reziduală sub forma

$$T = \frac{a_1 \cdot a_2 \dots a_m}{(1-g_1)(1-g_2)\dots(1-g_n)} = \frac{\prod_i a_i}{\prod_i d_i},$$

care constituie o generalizare a relației (6.60).

Este evident că se poate determina transmitanța echivalentă pentru orice graf conținînd bucle proprii cu condiția ca $g \neq 1$.

Operația de inversare a unui graf de transfer are ca scop transformarea acestuia într-unul mai simplu. Fie graful din figura 6.38,*a* reprezentat de ecuația

$$x_4 = ax_1 + bx_2 + cx_3.$$

Inversarea acestui graf constă în a transforma un nod puț în nod sursă și un nod sursă în nod puț. Fie să transformăm nodul x_4 în sursă și nodul x_1 în puț. Ecuația corespunzătoare se obține imediat din precedenta,

$$x_1 = -\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_3 + \frac{1}{a}x_4$$

și graful corespunzător e dat în figura 6.38, *b*.

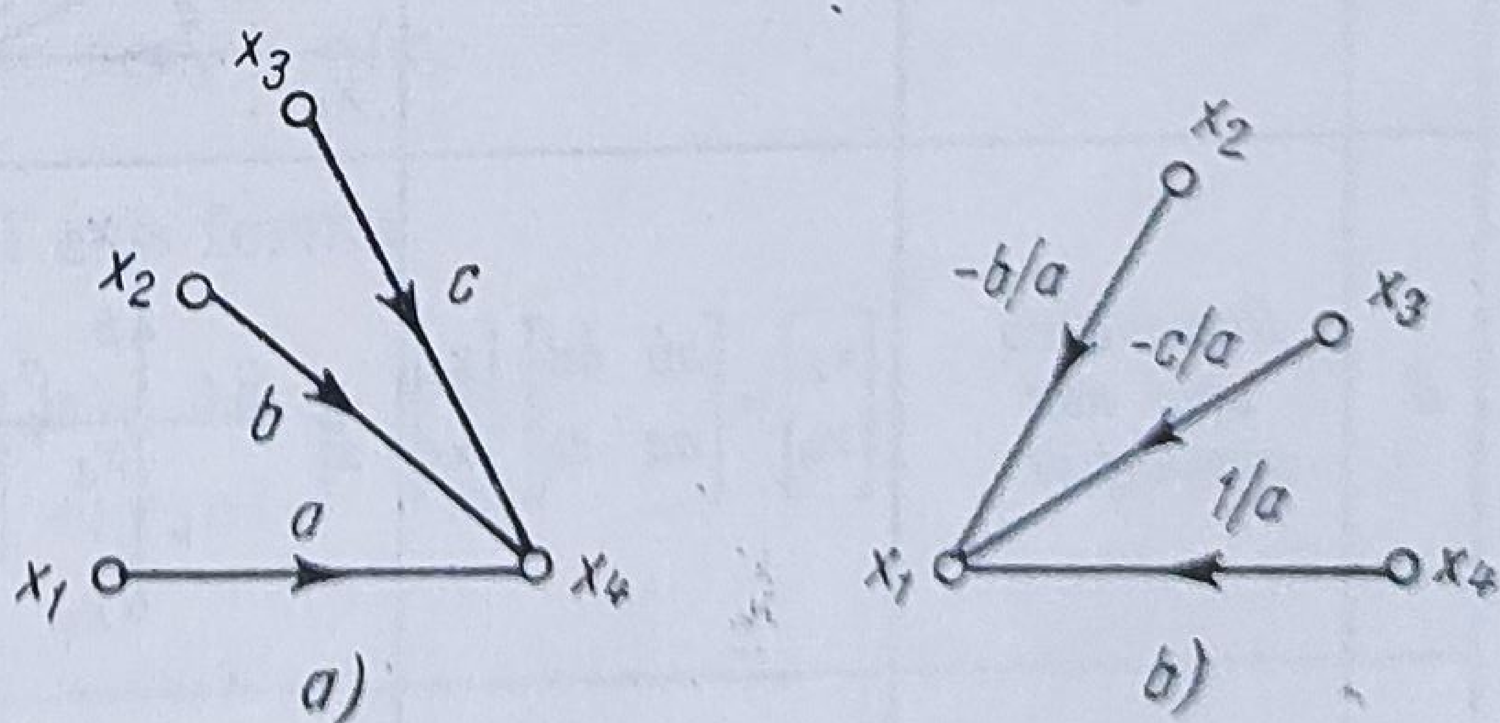


Fig. 6.38. Inversarea unui graf.

Rezultă dar că inversarea laturii $x_1 - x_4$ s-a tradus prin suprimarea laturilor $x_2 - x_4$ și $x_3 - x_4$ și crearea de noi laturi $x_2 - x_1$ și $x_3 - x_4$ de transmitanță respectivă $-\frac{b}{a}$ și $-\frac{c}{a}$; nodurile x_2 și x_3 rămîn noduri surse, nodul x_1 a devenit un

TRANSFORMĂRI ELEMENTARE DE GRAFURI

Tabloul 6.3

Nr. curent	OPERAȚIA	Sistemul de ecuații	Graful dat	Sistemul de ecuații redus	Graful corespunzător
1	Sumarea	$x_2 = ax_1 + bx_1$	a, b; x_1, x_2	$x_2 = (a+b)x_1$	$a+b$; x_1, x_2
2	Multiplicarea	$x_2 = ax_1$ $x_3 = bx_2$	a, b; x_1, x_2, x_3	$x_3 = abx_1$	ab; x_1, x_3
3	Reducere de nod secundar Nodul x_3	$x_3 = ax_1 + bx_2$ $x_4 = cx_3$	x_1, a; x_2, b, x_3, c, x_4	$x_4 = acx_1 + bcx_2$	x_1, ac; x_2, bc, x_4
4	Reducere de nod secundar Nodul x_3	$x_3 = ax_1 + dx_5$ $x_2 = bx_3$ $x_4 = cx_3$	x_2, b, a, d, x_1, x_3, x_5, c, x_4	$x_2 = abx_1 + bdx_5$ $x_4 = acx_1 + cdx_5$	x_2, ab, bd, x_1, x_5, ac, cd, x_4
5	Reducere de nod secundar Nodul x_2	$x_1 = cx_2$ $x_2 = ax_1$ $x_3 = bx_2$	x_1, a, x_2, b, x_3, c	$x_1 = acx_1$ $x_3 = abx_1$	x_1, ab, x_3, ac
6	Reducere de buclă proprie		x_1, a_1, x_2, a_2, x_3, g	$x_3 = \frac{a_1 a_2}{1-g} x_1$	$\frac{a_1 a_2}{1-g}$; x_1, x_3
7	Inversiunea unui graf	$x_4 = ax_1 + bx_2 + cx_3$	x_3, x_2, c, b, a, x_1, x_4	$x_1 = -\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_3 + \frac{1}{a}x_4$	x_2, $\frac{b}{a}$, $-\frac{c}{a}$, x_3, $\frac{1}{a}$, x_1, x_4
8	Dedublarea unui nod neesențial	$\begin{bmatrix}x_2\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ab & bd\\ac & cd\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_5\end{bmatrix}$	x_2, b, a, d, x_1, x_3, x_5, c, x_4	$x_2 = b\begin{bmatrix}a & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_5\end{bmatrix}$ $x_4 = c\begin{bmatrix}a & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_5\end{bmatrix}$	x_2, b, b, a, d, x_1, x_3', x_3'', x_5, c, c, x_4
9	Dedublarea unui nod esențial	$\begin{bmatrix}a & g\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = x_2$ $\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b\\c\end{bmatrix}x_2$	g, x_3, a, b, x_1, x_2, c, x_4	$\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b\\c\end{bmatrix}\frac{1}{1-g}\begin{bmatrix}a & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\a\end{bmatrix}$	g, b, x_3, a, x_2', x_1, a, x_2'', c, g, x_4

puț și nodul x_4, o sursă iar transmitanța laturii inversate este egală cu inversa transmitanței inițiale.

Operația de dedublare a nodurilor unui graf de transfer are ca scop simplificarea schemei grafului și în acest mod să se poată efectua reducerea lui mult mai simplu și direct fără a fi necesar să se treacă prin calculul algebric. Dedublarea nodurilor poate fi practicată atît asupra nodurilor neesențiale cît și asupra nodurilor esențiale, structura funcțională a grafului rămînînd neschimbată. De asemenea, fiecare dublură a nodului poate fi dedublată la rîndul ei și această operație poate fi repetată ori de cîte ori este necesar și aceasta, pînă se obțin structuri simple a căror reducere este evidentă.

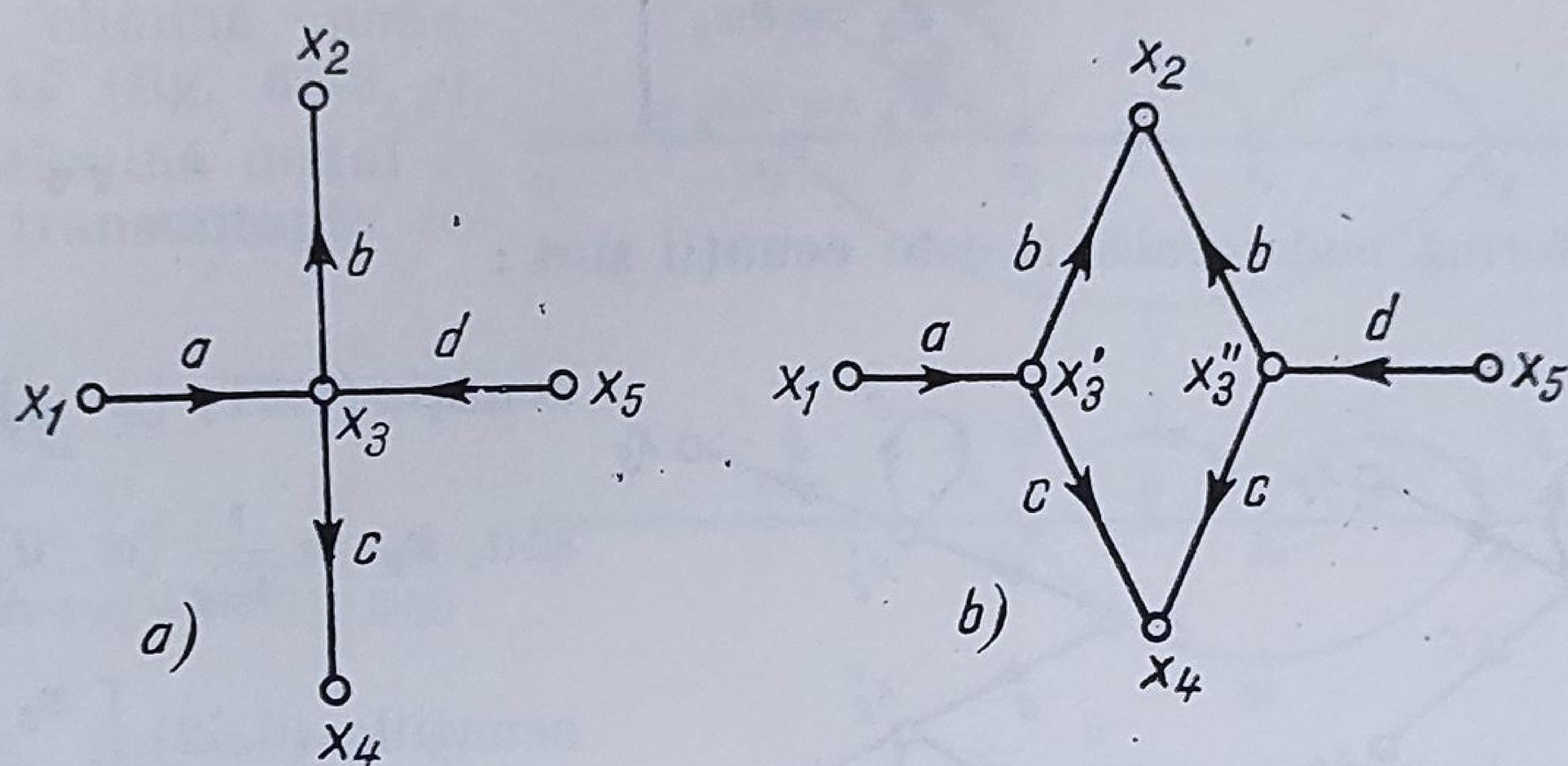


Fig. 6.39. Dedublarea unui nod neesențial.

Pentru justificarea dedublării unui *nod neesențial* să considerăm graful din figura 6.39,*a*. Sistemul de ecuații care dă semnalele de răspuns la nodurile x_2 și x_4 în funcție de semnalele de excitație de la nodurile x_1 și x_5 și de transmitanțele corespunzătoare este

$$x_2 = abx_1 + bdx_5$$

$$x_4 = acx_1 + cdx_5$$

sistem care poate fi scris matriceal sub forma

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & bd \\ ac & cd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Această ecuație matriceală poate fi scrisă

$$x_2 = b \; [a \quad d] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = c \; [a \quad d] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix};$$

sub această formă ele corespund figurii 6.39, *b*.

Scrierea matriceală a funcţionării sistemului reprezentant prin graful de transfer din figura 6.39 arată cum poate fi generalizată problema dedublării nodurilor neesenţiale.

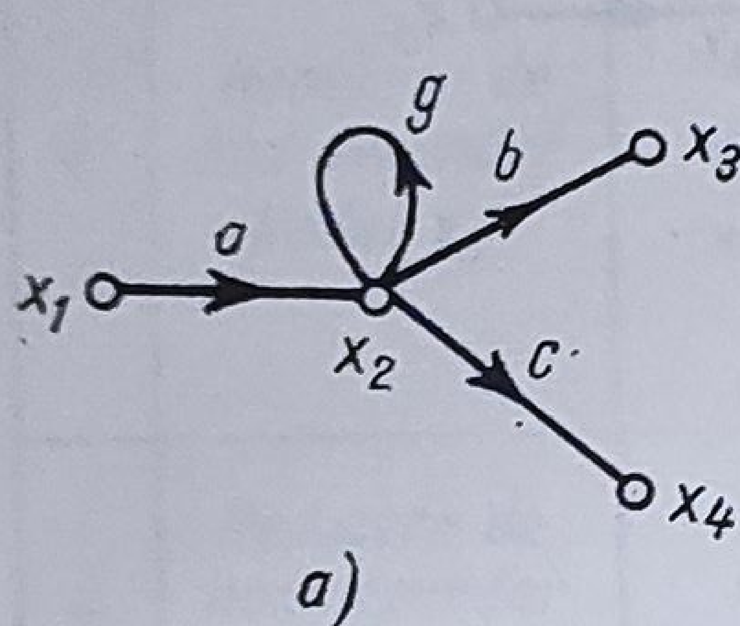
Trebuie observat că dedublarea efectuată, dublează nodul x_3 în două noduri identice ; această operaţie se mai numeşte şi *dedublarea identică a unui nod.*

Pentru justificarea dedublării unui *nod esenţial* să considerăm graful din figura 6.40, *a*. Ecuaţiile care dau funcţionarea sistemului respectiv sînt

$$x_2 = ax_1 + gx_2 \tag{6.61}$$

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= bx_2 \\ x_4 &= cx_2 \end{aligned}\right\} \tag{6.62}$$

Scrise sub formă matriceală, aceste ecuaţii sînt :



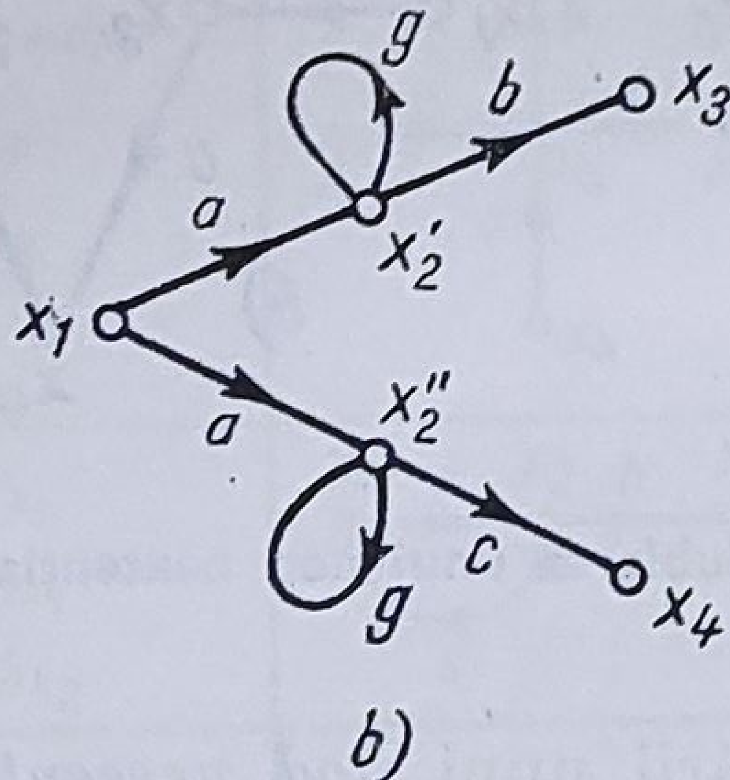


Fig. 6.40. Dedublarea unui nod esenţial

ecuaţia (6.61) $[a \quad g] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2$

sau $x_2 = \frac{1}{1-g} [a \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

ecuaţiile (6.62) $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} x_2$;

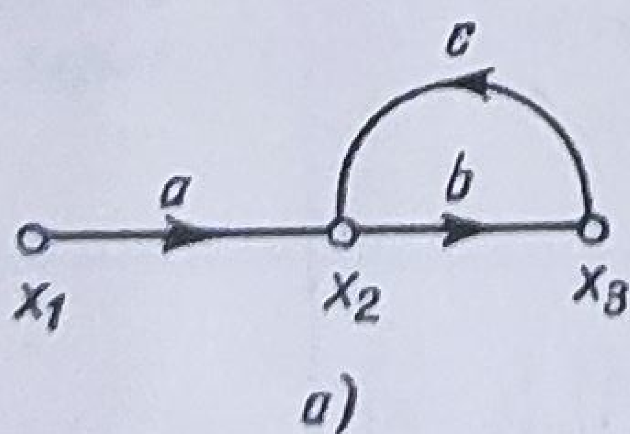
care se mai poate scrie

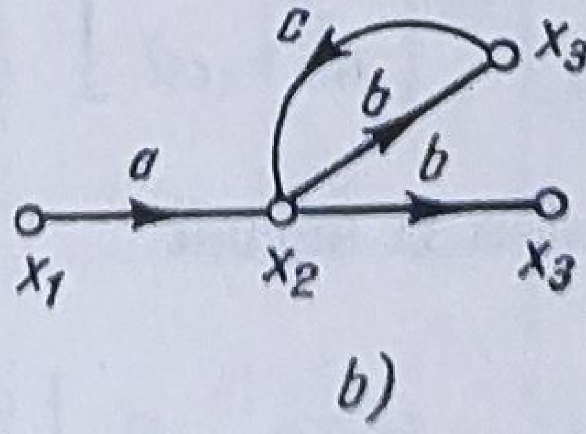
$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} \frac{1}{1-g} [a \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ultima ecuaţie corespunzînd figurii 6.40, *b*. Generalizarea este imediată.

Operaţia de creare a unei bucle proprii este de asemenea utilă în reducerea grafurilor de transfer complexe. Fie graful din figura 6.41,*a*. Dedublînd nodul x_3 se obţine graful din figura 6.41, *b*. Dacă se elimină nodul x_3 prin aplicarea regulii de multiplicare*, rezultă bucla proprie a nodului esenţial x_2 cu transmitanţa (sau cîştigul buclei) (fig. 6.41,*c*)

$$g = bc.$$





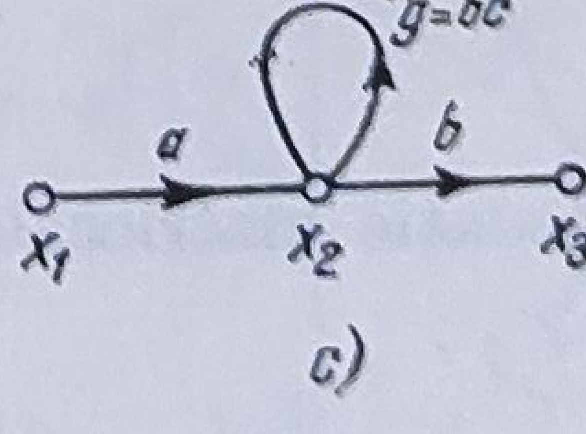


Fig. 6.41. Crearea unei bucle proprii.

Justificarea operaţiei se face imediat scriind ecuaţiile de funcţionare ale sistemului reprezentat prin graful de transfer dat.

---

* Regula 2 din tabloul 6.3.

Ca un exemplu de aplicaţie, fie de redus graful de transfer din figura 6.42, *a*. Operaţiile succesive pentru obţinerea transferanţei globale se pot urmări pe figura 6.42 şi sînt următoarele :

— se elimină nodul x_2 prin dedublarea lui şi prin reducerea unui nod secundar (fig. 6.42, *b* şi *c*);

— se elimină nodul x_4 prin cuadruplarea lui şi prin aplicarea regulii produsului şi a sumei (fig. 6.42 *d* şi *e*).

— Se dublează nodul x_3 (fig. 6.42, *f*).

— Se elimină nodurile x_3' şi x_3'' (fig. 6.42, *g*).

— Se elimină nodul x_5 găsindu-se transmitanţa reziduală

$$T_{61} = \frac{a\ b\ c\ d\ f}{1 - (bg + ch + dj + bcdk) + bdgj}.$$

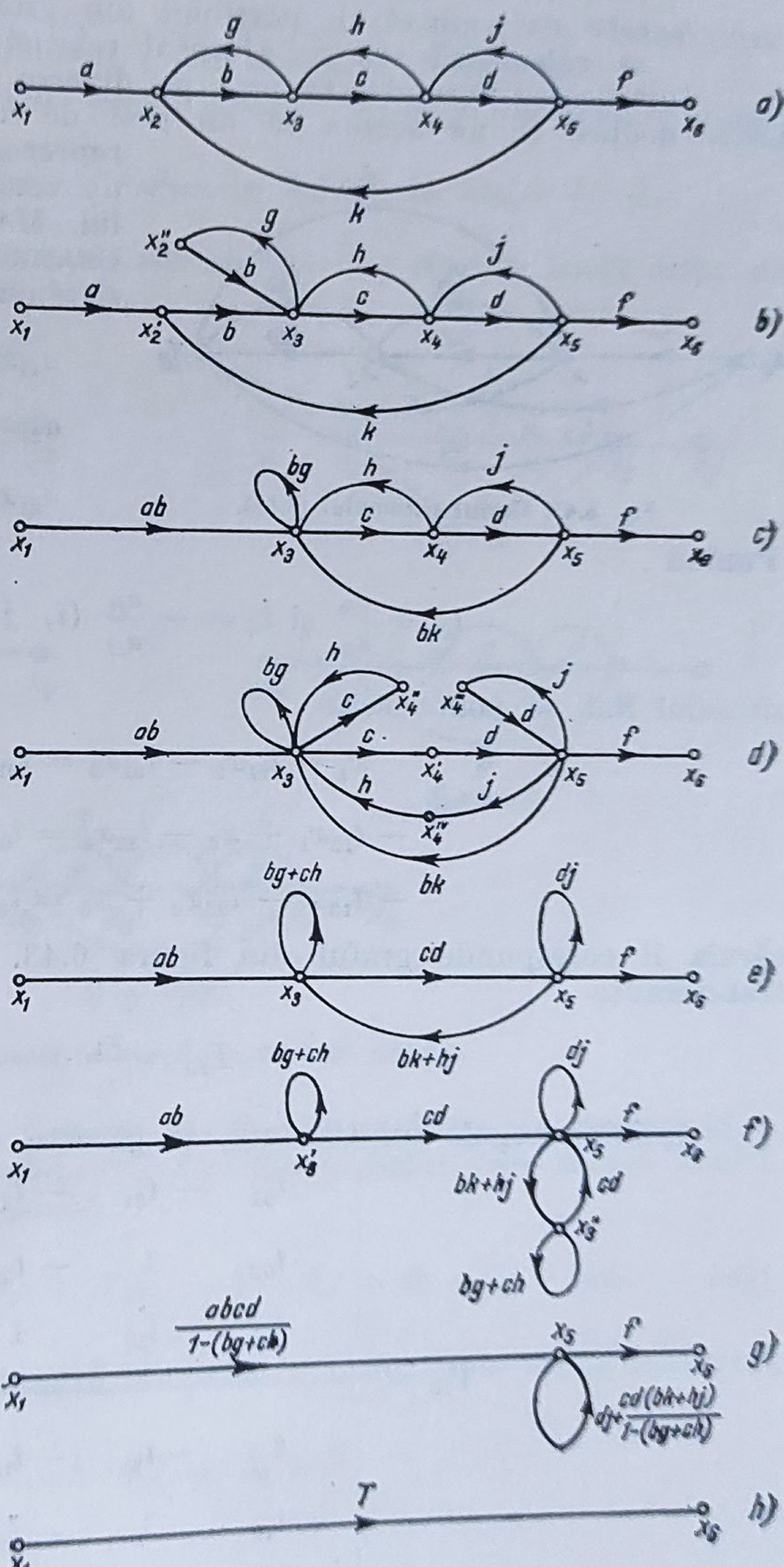


Fig. 6.42. Reducerea unui graf de transfer

6.3.2.6. Reducerea directă a grafurilor de transfer. Formula lui Mason. Transmitanţa dintre două noduri oarecare ale unui graf poate fi calculată direct, utilizînd formula lui Mason :*

$$T = \frac{x_j}{x_0} = \frac{\Sigma C_i \Delta_i}{\Delta}. \qquad (6.63)$$

unde Δ este determinantul grafului şi corespunde determinantului sistemului de ecuaţii liniare pe care îl reprezintă. Valoarea lui se poate obţine prin simpla examinare a grafului de transfer, sub forma

$$\Delta = 1 - \Sigma T_i + \Sigma T_i T_j - \Sigma T_i T_j T_k + \ldots + (-1)^n \Sigma T_i T_j T_k \ldots T_n + \ldots \qquad (6.64)$$

---

* Vezi [181].

în care:

ΣT_i este suma transmitanţelor tuturor buclelor;
$\Sigma T_i T_j$ este suma transmitanţelor buclelor disjuncte* luate cîte două;
$\Sigma T_i T_j \ldots T_n$ este suma buclelor disjuncte luate cîte n;
C_i este transmitanţa cascadei i între nodul x_0 şi x_j;
Δ_i este determinantul porţiunii din graf care nu atinge cascada i; se calculează tot cu ajutorul relaţiei (6.64).

Justificarea formulei se face pe diverse căi**; o cale elementară se poate deduce ţinînd seama că un graf de transfer nu este altceva decît reprezentarea grafică a unui sistem de ecuaţii liniare şi că deci regula lui MASON corespunde regulii lui CRAMER***. Fie pentru aceasta sistemul

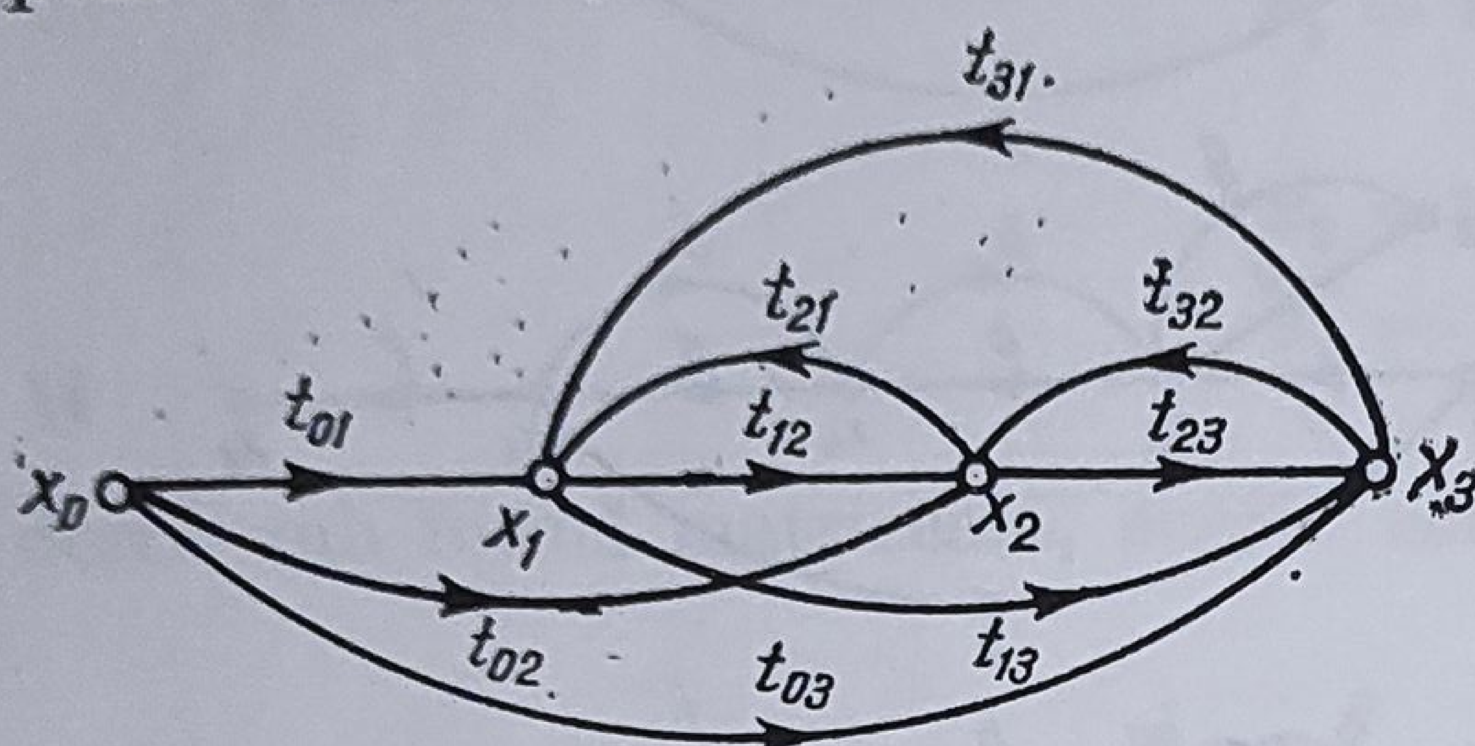


Fig. 6.43. Graful sistemului (6.65).

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{10}x_0\,,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{20}x_0\,,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{30}x_0\,.$$

Punînd

$$t_{0i} = \frac{a_{i0}}{a_{ii}} \text{ şi } t_{ij} = -\frac{a_{ji}}{a_{jj}} \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$$

sistemul dat se poate scrie

$$\left.\begin{aligned} x_1 - t_{21}x_2 - t_{31}x_3 &= t_{01}x_0\,,\\ -t_{12}x_1 + x_2 - t_{32}x_3 &= t_{02}x_0\,,\\ -t_{13}x_1 - t_{23}x_2 + x_3 &= t_{03}x_0\,, \end{aligned}\right\} \tag{6.65}$$

căruia îi corespunde graful din figura 6.43. Să determinăm, de exemplu, transferanţa

$$T_{10} = \frac{x_1}{x_0}\,.$$

Aplicînd regula lui CRAMER, se găseşte

$$T_{10} = \frac{\begin{vmatrix} t_{01} & -t_{21} & -t_{31} \\ t_{02} & 1 & -t_{32} \\ t_{03} & -t_{23} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -t_{21} & -t_{31} \\ -t_{12} & 1 & -t_{32} \\ -t_{13} & -t_{23} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}\,.$$

* Prin bucle disjuncte se înţeleg acele bucle care nu au nici un nod comun.
** Vezi [83] pag. 68 sau [181] pag. 36
*** Vezi [162] pag. 151.

Dezvoltînd determinantul de la numitor avem

$$\Delta = 1 - (t_{12}t_{21} + t_{23}\,t_{32} + t_{31}t_{13} + t_{12}t_{23}t_{31} + t_{13}t_{32}t_{21} = 1 - \Sigma T_i$$

adică determinantul grafului căci $t_{ij}t_{ji}$ și $t_{ij}t_{jk}t_{ki}$ constituie transmitanțele buclelor grafului nedisjuncte, graful neavînd bucle disjuncte.

De asemenea, dezvoltînd determinantul de la numărător se obține

$$\Delta_1 = t_{01}\,(1 - t_{23}t_{32}) + t_{02}t_{21} + t_{02}t_{23}t_{31} + t_{03}t_{31} + t_{03}t_{32}t_{21} = \Sigma C_i \Delta_i\,,$$

graful obținut prezentînd cinci cascade și numai o singură buclă disjunctă $(t_{23}t_{32})$ în raport cu cascada t_{01}.

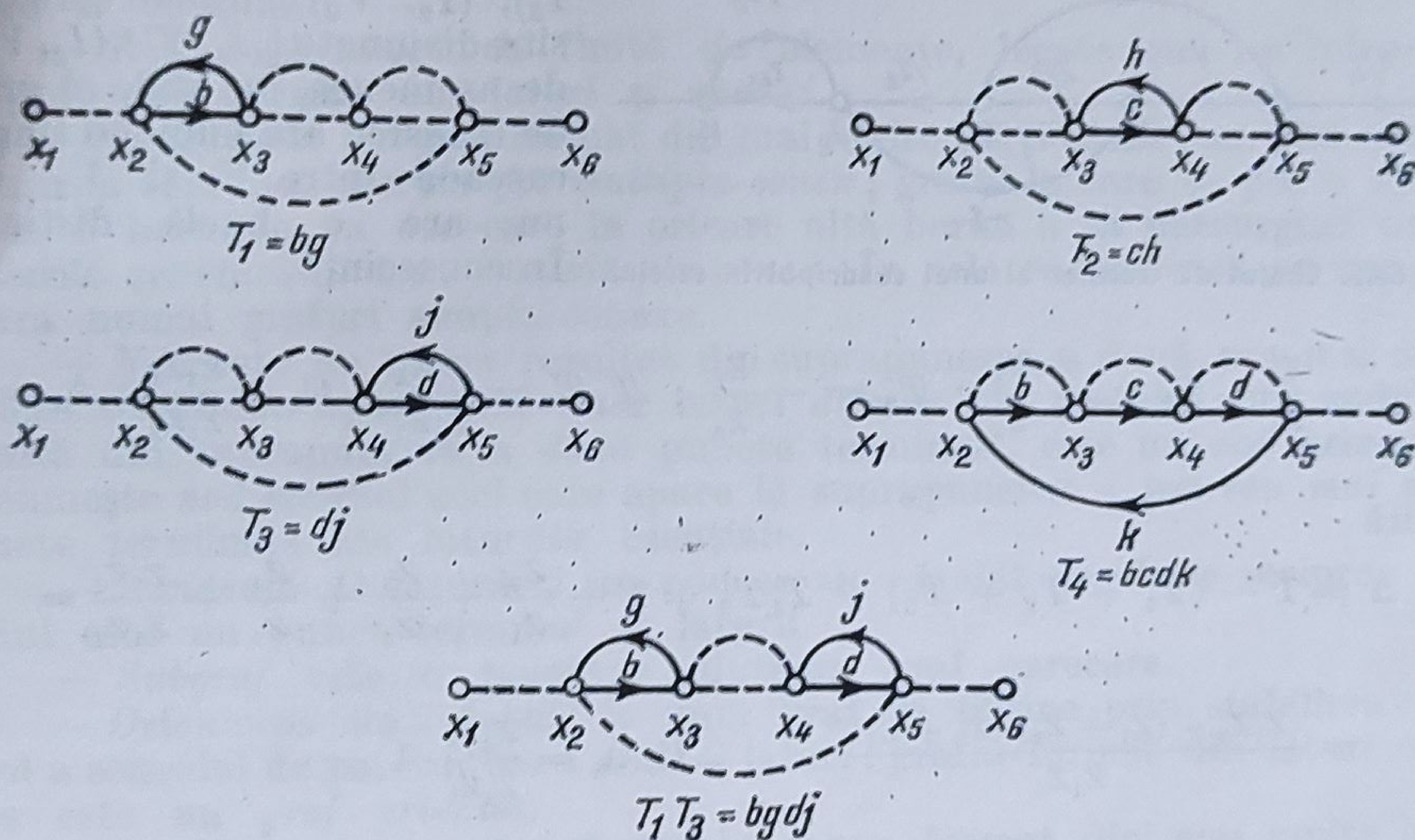


Fig. 6.44. Punerea în evidență a buclelor grafului.

Ca aplicație să aplicăm formula lui MASON grafului din figura 6.42, *a*. Graful are patru bucle distincte (fig. 6.44), dintre care numai buclele T_1 și T_3 sînt disjuncte. Rezultă

$$\Delta = 1 - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) + T_1 T_3 = 1 - (bg + ch + dj + bcdk) + bdgj.$$

Graful nu are decît o singură cascadă, care nu are o buclă distinctă; rezultă deci

$$C_1 = a\,b\,c\,d\,f \;\text{ și }\; \Delta_1 = 1,$$

de unde

$$\Sigma C_i\,\Delta_i = a\,b\,c\,d\,f.$$

Se găsește astfel, aceeași transferanță T_{61} găsită și pe calea reducerii succesive.

6.3.2.7. **Exemplu de aplicație.** Să considerăm cuadripolul reprezentat în figura 6.24 pentru care ne propunem să-i construim graful corespunzător și să-i determinăm apoi transmitanța. Relațiile dintre mărimile electrice ale cuadripolului sînt

$$I_1 = \frac{V_1 - V'}{Z_1}\ ;\ I = I_1 - I_2;\ V' = Z_3 I;\ I_2 = \frac{V' - V_2}{Z_2}\ ;\ V_2 = Z_4 I_2,$$

cu ajutorul cărora graful de transfer corespunzător se construiește ușor (fig. 6.45).

Pentru calculul transferanței vom aplica formula lui MASON. Este ușor de văzut că graful de transfer are trei bucle distincte $[(I_1, V'), (I_1, I_2), (I_2, V_2)]$, dintre care două sînt disjuncte $[(I_1, V'), (I_2, V_2)]$; de asemenea, se vede că graful de transfer are numai o singură cascadă între V_1 și V_2 care nu are o buclă distinctă. În consecință,

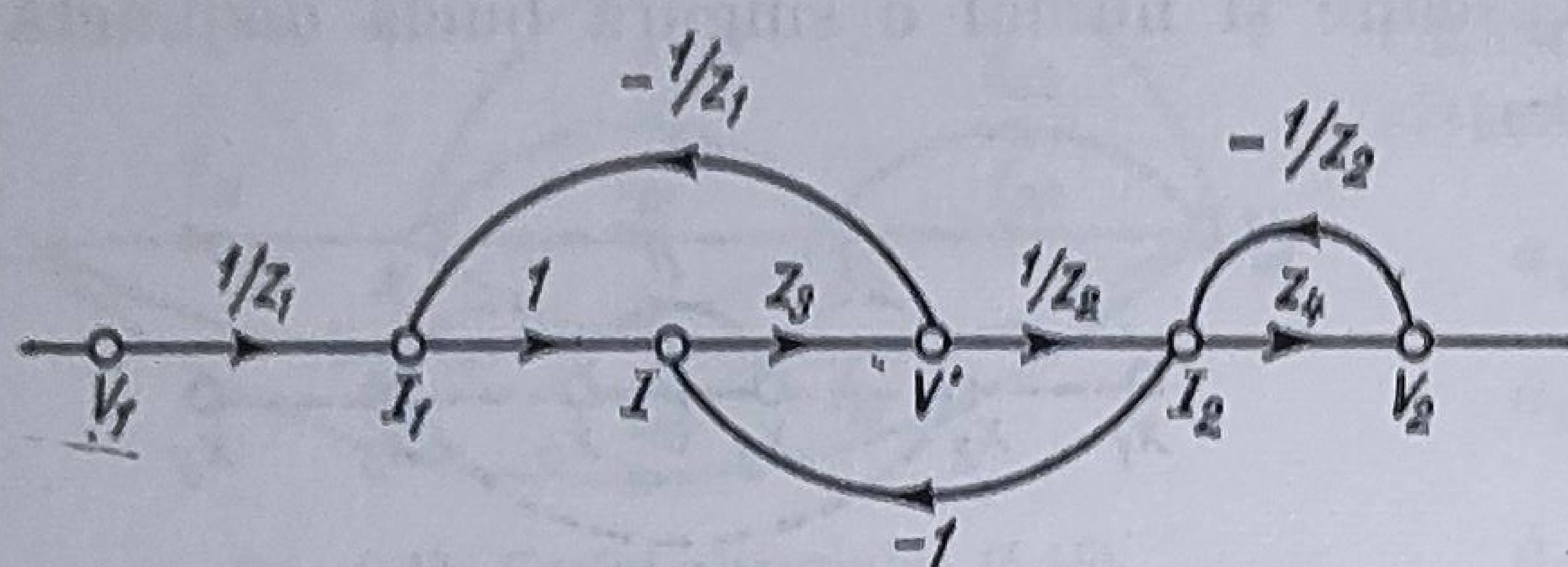


Fig. 6.45. Graful de transfer al unui cuadripol în sarcină

$$T_1 = -\frac{Z_3}{Z_1}\ ;\ T_2 = -\frac{Z_3}{Z_2}\ ;\ T_3 = -\frac{Z_4}{Z_2}\ ;\ T_1 T_3 = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2}\ ;\ C_1 = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2}\ ;\ \Delta_1 = 1$$

rezultă

$$\Delta = 1 - (T_1 + T_2 + T_3) + T_1 T_3 = 1 + \frac{Z_3}{Z_1} + \frac{Z_3}{Z_2} + \frac{Z_4}{Z_2} + \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2} =$$

$$= \frac{Z_1 Z_3 + (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)}{Z_1 Z_2} \qquad \Sigma C_i\, \Delta_i = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2} \cdot 1$$

și deci

$$T = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_3 + (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)},$$

expresie identică cu aceea găsită și în cazul schemei bloc*.

6.3.3. APLICAREA TEORIEI GRAFURILOR LA CALCULUL REȚELELOR ELECTRICE

6.3.3.1. **Generalități și definiții.** Grafurile de transfer, utilizînd proprietățile topologice ale rețelelor electrice, se pretează foarte bine la studiul rețelelor electrice cu ajutorul calculului matriceal. În acest scop teoria grafurilor poate fi utilizată în două moduri: *a*) pentru stabilirea ecuațiilor generale, clasice, de rezolvare a rețelelor electrice**; *b*) pentru stabilirea

* Vezi 6.3.1.7.
** Vezi [38]

unei metode proprii de rezolvare a rețelelor electrice*. Fiecare din aceste căi conduce la o metodă de calcul care dă posibilitatea utilizării calculatoarelor electronice în rezolvarea problemelor puse de funcționarea rețelelor electrice, oricît de întinse ar fi ele.

Pentru stabilirea metodicii de lucru este necesar să se completeze cu unele definiții, definițiile date anterior**.

— *Element* al unui graf (*latură*, *ramură*) este un segment de linie (dreaptă sau curbă) limitat de două *puncte terminale* (*borne*); un element poate reprezenta o impedanță, un element complet de rețea, o secție dintr-o uzină etc.

Dacă latura are numai un punct terminal care se suprapune peste un punct terminal al unei alte laturi, sau dacă latura are cele două puncte terminale suprapuse peste punctele terminale ale unei alte laturi formînd astfel o buclă, latura se numește *neesențială* și în studiul rețelelor electrice poate fi eliminată.

— *Graf* este mulțimea finită de elemente, legate sau nu între ele; un graf este format din *laturi* și *noduri*.

— *Conexitate*. Un graf format din mai multe părți distincte, fără puncte terminale comune, se numește *multiplu-conex*; graful la care se poate ajunge de la o bornă a sa oarecare la oricare altă bornă a sa parcurgînd numai ramurile schemei se numește *simplu-conex*. În cele ce urmează se vor considera numai grafuri simplu-conexe.

— *Nod* este un punct rezultat din suprapunerea a două sau mai multe puncte terminale aparținînd unor laturi *diferite* ale grafului; un nod care rezultă din suprapunerea a *două* puncte terminale, este un *nod neesențial*; se numește *nod esențial* acel care apare la suprapunerea a *trei sau mai multe* puncte terminale ale laturilor esențiale.

— *Incidență*. O latură și un nod se zic că sînt *incidente* reciproc dacă nodul este un punct terminal al laturii.

— *Subgraf* este o porțiune dintr-un graf oarecare.

— *Orientarea* unei laturi a unui graf se obține prin stabilirea *arbitrară* a sensului de parcurgere a acestei laturi; graful format din laturi orientate este un *graf orientat*.

— *Buclă* este un subgraf simplu conex format din mai multe laturi și în care fiecare nod are două laturi incidente cu el.

— *Arbore* este un subgraf simplu conex care nu are nici o buclă; dacă arborele cuprinde *toate* nodurile grafului dat se numește *arbore complet*. Dacă N este numărul nodurilor unui graf, atunci arborele complet al acestui graf are $P = N - 1$ laturi. Un graf poate avea mai mulți arbori compleți.

Coardă este o latură a grafului care nu face parte dintr-un arbore complet al acestuia; mulțimea coardelor formează *subgraful coardelor*, complimentar arborelui complet considerat. Dacă L este numărul de laturi ale unui graf, subgraful coardelor conține $B = L - N + 1$ laturi. Subgraful coardelor este în general multiplu conex.

Secționare sau tăietură este o linie care împarte graful în două părți distincte formînd două grafuri independente prin tăierea laturilor grafului. Dacă secționările se fac într-un graf simplu conex, subgrafurile obținute sînt simplu conexe.

---

* Vezi [181].

** Vezi 6.3.2.1.

6.3.3.2. **Matricele fundamentale ale unui graf simplu—conex.** Fiind dat un graf simplu-conex cu L laturi şi N noduri, între aceste elemente, buclele din graf şi tăieturile care se pot face, se stabilesc anumite corelaţii care pot fi exprimate sub forma unor matrice, cu ajutorul cărora se poate trece apoi la calculul efectiv al reţelelor cu ajutorul calculului matriceal. Matricele fundamentale sînt în număr de trei şi ele se stabilesc pe consideraţii structurale ale grafului respectiv.

a) Matricea de incidenţă. Fie un graf oarecare (fig. 6.46) care are $L = 8$ laturi şi $N = 5$ noduri. Dacă se numerotează nodurile grafului în mod cu totul arbitrar cu numere de ordine de la 1 la N şi dacă se notează fiecare latură cu simbolul L_{jk}, j şi k reprezentînd numerele de ordine ale nodurilor, graful devine orientat, sensul de orientare a fiecărei laturi fiind ales în mod convenţional, dacă $j < k$, de la nodul j la nodul k.

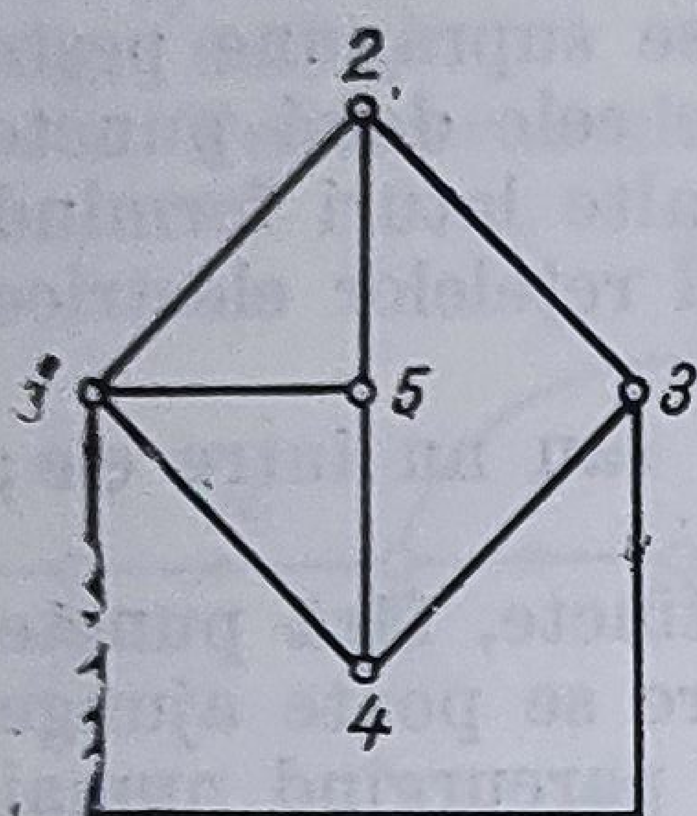


Fig. 6.46. Graful unei reţele oarecare.

Prin definiţie *matricea de incidenţă* a unui graf este matricea cu N linii şi L coloane, a cărei elemente sînt numerele ± 1 şi 0. Liniile reprezentînd nodurile şi coloanele, laturile grafului, elementul din linia j şi coloana L_{jk} $(j < k)$ va avea valoarea $+1$, elementul din linia k şi aceeaşi coloană va avea valoarea -1, iar elementul l $(l \neq j \neq k)$ din coloana considerată va avea valoarea 0. În capul fiecărei linii se înscrie numărul nodului corespunzător, iar în capul fiecărei coloane se înscrie simbolul laturii respective, ordinea în care se efectuează această înscriere fiind complet arbitrară. Din anumite consideraţii, care se vor vedea în cele ce urmează, nodurile se înscriu în ordinea lor crescîndă, iar laturile se împart în două categorii, astfel:

Unui nod j al grafului i se repartizează, în prima categorie de laturi, latura cu indicele jk $(j < k)$ cel mai mic,* toate celelate laturi adiacente acestui nod se repartizează în a doua categorie de laturi. Este uşor de văzut că din nodul n $(n > j$ şi $j = 1, 2, \ldots, n-1)$, conform convenţiei făcute, nu vor *ieşi* laturi, în acest nod vor exista *numai* laturi care intră şi în consecinţă, el nu poate da o latură care să fie cuprinsă în prima categorie de laturi. Rezultă dar, că în prima categorie se vor repartiza $N - 1 = P$ laturi, iar în cea de a doua categorie restul de laturi $L - (N - 1) = B$.

Odată stabilită repartizarea laturilor, se convine să se facă următoarea succesiune a matricei de incidenţă: primele $N - 1$ coloane vor cuprinde laturile din prima categorie aranjate în ordinea crescîndă a indicilor lor; următoarele $L - N + 1$ coloane vor cuprinde laturile din a doua categorie aranjate de asemenea în ordinea crescîndă a indicilor lor. Matricea de incidenţă va fi deci

$$[A'] = \Big[[A'_1] \,\vdots\, [A'_2] \Big] \tag{6.66}$$

în care

$[A'_1]$ este matricea avînd N linii şi $N-1$ coloane, cuprinzînd laturile din prima categorie şi

$[A'_2]$ este matricea avînd N linii şi $L-N+1$ coloane, cuprinzînd laturile din a doua categorie.

---

* Dacă într-un nod j nu există nici o latură care să lege acest nod cu nodul k $(k > j)$, atunci se introduce în prima categorie de laturi o latură repartizată în categoria a doua avînd indicele lm $(l < m$ şi $m \neq k)$.

Îndepărtînd o linie *oarecare* din matricea de incidență $[A']$ se obține o nouă matrice

$$[A] = \left[[A_1] \vdots [A_2]\right], \tag{6.67}$$

în care de data aceasta $[A_1]$ este o matrice pătrată, nesingulară, de ordinul $N-1$.

Suprimarea unei linii echivalează cu suprimarea nodului corespunzător. Nodul eliminat poartă numele de *nod de referință*.

Matricea $[A_1']$, respectiv matricea $[A_1]$, este matricea de incidență a unui arbore complet, ceea ce rezultă din însăși regula de selecție și repartiție a laturilor grafului în prima categorie.

Matricea $[A_2']$, respectiv matricea $[A_2]$, este matricea de incidență a subgrafului de coarde, corespunzător subgrafului arbore stabilit prin matricea $[A_1']$, respectiv matricea $[A_1]$.

În consecință, prin simpla numerotare arbitrară a nodurilor grafului și adoptarea regulii dată pentru clasificarea laturilor, se obține în mod mecanic matricea de incidență a unui arbore complet și matricea de incidență a subgrafului de coarde corespunzător. Aceasta prezintă o mare importanță pentru o rețea complexă, cu numeroase noduri și laturi, care urmează a fi studiată cu ajutorul unui calculator electronic digital.

În cazul particular al grafului din figura 6.46 matricea de incidență este

$[A'] =$

N \ L	L_{12}	L_{23}	L_{34}	L_{45}	L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{25}
1	1				1	1	1	
2	−1	1						1
3		−1	1		−1			
4			−1	1		−1		
5				−1			−1	−1

$N = 5$.

$N - 1 = 4$ (primele patru coloane); $L - N + 1 = 4$ (ultimele patru coloane); $L = 8$

Luînd ca nod de referință nodul 5*, matricea de incidență devine

$[A] =$

N \ L	L_{12}	L_{23}	L_{34}	L_{45}	L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{25}
1	1				1	1	1	
2	−1	1						1
3		−1	1		−1			
4			−1	1		−1		

* Se poate lua oricare alt nod.

În figura 6.47 au fost reprezentate subgrafurile arbore și coarde ale grafului considerat (fig. 6.46).

b) Matricea de conexiune a buclelor. Orice graf, reprezentant al unei rețele electrice, conține un număr finit de bucle, dintre care unele sînt *independente* și altele sînt *dependente*, putînd fi obținute prin combinarea buclelor independente*. Prin definiție, matricea de conexiune a buclelor dă legătura dintre laturile rețelei și un anumit grup de bucle independente din graf**. Ea va fi deci o matrice care va avea atîtea linii cîte bucle se pot obține în graf, numărul de coloane fiind egal cu acel al laturilor grafului***. Elementele matricei sînt ± 1 și 0, după cum o latură intră în componența buclei respective, sau nu, $+1$ corespunzînd sensului comun de parcurgere a buclei și laturii, iar -1 unui sens contrar.

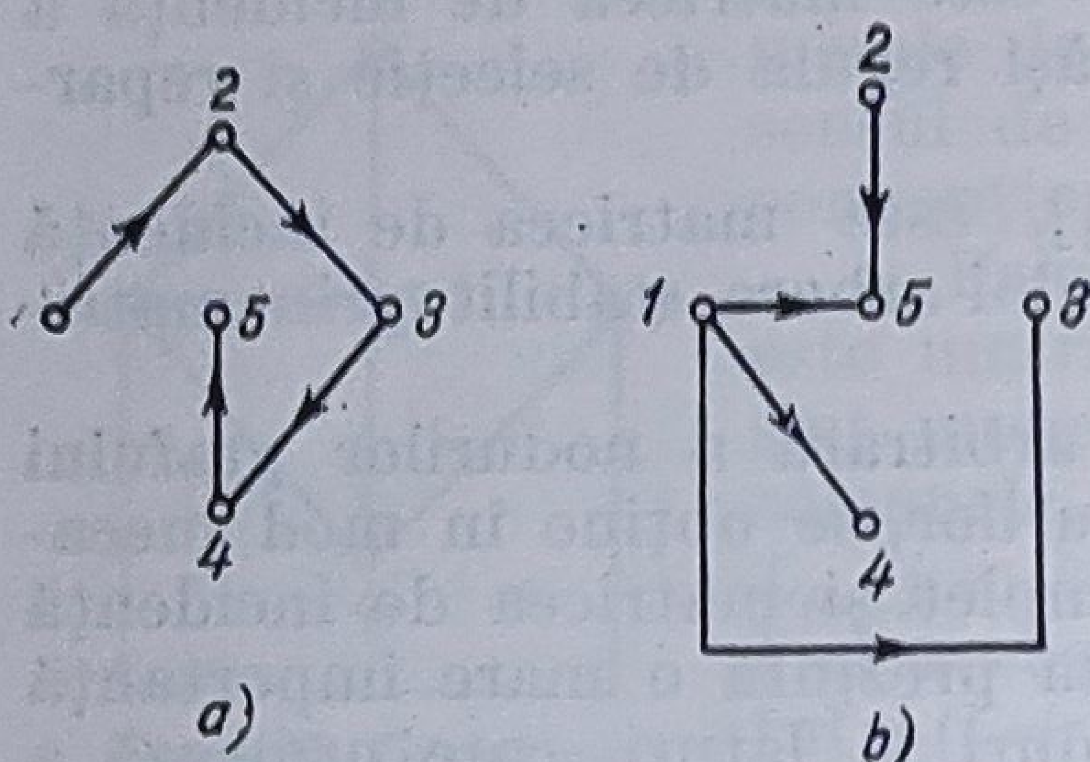


Fig. 6.47. Subgrafurile arbore (a) și coarde (b).

Fie $[B]$ matricea de conexiune corespunzătoare unui sistem de bucle independente din graful considerat. Dacă N este numărul de noduri și L numărul de laturi ale grafului, atunci matricea $[B]$ este în general o matrice singulară avînd $B = L - N + 1$ linii și L coloane.

Dacă ordinea coloanelor matricei de conexiune $[B]$ este aceeași cu a matricei de incidență $[A]$, atunci există întotdeauna relația****

$$[A].[B]_t \equiv [B].[A]_t \equiv 0. \tag{6.68}$$

Matricea de conexiune $[B]$ poate fi dedusă fie pe o cale directă*****, fie pe o cale indirectă din relația (6.68) după cum urmează: matricea $[B]$ poate fi descompusă în două submatrice

$$[B] = \left[[B'_1] \vdots [B'_2]\right],$$

în care matricea $[B'_1]$ corespunde laturilor arborelui reprezentat prin matricea $[A_1]$, iar matricea $[B'_2]$, corespunzînd laturilor coarde, care fiecare face parte dintr-o singură buclă independentă, va fi egală cu unitatea. Se poate scrie deci,

$$[B] = \left[[B'_1] \vdots [1]\right].$$

Scriind relația (6.68) dezvoltat, rezultă

$$\left[[B'_1] \vdots [1]\right] \cdot \left[\frac{[A_1]_t}{[A_2]_t}\right] = [B'_1].[A_1]_t + [A_2]_t = 0$$

---

* Vezi 2.3.4.1.

** Vezi 2.4.4.3.

*** Matricea astfel definită corespunde *matricei transpuse* a matricei de conexiune definită de Kron (Vezi 2.4.4.3).

**** Vezi [39] și [38].

***** Vezi 2.4.4.3.

de unde se obține

$$[B_1'] = -[A_2]_l \cdot [A_1]_l^{-1} = -[B_1],$$

unde am notat

$$[B_1] = [A_2]_l \cdot [A_1]_l^{-1}. \tag{6.69}$$

În consecință, matricea de conexiune a buclelor poate fi scrisă

$$[B] = \left[-[B_1] \,\vdots\, [1] \right]. \tag{6.70}$$

Trebuie să observăm, că există numai o singură grupă de bucle independente ale grafului și numai una singură, care să aibă matricea de conexiune dată de relația (6.70), aceasta întrucît expresia (6.69) e unică.

Obținerea directă a matricei $[B]$ din simpla examinare a grafului considerat este destul de greu de realizat.

Calculînd în cazul particular al figurii 6.46 matricea de conexiune a buclelor independente cu ajutorul relației (6.70) se găsește

$[B] =$

B \ L	L_{12}	L_{23}	L_{34}	L_{45}	L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{25}
I	−1	−1			1			
II	−1	−1	−1			1		
III	−1	−1	−1	−1			1	
IV		−1	−1	−1				1

buclele independente corespunzătoare sînt arătate în figura 6.68.

c) *Matricea de conexiune a secționărilor.* La un graf dat se poate face un număr finit de secționări; unele din acestea sînt *independente*, altele sînt dependente putînd fi deduse prin combinarea secționărilor independente. Unei secționări oarecare i se atribuie un sens pozitiv, ales arbitrar (fig. 6.49).

Pentru obținerea secționărilor independente se procedează astfel, încît secționarea să taie numai o singură latură a arborelui complet al grafului dat; această latură se numește *suportul tăieturii*. În aceste condiții se convine să se dea semnul plus tăieturii, dacă aceasta coincide cu semnul plus al suportului său. Matricea de conexiune a secționărilor este o matrice care are $N-1$ linii (număr egal cu numărul laturilor unui arbore complet) și

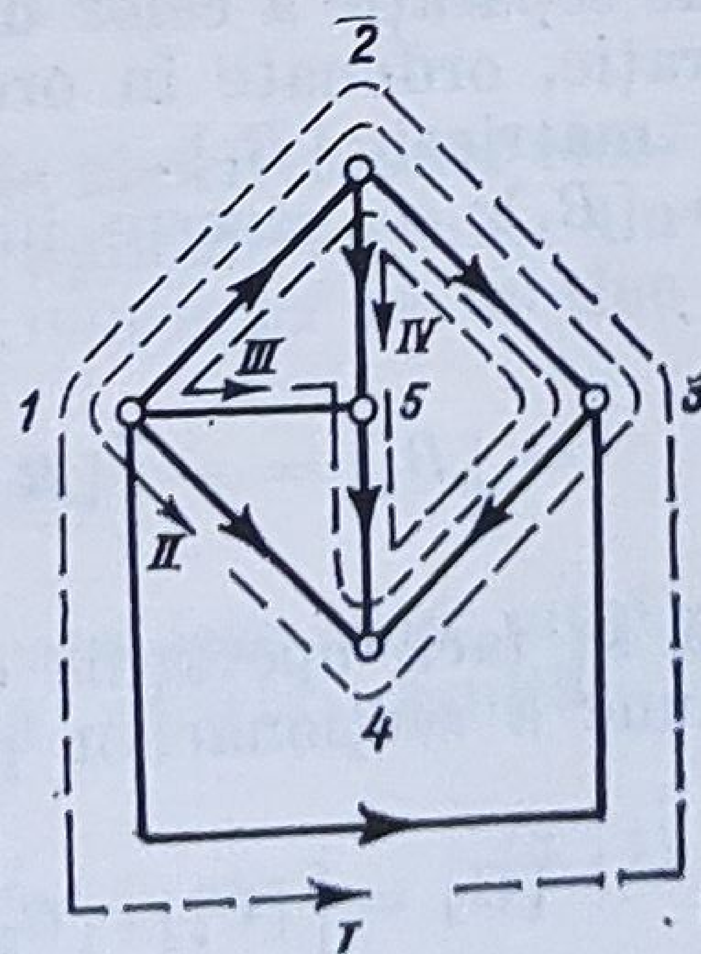


Fig. 6.48. Buclele independente.

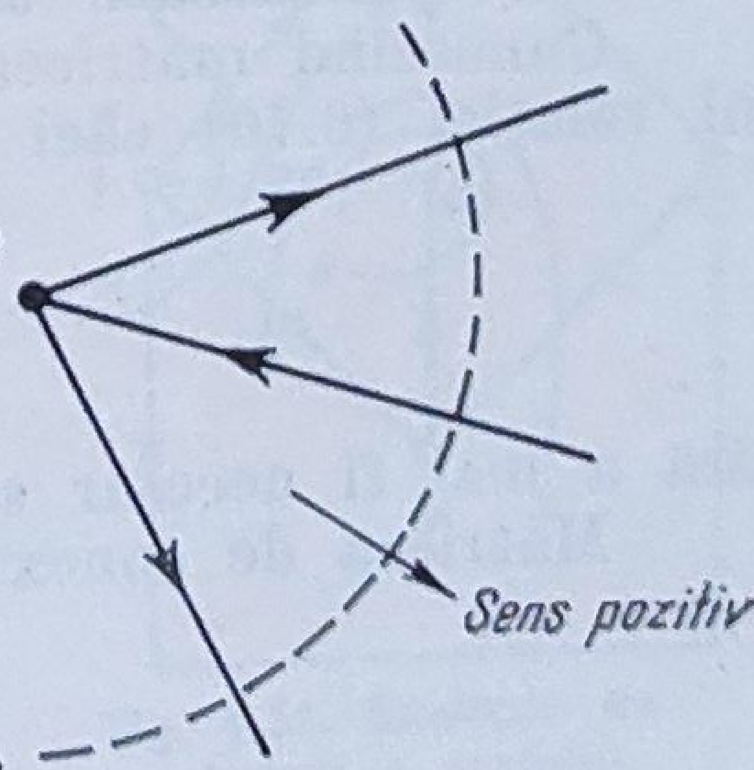


Fig. 6.49. Secționarea unui graf.

L coloane (număr egal cu numărul laturilor grafului). Elementele matricei sînt egale cu ± 1 sau 0 şi anume, $+1$ dacă elementul corespunde unei laturi L_{jk} secţionată şi a cărui sens pozitiv corespunde cu sensul secţionării, -1 în caz contrar şi 0 dacă elementul corespunde unei laturi nesecţionate.

Fie $[C]$ matricea de conexiune a secţionărilor; conform celor stabilite anterior, această matrice reprezintă un *sistem complet de secţionări* sau un *sistem fundamental*. Dacă ordinea coloanelor acestei matrice este aceeaşi cu aceea a matricei de incidenţă, atunci avem întotdeauna relaţia*

$$[B]\ [C]_t \equiv [C]\ [B]_t \equiv 0. \tag{6.71}$$

Matricea $[C]$ se poate construi însă direct, din simpla inspecţie a figurii grafului. Graful avînd laturile sale ordonate în ordinea crescîndă

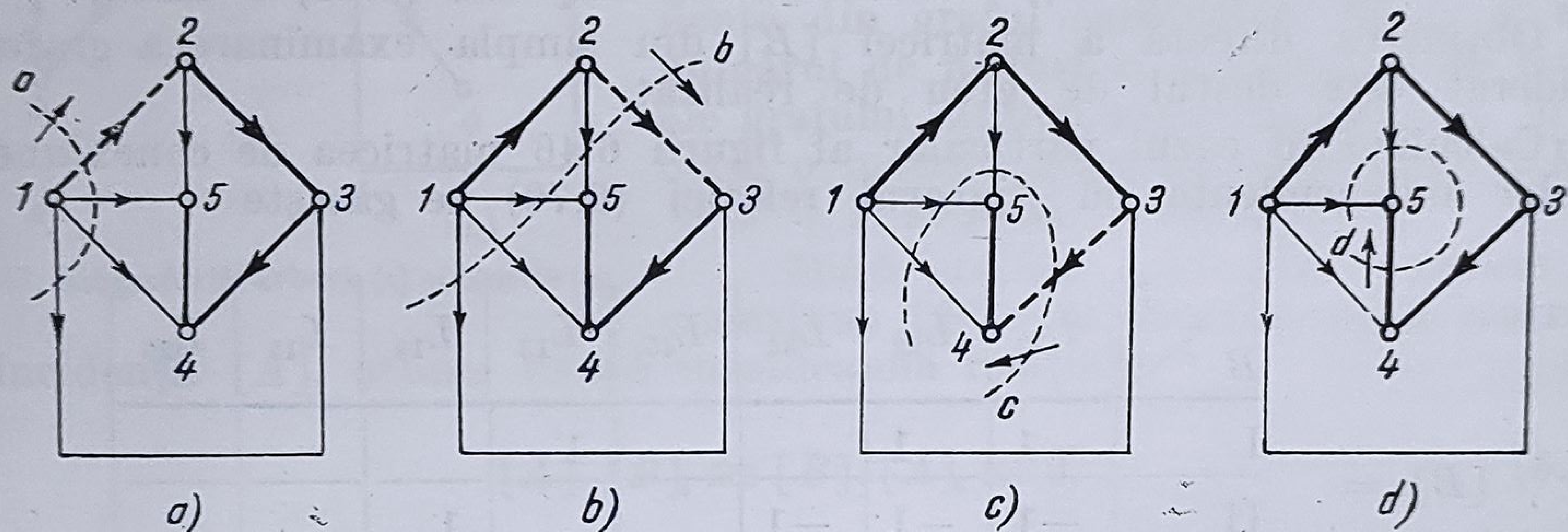


Fig. 6.50. Metoda de stabilire a laturilor secţionate.

a indicilor şi grupate în cele două categorii, în laturile arborelui şi laturile coarde, şi cum fiecărei laturi a arborelui îi corespunde o secţionare, ordinea liniilor matricei $[C]$ va fi aceeaşi ca şi a laturilor arborelui din matricea $[A_1]$.

După ce se scrie matricea unitate de ordinul $N-1$, trebuie scrise liniile matricei $[B_1]_t$. Pentru aceasta se îndepărtează pe rînd fiecare latură a arborelui complet separîndu-se graful respectiv în două subgrafuri (fig. 6.50). Ducînd pe desen o linie de separaţie a celor două subgrafuri, coardele tăiate de această linie de separaţie, ordonate în ordinea crescîndă a indicilor dau linia corespunzătoare a matricei $[B_1]_t$.

Cunoscînd matricea $[B_1]_t$ se găseşte imediat matricea $[B]$, cu ajutorul relaţiei (6.70) căci

$$-[B_1] = -\left[[B]_t\right]_t,$$

fără a mai fi necesar să se facă operaţiile cerute de relaţia (6.69).

Matricea de conexiune a secţionărilor poate fi pusă sub forma

$$[C] = \left[[C_1'] \mid [C_2']\right].$$

* Vezi [38] pag. 166.

Este evident, că submatricea $[C_1']$ este egală cu matricea unitate corespunzătoare*; putem scrie deci,

$$[C] = \left[[1 \mid [C_2']\right].$$

Introducind această expresie în relația (6.71) și ținînd seama de relația (6.70) se obține

$$[C]\,[B]_t = \left[[1] \mid [C_2']\right] \cdot \left[\frac{-[B_1]_t}{[1]}\right] = -[B_1]_t + [C_2'] = 0,$$

de unde,

$$[C_2'] = [B_1]_t$$

și deci,

$$[C] = \left[[1] \mid [B_1]_t\right]. \tag{6.72}$$

Ținînd acum seama de relația (6.69) se poate scrie

$$[C] = \left[[1] \mid [A_1]^{-1} \cdot [A_2]\right]. \tag{6.73}$$

Rezultă dar, că prin determinarea matricei de incidență se pot determina atît matricea de conexiune a buclelor, dată de relațiile (6.70) și (6.69), cît și matricea de conexiune a secționărilor, dată de relația (6.73).

Pentru cazul particular al grafului din figura 6.46, matricea de conexiune a sistemului fundamental de secționări este

$[C] =$

S \ L	L_{12}	L_{23}	L_{34}	L_{45}	L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{25}
a	1				1	1	1	
b		1			1	1	1	1
c			1			1	1	1
d				1			1	1

În figura 6.51 sînt reprezentate secționările corespunzătoare.

6.3.3.3. **Ecuațiile matriceale ale circuitelor electrice.** Reluînd figura 6.11 și aplicînd unuia din noduri prima teoremă a lui KIRCHHOFF se obține

$$\underline{I}_j' = \underline{I}_j - \underline{J}_j,$$

în care am notat $\underline{I}_j'$ curentul care iese (sau intră) în nodul considerat; din acestă relație rezultă

$$\underline{I}_j = \underline{I}_j' + \underline{J}_j. \tag{6.74}$$

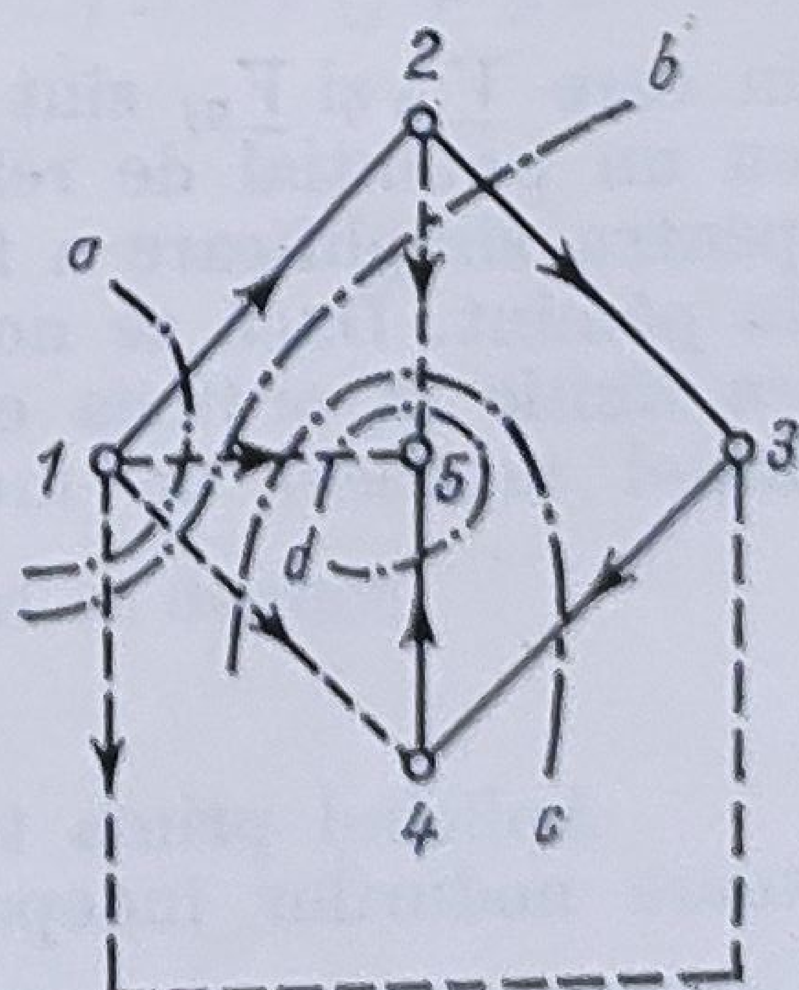


Fig. 6.51. Exemplu de secționare a grafului.

* Secționările corespund laturilor arborelui complet.

Ținînd seama de această relație și de relația (6.24), relația (6.25) poate fi scrisă

$$\underline{V}_j = \underline{Z}_j(\underline{I}'_j + \underline{J}_j) - \underline{E}_j$$

sau

$$\underline{V}_j + \underline{E}_j = \underline{Z}_j(\underline{I}'_j + \underline{J}_j). \qquad (6.75)$$

Aplicată tuturor laturilor rețelei, se obține ecuația

$$[V] + [E] = [Z]([I'] + [J]) \qquad (6.76)$$

sau

$$[I'] + [J] = [I] = [Y]([V] + [E]). \qquad (6.77)$$

Necunoscutele fiind curenții $[I]$, respectiv $[I']$, și tensiunile $[V]$, în total $2L$ necunoscute, cum ecuațiile (6.76), respectiv (6.77), ne dau numai L ecuații, celelalte L ecuații vor fi furnizate de cele două teoreme ale lui KIRCHHOFF, aplicate rețelei electrice după cum urmează:

— prima teoremă a lui KIRCHHOFF, teorema curenților, se aplică la $P = N - 1$ secționări independente formînd un sistem fundamental de secționări;

— a doua teoremă a lui KIRCHHOFF, teorema tensiunilor, se aplică la $B = L - N + 1$ circuite închise independente, formînd un sistem fundamental de circuite închise.

Cu ajutorul considerentelor topologice examinate în paragraful precedent se pot deduce ecuațiile necesare rezolvării unei rețele electrice, utilizînd metodele cunoscute a potențialelor la noduri (sau perechilor de noduri) și a buclelor.

6.3.3.4. **Metoda perechilor de noduri.** Este ușor de văzut că tensiunea la bornele unui element de rețea (fig. 6.11) este dată de relația

$$\underline{V}_j = \underline{V}_{Bj} - \underline{V}_{Aj} \qquad (6.78)$$

în care $\underline{V}_{Aj}$ și $\underline{V}_{Bj}$ sînt potențialele nodurilor A_j și B_j determinate în raport cu un potențial de referință, potențialul unui nod oarecare din rețea, care, pentru simplificare a fost presupus egal cu zero, nodul respectiv fiind legat la pămînt. Dacă se notează cu $[V_n]$ matricea acestor potențiale, construită cu liniile în ordinea crescîndă a numerelor nodurilor, atunci, pe baza definiției matricei de incidență, se poate scrie

$$[V] = [A]_t\,[V_n]. \qquad (6.79)$$

Aplicînd prima teoremă a lui KIRCHHOFF la $N-1$ tăieturi, corespunzătoare nodurilor independente, se obține relația matriceală

$$[A]\,[I'] = 0, \qquad (6.80)$$

unde $[A]$ este matricea de incidență.

Introducînd expresia (6.79) în relaţia (6.77) aceasta se poate scrie

$$[Y]\,[A]_t\,[V_n] = [I'] + [J] - [Y]\,[E];$$

înmulţind această expresie *la stînga* cu matricea de incidenţă şi ţinînd seama de relaţia (6.80) rezultă

$$[A]\,[Y]\,[A]_t\,[V_n] = [A]\,[J] - [A]\,[Y]\,[E] = [A]\,[J_1], \qquad (6.81)$$

în care am notat

$$[J_1] = [J] - [Y]\,[E],$$

relaţie care exprimă influenţa surselor de tensiune asupra surselor de curent. Notînd mai departe

$$[A]\,[Y]\,[A]_t = [Y'] \text{ şi } [A]\,[J_1] = [J']$$

ecuaţia (6.81) capătă forma clasică dată de KRON *

$$[Y']\,[V_n] = [J'].$$

6.3.3.5. **Metoda buclelor.** Curenţii necunoscuţi ai problemei, care circulă prin laturile reţelei, sînt legaţi de curenţii din nodurile acesteia prin relaţia (6.74). Luînd ca variabile independente curenţii care circulă în *laturile coarde* ale grafului reţelei date, rezolvarea problemei va comporta determinarea a $B = L - N + 1$ necunoscute.

Fie $\left[I^c_{jk} \right]$ matricea acestor curenţi şi $\left[I^a_{fa} \right]$ matricea curenţilor din *laturile arbore*, pentru care

$$j,\ k = 1,2,\ldots, L - N + 1\ (j \neq k) \text{ şi } f,\ g = 1,2,\ldots, N-1\ (f \neq g).$$

Avem evident**

$$[I] = \begin{array}{c|c|} a & [I^a] \\ \hline c & [I^c] \end{array}\,,$$

Pe de altă parte, din relaţia (6.74) scrisă matriceal se deduce

$$[I'] = [I] - [J]$$

sau

$$[I'] = \begin{array}{c|c|} a & [I^a] \\ \hline c & [I^c] \end{array} - \begin{array}{c|c|} a & [J^a] \\ \hline c & [J^c] \end{array} = \begin{array}{c|c|} a & [I^a] - [J^a] \\ \hline c & [I^c] - [J^c] \end{array}. \qquad (6.82)$$

---

* Vezi 2.4.5.2.
** Literele *a* şi *c* referindu-se la laturile arbore respectiv la laturile coarde.

în care am separat în acelaşi mod şi matricea curenţilor injectaţi de sursele de curent.

Aplicînd prima teoremă a lui KIRCHHOFF la cele $P=N-1$ noduri independente se obţine

$$[A][I']=0$$

unde $[A]$ este matricea de incidenţă.

Ţinînd seama de relaţiile (6.67) şi (6.82), relaţia (6.80) se poate scrie

$$\begin{array}{cc} a & c \\ \hline [A_1] & [A_2] \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} a & [I^a]-[J^a] \\ c & [I^c]-[J^c] \end{array} = [A_1]([I^a]-[J^a]) + [A_2](([I^c]-[J^c])) = 0.$$

Rezultă, ţinînd seama de relaţia (6.69)

$$[I^a]-[J^a] = -[A_1]^{-1}[A_2]([I^c]-[J^c]) = -[B_1]_t([I^c]-[J^c]).$$

Cu aceasta, relaţia (6.82) poate fi scrisă succesiv

$$[I'] = \begin{array}{c|c} a & -[B_1]_t([I^c]-[J^c]) \\ c & [I^c]-[J^c] \end{array} = \begin{array}{c|c} a & -[B_1]_t([I^c]-[J^c]) \\ c & [1]([I^c]-[J^c]) \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c|c} a & -[B_1]_t \\ c & [1] \end{array} ([I^c]-[J^c]) = [B]_t([I^c]-[J^c]), \tag{6.83}$$

conform relaţiei (6.70).

Se aplică acum cea de a doua teoremă a lui KIRCHHOFF unui sistem fundamental de bucle*, pentru care se cunoaşte matricea $[B]$, se obţine

$$[B][V]=0. \tag{6.84}$$

Ţinînd seama de relaţia (6.83), relaţia (6.76) se poate scrie

$$[Z][B]_t[I^c] = [V]+[E]-[Z]([J]-[B]_t[J^c]),$$

sau, înmulţind-o la stînga cu matricea buclelor $[B]$ şi ţinînd seama de relaţia (6.84), se obţine

$$[B][Z][B]_t[I^c] = [B]\Big[[E]-[Z]([J]-[B]_t[J^c])\Big]. \tag{6.85}$$

În această relaţie matriceală, matricea

$$[E]-[Z]([J]-[B]_t[J^c])$$

reprezintă influenţa pe care o au sursele de curent $[J]$ şi $[J^c]$ asupra surselor de tensiune. Notînd

$$[B][Z][B]_t = [Z']$$

* Buclele formate în graful arbore cu ajutorul grafului coarde considerat.

şi

$$[B]\Big[[E] - [Z]([J] - [B]_t[J^c])\Big] = [E'],$$

ecuaţia (6.85) capătă forma clasică dată de KRON*.

6.3.4. NOŢIUNI ASUPRA MĂRIMILOR SAU UNITĂŢILOR RELATIVE ŞI UTILIZAREA LOR ÎN ELECTROTEHNICĂ

Problemele de electrotehnică (maşini, linii de transmitere a energiei electrice etc.) se rezolvă mai simplu şi analizarea rezultatelor devine mai generală şi mai uşoară dacă se transformă diversele relaţii introducîndu-se în locul mărimilor date, *mărimi* sau *unităţi relative*.

Se numeşte *mărime* sau *unitate relativă* raportul dintre două mărimi de aceleaşi dimensiuni, dintre care una, aceea la care se raportează prima mărime se numeşte *mărimea* sau *unitatea de bază*.

Astfel, fie $\underline{U}_1$ $\underline{U}_2$,... tensiunile diverselor alternatoare din reţea ; luîndu-se ca tensiune de bază o tensiune oarecare U_0, rapoartele

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_0} = \underline{u}_1, \quad \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_0} = \underline{u}_2, \ldots$$

se numesc mărimile sau unităţile relative de tensiune.

În acelaşi mod, fie curenţii $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$,.., şi $\underline{I}_0$ curentul de bază. Rapoartele

$$\frac{\underline{I}_1}{I_0} = \underline{i}_1, \quad \frac{\underline{I}_2}{I_0} = \underline{i}_2, \ldots$$

se numesc mărimile sau unităţile relative de curent.

Se poate lua ca unitate de bază, oricare altă mărime ce intervine într-o reţea, ca puterea activă, puterea reactivă, impedanţa. Alegerea mărimilor de bază se face după criterii care variază de la caz la caz şi sînt în funcţie de ceea ce se urmăreşte prin utilizarea mărimilor relative. Se obişnuieşte a se alege mărimile de bază astfel, încît una din mărimile relative să fie egală cu unitatea ; de asemenea, ele se aleg astfel, încît să fie în originea de fază (mărimi reale).

Din mărimile relative de tensiune şi de curent se deduc puterile în mărimi relative, puterea de bază fiind dedusă din curentul şi tensiunea de bază. Se poate porni însă şi de la o putere de bază, deducîndu-se apoi celelalte mărimi relative necesare studiilor reţelei sau maşinii.

De asemenea, unitatea relativă de impedanţă se deduce uşor din unităţile relative de tensiune şi curent.

În acelaşi mod, pornind de la alte mărimi de bază luate iniţial, se poate deduce oricare altă mărime de bază necesară studiului reţelei sau maşinii considerate.

Cu aceste mărimi se fac toate calculele din reţea. Pentru a găsi apoi mărimile reale căutate, se înmulţesc rezultatele obţinute cu mărimile de bază corespunzătoare.

---

* Vezi 2.4.4.

Impedanţele nominale ale maşinilor se exprimă de obicei în mărimi relative, prin tensiunea de scurtcircuit corespunzătoare. Într-adevăr, luînd ca mărimi de bază tensiunea nominală şi curentul nominal, se obţine

$$Z = \frac{U_{sc}}{I_N} = \frac{\varepsilon U_N}{100\, I_N} = \frac{\varepsilon U_0}{100\, I_0} = \frac{1}{100}\, \varepsilon Z_0$$

şi rezultă

$$\frac{1}{100}\, \varepsilon = \frac{Z}{Z_0}.$$

Astfel, dacă o maşină are tensiunea de scurtcircuit $\varepsilon = 25\,\%$, impedanţa corespunzătoare, în mărimi relative, este 0,25 faţă de elementele nominale ale maşinii.

Ca exemplu fie de studiat funcţionarea unui cuadripol *

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\, \underline{U}_2 + \underline{B}\, \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = \underline{C}\, \underline{U}_2 + \underline{D}\, \underline{I}_2$$

Luînd ca mărimi de bază tensiunea constantă U_0 şi curentul constant I_0, împărţind prima ecuaţie cu U_0 se poate scrie succesiv

$$\frac{\underline{U}_1}{U_0} = \underline{A}\, \frac{\underline{U}_2}{U_0} + \underline{B}\, \frac{\underline{I}_2}{U_0} = \underline{A}\, \frac{\underline{U}_2}{U_0} + \underline{B}\, \frac{\underline{I}_2}{I_0} \cdot \frac{I_0}{U_0} = \underline{A}\, \frac{\underline{U}_2}{U_0} + \frac{\underline{B}}{Z_0} \cdot \frac{\underline{I}_2}{I_0}$$

de unde, notînd

$$\frac{\underline{U}_1}{U_0} = \underline{u}_1;\quad \frac{\underline{U}_2}{U_0} = \underline{u}_2;\quad \frac{\underline{I}_2}{I_0} = \underline{i}_2;\quad \underline{A} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{U}_{20}} = \frac{\dfrac{\underline{U}_{10}}{U_0}}{\dfrac{\underline{U}_{20}}{U_0}} = \frac{\underline{u}_{10}}{\underline{u}_{20}} = \underline{a};$$

$$\frac{\underline{B}}{Z_0} = \frac{\dfrac{\underline{U}_{1\,sc}}{U_0}}{\dfrac{\underline{I}_{2\,sc}}{I_0}} = \frac{\underline{u}_{1\,sc}}{\underline{i}_{2\,sc}} = \underline{b},$$

se obţine

$$\underline{u}_1 = \underline{a}\, \underline{u}_2 + \underline{b}\, \underline{i}_2. \tag{6.86}$$

În acelaşi mod, împărţind ecuaţia a doua cu I_0 aceasta devine

$$\underline{i}_1 = \underline{c}\, \underline{u}_2 + \underline{d}\, \underline{i}_2, \tag{6.87}$$

* Vezi paragraful 6.4.4.2.

deoarece,

$$\frac{\underline{C}}{Y_0} = \frac{\underline{I}_{10}}{\underline{U}_{20}} = \frac{\dfrac{\underline{I}_{10}}{I_0}}{\dfrac{\underline{U}_{20}}{U_0}} = \frac{\underline{i}_{10}}{\underline{u}_{20}} = \underline{c} \quad \text{şi} \quad \underline{D} = \frac{\underline{I}_{sc}}{\underline{I}_{2sc}} = \frac{\dfrac{\underline{I}_{1\,sc}}{I_0}}{\dfrac{\underline{I}_{2\,sc}}{I_0}} = \frac{\underline{i}_{1\,sc}}{\underline{i}_{2\,sc}} = \underline{d}.$$

Este uşor de văzut că şi în acest caz

$$\underline{a} \cdot \underline{d} - \underline{b} \cdot \underline{c} = 1$$

Într-adevăr, înlocuind în relaţia

$$\underline{A}\,\underline{D} - \underline{B}\,\underline{C} = 1$$

diverşii parametri în funcţie de valorile relative, se obţin

$$\underline{a} \cdot \underline{d} - \underline{b} \cdot Z_0 \cdot \underline{c} \cdot Y_0 = 1$$

căci $Z_0 Y_0 = 1$.

Trebuie observat că în ecuaţiile (6.86) şi (6.87) valorile $\underline{b}$ şi $\underline{c}$ depind de raportul

$$\frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0^2}{P_0},$$

în afară de constantele caracteristice ale cuadripolului.

În particular, fie de studiat funcţionarea unui cuadripol pentru care se dă U_2, P_2 şi $\cos \varphi_2$; se cere să se determine U_1, P_1, $\cos \varphi_1$ şi randamentul cuadripolului.

Luînd $\underline{U}_2$ ca origine de fază şi

$$U_0 = \underline{U}_2 = U_2; \quad I_0 = I_{2a},$$

I_{2a} fiind partea reală a curentului $\underline{I}_2$, rezultă

$$u_2 = 1; \quad i_{2a} = \frac{I_{2a}}{I_0} = 1; \quad i_{2r} = \frac{I_{2r}}{I_0} = \frac{I_{2r}}{I_{2a}} = \operatorname{tg} \varphi_2$$

şi deci

$$\underline{i}_2 = i_{2a} \pm \mathrm{j}\, i_{2r} = 1 \pm \mathrm{j} \operatorname{tg} \varphi_2,$$

după cum sistemul este capacitiv sau inductiv.

Înlocuind aceste valori în ecuaţia (6.86) şi punînd parametrii $\underline{a}$ şi $\underline{b}$ sub forma complexă, se obţine

$$\underline{u}_1 = (a_1 + \mathrm{j}\, a_2)\, u_2 + (b_1 + \mathrm{j}\, b_2)\,(1 \pm \mathrm{j} \operatorname{tg} \varphi_2)\, i_{2a} =$$
$$= a_1 + b_1 \mp b_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + \mathrm{j}\,(a_2 + b_2 \pm b_1 \operatorname{tg} \varphi_2) = u_1' + \mathrm{j}\, u_1''$$

De aici, rezultă

$$u_1 = \sqrt{u_1'^2 + u_1''^2}$$

$$U_1 = u_1 U_0 .$$

În același mod, din ecuația (6.87), se obține

$$\underline{i}_1 = (c_1 + \mathrm{j}\, c_2)\, u_2 + (d_1 + \mathrm{j}\, d_2)\,(1 \pm \mathrm{j}\,\mathrm{tg}\,\varphi_2)\, i_{2a} =$$

$$= c_1 + d_1 \mp d_2\,\mathrm{tg}\,\varphi_2 + \mathrm{j}\,(c_2 + d_2 \pm d_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_2) = i_1' + \mathrm{j}\, i_1'' .$$

Rezultă

$$i_1 = \sqrt{i_1'^2 + i_1''^2}; \; I_1 = i_1 I_0 .$$

Puterea aparentă la intrarea în cuadripol se obține prin relația

$$\underline{s}_1 = \underline{u}_1\, \underline{i}_1^* = (u_1' + \mathrm{j}\, u_1'')\,(i_1' - \mathrm{j} i_1'') = (u_1' i_1' + u_1'' i_1'') + \mathrm{j}(u_1'' i_1' - u_1' i_1'') = p_1 + \mathrm{j} q_1$$

Rezultă

$$s_1 = \sqrt{p_1^2 + q_1^2}; \; \underline{S}_1 = p_1 P_0 + \mathrm{j}\, q_1\, P_0 = P_1 + \mathrm{j}\, Q_1 ,$$

în care

$$P_0 = U_0 I_0 .$$

Mai departe, se găsește

$$\cos\,\varphi_1 = \frac{p_1}{s_1} \text{ și } \eta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{p_1} ,$$

deoarece

$$p_2 = u_2\, i_{2a} = 1.$$

6.4. STUDIUL UNOR CIRCUITE TIP

6.4.1. GENERALITĂȚI

În studiul funcționării unei rețele electrice complexe, este de multe ori util să se separe o porțiune din rețea și să se studieze separat proprietățile sale și modul său de comportare în situații bine definite. De exemplu, într-un sistem energetic oarecare, se caută a se vedea cum se comportă o linie electrică care leagă două puncte oarecare ale sistemului. De asemenea, o mașină electrică poate fi considerată ca fiind un element de legătură între două părți ale unei rețele complexe și deci, poate fi studiată separat, fie din punct de vedere electromecanic sau numai din punct de vedere electric.

Această rețea parțială este constituită, în general, dintr-o grupare complexă oarecare de rezistențe, inductanțe, inductanțe mutuale, capacități, surse de energie, — sub forma de surse de tensiune și de surse de curent — electro-

motoare cu aceeaşi pulsaţie, tuburi electronice sau tranzistori în diferite montaje, prezentînd un număr oarecare de borne de intrare şi un număr oarecare de borne de ieşire; la bornele de ieşire se leagă impedanţe oarecare $\underline{Z}$, constante sau variabile, constituind utilizarea circuitului.

Proprietăţile de care se bucură aceste reţele parţiale depind de *numărul de borne* prin care ele pot fi legate de restul reţelei. Se pot defini astfel patru *circuite-tip* diferite. În raport cu elementele constitutive ale reţelei sau a circuitului tip, acestea pot fi active sau pasive, liniare sau neliniare. Definirea diferitelor circuite-tip are un caracter general, ea fiind aceeaşi oricare ar fi natura reţelei; în cele ce urmează ne vom ocupa numai de cazul reţelelor liniare.

Circuitele-tip, astfel definite, pot fi grupate în următoarele patru categorii:

1. *Multipolul liniar*. Un multipol liniar este un circuit format dintr-o grupare oarecare de elemente liniare — rezistenţe, inductanţe proprii şi mutuale, capacităţi, surse liniare de tensiune sau de curent. Unele din nodurile acestei reţele sînt accesibile şi pot fi conectate la alte reţele exterioare: prin definiţie aceste noduri se numesc *bornele* sau *polii* reţelei. Nici unul din celelalte noduri nu trebuie să mai fie legat la o altă reţea exterioară; de asemenea, nici una din laturile reţelei nu trebuie să fie cuplată magnetic cu vreo latură oarecare a unei alte reţele ((fig. 6. 52). Un multipol este *activ* sau *pasiv* după cum el conţine sau nu surse de energie electrică.

Fig. 6.52. Multipol.

2. *Dipolul*. Un multipol liniar avînd numai două borne accesibile este un *dipol liniar*.

3. *Cuadripolul*. Un multipol liniar avînd patru borne accesibile se numeşte *tetrapol liniar*.

Dacă tetrapolul este legat la reţele exterioare, astfel încît curenţii care intră prin cele patru borne ale sale sînt doi cîte doi egali şi de sens contrar (fig. 6.53) tetrapolul considerat constituie un *cuadripol liniar*.

Condiţia egalităţii curenţilor este întotdeauna realizată dacă reţelele exterioare, R_1 şi R_2, nu sînt cuplate între ele, magnetic sau electric; în anumite cazuri, această condiţie este îndeplinită şi atunci cînd există asemenea legături.

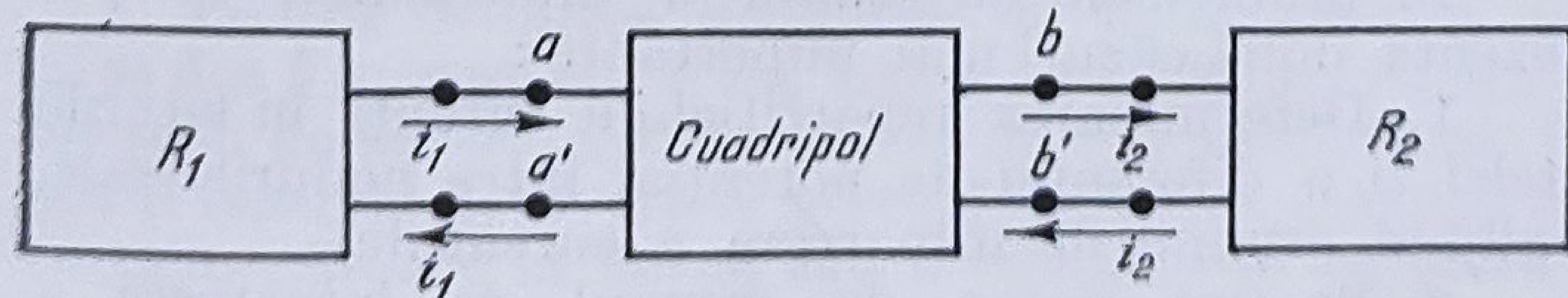


Fig. 6.53. Cuadripol.

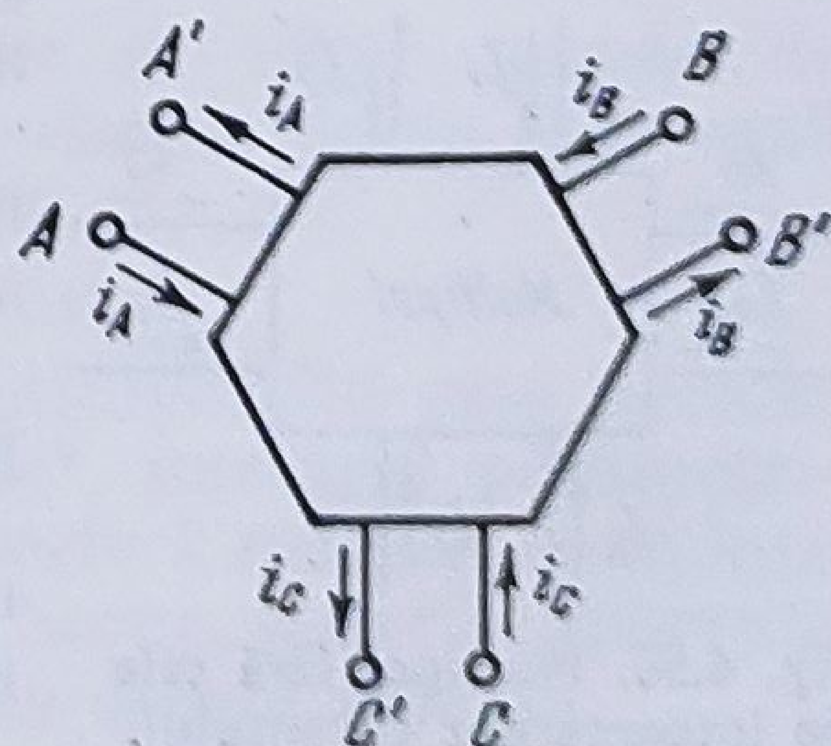


Fig. 6.54. Multidipol.

4. *Multidipolul*. Un multipol care are mai multe perechi de borne, legat cu reţelele exterioare, astfel încît curenţii care intră prin fiecare pereche de borne să fie în permanenţă egali şi de sens contrar se numeşte un multidipol (fig. 6.54).

6.4.2. STUDIUL MULTIPOLULUI

6.4.2.1. Considerații generale. Așa cum s-a arătat *, un multipol pasiv-liniar este o rețea formată dintr-o grupare oarecare de elemente liniare de circuite electrice, care nu au în constituția lor surse de energie electrică cuprinse între n borne accesibile și astfel ca între elementele acestei rețele și exterior să nu mai existe nici un alt fel de legătură electrică sau magnetică, în afară de

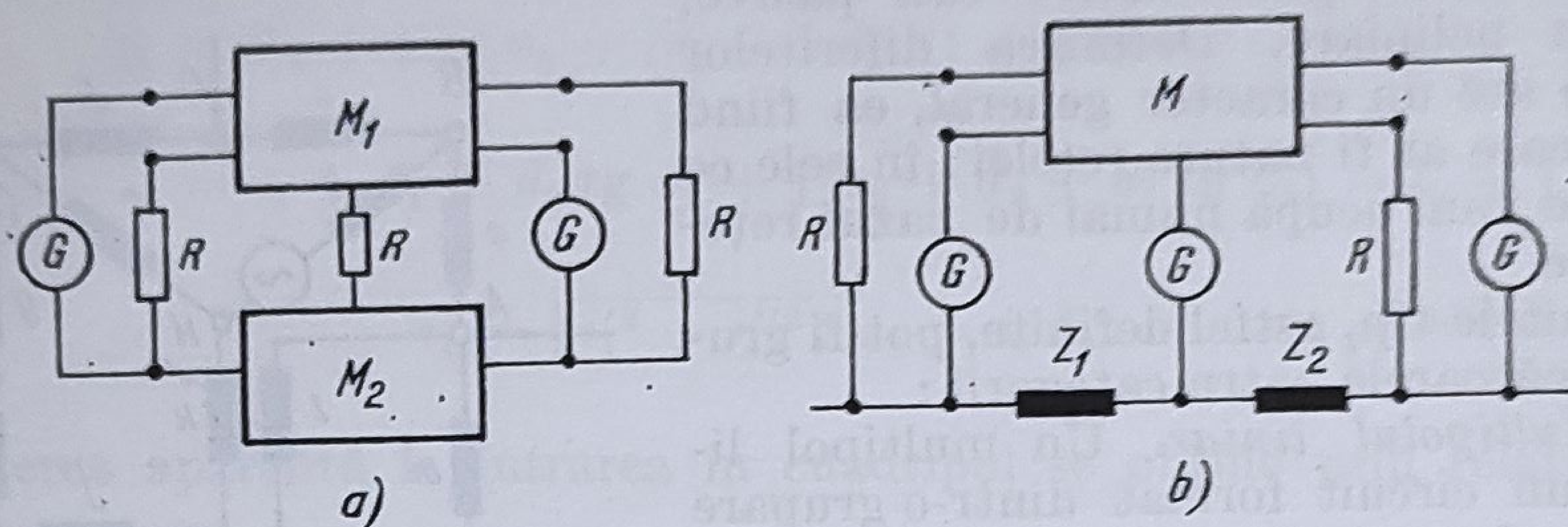


Fig. 6.55. Circuitul de întoarcere a unui multipol:
a) printr-un alt multipol ; *b)* printr-un conductor.

acelea ce se fac prin borne. Bornele unui multipol pot fi legate la surse de energie electrică — de tensiune sau de curent—, la receptoare — consumatoare de energie electrică — sau la alte rețele — active sau pasive.

Întoarcerea curentului care străbate un multipol poate să se facă în exteriorul său, fie printr-un alt multipol pasiv (fig. 6. 55, *a*), fie printr-un conductor cu sau fără impedanță proprie (fig. 6.55, *b*).

Acest din urmă caz corespunde circuitului echivalent al unui sistem polifazat simetric și echilibrat (reprezentarea unei singure faze cu întoarcerea prin conductorul neutru).

Cel mai simplu multipol este dipolul.

6.4.2.2. Metoda generală de studiu. Pentru rezolvarea problemelor relative la multipoli se aplică metodele generale de studiu ale circuitelor electrice, în special metoda buclelor, metoda perechilor de noduri și metoda transfigurării.

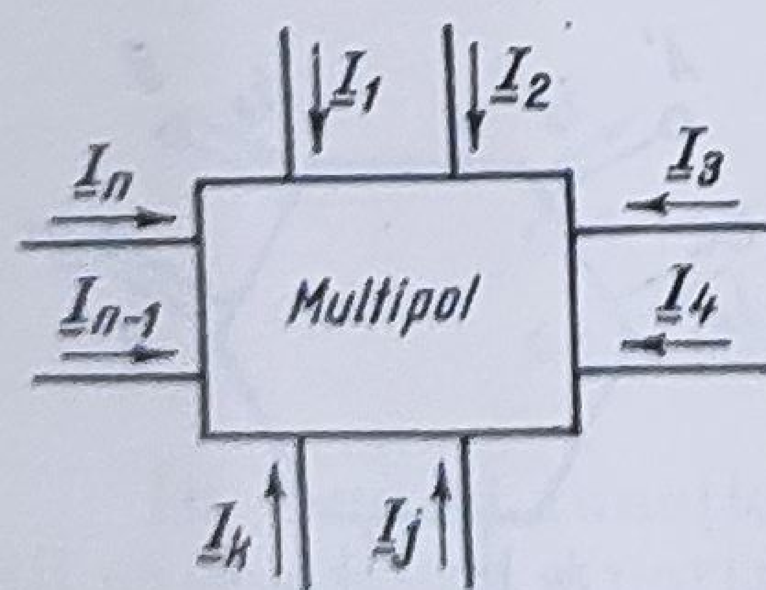


Fig. 6.56. Multipol fără cale de întoarcere a curentului.

În cazul unor multipoli complecși se utilizează modelarea electrică, care permite înlocuirea prin măsurători electrice a calculelor numerice.

În problemele de studiu a multipolilor se pot prezenta două cazuri mai importante :

1. Determinarea repartiției de curenți în laturile rețelei și a diferenței de potențial între nodurile sale, neglijînd drumul de întoarcere a curentului.

2. Se ține seama de drumul de întoarcere a curentului — care este un conductor cu impedanță nulă — și se introduc astfel tensiunile nodurilor circuitului față de acest conductor al cărui potențial se ia ca origine.

În primul caz, fie n numărul de borne ale multipolului ; pentru a defini complet regimul de funcționare al acestuia, este necesar să fie date $n-1$ mărimi electrice complexe. Astfel, dacă considerăm cei n curenți care intră prin bor-

* Vezi 6.4.1, 1.

nele multipolului (fig. 6.56), prin aplicarea primei teoreme a lui KIRCHHOFF se poate scrie

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{I}_j = 0 ;$$

în consecință $n-1$ din acești curenți sînt independenți.

Pentru a fixa cei n—1 curenți independenți trebuie dați

$$2(n-1)-1=2n-3$$

parametri reali, $n-1$ module și $n-2$ argumente luate în raport cu argumentul unuia din curenți luat ca origine de fază.

În al doilea caz, existînd un conductor în plus — conductorul de întoarcere — apare un parametru în plus, necesar pentru determinarea funcționării multipolului. Într-adevăr, în acest caz, numărul de parametri ai multipolului este $n+1$, dintre care n sînt independenți; vor fi necesari deci $2n-1$ parametri reali—n valori efective și $n-1$ argumente. Ținînd seama că prima teoremă a lui KIRCHHOFF nu poate fixa decît $n-1$ parametri, al n-lea parametru trebuie să fie neapărat *o tensiune de borne*, măsurată între o bornă oarecare din bornele multipolului și conductorul de întoarcere (fig. 6.57).

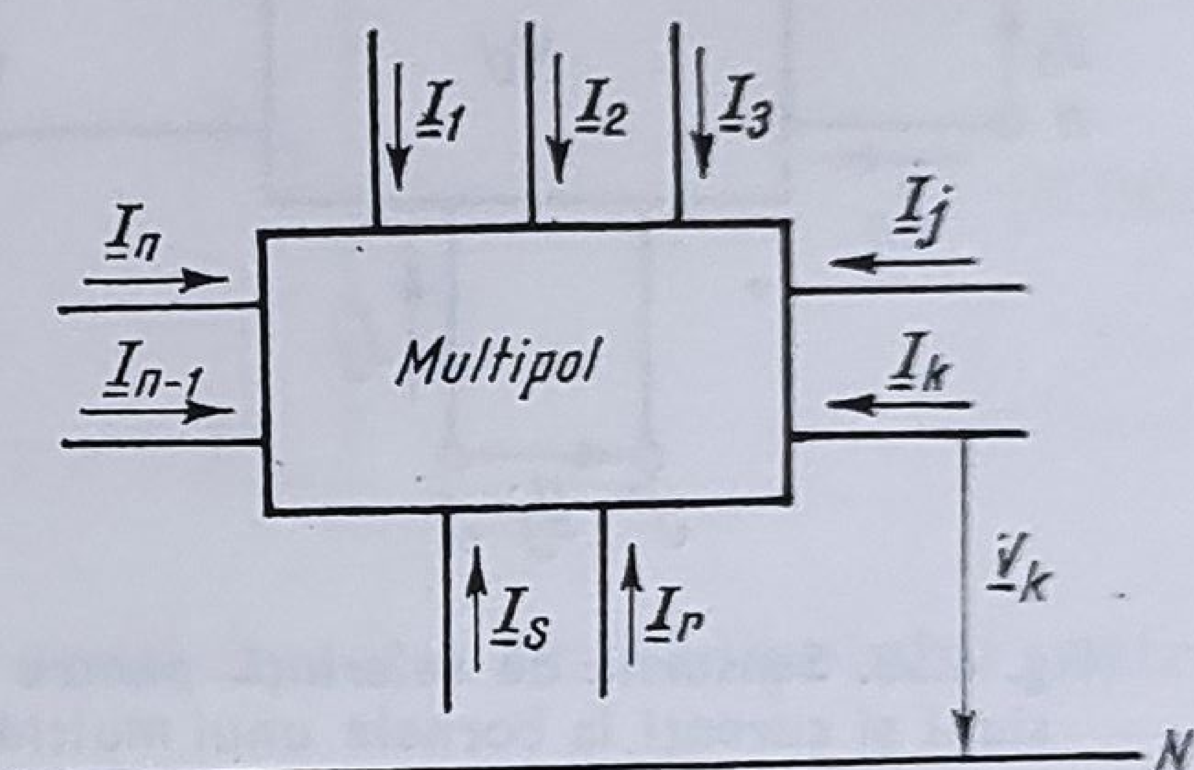


Fig. 6.57. Multipol cu cale de întoarcere a curentului.

Este evident, că se pot înlocui unii curenți cu tensiunile de borne respective precum și că se poate înlocui unul din curenți — modulul și argumentul respectiv — prin puterile activă și reactivă circulînd prin borna respectivă și conductorul de întoarcere.

6.4.3. STUDIUL MULTIDIPOLULUI

6.4.3.1. **Considerații generale.** Un multipol pasiv al cărui număr de borne este par, $n=2k$, iar curenții care ajung la o pereche de borne sînt egali și de sens contrar, se numește un multidipol (fig. 6.54).

Cel mai simplu dintre multidipoli este cuadripolul.

Pentru definirea regimului de funcționare a multidipolului este necesar să se dea k mărimi electrice. Luînd una din faze ca origine*, numărul parametrilor reali de determinat va fi deci $2k-1$. Evident că, aceste k mărimi complexe pot fi tensiuni la diversele perechi de borne, curenții de borne, puterile aparente corespunzătoare la borne sau o combinație oarecare de aceste mărimi.

6.4.3.2. **Ecuațiile generale ale multidipolului.** *a) Impedanțele și admitanțele exterioare ale multipolului la funcționarea în scurtcircuit.* Fie un multipol la care se alege, pentru fiecare pereche de borne, un sens de referință pentru tensiuni și curenți (fig. 6.58).

---

* Este evident că se poate lua una, oricare din mărimile reale în mod arbitrar; este mai comod a se lua o fază ca origine.

Se alimentează multidipolul prin una din perechile de borne, toate celelalte fiind legate în scurtcircuit (fig. 6.59); în aceste condiții se măsoară tensiunea și curentul la bornele de alimentare și curenții circulînd prin bornele scurtcircuitate.

Prin definiție, *impedanțele exterioare în scurtcircuit* ale dipolului sînt:

$\underline{Z}_{11} = \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$, *impedanța aparentă în scurtcircuit* la bornele $11'$ (bornele de intrare);

$\underline{Z}_{1p} = \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{I}'_p}$, *impedanța de transfer în scurtcircuit*, între bornele $11'$ și pp' ($pp' = 2, 3, \ldots, n$).

Aceste impedanțe pot fi definite în raport cu oricare pereche de borne a multi-

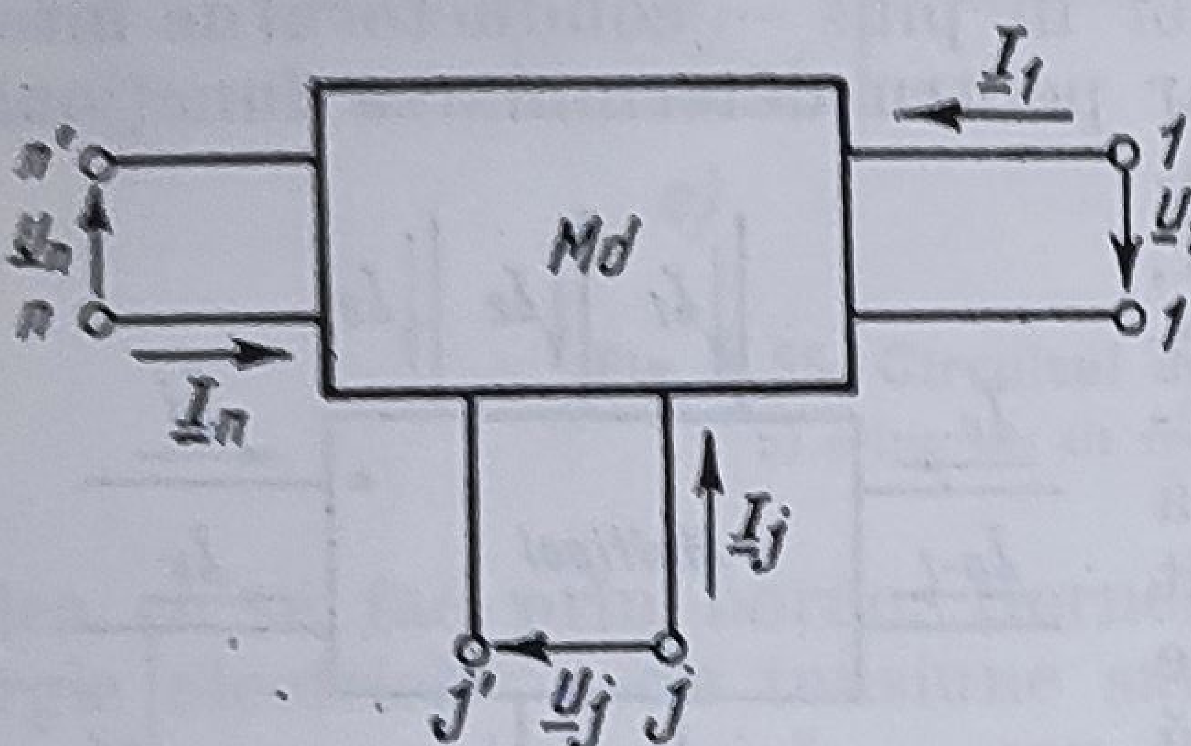


Fig. 6.58. Sensurile de referință pentru tensiuni și curenți la bornele unui multidipol.

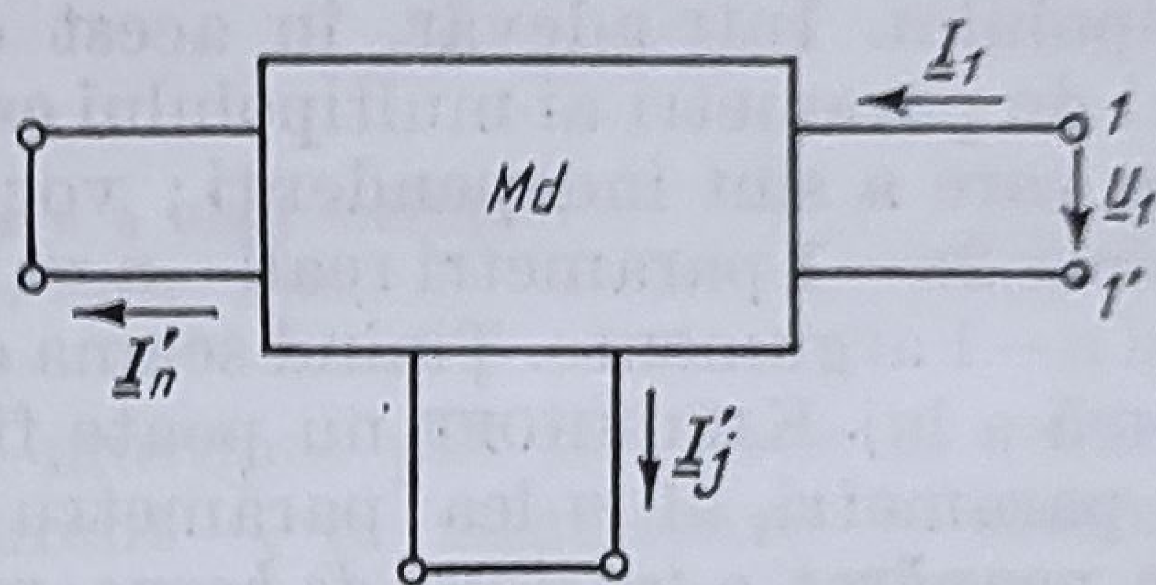


Fig. 6.59. Multidipol cu $n-1$ perechi de borne scurtcircuitate.

dipolului. Trebuie observat că în virtutea teoremei reciprocității a lui MAXWELL pentru orice rețea liniară

$$\underline{Z}_{pq} = \underline{Z}_{qp}.$$

Este ușor de văzut, că vom putea defini astfel, pentru un multidipol cu n perechi de borne, n impedanțe aparente la bornele de intrare și $\dfrac{n(n-1)}{2}$ impedanțe de transfer.

În același mod se definește

$\underline{Y}_{pp'} = \dfrac{1}{\underline{Z}_{pp'}}$ *admitanța aparentă la scurtcircuit*, la bornele pp' (de intrare); aceste admitanțe sînt în număr de n;

$\underline{Y}_{pq} = \dfrac{1}{\underline{Z}_{pq}}$ *admitanțele de transfer la scurtcircuit* dintre bornele pp' și qq'; numărul lor este $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

b) Ecuațiile multidipolului în funcție de admitanțele exterioare în scurtcircuit. Să aplicăm pe rînd fiecărei perechi de borne o tensiune $\underline{U}_i$, celelalte perechi de borne fiind în scurtcircuit ($\underline{U}_k = 0$). Curenții care circulă prin bornele respective vor fi

$\underline{Y}_{pp'}\,\underline{U}_p$ pentru perechea de borne pp' și

$\underline{Y}_{pq}\,\underline{U}_p$ pentru perechea de borne qq'.

Suprapunerea tuturor acestor situații conduce la sistemul de ecuații

$$\left.\begin{array}{l}\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\,\underline{U}_1 - \underline{Y}_{12}\,\underline{U}_2 - \ldots - \underline{Y}_{1n}\,\underline{U}_n \\ \underline{I}_2 = -\,\underline{Y}_{21}\,\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\,\underline{U}_2 - \ldots - \underline{Y}_{2n}\,\underline{U}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{I}_n = -\,\underline{Y}_{n1}\,\underline{U}_1 - \underline{Y}_{n2}\,\underline{U}_2 \ldots + \underline{Y}_{nn}\,\underline{U}_n,\end{array}\right\} \quad (6.88)$$

care poate fi scris matriceal sub forma

$$[I] = [Y]\ [U]. \quad (6.89)$$

Matricea

$$[Y] = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & -\underline{Y}_{12} & \ldots & -\underline{Y}_{1n} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \ldots & -\underline{Y}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\underline{Y}_{n1} & -\underline{Y}_{n2} & \ldots & \underline{Y}_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.90)$$

se numește *matricea admitanțelor exterioare în scurtcircuit* a multidipolului; este o matrice simetrică.

Inversînd ecuația (6.89) se obține ecuația

$$[U] = [Z]\,[I], \quad (6.91)$$

în care

$$[Z] = [Y]^{-1}$$

și care se numește *matricea impedanțelor exterioare*; trebuie observat că elementele matricei $[Z]$ nu sînt inversele elementelor matricei $[Y]$ și deci nu sînt identice cu impedanțele aparente și de transfer la scurtcircuit. Ele sînt *impedanțele aparente și de transfer* ale multidipolului la mersul în gol și anume (fig.6.60):

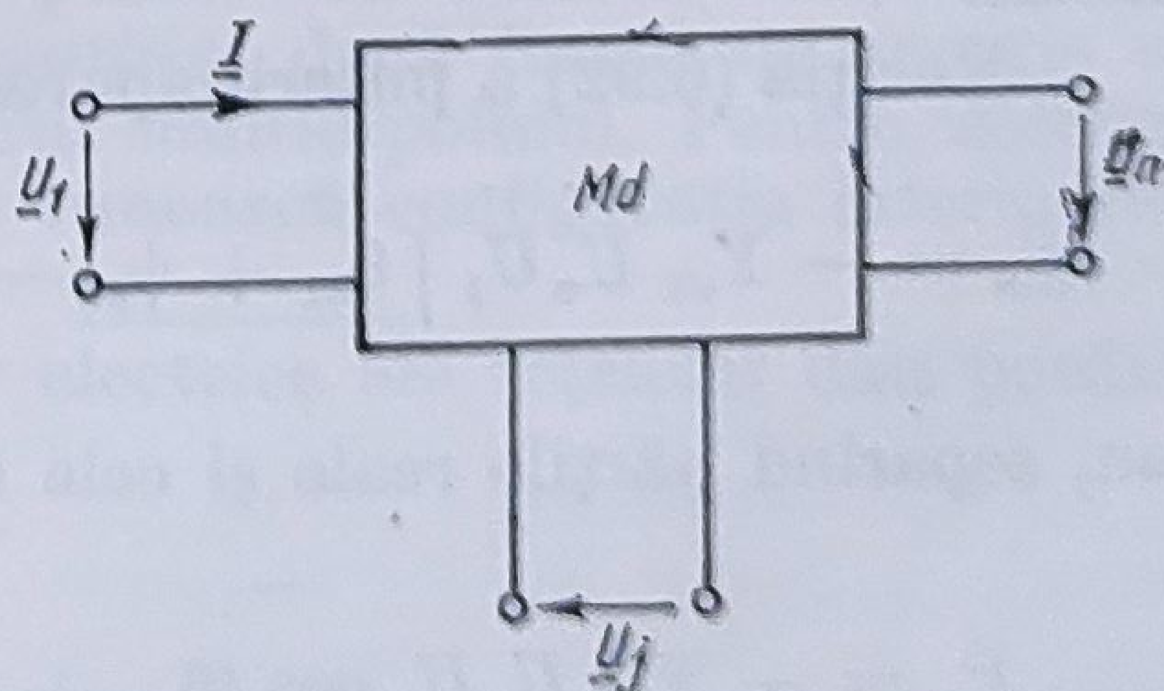


Fig. 6.60. Multidipol cu $n-1$ perechi de borne în gol.

$\underline{Z}'_{pp'} = \dfrac{\underline{U}_p}{\underline{I}_p}$ *impedanța aparentă la mersul în gol*, la bornele pp' (de intrare), numărul lor fiind n;

$\underline{Z}'_{pq} = \dfrac{\underline{U}'_q}{\underline{I}_p}$ *impedanța de transfer la mersul în gol*, dintre bornele pp' și qq', în număr de $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Aplicînd metoda superpoziției, se poate stabili și în acest caz un sistem de ecuații, de forma

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}'_{11}\,\underline{I}_1 - \underline{Z}'_{12}\,\underline{I}_2 - \ldots - \underline{Z}'_{1n}\,\underline{I}_n \\ \underline{U}_2 &= -\underline{Z}'_{21}\,\underline{I}_1 + \underline{Z}'_{22}\,\underline{I}_2 - \ldots - \underline{Z}'_{2n}\,\underline{I}_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{U}_n &= -\underline{Z}'_{n1}\,\underline{I}_1 + \underline{Z}'_{n2}\,\underline{I}_2 - \ldots + \underline{Z}'_{nn}\,\underline{I}_n, \end{aligned}\right\} \qquad (6.92)$$

care conduce la ecuația matricială (6.91).

c) Expresiile puterilor active și reactive exterioare. Ecuațiile (6.88), respectiv (6.92), pot fi utilizate pentru calculul puterilor active și reactive la bornele multi-dipolului. Astfel, pentru bornele nn' puterea aparentă corespunzătoare este

$$\underline{S}_n = P_n + \mathrm{j}\,Q_n = \underline{U}_n\,\underline{I}_n^*$$

sau, ținînd seama de expresia corespunzătoare a lui $\underline{I}_n$ din ecuațiile (6.88) rezultă

$$\underline{S}_n = -\underline{Y}_{n1}^*\,\underline{U}_1^*\,\underline{U}_n - \underline{Y}_{n2}^*\,\underline{U}_2^*\,\underline{U}_n - \ldots + \underline{Y}_{nn}^*\,\underline{U}_n^*\,\underline{U}_n\ (n = 1, 2, \ldots, n). \qquad (6.93)$$

Fie θ_p $(p = 1, 2, \ldots, n)$ defazajul celor n tensiuni de borne în raport cu o origine de fază arbitrară;

$\theta_{pq} = \theta_p - \theta_q$ $(p, q = 1, 2, \ldots, n;\ p \neq q)$ defazajul între tensiuni luate două cîte două;

ψ_{pp} $(p = 1, 2, \ldots n)$, argumentele admitanțelor aparente în scurt-circuit;

ψ_{pq} $(p, q = 1, 2, \ldots, n;\ p \neq q)$ argumentele admitanțelor de transfer în scurt-circuit.

Relația (6.92) a puterii aparente se poate scrie

$$\underline{S}_n = -Y_{n1}\,U_n U_1 \,\underline{|\,\theta_{n1} + \psi_{n1}} - Y_{n2}\,U_n U_2\,\underline{|\,\theta_{n2} + \psi_{n2}} - \ldots + Y_{nn}\,U_n^2\,\underline{|\,\psi_{nn}}$$

sau, separînd părțile reale și cele complexe rezultă,

$$\left.\begin{aligned} P_n &= -Y_{n1}\,U_n U_1 \cos(\theta_{n1} + \psi_{n1}) - Y_{n2}\,U_n U_2 \cos(\theta_{n2} + \psi_{n2}) - \ldots \\ &\quad \ldots + Y_n U_n^2 \cos\psi_{nn} \\ Q_n &= -Y_{n1} U_n U_1 \sin(\theta_{n1} + \psi_{n1}) - Y_{n2} U_n U_2 \sin(\theta_{n2} + \psi_{n2}) - \ldots \\ &\quad \ldots + Y_n U_n^2 \sin\psi_{nn} \end{aligned}\right\} \qquad (6.94)$$

În acelaşi mod se poate stabili expresia puterilor utilizînd ecuaţiile (6.92). Se găseşte, procedînd în acelaşi mod,

$$\left.\begin{aligned} P_n &= -Z_{n1} I_n I_1 \cos(\varphi_{n1} + \zeta_{n1}) - Z_{n2} I_n I_2 \cos(\varphi_{n2} + \zeta_{n2}) - \ldots \\ &\ldots + Z_{nn} I_n^2 \cos \zeta_{nn} \\ Q_n &= -Z_{n1} I_n I_1 \sin(\varphi_{n1} + \zeta_{n1}) - Z_{n2} I_n I_2 \sin(\varphi_{n2} + \zeta_{n2}) - \ldots \\ &\ldots + Z_{nn} I_n^2 \sin \zeta_{nn} \end{aligned}\right\} \quad (6.95)$$

în care

φ_p $(p = 1, 2, \ldots, n)$ este defazajul celor n curenţi de borne în raport cu o origine de fază arbitrar aleasă;

$\varphi_{pq} = \varphi_p - \varphi_q$ $(p, q = 1, 2, \ldots, n;\ p \neq q)$ este defazajul între doi curenţi luaţi doi cîte doi;

ζ_{pp} $(p = 1, 2, \ldots, n)$ sînt argumentele impedanţelor aparente la mersul în gol;

ζ_{pq} $(p, q = 1, 2, \ldots, n;\ p \neq q)$ sînt argumentele impedanţelor de transfer la mersul în gol.

În consecinţă, în cazul unei reţele care poate fi asimilată cu un multipol, dacă se cunosc, sau se pot măsura, admitanţele (respectiv impedanţele) aparente sau de transfer în scurtcircuit (respectiv în gol) se pot calcula cu uşurinţă puterile active şi reactive la borne. Aceste puteri sînt date de relaţiile (6.94), respectiv (6.95) şi sînt toate considerate *pozitive* dacă fluxul de energie corespunzător este din exterior către interiorul multidipolului. Pentru determinarea acestor puteri nu este necesar să se cunoască configuraţia interioară a reţelei.

OBSERVAŢIE. Utilizarea modelelor electrice ale reţelelor dau posibilitatea măsurării directe a acestor mărimi.

6.4.4. STUDIUL CUADRIPOLULUI

6.4.4.1. Consideraţii generale. Multidipolii cei mai des întîlniţi sînt cuadripolii, care au două borne de intrare şi două borne de ieşire. Dintre aceştia, cuadripolii pasivi liniari formează o clasă importantă de circuite care permit un studiu comod cu ajutorul unor ecuaţii tip, care pot fi deduse analitic pe cale elementară.

Un asemenea circuit (fig. 6.61) poate fi redus, prin transformări succesive, fie la un circuit format din două impedanţe în serie între care se găseşte o impedanţă în derivaţie, fie din două impedanţe în derivaţie, între care se găseşte o impedanţă în serie.

După aspect, primul tip se numeşte un cuadripol în T (fig. 6.62, a) şi al doilea, cuadripol în π (fig. 6.62, b).

Aceste circuite sînt alimentate la bornele de intrare a_1 b_1 de o sursă de curent alternativ sinusoidal, avînd tensiunea efectivă $\underline{U}_1$. În circuite vor circula

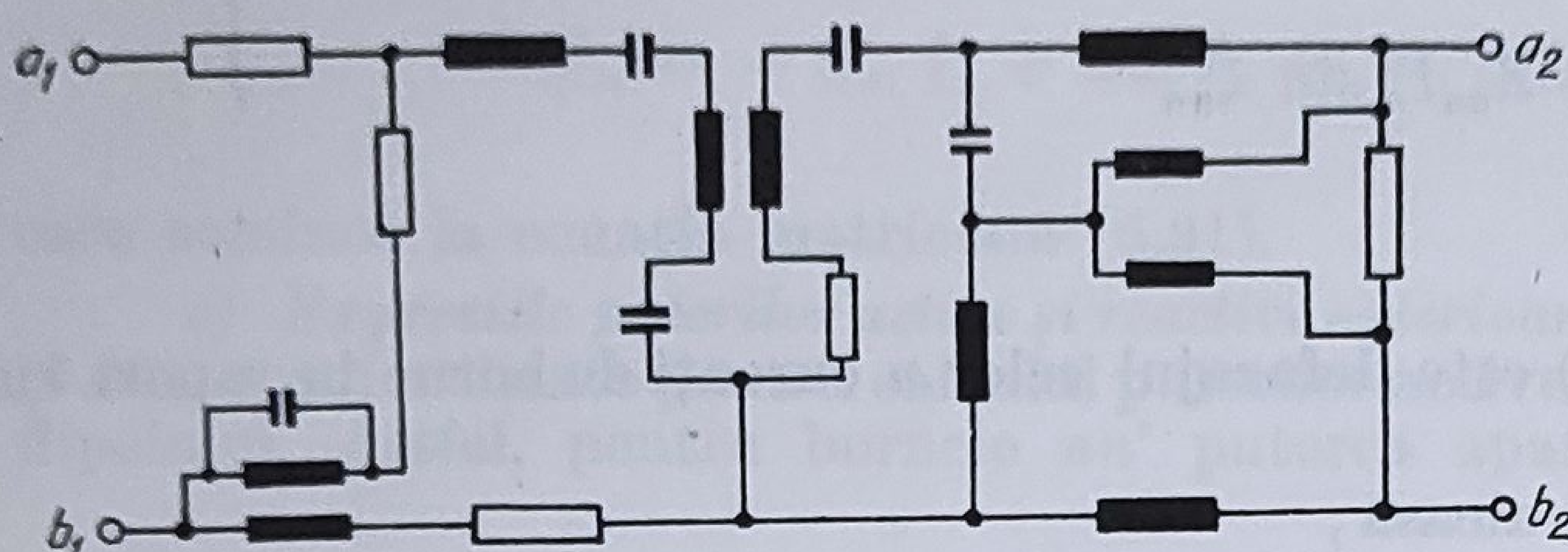


Fig. 6.61. Circuit cuadripol.

diverşi curenţi $\underline{I}$ iar la bornele de ieşire a_2, b_2 ale utilizării va rezulta o tensiune alternativă a cărei valoare efectivă este $\underline{U}_2$.

Problemele de rezolvat în cazul acestor circuite sînt de mai multe feluri :

a) Astfel, va trebui să se determine curentul $\underline{I}_1$, debitat de sursă, pentru fiecare valoare a impedanţei de sarcină $\underline{Z}$, puterea utilă consumată în $\underline{Z}$ şi randamentul, adică raportul dintre puterea utilă P_u şi puterea totală dată la bornele a_1 b_1.

b) În alte cazuri, variabila principală este curentul $\underline{I}_2$, în impedanţa $\underline{Z}$; se va putea studia în acelaşi timp şi tensiunea $\underline{U}_2$ la bornele a_2b_2 a impedanţei $\underline{Z}$, sau tensiunea la bornele cd ale unei derivaţii.

c) Din alt punct de vedere, problema poate avea două aspecte diferite, după cum se dă constantă fie tensiunea $\underline{U}_2$ la bornele a_2b_2 ale utilizării, caz ce corespunde unei furnizări de energie electrică sub tensiune constantă, fie tensiunea $\underline{U}_1$ la bornele a_1 b_1, caz ce corespunde unei furnizări de energie de la o sursă de tensiune constantă, de exemplu, cazul alimentării motoarelor.

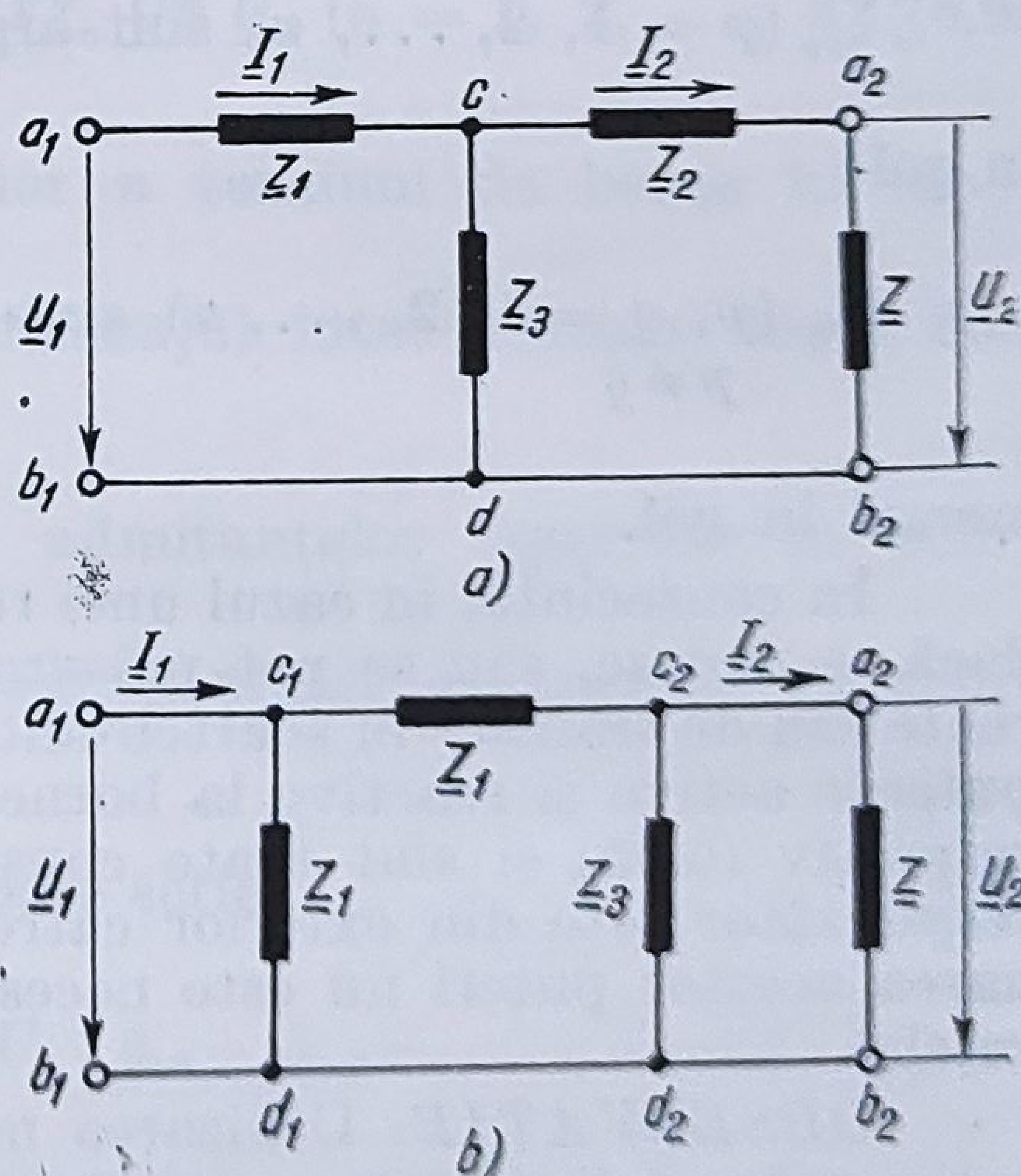


Fig. 6.62. Cuadripoli tip.
a) cuadripol în T ; b) cuadripol în π

d) În general, impedanţele serie din circuit sînt foarte mici în raport cu impedanţa utilizării sau cu impedanţele derivaţie. În aceste condiţii, în unele cazuri, se pot face oarecare aproximaţii, introducîndu-se apoi corecţii. Astfel, se poate presupune, într-o primă aproximaţie, că impedanţele serie sînt nule şi cele derivaţie infinite.

Sistemele de circuite electrice, oricît de complicate ar fi se pot reduce la două tipuri bine definite şi anume :

1. Sisteme la care funcţionarea este cuprinsă între patru borne libere, cuprinzînd legături transversale ; aceste sisteme se numesc *cuadripoli* ; ele

corespund instalațiilor sau mașinilor la care pierderile transversale sau cele de mers în gol nu pot fi neglijate.

2. Sisteme la care funcționarea este cuprinsă între două borne libere și la care nu există nici un fel de legătură transversală; aceste sisteme se numesc *dipoli*. Aceste circuite corespund instalațiilor sau mașinilor la care se pot neglija pierderile în gol și cele transversale (spre exemplu o linie electrică scurtă, un transformator electric etc.).

Dipolii constituie deci o clasă particulară de cuadripoli; ei vor fi examinați în paragraful următor*.

6.4.4.2. **Ecuațiile cuadripolului.** Să considerăm un circuit oarecare, căruia i se pot determina două borne de intrare, a_1 și b_1, și două borne de ieșire, a_2 și b_2 (fig. 6.63); între aceste patru borne atît prin interior cît și prin exterior, circuitul este pasiv. Se definește astfel un cuadripol pasiv.

Un cuadripol pasiv poate fi socotit ca un circuit intermediar și care servește de legătură între o sursă de energie electrică și o impedanță de utilizare.

La bornele de intrare a_1 și b_1 ale cuadripolului se aplică o tensiune de alimentare $\underline{U}_1$, iar la bornele de ieșire a_2 și b_2 se leagă o impedanță $\underline{Z}$ care reprezintă sarcina de utilizare a cuadripolului. Cuadripolul va absorbi prin bornele a_1 și b_1 un curent $\underline{I}_1$, numit *curent de intrare*, și va debita prin bornele de ieșire a_2 și b_2 cu un curent $\underline{I}_2$, numit *curent de ieșire* sau de *utilizare*.

Căderea de tensiune la bornele sarcinii $\underline{Z}$ fiind

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}\,\underline{I}_2,$$

se poate înlocui, în schema de reprezentare, sarcina de utilizare prin tensiunea $\underline{U}_2$, care se numește *tensiunea de ieșire* a cuadripolului.

În ceea ce privește sensul atribuit acestor tensiuni și curenți acesta este pur convențional și nu este încă normalizat. În general tensiunile și curenții de la bornele unui cuadripol oarecare pot fi reprezentate** prin unul din cele trei moduri indicate în figura 6.64. Astfel, în mod curent, în cazul liniilor electrice se utilizează convenția indicată în figura 6.64, *a*; în cazul montajelor folosind tuburi electronice sau tranzistori se utilizează convenția din figura 6.64, *c*.

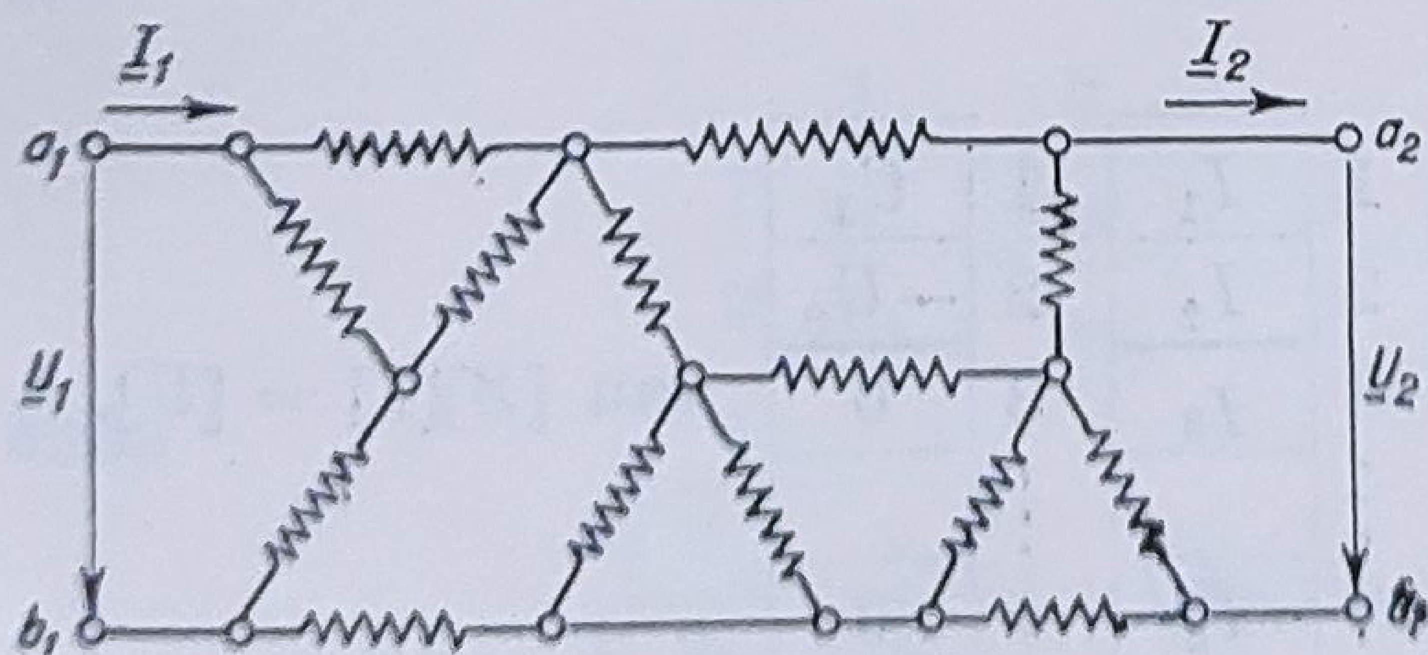


Fig. 6.63. Cuadripol pasiv.

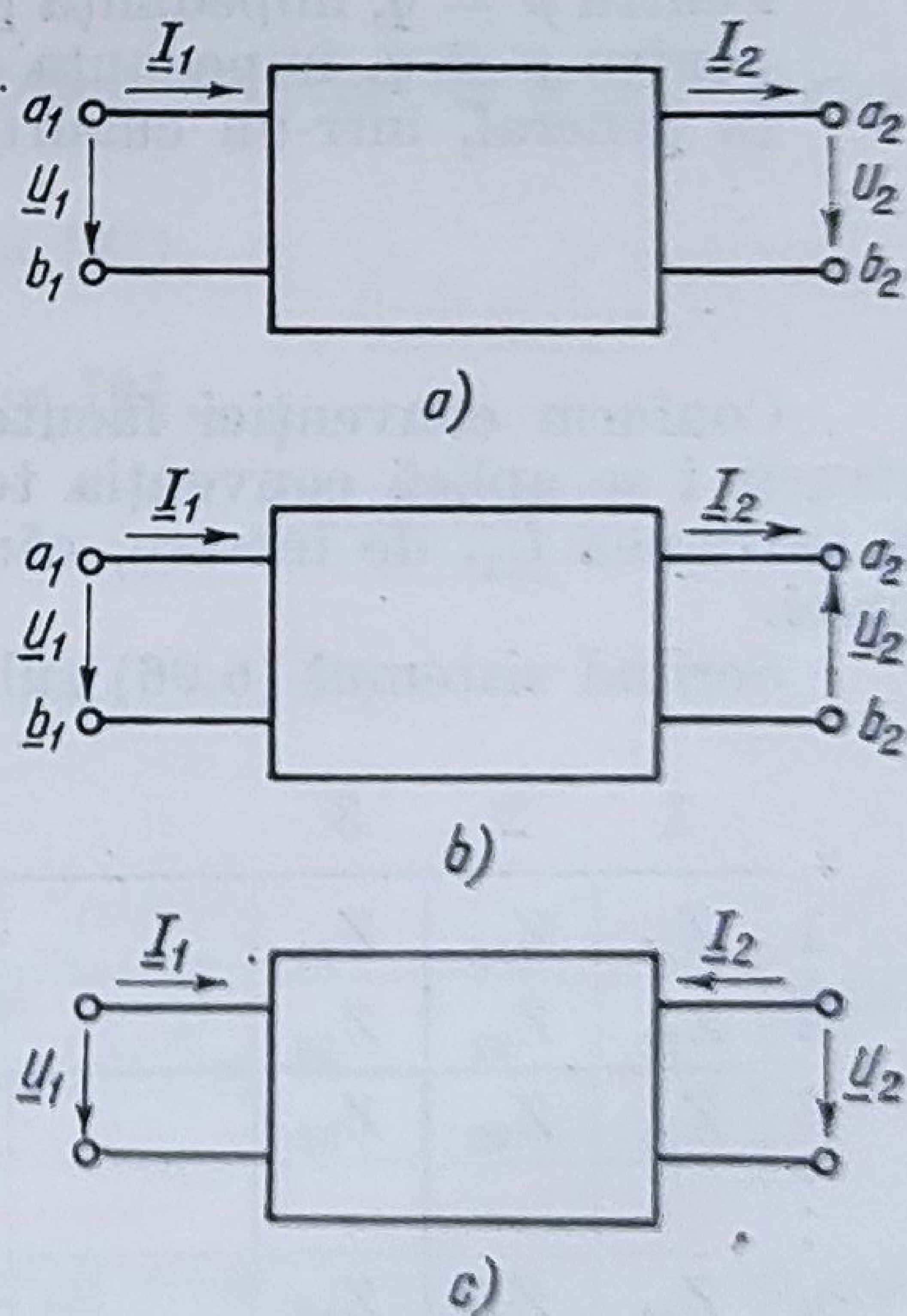


Fig. 6.64. Convenția semnelor la un cuadripol.

* Vezi 6.4.5.

** Alte trei moduri se mai pot obține dacă se ia și pentru $\underline{U}_1$ sensul în sus.

Este evident că forma ecuațiilor se va schimba în raport cu convenția de reprezentare adoptată.

În cele ce urmează s-a adoptat convenția semnelor din figura 6.64, *a*.

Funcționarea unui cuadripol se studiază cu ajutorul unor ecuații care dau legătura dintre mărimile de intrare (tensiune și curent) ale unui cuadripol în funcție de impedanțele constitutive ale cuadripolului.

Pentru stabilirea acestor ecuații se descompune circuitul în bucle independente astfel încît prima buclă să treacă prin bornele de intrare a_1 și b_1 și să fie străbătută de curentul $\underline{I}_1$, iar a doua buclă să treacă prin bornele de ieșire a_2 și b_2 și să fie străbătută de curentul $\underline{I}_2$.

Aplicînd a doua teoremă a lui KIRCHHOFF circuitelor astfel obținute, rezultă sistemul de ecuații liniare.

$$\left.\begin{array}{l} \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 + \ldots + \underline{Z}_{1n}\underline{I}_n = \underline{U}_1 \\ \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 + \ldots + \underline{Z}_{2n}\underline{I}_n = -\underline{U}_2 \\ \underline{Z}_{31}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{32}\underline{I}_2 + \ldots + \underline{Z}_{3n}\underline{I}_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{Z}_{n1}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{n2}\underline{I}_2 + \ldots + \underline{Z}_{nn}\underline{I}_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (6.96)$$

În acest sistem $\underline{Z}_{pq}$ reprezintă:

Pentru $p = q$, impedanța proprie a buclei;
pentru $p \neq q$, impedanța mutuală sau comună buclelor p și q.
În general, într-un cuadripol pasiv

$$\underline{Z}_{pq} = \underline{Z}_{qp}.$$

Conform convenției făcute, tensiunea $\underline{U}_2$, de ieșire are semnul minus, întrucît i se aplică convenția tensiunii la bornele receptorului spre deosebire de tensiunea $\underline{U}_1$, de intrare, căreia i se aplică convenția tensiunii la bornele sursei.

Scriind sistemul (6.96) sub formă matriceală se obține

$$\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & & n \\ \hline 1 & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & & Z_{1n} \\ 2 & Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & & Z_{2n} \\ \hline 3 & Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & & Z_{3n} \\ \vdots & & & & & \\ n & Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & & Z_{nn} \end{array} \; \begin{array}{c|c|} 1 & I_1 \\ 2 & I_2 \\ \hline 3 & I_3 \\ \vdots & \\ n & I_n \end{array} \; \begin{array}{c|c|} 1 & U_1 \\ 2 & -U_2 \\ \hline 3 & 0 \\ \vdots & \\ n & 0 \end{array} \quad \text{sau } [Z][I] = [U].$$

Descompunem această ecuație matriceală în submatrice cu ajutorul liniilor groase indicate; se obține ecuația matriceală

$$\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U \\ 0 \end{vmatrix} \qquad (6.97)$$

în care

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mathscr{Z}_{11} = \begin{array}{c|cc|} & 1 & 2 \\ \hline 1 & Z_{11} & Z_{12} \\ 2 & Z_{21} & Z_{22} \end{array}\,, \quad
\mathscr{Z}_{12} = \begin{array}{c|ccc|} & 3 & \dots & n \\ \hline 1 & Z_{13} & \dots & Z_{1n} \\ 2 & Z_{23} & \dots & Z_{2n} \end{array} \\
&\mathscr{Z}_{21} = \begin{array}{c|cc|} & 1 & 2 \\ \hline 3 & Z_{31} & Z_{32} \\ \vdots & & \\ n & Z_{n1} & Z_{n2} \end{array}\,, \quad
\mathscr{Z}_{22} = \begin{array}{c|ccc|} & 3 & \dots & n \\ \hline 3 & Z_{33} & \dots & Z_{3n} \\ \vdots & & & \\ n & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{array}\,, \\
&J_1 = \begin{array}{c|c|} 1 & I_1 \\ 2 & I_2 \end{array}\,, \qquad J_2 = \begin{array}{c|c|} 3 & I_3 \\ \vdots & \\ n & I_n \end{array}\,, \\
&U = \begin{array}{c|c|} 1 & U_1 \\ 2 & -U_2 \end{array}\,, \qquad O = \begin{array}{c|c|} 3 & 0 \\ \vdots & \\ n & 0 \end{array}\,.
\end{aligned}
\right\}
\tag{6.98}
$$

Dezvoltînd ecuaţia matriceală (6.97) se obţine sistemul de ecuaţii matriceale

$$[\mathscr{Z}_{11}][J_1] + [\mathscr{Z}_{12}][J_2] = [U],$$

$$[\mathscr{Z}_{21}][J_2] + [\mathscr{Z}_{22}][J_2] = [0],$$

între care eliminînd matricea $[J_2]$ rezultă

$$([\mathscr{Z}_{11}] - [\mathscr{Z}_{12}][\mathscr{Z}_{22}]^{-1}\,[\mathscr{Z}_{21}])[J_1] = [U]$$

sau

$$\begin{array}{c|cc|} & 1 & 2 \\ \hline 1 & \mathfrak{Z}_{11} & \mathfrak{Z}_{12} \\ 2 & \mathfrak{Z}_{21} & \mathfrak{Z}_{22} \end{array} \;\; \begin{array}{c|c|} 1 & I_1 \\ 2 & I_2 \end{array} = \begin{array}{|c|} U_1 \\ -U_2 \end{array}\,, \tag{6.99}$$

unde

$$\begin{array}{c|cc|} & 1 & 2 \\ \hline 1 & \mathfrak{Z}_{11} & \mathfrak{Z}_{12} \\ 2 & \mathfrak{Z}_{21} & \mathfrak{Z}_{22} \end{array} = [\mathscr{Z}_{11}] - [\mathscr{Z}_{12}][\mathscr{Z}_{22}]^{-1}\,[\mathscr{Z}_{21}] = [\mathfrak{Z}]. \tag{6.100}$$

Transformînd ecuaţia matriceală (6.99) într-o ecuaţie matriceală de forma

$$\begin{array}{c|c|} 1 & U_1 \\ 2 & I_1 \end{array} = \begin{array}{c|cc|} & 1 & 2 \\ \hline 1 & A_{11} & A_{12} \\ 2 & A_{21} & A_{22} \end{array} \;\; \begin{array}{c|c|} 1 & U_2 \\ 2 & I_2 \end{array}\,, \tag{6.101}$$

adică în care mărimile de intrare sînt definite în funcţie de mărimile de ieşire, se găseşte uşor * :

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{A}_{11} = -\dfrac{\mathscr{Y}_{11}}{\mathscr{Y}_{21}}, & \underline{A}_{12} = -\dfrac{\mathscr{Y}_{11}\mathscr{Y}_{22} - \mathscr{Y}_{12}\mathscr{Y}_{21}}{\mathscr{Y}_{21}} \\ \underline{A}_{12} = -\dfrac{1}{\mathscr{Y}_{21}}, & \underline{A}_{22} = -\dfrac{\mathscr{Y}_{22}}{\mathscr{Y}_{21}}, \end{array}\right\} \quad (6.102)$$

Dezvoltînd ecuaţia matriceală (6.101), se obţin ecuaţiile cuadripolului sub forma **

$$\left.\begin{array}{l} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{21}\underline{I}_2. \end{array}\right\} \quad (6.103)$$

Întrucît matricea $[\mathscr{Z}]$ este simetrică şi matricea $[\mathscr{Y}]$ este simetrică***. În aceste condiţii între cei patru parametri ai sistemului de ecuaţii (6.103) ale cuadripolului există întotdeauna relaţia

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1. \quad (6.104)$$

---

* Transformarea se poate face fie direct, prin calcul matriceal, fie dezvoltînd ecuaţia matriceală (6.99).

** Parametrii unui cuadripol se mai notează şi sub forma

$$\underline{A}_{11} = \underline{A},\ \underline{A}_{12} = \underline{B},\ \underline{A}_{21} = \underline{C},\ \underline{A}_{22} = \underline{D}.$$

*** Pentru a arăta că matricea $[\mathscr{Y}]$, definită de relaţia (6.100) este simetrică, este suficient să arătăm că matricea

$$[\mathscr{Z}_2]\,[\mathscr{Z}_{22}]^{-1}\,[\mathscr{Z}_{21}]$$

este simetrică, în care matricea $[\mathscr{Z}_{22}]$ este simetrică, matricea $[\mathscr{Z}_{11}]$ fiind de asemenea simetrică.

Să considerăm matricea simetrică

$$[Z] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \mathscr{Z}_{11} & \cdots & \mathscr{Z}_{1,p} & \mathscr{Z}_{1,p+1} & \cdots & \mathscr{Z}_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathscr{Z}_{p1} & \cdots & \mathscr{Z}_{p,p} & \mathscr{Z}_{p,p+1} & \cdots & \mathscr{Z}_{pn} \\ \hdashline \mathscr{Z}_{p+1,1} & \cdots & \mathscr{Z}_{p+1,p} & \mathscr{Z}_{p+1,p+1} & \cdots & \mathscr{Z}_{p+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathscr{Z}_{n1} & \cdots & \mathscr{Z}_{n,p} & \mathscr{Z}_{n,p+1} & \cdots & \mathscr{Z}_{n,n} \end{array}\right] \quad \text{cu } \mathscr{Z}_{ij} = \mathscr{Z}_{j1} \\ i, j = 1, 2, \ldots, n. \\ i \neq j$$

Notăm

$$[A] = \begin{bmatrix} \mathscr{Z}_{1,p+1} & \cdots & \mathscr{Z}_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathscr{Z}_{p,p+1} & \cdots & \mathscr{Z}_{p,n} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} \mathscr{Z}_{p+1,1} & \cdots & \mathscr{Z}_{p+1,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathscr{Z}_{n,1} & \cdots & \mathscr{Z}_{np} \end{bmatrix}$$

şi considerăm matricea simetrică *arbitrară*

$$[X] = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1q} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{q1} & \cdots & x_{qq} \end{bmatrix}, \text{ în care } q = n - p \text{ şi } x_{ij} = x_{ji}$$

6.4.4.3. **Semnificația fizică a parametrilor unui cuadripol și determinarea lor.** Examinînd ecuațiile (6.103) din punct de vedere dimensional este ușor de văzut că parametrii $\underline{A}_{11}$ și $\underline{A}_{22}$ reprezintă numere complexe fără dimensiuni, $\underline{A}_{12}$ are dimensiunea unei impedanțe, iar $\underline{A}_{21}$ pe aceea a unei admitanțe.

Pentru a determina semnificația fizică se fac asupra cuadripolului două încercări de funcționare : una de mers în gol ($\underline{I}_2 = 0$) și una de mers în scurtcircuit ($\underline{U}_2 = 0$).

Făcînd în ecuațiile (6.103), $\underline{I}_2 = 0$ se obține

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_{10} &= \underline{A}_{11}\underline{U}_{20} \\ \underline{I}_{10} &= \underline{A}_{21}\underline{U}_{20}. \end{aligned}\right\} \tag{6.105}$$

Din prima relație, se deduce

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{U}_{20}},$$

de unde, rezultă că $\underline{A}_{11}$ este *raportul de transformare al tensiunilor la funcționarea în gol.*

Din a doua relație se deduce

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{I}_{10}}{\underline{U}_{20}};$$

$\underline{A}_{21}$ se numește *admitanța internă* sau *de transfer* a cuadripolului la mersul în gol.

Făcînd $\underline{U}_2 = 0$ se obține

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_{1\,sc} &= \underline{A}_{12}\underline{I}_{2\,sc} \\ \underline{I}_{1\,sc} &= \underline{A}_{22}\underline{I}_{2\,sc} \end{aligned}\right\} \tag{6.106}$$

Produsul $[A]\,[X]\,[B]$ are sens deoarece tipurile acestora sînt respectiv

$$\{p,\ n-p\},\ \{n-p,\ n-p\}\ \{n-p,\ p\}.$$

Să notăm acest produs

$$[Y] = [A]\,[X]\,[B];$$

avem

$$y_{lk} = \sum_{i,j} a_{li}\, x_{ij}\, b_{jk} = \sum_{i,j} z_{l,p+i}\, x_{ij}\, z_{p+j,k} \tag{a}$$

$$y_{kl} = \sum_{i,j} a_{ki}\, x_{ij}\, b_{jl}$$

sau, schimbînd indicii de însumare între ei și ordinea de însumare,

$$y_{kl} = \sum_{i,j} a_{kj}\, x_{ji}\, b_{il} = \sum_{i,j} z_{k,p+j}\, x_{ji}\, z_{p+i,l} \tag{b}$$

Comparînd (*a*) cu (*b*) și ținînd seama că

$$z_{k,p+j} = z_{p+j,k},\ x_{ij} = x_{ji},\ z_{p+i,l} = z_{l,p+i},$$

rezultă $y_{lk} = y_{kl}$ și deci matricea $[Y]$ este simetrică.

Această demonstrație se datorează *Prof. Dr. doc.* ION ȘABAC.

De aici rezultă

$$\underline{A}_{12} = \frac{\underline{U}_{1\,sc}}{\underline{I}_{2\,sc}};$$

$\underline{A}_{12}$ se numeşte *impedanţa internă* sau *de transfer* a cuadripolului la mersul în scurtcircuit. Din a doua relaţie se deduce

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{I}_{1\,sc}}{\underline{I}_{2\,sc}}$$

care este *raportul de transformare a curenţilor* la funcţionarea în scurtcircuit.

Pentru determinarea acestor parametri se procedează în felul următor : Împărţind relaţiile (6.105) între ele, se obţine

$$\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{I}_{10}} = \underline{Z}_{10} \tag{6.107}$$

ceea ce înseamnă că bornele de ieşire au fost lăsate în gol, fără sarcină şi s-a determinat impedanţa aparentă de mers în gol la bornele de intrare.

Împărţind relaţiile (6.106) între ele se obţine

$$\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} = \frac{\underline{U}_{1\,sc}}{\underline{I}_{1\,sc}} = \underline{Z}_{1\,sc}, \tag{6.108}$$

care reprezintă impedanţa aparentă de scurtcircuit la bornele de intrare, bornele de ieşire fiind legate în scurtcircuit.

Alimentînd cuadripolul pe la ieşire* şi făcîndu-l să funcţioneze în gol, din a doua ecuaţie (6.103) se deduce

$$\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}} = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{I}_{20}} = \underline{Z}_{20}, \tag{6.109}$$

care reprezintă impedanţa aparentă de mers în gol la bornele de ieşire.

Din relaţiile (6.107), (6.108) şi (6.109), utilizînd relaţia (6.104), de legătură a acestor parametri, se deduce expresia lor

$$\left.\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \frac{\underline{Z}_{10}}{\sqrt{\underline{Z}_{20}(\underline{Z}_{10}-\underline{Z}_{1\,sc})}}, \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_{1\,sc}\sqrt{\frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{10}-\underline{Z}_{1\,sc}}}, \\ \underline{A}_{21} &= \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{20}(\underline{Z}_{10}-\underline{Z}_{1\,sc})}}, \quad \underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{10}-\underline{Z}_{1\,sc}}}, \end{aligned}\right\} \tag{6.110}$$

Rezultă dar, că pentru determinarea parametrilor unui cuadripol, oricît de complicat ar fi el, este suficient a se face trei măsurători, cu ajutorul cărora se determină impedanţele de mers în gol şi de mers în scurtcircuit la intrarea în

* Vezi 6.4.4.4

cuadripol şi impedanţa de mers în gol la ieşirea din cuadripol, alimentarea acestuia făcîndu-se prin bornele de ieşire.

În locul impedanţei de mers în gol la bornele de ieşire a cuadripolului se poate determina impedanţa de scurtcircuit a acestora, alimentînd cuadripolul prin bornele de ieşire şi legînd în scurtcircuit bornele de intrare. Din prima ecuaţie (6.103) se deduce în aceleaşi condiţii

$$\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}} = \frac{\underline{U}_{2\,sc}}{\underline{I}_{2\,sc}} = \underline{Z}_{2\,sc}. \tag{6.111}$$

Din relaţiile (6.107), (6.108), (6.109) şi (6.111) se deduce

$$\underline{Z}_{1\,sc}\,\underline{Z}_{20} = \underline{Z}_{2\,sc}\,\underline{Z}_{10} \text{ sau } \frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{20}} = \frac{\underline{Z}_{1\,sc}}{\underline{Z}_{2\,sc}}$$

adică raportul impedanţelor aparente măsurate la funcţionarea în gol este egal cu raportul impedanţelor aparente măsurate la funcţionarea în scurtcircuit, astfel încît, dacă au fost determinate prin experienţă trei din aceste impedanţe, a patra se poate determina prin calcul.

6.4.4.4. **Diferite forme de prezentare ale ecuaţiilor cuadripolului.** *a)* Pornind de la ecuaţiile (6.103) şi (6.104) ale cuadripolului, se poate admite că fiecare pereche de valori $\underline{U}_1$, $\underline{I}_1$ şi $\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$ sînt componentele unor vectori într-un spaţiu complex cu două dimensiuni şi pe care îl presupunem raportat la un sistem de axe dreptunghiulare. Fie $\underline{E}_1$ vectorul tensiune-curent la intrarea în cuadripol de componente $\underline{U}_1$ şi $\underline{I}_1$ şi $\underline{E}_2$ vectorul tensiune-curent la ieşirea din cuadripol, de componente $\underline{U}_2$ şi $\underline{I}_2$. Relaţiile (6.103) se pot scrie matriceal sub forma *

$$[E_1] = [\gamma]\,[E_2], \tag{6.112}$$

unde

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{6.113}$$

se numeşte *matricea caracteristică a cuadripolului.*

b) Rezolvînd sistemul (6.112) în raport cu $[E_2]$ se găseşte

$$[E_2] = [\tau]\,[E_1], \tag{6.114}$$

care dă elementele de *ieşire* ale cuadripolului în funcţie de elementele de *intrare* ale acestuia, alimentarea cuadripolului făcîndu-se tot pe la bornele de intrare a_1, b_1. În ecuaţia (6.114) s-a notat

$$[\tau] = [\gamma]^{-1} = \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \tag{6.115}$$

Matricea $[\tau]$ se numeşte *matricea de transferanţă* a cuadripolului.

---

* În scrierea matriceală, suprimăm bara din scrierea cantităţilor complexe.

Cuadripolii definiţi de ecuaţiile (6.103) şi (6.114) se numesc *inverşi* unul altuia.

Ţinînd seama de relaţiile (6.115) dintre elementele celor două matrice, rezultă că realizarea unui cuadripol invers unui cuadripol dat nu poate fi făcută decît în condiţii cu totul particulare* ; într-adevăr este necesară utilizarea de impedanţe negative, ceea ce implică utilizarea de rezistenţe negative, lucru ce nu se poate realiza decît cu mare dificultate.

c) Se defineşte *cuadripolul răsturnat* al unui cuadripol dat, cuadripolul ce se obţine din acesta prin schimbarea sensului curenţilor şi permutarea bornelor de intrare şi de ieşire.

Pornind de la ecuaţiile (6.114), pe care le scriem dezvoltat

$$\begin{vmatrix} U_2 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_1 \\ I_1 \end{vmatrix},$$

şi la care schimbînd sensul curenţilor, se obţine

$$\begin{vmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{vmatrix} \text{ sau } \begin{vmatrix} U_2 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_1 \\ I_1 \end{vmatrix} \quad (6.116)$$

Notăm cu $[\rho]$ matricea parametrilor acestui cuadripol. Se zice că un cuadripol este răsturnabil dacă este identic cu cuadripolul răsturnat. Pentru asta este necesar ca

$$[\gamma] \equiv [\rho]$$

ceea ce nu este posibil decît dacă

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}.$$

În acest caz cuadripolul se numeşte simetric**.

Întrucît determinantul matricei $[\gamma]$ este egal cu unitatea, rezultă

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \sqrt{1 + \underline{A}_{12}\ \underline{A}_{21}}$$

şi deci matricea caracteristică a unui cuadripol răsturnabil este

$$[\gamma] = [\rho] = \begin{vmatrix} \sqrt{1 + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \sqrt{1 + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} \end{vmatrix}$$

şi nu depinde decît de doi parametri.

---

* Vezi [53] pag. 242.

** Vezi 6.4.4.6, c.

d) Dacă se rezolvă sistemul (6.103) în raport cu curenții $\underline{I}$, se obțin relațiile

$$\left.\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2 \end{aligned}\right\} \tag{6.117}$$

sau sub forma matriceală

$$[I] = [\eta]\,[U] \tag{6.118}$$

în care

$$[\eta] = \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{vmatrix} \tag{6.119}$$

este *matricea de admitanță a cuadripolului*. Elementele acestei matrice în funcție de elementele matricei caracteristice sînt

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{12}}, \quad \underline{Y}_{12} = -\frac{|\gamma|}{\underline{A}_{12}}, \quad \underline{Y}_{21} = \frac{1}{\underline{A}_{12}}, \quad \underline{Y}_{22} = -\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}}$$

Este ușor de văzut că în acest caz, determinantul matricei de admitanță e diferit de 1,

$$|\eta| \neq 1.$$

e) Rezolvînd sistemul (6.103) în raport cu tensiunile $\underline{U}$ se obțin relațiile

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2, \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \underline{I}_2 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2, \end{aligned}\right\} \tag{6.120}$$

în care

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}, \quad \underline{Z}_{12} = -\frac{|\gamma|}{\underline{A}_{21}}, \quad \underline{Z}_{21} = \frac{1}{\underline{A}_{21}}, \quad \underline{Z}_{22} = -\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}.$$

Sub formă matriceală sistemul (6.120) poate fi scris

$$[U] = [\zeta]\,[I] \tag{6.121}$$

în care matricea

$$[\zeta] = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{vmatrix} \tag{6.122}$$

se numeşte *matricea de impedanţă a cuadripolului*; şi pentru această matrice

$$|\zeta| \neq 1.$$

Comparînd relaţiile (6.118) şi (6.121) rezultă

$$[\eta]\ [\zeta] = 1.$$

f) Dacă se rezolvă sistemul (6.103) în raport cu $\underline{U}_1$ şi $\underline{I}_2$, se obţin relaţiile

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{D}_{11}\ \underline{I}_1 + \underline{D}_{12}\ \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{D}_{21}\ \underline{I}_1 + \underline{D}_{22}\ \underline{U}_2 \end{aligned}\right\} \tag{6.123}$$

în care

$$\underline{D}_{11} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}, \quad \underline{D}_{12} = \frac{|\gamma|}{\underline{A}_{22}}, \quad \underline{D}_{21} = \frac{1}{\underline{A}_{22}}, \quad \underline{D}_{22} = -\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}.$$

Scriind sistemul (6.123) sub formă matriceală se obţin

$$[\mathcal{E}_1] = [\delta]\ [\mathcal{E}_2] \tag{6.124}$$

$\mathcal{E}$ fiind vectorul tensiune-curent care are componentele $\underline{U}_1$ şi $\underline{I}_2$, $\mathcal{E}_2$, vectorul curent-tensiune avînd componentele $\underline{I}_1$ şi $\underline{U}_2$; matricea

$$[\delta] = \begin{vmatrix} \underline{D}_{11} & \underline{D}_{12} \\ \underline{D}_{21} & \underline{D}_{22} \end{vmatrix} \tag{6.125}$$

se numeşte *matricea serie paralel a cuadripolului*.

g) Rezolvînd acum sistemul (6.103) în raport cu $\underline{I}_1$ şi $\underline{U}_2$ se obţin relaţiile

$$\left.\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{F}_{11}\ \underline{U}_1 + \underline{F}_{12}\ \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{F}_{21}\ \underline{U}_1 + \underline{F}_{22}\ \underline{I}_2 \end{aligned}\right\} \tag{6.126}$$

sau matriceal

$$[\Phi_1] = [\varphi] \cdot [\Phi_2] \tag{6.127}$$

în care Φ_1 este vectorul curent-tensiune care are componentele $\underline{I}_1$ şi $\underline{U}_2$ iar Φ_2 este vectorul tensiune-curent, cu componentele $\underline{U}_1$ şi $\underline{I}_2$. Matricea

$$[\varphi] = \begin{vmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} \end{vmatrix} \tag{6.128}$$

se numeşte *matricea paralel-serie a cuadripolului* şi elementele sale în funcţie de elementele matricei caracteristice sînt date de relaţiile

$$\underline{F}_{11} = \frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{11}}, \quad \underline{F}_{12} = \frac{|\gamma|}{\underline{A}_{11}}, \quad \underline{F}_{21} = \frac{1}{\underline{A}_{11}}, \quad \underline{F}_{22} = -\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}.$$

OBSERVAŢII. 1 Este uşor de văzut că

$$[\delta]\ [\varphi] = 1,$$

sistemele (6.124) şi (6.127) fiind inverse.

2. Cele şase matrice ale unui cuadripol, definite mai înainte, se pot deduce una din cealaltă utilizînd fie calculul matriceal, fie direct, obţinîndu-se astfel elementele uneia din matrice în funcţie de elementele celorlalte matrice (Tab. 6.4).

6.4.4.5. **Semnificaţia fizică a diverselor elemente ale matricelor unui cuadripol.** Ţinînd seama de relaţiile care definesc diversele forme de ecuaţii de funcţionare ale cuadripolilor, cele 24 elemente ale matricelor unui cuadripol sînt definite prin relaţiile :

$$
\begin{aligned}
&\underline{A}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0}, \quad \underline{A}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0}, \quad \underline{A}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0}, \quad \underline{A}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0};\\
&\underline{T}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{I}_1=0}, \quad \underline{T}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{U}_1=0}, \quad \underline{T}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{I}_1=0}, \quad \underline{T}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{U}_1=0};\\
&\underline{Y}_{11} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{U}_2=0}, \quad \underline{Y}_{12} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{U}_1=0}, \quad \underline{Y}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{U}_2=0}, \quad \underline{Y}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{U}_1=0};\\
&\underline{Z}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0}, \quad \underline{Z}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{I}_1=0}, \quad \underline{Z}_{21} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0}, \quad \underline{Z}_{22} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{I}_1=0};\\
&\underline{D}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{U}_2=0}, \quad \underline{D}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_1=0}, \quad \underline{D}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{U}_2=0}, \quad \underline{D}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_1=0};\\
&\underline{F}_{11} = \left(\frac{\underline{F}_1}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{I}_2=0}, \quad \underline{F}_{12} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0}, \quad \underline{F}_{21} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{I}_2=0}, \quad \underline{F}_{22} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_1=0}.
\end{aligned}
\tag{6.129}
$$

6.4.4.6. **Diferite tipuri de cuadripoli.** În raport cu structura internă a unui cuadripol şi cu modul său de funcţionare există diverse tipuri de cuadripoli. Dintre acestea, cele mai importante sînt :

a) Cuadripoli pasivi şi cuadripoli activi. Un cuadripol poate fi pasiv sau activ.

Întru-un cuadripol pasiv nu există surse de tensiune sau de curent în interiorul său, adică între cele patru borne ale sale ; el nu trebuie să conţină decît rezistenţe, inductanţe şi capacităţi. Pentru un asemenea cuadripol există relaţia (6.104).

Tabloul 6.4

CORESPONDENȚA DINTRE DIVERSELE MATRICE ALE UNUI CUADRIPOL

$$[\tau]= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\tau|}\begin{bmatrix} T_{22} & -T_{12} \\ -T_{21} & T_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{Y_{21}}\begin{bmatrix} Y_{22} & 1 \\ -|\eta| & Y_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_{21}}\begin{bmatrix} Z_{11} & -|\zeta| \\ 1 & -Z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{D_{21}}\begin{bmatrix} -\delta & D_{11} \\ -D_{22} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{F_{21}}\begin{bmatrix} 1 & -F_{22} \\ F_{11} & -|\varphi| \end{bmatrix}$$

$$[\tau]= \frac{1}{|\gamma|}\begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{Y_{12}}\begin{bmatrix} -Y_{11} & 1 \\ -|\eta| & Y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_{12}}\begin{bmatrix} Z_{22} & -|\zeta| \\ 1 & -Z_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{D_{12}}\begin{bmatrix} 1 & -D_{11} \\ D_{22} & -\delta \end{bmatrix} = \frac{1}{F_{12}}\begin{bmatrix} -|\varphi| & F_{22} \\ -F_{11} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\eta]= \frac{1}{A_{12}}\begin{bmatrix} A_{22} & -|\gamma| \\ 1 & -A_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{T_{12}}\begin{bmatrix} -T_{11} & 1 \\ -|\tau| & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\zeta|}\begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{D_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -D_{12} \\ D_{21} & |\delta| \end{bmatrix} = \frac{1}{F_{22}}\begin{bmatrix} |\varphi| & -F_{12} \\ -F_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\zeta]= \frac{1}{A_{21}}\begin{bmatrix} A_{11} & -|\gamma| \\ 1 & -A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{T_{21}}\begin{bmatrix} -T_{22} & 1 \\ -|\tau| & T_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\eta|}\begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{D_{22}}\begin{bmatrix} |\delta| & D_{12} \\ -D_{21} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{F_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -F_{12} \\ F_{21} & |\varphi| \end{bmatrix}$$

$$[\delta]= \frac{1}{A_{22}}\begin{bmatrix} A_{12} & |\gamma| \\ 1 & -A_{21} \end{bmatrix} = \frac{1}{T_{11}}\begin{bmatrix} -T_{12} & 1 \\ |\tau| & T_{21} \end{bmatrix} = \frac{1}{Y_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -Y_{12} \\ Y_{21} & |\eta| \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_{22}}\begin{bmatrix} |\zeta| & Z_{12} \\ -Z_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\varphi|}\begin{bmatrix} F_{22} & -F_{12} \\ -F_{21} & F_{11} \end{bmatrix}$$

$$[\varphi]= \frac{1}{A_{11}}\begin{bmatrix} A_{21} & |\gamma| \\ 1 & -A_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{T_{22}}\begin{bmatrix} -T_{21} & 1 \\ |\tau| & T_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{Y_{22}}\begin{bmatrix} |\eta| & Y_{12} \\ -Y_{21} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -Z_{12} \\ Z_{21} & |\zeta| \end{bmatrix} = \frac{1}{|\delta|}\begin{bmatrix} D_{22} & -D_{12} \\ D_{21} & D_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$$

Ca exemple de cuadripoli pasivi pot fi considerate liniile de transmisie de energie electrică, filtrele electrice, transformatoarele etc.

Un cuadripol activ conţine între bornele sale cel puţin o sursă de tensiune sau de curent, spre exemplu, tuburile electronice, tranzistoarele etc.

b) Cuadripoli bilaterali şi unilaterali. Un cuadripol se zice că este *bilateral* sau *reversibil* atunci cînd regimul de intrare a acestuia este o funcţie liniară de regimul de ieşire al său şi reciproc. În acest caz, transmiterea energiei prin cuadripol se poate face indiferent într-un sens sau în celălalt; spre exemplu, liniile electrice, filtrele electrice, maşinile electrice etc.

Un cuadripol se zice că este *unilateral* sau *ireversibil* atunci cînd regimul de intrare — respectiv de ieşire — este absolut independent de regimul de ieşire — respectiv de intrare. În acest caz, transmiterea energiei electromagnetice nu se poate face decît într-un singur sens. Ca exemplu de asemenea cuadripoli se pot da circuitele conţinînd tuburi electronice sau tranzistori.

c) Cuadripol simetric. În cazul cînd impedanţele de mers în gol şi de mers în scurtcircuit sînt respectiv aceleaşi, indiferent dacă alimentarea cuadripolului se face normal pe la intrare sau invers pe la ieşire, cuadripolul se zice că este simetric. În acest caz,

$$\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_{20} \quad \text{şi} \quad \underline{Z}_{1\,sc} = \underline{Z}_{2\,sc}\,,$$

sau, ţinînd seama de valorile acestor impedanţe în funcţie de coeficienţii cuadripolului,

$$\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}} \quad \text{şi} \quad \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}$$

de unde rezultă că

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}.$$

Ecuaţiile (6.103) şi (6.104) ale cuadripolului devin

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\,\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\,\underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\,\underline{U}_2 + \underline{A}_{11}\,\underline{I}_2,$$

$$\underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21} = 1.$$

Se vede că, în acest caz, numărul coeficienţilor diferiţi este redus la doi, ceea ce înseamnă că ei pot fi determinaţi numai prin două încercări, şi anume, o încercare de mers în gol şi una de mers în scurtcircuit.

Fie $\underline{Z}_0$ şi $\underline{Z}_{sc}$ cele două impedanţe astfel determinate. În acest caz, valorile parametrilor sînt

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_{sc}}}, \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_{sc}\sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_{sc}}}, \quad \underline{A}_{21} = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_0(\underline{Z}_0 - \underline{Z}_{sc})}}.$$

6.4.4.7. **Cuplajul impedanţelor interioare ale unui cuadripol.** Acest cuplaj poate fi diferit în raport cu elementele diagonalei principale ale matricei [Z]. Astfel :*

* Pentu convenţia de semne adoptată ; pentru celelalte convenţii de semne, relaţiile ce urmează se înmulţesc cu —1 într-unul din membri (vezi 6.4.4.2).

a) dacă $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}$, cuplajul se numeşte *reciproc*; acest caz se întîlneşte la toţi cuadripolii pasivi din electrotehnică. Impedanţele $\underline{Z}_{12}$ şi $-\underline{Z}_{21}$, care sînt egale între ele, se numesc *impedanţe de cuplaj*. Pentru acest caz relaţia (6.104) este satisfăcută;

b) dacă $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$, cuplajul se numeşte giroscopic*; într-un astfel de cuplaj relaţia (6.104) nu mai e valabilă şi avem

$$\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21} = -1;$$

c) dacă $\underline{Z}_{12} \neq \mp \underline{Z}_{21}$, cuplajul nu este nici reciproc şi nici giroscopic, el poate fi real sau complex.

6.4.4.8. Impedanţa caracteristică sau iterativă a unui cuadripol. Se numeşte *impedanţă caracteristică* sau *impedanţă iterativă* impedanţa $\underline{Z}_c$ care, legată la bornele de ieşire ale cuadripolului, produce la bornele de intrare a cuadripolului o impedanţă aparentă egală în valoare cu $\underline{Z}_c$.

Rezultă deci,

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_c. \tag{6.130}$$

Această definiţie a lui $\underline{Z}_c$ se aplică şi cuadripolilor răsturnaţi. În general, valoarea lui $\underline{Z}_c$ este diferită în cele două cazuri de funcţionare ale cuadripolului: ea are o valoare dacă funcţionarea este *intrare-ieşire* şi altă valoare dacă funcţionarea cuadripolului este *ieşire-intrare*; aceste două valori sînt egale numai dacă cuadripolul este simetric.

Scriind relaţia (6.130) matriceal se obţine

$$\begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix} = Z_c \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z_c & \\ & Z_c \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix};$$

însă**

$$\begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix}$$

şi deci $\underline{Z}_c$ este o valoare proprie a matricei de impedanţă [ζ]. Valorile proprii ale unei matrice sînt date de ecuaţia***

$$\begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_c & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_c \end{vmatrix} = 0,$$

din care rezultă

$$\underline{Z}_c^2 - (\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{22})\,\underline{Z}_c + |\zeta| = 0,$$

* Prin analogie cu ecuaţiile de funcţionare ale giroscopului, vezi [98] pag. 177.
** Vezi relaţia (6,121).
*** Vezi [17] pag. 335.

ecuaţie cu ajutorul căreia se calculează cele două valori ale impedanţei caracteristice. Se obţine

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{2}\left[\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{22} \pm \sqrt{(\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{22})^2 - 4\,|\zeta|}\,\right]. \tag{6.131}$$

Dintre aceste două valori ale lui $\underline{Z}_c$ numai una convine sensului *intrare-ieşire*, cea de a doua corespunzînd sensului contrar. Pentru a le preciza, să considerăm din nou relaţiile (6.130) pe care să le scriem sub forma

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \lambda,$$

sau matriceal

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix}.$$

Ţinînd seama că funcţionarea cuadripolului este *intrare-ieşire* *, atunci **

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{T}_{11} & \underline{T}_{12} \\ \underline{T}_{21} & \underline{T}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix}$$

şi rezultă că λ este o valoare proprie a matricei de transmitanţă $[\tau]$. Se găseşte

$$\begin{vmatrix} \underline{T}_{11} - \lambda & \underline{T}_{12} \\ \underline{T}_{21} & \underline{T}_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\underline{T}_{11} + \underline{T}_{22})\lambda + 1 = 0. \tag{6.132}$$

Produsul rădăcinilor fiind egal cu unitatea, se poate lua

$$\underline{\lambda}_1 = \varepsilon^{-\underline{k}} \text{ şi } \underline{\lambda}_2 = \varepsilon^{+\underline{k}}$$

unde

$$\underline{k} = \alpha + \mathrm{j}\beta \tag{6.133}$$

şi se numeşte *constanta de propagare* a cuadripolului. În expresia (6.133), α se numeşte *factor de atenuare* şi β *factor de distorsiune****.

Dacă $|\underline{\lambda}_1| < 1$ este o rădăcină a ecuaţiei (6.132), atunci $\underline{\lambda}_2$ nu poate conveni deoarece cuadripolul este pasiv şi deci poate restitui mai multă energie electromagnetică decît a primit. Rezultă, deci, că în acest caz avem o propagare în sensul intrare-ieşire şi deci

$$\underline{\lambda}_1 = \varepsilon^{-\underline{k}} = \varepsilon^{-(\alpha + \mathrm{j}\beta)} = \varepsilon^{-\alpha}\,\underline{|\beta}$$

şi $\alpha > 0$.

---

* De la bornele 1 către bornele 2.

** Relaţia (6.114).

*** Vezi 12.1.4.2.

Să vedem acum, în cazul aceluiaşi cuadripol şi pentru acelaşi mod de funcţionare (intrare-ieşire), care este semnificaţia lui $\underline{\lambda}_2$. Scriind relaţiile (6.130) sub forma

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \underline{\lambda}',$$

sau matriceal

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda' & \\ & \lambda' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix},$$

rezultă că $\underline{\lambda}'$ este o valoare proprie a matricei caracteristică $[\gamma]$ a cuadripolului şi va fi dată de ecuaţia

$$\underline{\lambda}'^2 - (\underline{A}_{11} + \underline{A}_{22})\,\underline{\lambda}' + 1 = 0. \tag{6.134}$$

Dat fiind, că

$$\underline{A}_{11} = \underline{T}_{22} \quad \text{şi} \quad \underline{A}_{22} = \underline{T}_{11},$$

ecuaţiile (6.132) şi (6.134) sînt identice. În consecinţă, dacă $|\underline{\lambda}_1| < 1$ corespunde sensului *intrare-ieşire*, atunci $\underline{\lambda}_2 = \underline{\lambda}_1'$ va corespunde sensului *ieşire-intrare*.

Prin analogie cu liniile electrice* se zice că $\underline{\lambda}_1$ corespunde unei *unde directe* şi $\underline{\lambda}_2$, unei *unde reflectate* de propagare a energiei electromagnetice.

Pentru a găsi corespondenţa între $\underline{\lambda}$ şi $\underline{Z}_c$ se scrie

$$\begin{vmatrix} \underline{T}_{11} & \underline{T}_{12} \\ \underline{T}_{21} & \underline{T}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix}$$

sau dezvoltat

$$\underline{T}_{11}\,\underline{U}_1 + \underline{T}_{12}\,\underline{I}_1 = \underline{\lambda}\,\underline{U}_1,$$

$$\underline{T}_{21}\,\underline{U}_1 + \underline{T}_{22}\,\underline{I}_2 = \underline{\lambda}\,\underline{I}_1.$$

Din prima din aceste relaţii se deduce

$$\underline{T}_{11}\,\underline{Z}_c + \underline{T}_{12} = \underline{\lambda}\,\underline{Z}_c \quad \text{şi deci} \quad \underline{Z}_c = \frac{\underline{T}_{12}}{\underline{\lambda} - \underline{T}_{11}},$$

iar din a doua

$$\underline{T}_{21}\,\underline{Z}_c + \underline{T}_{22} = \underline{\lambda} \quad \text{şi deci} \quad \underline{Z}_c = \frac{\underline{\lambda} - \underline{T}_{22}}{\underline{T}_{21}}.$$

Ţinînd seama că

$$\underline{A}_{11} = \underline{T}_{22}, \quad -\underline{A}_{12} = \underline{T}_{12}, \quad -\underline{A}_{21} = \underline{T}_{21} \quad \text{şi} \quad \underline{A}_{22} = \underline{T}_{11},$$

---

* Vezi 12.1.5.1.

rezultă

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22} - \underline{\lambda}} = \frac{\underline{A}_{11} - \underline{\lambda}}{\underline{A}_{21}}.$$

OBSERVAȚIE. Expresia impedanței caracteristice (6.131) poate fi scrisă în funcție de oricare din elementele în raport cu care se pot scrie ecuațiile cuadripolului*. Astfel, în funcție de elementele matricei caracteristice (6.113) expresia impedanței caracteristice este

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{A}_{11} - \underline{A}_{22} \pm \sqrt{(\underline{A}_{11} - \underline{A}_{22})^2 + 4\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}}{2\,\underline{A}_{21}} = \frac{\underline{A}_{11} - \underline{A}_{22} + \sqrt{(\underline{A}_{11} + \underline{A}_{22})^2 - 4}}{2\,\underline{A}_{21}}. \tag{6.135}$$

Ținînd seama de valorile parametrilor $\underline{A}_{11}$, $\underline{A}_{21}$ și $\underline{A}_{22}$ determinate mai sus, se obține

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{2}\left[\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{20} \pm \sqrt{(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{20})^2 + 4\,\underline{Z}_{20}\,\underline{Z}_{sc}}\right]. \tag{6.136}$$

În cazul unui cuadripol simetric, expresia impedanței caracteristice devine

$$\underline{Z}'_c = \frac{\pm\sqrt{\underline{A}_{11}^2 - 1}}{\underline{A}_{21}} = \pm\sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = \pm\sqrt{\underline{Z}_0\,\underline{Z}_{sc}}, \tag{6.137}$$

$\underline{Z}'_c$ se mai numește și *impedanța undelor*.

Și pentru impedanța undelor, cele două valori corespund una undei directe și cealaltă undei reflectate, corespondența determinîndu-se în raport cu $\underline{\lambda}$ ca și în cazul precedent.

6.4.4.9. **Circuitele T și π echivalente ale unui cuadripol**. Orice cuadripol, oricît de complex ar fi el din punctul de vedere al constituției sale se poate transforma într-un cuadripol simplu de tipul T sau π. Pentru aceasta, este necesar a se găsi legătura ce există între ecuațiile generale (6.103) ale cuadripolului și ecuațiile circuitului echivalent tip.

Fie un circuit de tip $\underline{T}$, care este format din două impedanțe $\underline{Z}_1$ și $\underline{Z}_2$ în serie între care este legată o admitanță $\underline{Y}$ (fig. 6.65).

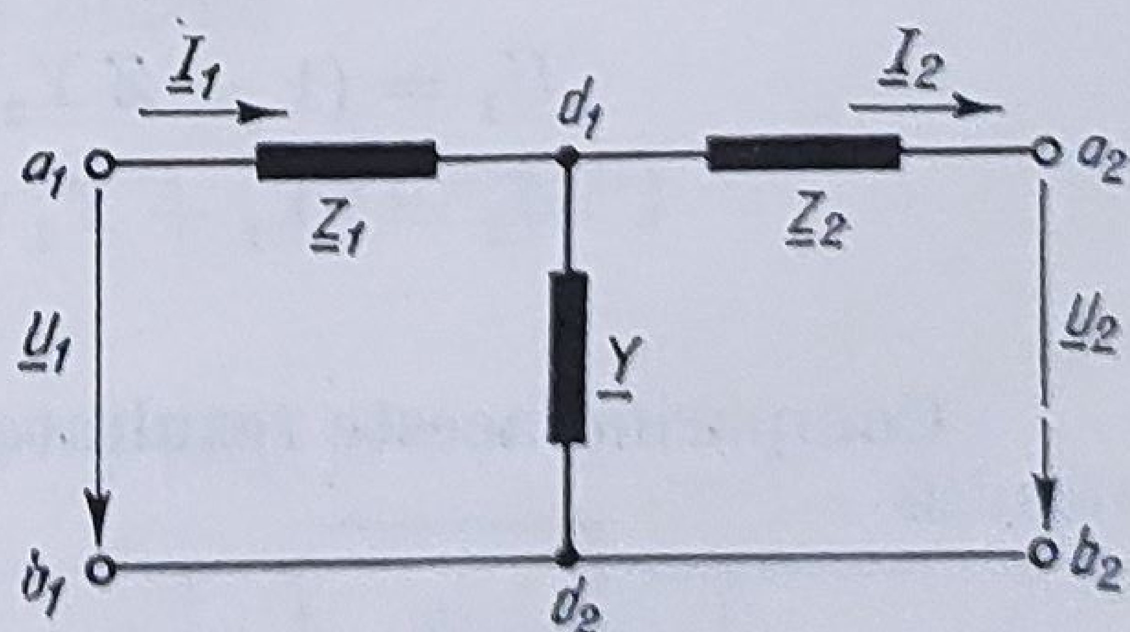


Fig. 6.65. Cuadripol în T.

Pentru determinarea impedanțelor și admitanței echivalente, care formează circuitul T, se aplică metoda circuitelor independente. Scriind ecuațiile (6.16) circuitelor $a_1d_1d_2b_1d_1$ și $a_2b_2d_2d_1a_2$, se obține

$$\underline{I}_1\left(\underline{Z}_1 + \frac{1}{\underline{Y}}\right) - \frac{1}{\underline{Y}}\underline{I}_2 = \underline{U}_1,$$

$$-\frac{1}{\underline{Y}}\underline{I}_1 + \left(\underline{Z}_2 + \frac{1}{\underline{Y}}\right)\underline{I}_2 = -\underline{U}_2,$$

* Vezi tabloul 6.4.

care, rezolvat în raport cu U_1 și I_1, dau

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (1 + \underline{Z}_1\,\underline{Y})\,\underline{U}_2 + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\,\underline{Z}_2\,\underline{Y})\,\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{Y}\,\underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}_2\,\underline{Y})\,\underline{I}_2. \end{aligned}\right\} \tag{6.138}$$

Comparînd aceste rezultate cu ecuația generală (6.103) a cuadripolului, se obține

$$\underline{A}_{11} = 1 + \underline{Z}_1\underline{Y}, \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Y}, \quad \underline{A}_{21} = \underline{Y}, \quad \underline{A}_{22} = 1 + \underline{Z}_2\underline{Y}$$

de unde se deduc valorile ce trebuie să se dea impedanțelor cuadripolului T echivalent :

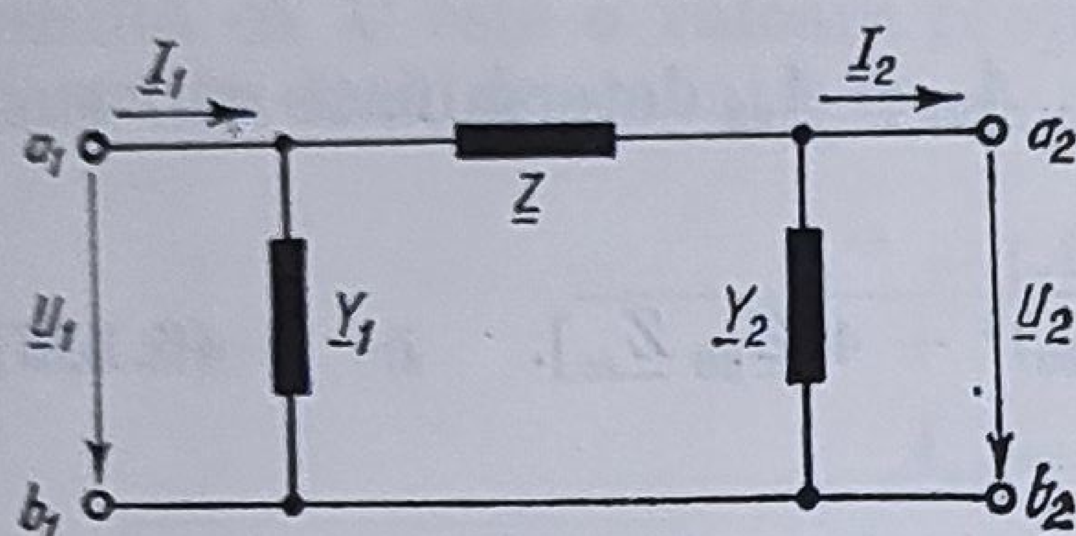


Fig. 6.66. Cuadripol în π.

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}}, \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}}, \quad \underline{Y} = \underline{A}_{21}. \tag{6.139}$$

Fie acum un circuit de tip π, care este format din două admitanțe $\underline{Y}_1$ și $\underline{Y}_2$, între care se găsește o impedanță $\underline{Z}$ (fig. 6.66). Pentru determinarea admitanțelor și impedanței echivalente, care formează cuadripolul în π, se aplică metoda perechilor de noduri. Luînd ca potențial de referință potențialul comun al nodurilor b_1 și b_2 și scriind ecuațiile (6.18) nodurilor a_1 și a_2, se obține

$$\underline{Y}_1\underline{U}_1 - \frac{1}{\underline{Z}}(\underline{U}_2 - \underline{U}_1) = \underline{I}_1,$$

$$-\frac{1}{\underline{Z}}(\underline{U}_1 - \underline{U}_2) + \underline{Y}_2\,\underline{U}_2 = -\,\underline{I}_2,$$

care, rezolvate în raport cu $\underline{U}_1$ și $\underline{I}_1$, dau

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (1 + \underline{Z}\,\underline{Y}_2)\,\underline{U}_2 + \underline{Z}\,\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Z}\,\underline{Y}_1\underline{Y}_2)\,\underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}\,\underline{Y}_1)\,\underline{I}_2. \end{aligned}\right\} \tag{6.140}$$

Comparînd aceste rezultate cu ecuațiile generale (6.103) ale cuadripolului, rezultă

$$\underline{A}_{11} = 1 + \underline{Z}\,\underline{Y}_2, \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}, \quad \underline{A}_{21} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Z}\,\underline{Y}_1\underline{Y}_2, \quad \underline{A}_{22} = 1 + \underline{Z}\,\underline{Y}_1.$$

Calculînd valorile impedanțelor cuadripolului echivalent în π se obține

$$\underline{Z} = \underline{A}_{12}, \quad \underline{Y}_1 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{12}}, \quad \underline{Y}_2 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{12}}. \tag{6.141}$$

Este ușor de văzut că, dacă cuadripolul dat este simetric ($\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$), și cuadripolii echivalenți în T sau în π sînt simetrici.

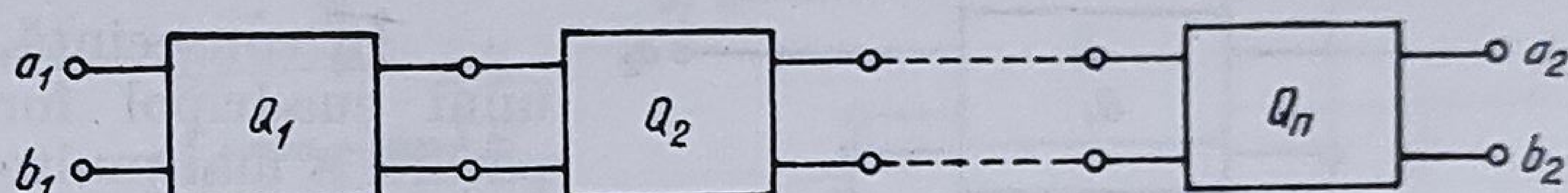
6.4.4.10. Legarea cuadripolilor. *a) Legarea în lanț.* Fie n cuadripoli $Q_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ care se leagă astfel, încît bornele de ieșire ale cuadripolului i să fie legate direct cu bornele de intrare ale cuadripolului $i + 1$ (fig. 6.67). Pentru fiecare cuadripol se poate scrie relația (6.103)

$$[E_1^{(i)}] = [\gamma^{(i)}] \cdot [E_2^{(i)}] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

și cum prin montaj

$$[E_2^{(i)}] = [E_1^{(i+1)}],$$

Fig. 6.67. Cuadripoli legați în lanț.



rezultă, că între elementele de intrare ale primului cuadripol și elementele de ieșire ale ultimului cuadripol se poate stabili relația

$$[E_1^{(1)}] = [\gamma^{(1)}] [\gamma^{(2)}] \ldots [\gamma^{(i)}] \ldots [\gamma^{(n)}] [E_2^{(n)}]$$

și în consecință, matricea caracteristică a cuadripolului format prin legarea în lanț a mai multor cuadripoli este egal cu produsul matricelor acestor cuadripoli, ordinea factorilor fiind identică cu ordinea de legare a cuadripolilor în lanț

$$[\gamma] = [\gamma^{(1)}] \cdot [\gamma^{(2)}] \cdot \ldots [\gamma^{(n)}].$$

În cazul cînd cuadripolii sînt identici, rezultă

$$[\gamma] = [\gamma']^n .$$

Pentru lanțul de cuadripoli inversat se obține

$$[E_2^{(n)}] = [\gamma^{(n)}]^{-1} \ldots [\gamma^{(i)}]^{-1} \ldots [\gamma^{(2)}]^{-1} \; [\gamma^{(1)}]^{-1} [E_1^{(1)}]$$

sau

$$[E_2^{(n)}] = [\tau^{(n)}] \ldots [\tau^{(i)}] \ldots [\tau^{(1)}] \; [E_1^{(1)}].$$

Legarea în lanț a cuadripolilor se mai numește și legarea în *cascadă*.

b) Legarea în paralel. Acest montaj este redat în figura 6.68 în care, pentru simplificare, au fost legați numai doi cuadripoli. În acest caz, toate tensiunile la bornele cuadripolului sînt egale iar curenții rezultanți la borne sînt egali cu suma

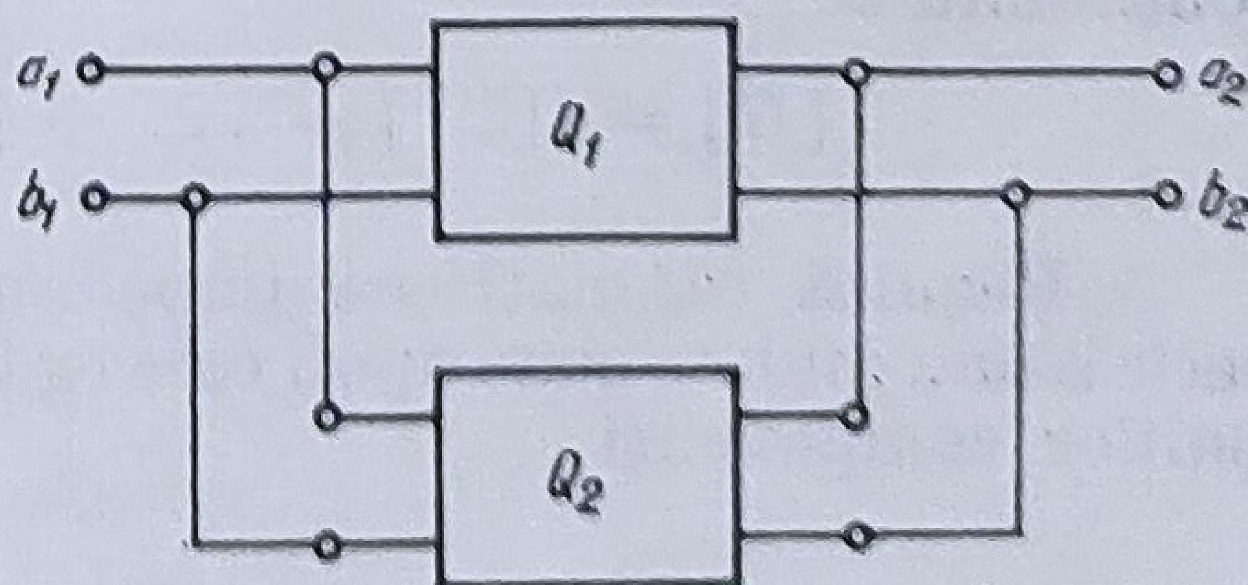


Fig. 6.68. Cuadripoli legați în paralel.

curenţilor la bornele fiecărui cuadripol. Folosind expresia matriceală a ecuaţiilor cuadripolului sub forma (6.118),

$$[I] = [\eta]\ [U],$$

vom avea

$$[U^{(1)}] = [U^{(2)}] = \ldots = [U^{(n)}] = [U]$$

şi

$$[I^{(1)}] + [I^{(2)}] + \ldots + [I^{(n)}] = [I],$$

de unde rezultă

$$[I] = ([\eta^{(1)}] + [\eta^{(2)}] + \ldots + [\eta^{(n)}])\ [U] = [\eta]\ [U].$$

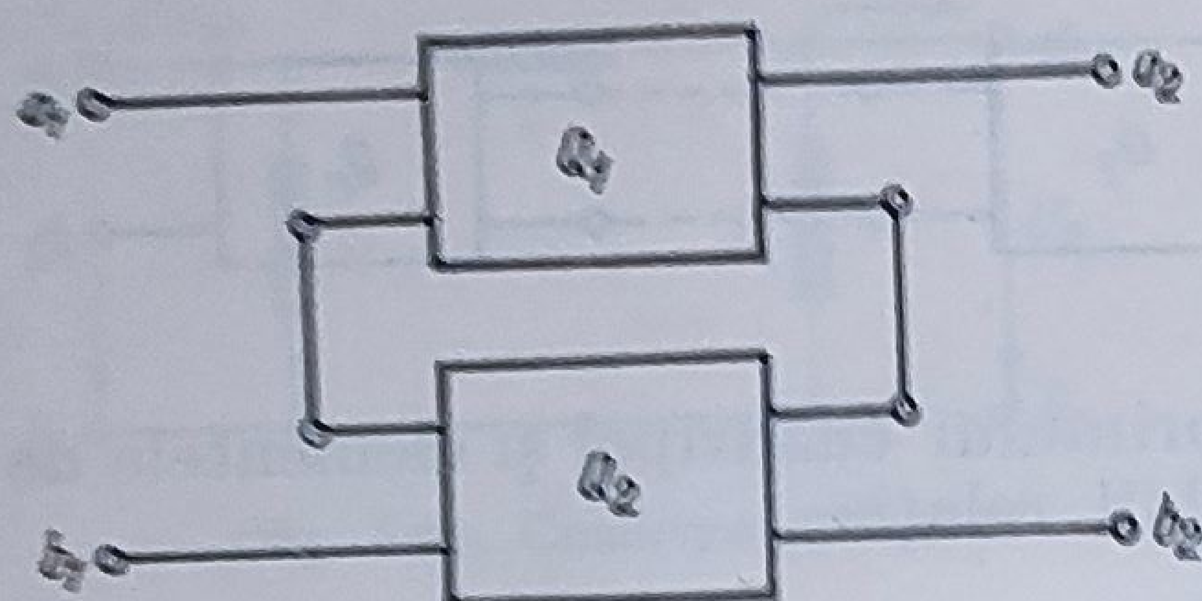


Fig. 6.69. Cuadripoli legaţi în serie.

În consecinţă, matricea admitanţă a unui cuadripol format prin legarea în paralel a mai multor cuadripoli este egală cu suma matricelor admitanţă a cuadripolilor componenţi

$$[\eta] = \sum_{i=1}^{n} [\eta^{(i)}].$$

În cazul a n cuadripoli identici, relaţia devine

$$[\eta] = n\ [\eta']$$

c) Legarea în serie. În acest montaj (fig. 6.69) curenţii la bornele de intrare, respectiv de ieşire, sînt egali pentru toţi cuadripolii componenţi, iar tensiunile respective sînt egale cu suma tensiunilor la bornele corespunzătoare ale cuadripolilor componenţi.

Folosind expresia matriceală a cuadripolilor sub forma (6.121)

$$[U] = [\zeta]\ [I],$$

vom avea

$$[I^{(1)}] = \ldots = [I^{(i)}] = \ldots = [I^{(n)}] = [I]$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n} [U^{(i)}] = [U],$$

obţinîndu-se

$$[U] = ([\zeta^{(1)}] + \ldots + [\zeta^{(i)}] + \ldots + [\zeta^{(n)}])\ [I].$$

Rezultă că, matricea impedanţă a cuadripolului format din legarea în serie a mai multor cuadripoli este egală cu suma matricelor impedanţă a cuadripolilor componenţi

$$[\zeta] = \sum_{i=1}^{n} [\zeta^{(i)}]$$

În cazul a n cuadripoli identici, această relație devine

$$[\zeta] = n\ [\zeta'].$$

OBSERVAȚIE. În cazul realizării fizice a conectării în serie a doi cuadripoli este necesar să se verifice că, condițiile legării în serie (egalitatea curenților și sumarea tensiunilor) este satisfăcută. De exemplu, legarea în serie a doi cuadripoli în T nu poate fi făcută decît în modul arătat în figura 6.70, *a*, cea din figura 6.70, *b* corespunzînd scurtcircuitării ramurii $a_1''b_1''$ și deci a legării celor două impedanțe în paralel și apoi în serie cu impedanțele transversale ale cuadripolului.

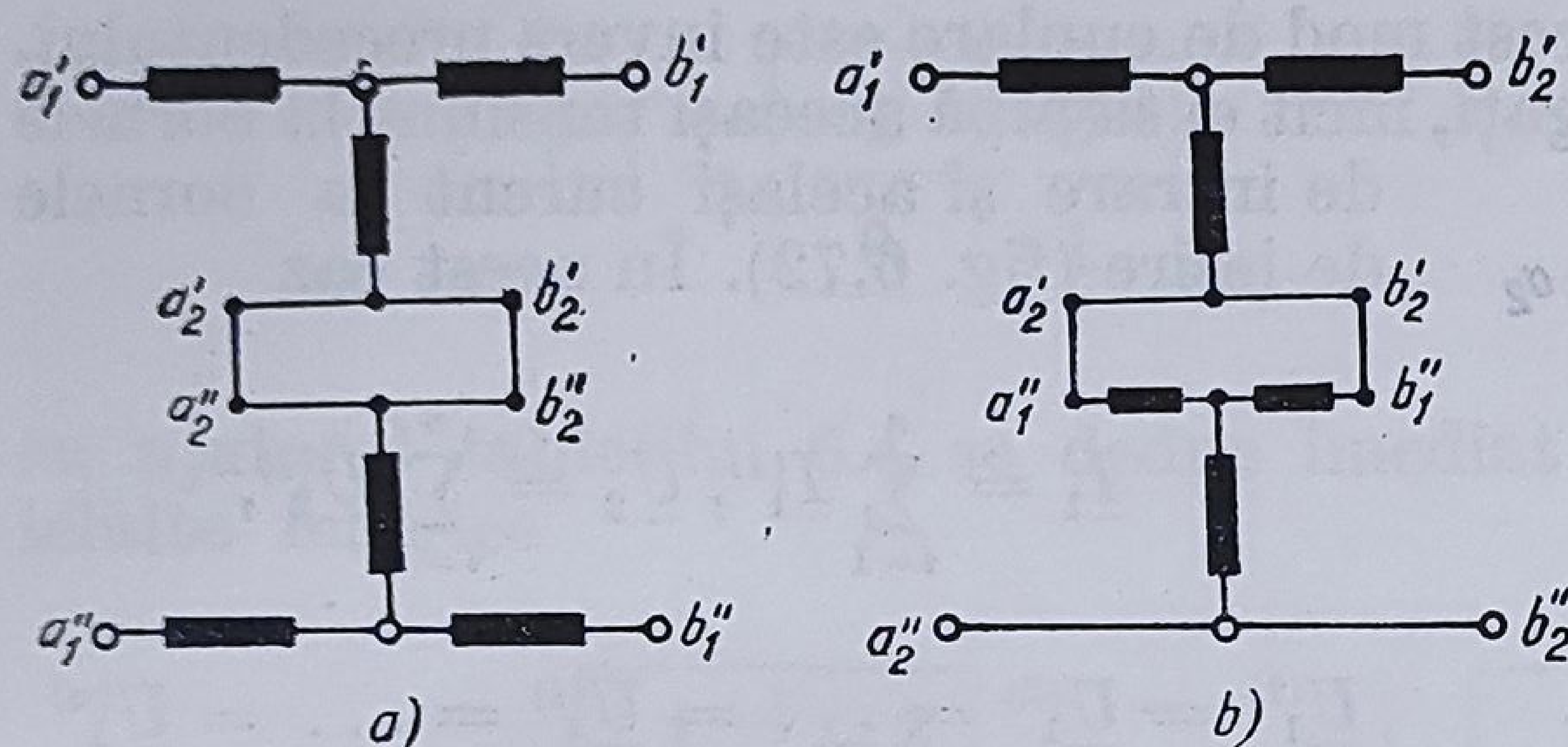


Fig. 6.70. Cuadripoli în T legați în serie :
a) legarea corectă ; *b*) legarea incorectă

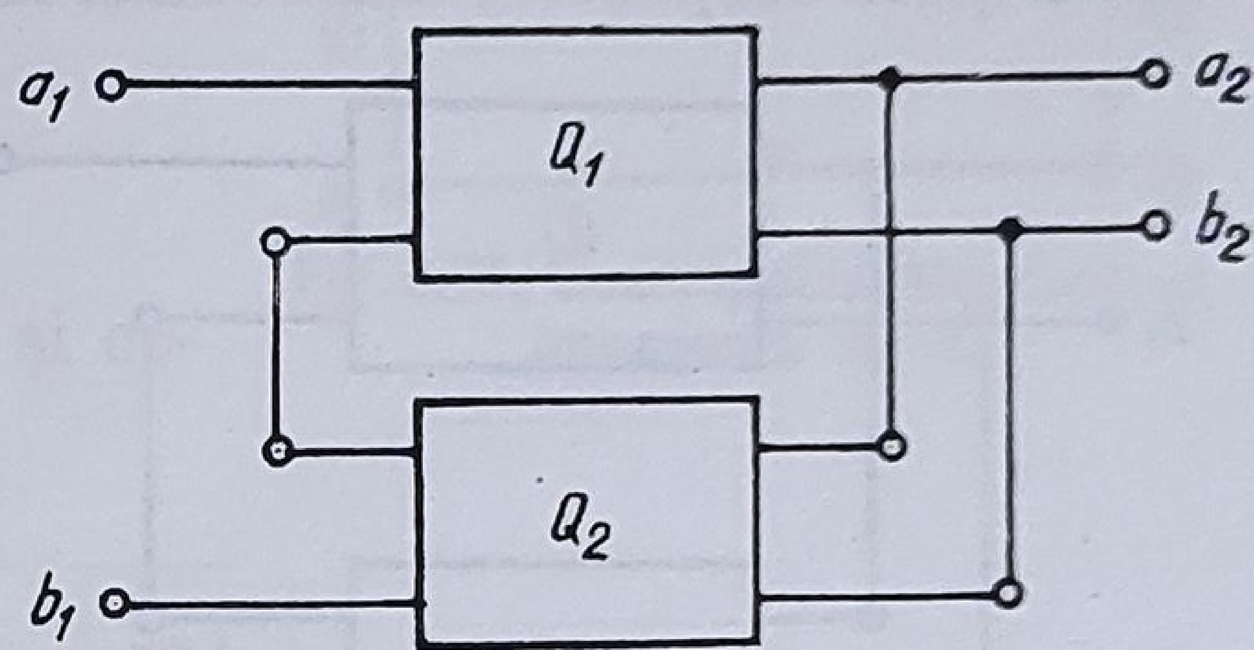


Fig. 6.71. Cuadripoli legați în serie-paralel

d) Legarea în serie-paralel. În cazul cînd doi sau mai mulți cuadripoli sînt legați astfel încît să aibă același curent la bornele de intrare și aceeași tensiune la bornele de ieșire, se zice că sînt legați în *serie-paralel* (fig. 6.71). Pentru găsirea matricelor corespunzătoare, se consideră expresia matriceală a cuadripolului sub forma (6.124)

$$[\mathscr{E}_1] = [\delta]\ [\mathscr{E}_2].$$

Dar

$$\underline{U}_1 = \sum_{i=1}^{n} \underline{U}_1^{(i)},\ \underline{I}_2 = \sum_{i=1}^{n} \underline{I}_2^{(i)},$$

$$\underline{U}_2^{(1)} = \ldots = \underline{U}_2^{(i)} = \ldots = \underline{U}_2^{(n)},$$

$$\underline{I}_1^{(1)} = \ldots = \underline{I}_1^{(i)} = \ldots = \underline{I}_1^{(n)}$$

și rezultă

$$[\mathscr{E}_1] = \sum_{i=1}^{n} [\mathscr{E}_1^{(i)}]$$

și

$$[\mathscr{E}_2] = [\mathscr{E}_2^{(i)}]\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ținînd seama de relația (6.124), se obține

$$[\mathscr{E}_1] = ([\delta^{(1)}] + \ldots + [\delta^{(i)}] + \ldots + [\delta^{(n)}])\ [\mathscr{E}_2] = [\delta]\ [\mathscr{E}_2].$$

În consecință, matricea serie-paralel a cuadripolului rezultant din legarea în serie-paralel a mai multor cuadripoli este egală cu suma matricelor serie-paralel a cuadripolilor componenți

$$[\delta] = \sum_{i=1}^{n} [\delta^{(i)}]$$

în cazul cînd cuadripolii sînt identici

$$[\delta] = n\,[\delta^{(1)}].$$

e) Legarea în paralel-serie. Acest mod de cuplare este invers precedentului, cuadripolii respectivi fiind astfel legați, încît ei să aibă aceeași tensiune la bornele de intrare și același curent la bornele de ieșire (fig. 6.72). În acest caz

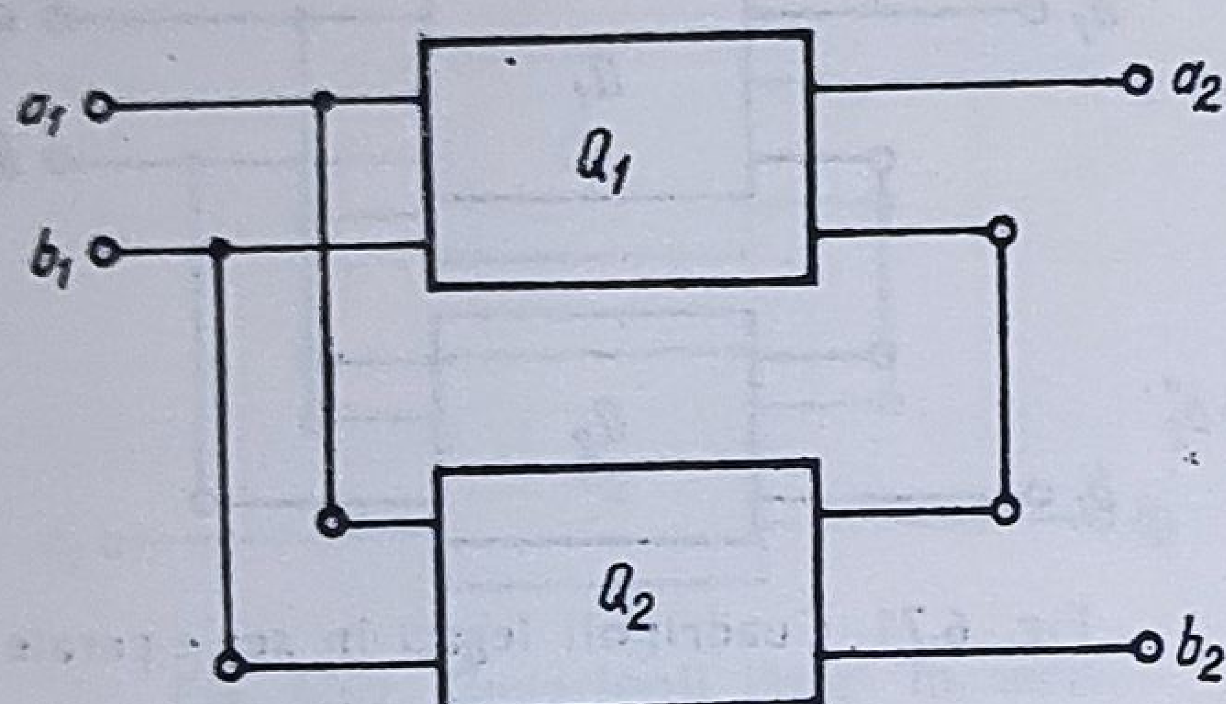


Fig. 6.72. Cuadripoli legați în paralel-serie.

$$\underline{I}_1 = \sum_{i=1}^{n} \underline{I}_1^{(i)},\ \underline{U}_2 = \sum_{i=1}^{n} \underline{U}_2^{(i)},$$

$$\underline{U}_1^{(1)} = \underline{U}_1^{(2)} = \ldots = \underline{U}_1^{(i)} = \ldots = \underline{U}_1^{(n)}$$

și

$$\underline{I}_2^{(1)} = \underline{I}_2^{(2)} = \ldots = \underline{I}_2^{(i)} = \ldots = \underline{I}_2^{(n)}.$$

Pentru găsirea matricei rezultante se pornește de la expresia (6.127) a ecuației matriceale a cuadripolului

$$[\Phi_1] = [\varphi] \cdot [\Phi_2].$$

Rezultă

$$[\Phi_1] = \sum_{i=1}^{n} [\Phi_1^{(i)}]$$

și

$$[\Phi_2^{(1)}] = [\Phi_2^{(2)}] = \ldots = [\Phi_2^{(i)}] = \ldots = [\Phi_2^{(n)}].$$

În consecință, matricea paralel-serie rezultantă este egală cu suma matricelor paralel-serie a cuadripolilor componenți

$$[\varphi] = \sum_{i=1}^{n} [\varphi^{(i)}].$$

Dacă cei n cuadripoli sînt identici, atunci

$$[\varphi] = n\,[\varphi'].$$

6.4.4.11. **Cuadripoli simpli.** Orice cuadripol, oricît de complicat ar fi, poate fi realizat prin legarea în mod convenabil a mai multor cuadripoli avînd structuri simple și a căror diverse matrice se pot serie ușor. Această operație poartă numele de *sinteza* cuadripolilor. În opoziție cu această operație, orice cuadripol poate fi descompus într-un număr oarecare de cuadripoli simpli. În modul acesta, prin reconstituirea cuadripolului se poate deduce prin calcul matricele cuadripolului dat prin combinarea diverselor matrice ale cuadripoli-

lor simpli. Operaţia se numeşte în acest caz *analiza* cuadripolilor. Şi într-un caz şi în celălalt, cunoaşterea structurilor simple este utilă.

a) Cuadripol format dintr-o impedanţă serie. Ecuaţiile unui astfel de cuadripol (fig. 6.73) sînt

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z}\,\underline{I}_2\,,$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2\,.$$

Matricea caracteristică a acestui cuadripol fiind

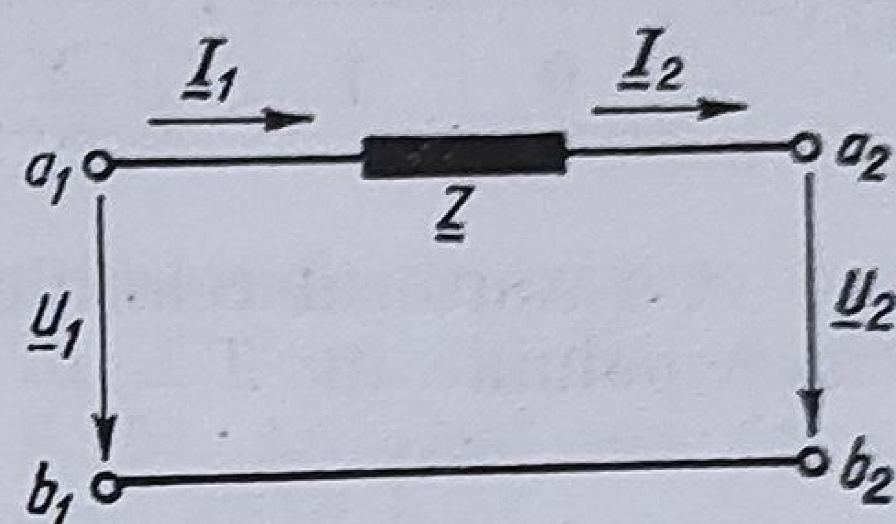


Fig. 6.73. Cuadripol format dintr-o impedanţă serie.

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cu ajutorul tabloului 6.4 se deduc imediat şi celelalte matrice

$$[\tau] = \begin{bmatrix} 1 & -\underline{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\eta] = \frac{1}{\underline{Z}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\zeta] = \infty\,^*,$$

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \underline{Z} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\varphi] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\underline{Z} \end{bmatrix}$$

OBSERVAŢIE. Această structură de cuadripol constituie un dipol**.

b) Cuadripol format dintr-o impedanţă în derivaţie. În acest caz, ecuaţiile cuadripolului se reduc la (fig. 6.74)

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2$$

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}\,\underline{U}_2 + \underline{I}_2$$

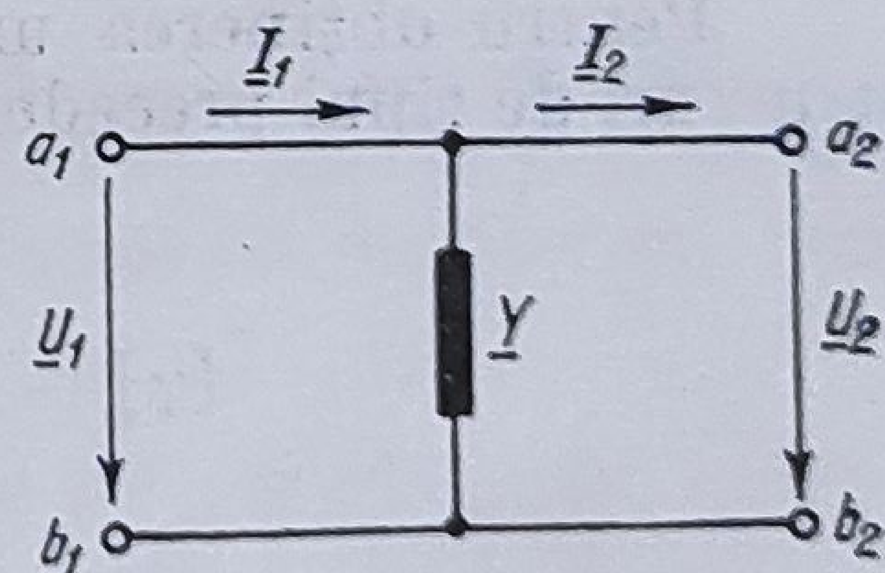


Fig. 6.74. Cuadripol format dintr-o impedanţă în paralel.

şi deci, cele şase matrice ale acestui cuadripol sînt

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{bmatrix}, \quad [\tau] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\underline{Y} & 1 \end{bmatrix}; \quad [\eta] = \infty;$$

* Semnul ∞ trebuie interpretat în sensul că matricea respectivă nu există.

** Vezi 6.4.5.1.

$$[\zeta] = \frac{1}{Y}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\delta] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -Y \end{bmatrix}; \quad [\varphi] = \begin{bmatrix} Y & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) *Cuadripolii în T și π*. Un cuadripol în T se obține legînd în lanț trei structuri de tipul precedent sub forma $a—b—a$ (fig. 6.65). Se obține*:

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+Z_1Y & Z_1+Z_2+Z_1Z_2Y \\ Y & 1+Z_2Y \end{bmatrix}$$

Cu ajutorul relațiilor din tabloul 6.4 se obțin apoi celelalte matrice ale cuadripolului în T

$$[\tau] = \begin{bmatrix} 1+Z_2Y & -(Z_1+Z_2+Z_1Z_2Y) \\ -Y & 1+Z_1Y \end{bmatrix};$$

$$[\eta] = \frac{1}{Z_1+Z_2+Z_1Z_2Y}\begin{bmatrix} 1+Z_2Y & -1 \\ 1 & -1-Z_1Y \end{bmatrix};$$

$$[\zeta] = \frac{1}{Y}\begin{bmatrix} 1+Z_1Y & -1 \\ 1 & -1-Z_2Y \end{bmatrix}; \quad [\delta] = \frac{1}{1+Z_2Y}\begin{bmatrix} Z_1+Z_2+Z_1Z_2Y & 1 \\ 1 & -Y \end{bmatrix}$$

$$[\varphi] = \frac{1}{1+Z_1Y}\begin{bmatrix} Y & 1 \\ 1 & -(Z_1+Z_2+Z_1Z_2Y) \end{bmatrix}.$$

Pentru obținerea unui cuadripol în π se leagă în lanț de asemenea trei structuri de tipul precedent sub forma $b—a—b$ (fig. 6.66). Se obține

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1+Y_2Z & Z \\ Y_1+Y_2+Y_1Y_2Z & 1+Y_1Z \end{bmatrix};$$

$$[\tau] = \begin{bmatrix} 1+Y_2Z & -Z \\ -(Y_1+Y_2+Y_1Y_2Z) & 1+Y_1Z \end{bmatrix};$$

$$[\eta] = \frac{1}{Z}\begin{bmatrix} 1+Y_1Z & -1 \\ 1 & -1-Y_2Z \end{bmatrix};$$

---

* Compară cu relațiile (6.138).

$$[\zeta] = \frac{1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1\underline{Y}_2\underline{Z}} \begin{vmatrix} 1+\underline{Y}_2\underline{Z} & -1 \\ 1 & -1-\underline{Y}_1\underline{Z} \end{vmatrix}$$

$$[\delta] = \frac{1}{1 + \underline{Y}_1\underline{Z}} \begin{vmatrix} \underline{Z} & 1 \\ 1 & -(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1\underline{Y}_2\underline{Z}) \end{vmatrix};$$

$$[\varphi] = \frac{1}{1 + \underline{Y}_2\underline{Z}} \begin{vmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1\underline{Y}_2\underline{Z} & 1 \\ 1 & -\underline{Z} \end{vmatrix}.$$

d) Cuadripol în X simplu. Pentru a putea răsturna bornele de intrare sau cele de ieşire la un cuadripol, se utilizează structura în X, formată din două impedanţe* în serie fără nici o legătură între ele (fig. 6.75). Aplicînd cea de a doua teoremă a lui KIRCHHOFF se obţin ecuaţiile acestui cuadripol

$$\underline{U}_1 = -\underline{U}_2 - (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\,\underline{I}_2$$
$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_2,$$

de unde rezultă matricele corespunzătoare

$$[\gamma] = \begin{vmatrix} -1 & -(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \\ & -1 \end{vmatrix}; \quad [\tau] = \begin{vmatrix} -1 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \\ & -1 \end{vmatrix};$$

$$[\eta] = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$[\zeta] = \infty; \; [\delta] = \begin{vmatrix} & -1 \\ -1 & -(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \end{vmatrix}; \; [\varphi] = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1+\underline{Z}_2 & -1 \\ -1 & \end{vmatrix}$$

Această structură are o mare utilitate în studiul schemelor de cuadripoli.

e) Cuadripol în X. Un astfel de cuadripol (fig. 6.76), care stă la baza a numeroase scheme de filtre electrice ** se realizează legînd în paralel un cua-

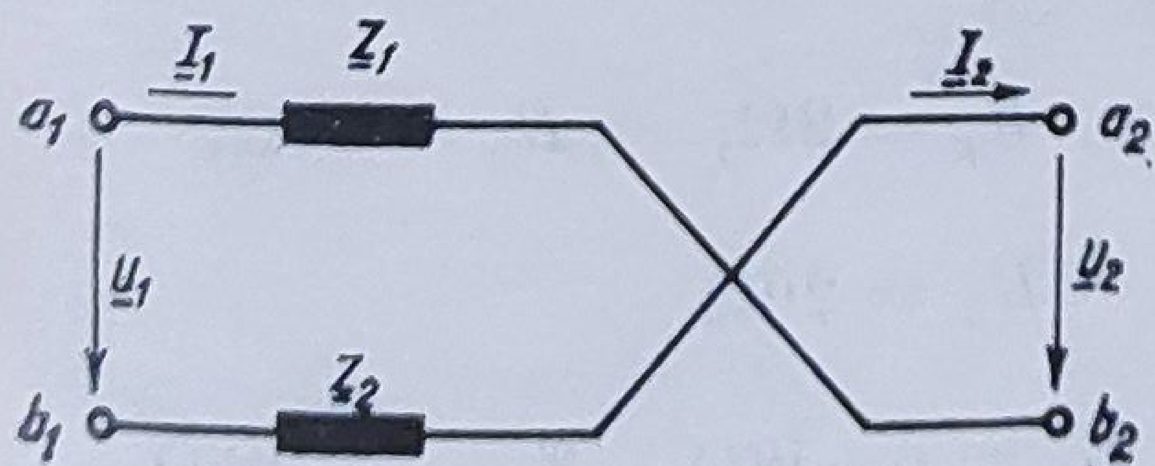


Fig. 6.75. Cuadripol în X simplu.

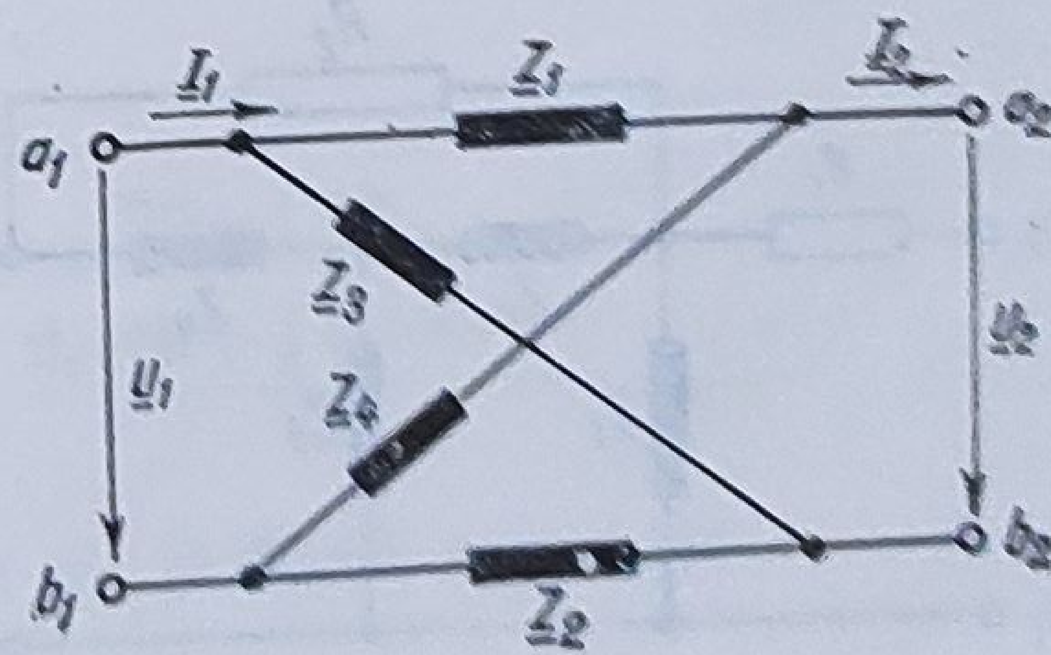


Fig. 6.76. Cuadripol în X.

* Putînd fi chiar nule; în acest caz şi $[\eta]=\infty$.
** Vezi 13,3 şi [265].

dripol dublu serie (structura *a*) cu un cuadripol în X simplu (structura *d*). Aplicînd regula de legare în paralel a cuadripolilor*

$$[\eta]=\frac{1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\frac{1}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_4}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{\underline{Z}'}+\frac{1}{\underline{Z}''} & -\frac{1}{\underline{Z}'}+\frac{1}{\underline{Z}''}\\ \frac{1}{\underline{Z}'}-\frac{1}{\underline{Z}''} & -\frac{1}{\underline{Z}'}-\frac{1}{\underline{Z}''}\end{vmatrix}$$

unde am notat

$$\underline{Z}_1+\underline{Z}_2=\underline{Z}' \text{ și } \underline{Z}_3+\underline{Z}_4=\underline{Z}''.$$

Celelalte matrice se deduc din aceasta cu ajutorul relațiilor din tablou 6.1. Se găsește:

$$[\gamma]=\frac{1}{\underline{Z}'-\underline{Z}''}\begin{vmatrix}-(\underline{Z}'+\underline{Z}'') & -\underline{Z}'\underline{Z}''\\ -4 & -(\underline{Z}'+\underline{Z}'')\end{vmatrix};$$

$$[\tau]=\frac{1}{\underline{Z}'-\underline{Z}''}\begin{vmatrix}-(\underline{Z}'+\underline{Z}'') & \underline{Z}'\underline{Z}''\\ 4 & -(\underline{Z}'+\underline{Z}'')\end{vmatrix};$$

$$[\zeta]=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}\underline{Z}'+\underline{Z}'' & \underline{Z}'-\underline{Z}''\\ -(\underline{Z}'-\underline{Z}'') & -(\underline{Z}'+\underline{Z}'\end{vmatrix};$$

$$[\delta]=\frac{1}{\underline{Z}'+\underline{Z}''}\begin{vmatrix}\underline{Z}'\underline{Z}'' & -(\underline{Z}'-\underline{Z}'')\\ -(\underline{Z}'-\underline{Z}'') & -4\end{vmatrix};$$

$$[\varphi]=\frac{1}{\underline{Z}'+\underline{Z}''}\begin{vmatrix}4 & -(\underline{Z}'-\underline{Z}'')\\ -(\underline{Z}'-\underline{Z}'') & -\underline{Z}'\underline{Z}''\end{vmatrix}.$$

6.4.4.12. Exemplu de aplicație. Fie circuitul reprezentat în figura 6.77, în care

$$R_1=2\Omega,\qquad R_2=10\Omega,$$

$$R_3=20\Omega,$$

$$\underline{Z}_1=6+j8\Omega,\quad \underline{Z}_2=-j25\Omega,$$

$$\underline{Z}_3=40-j30\Omega,\quad \underline{Z}_4=j50\Omega.$$

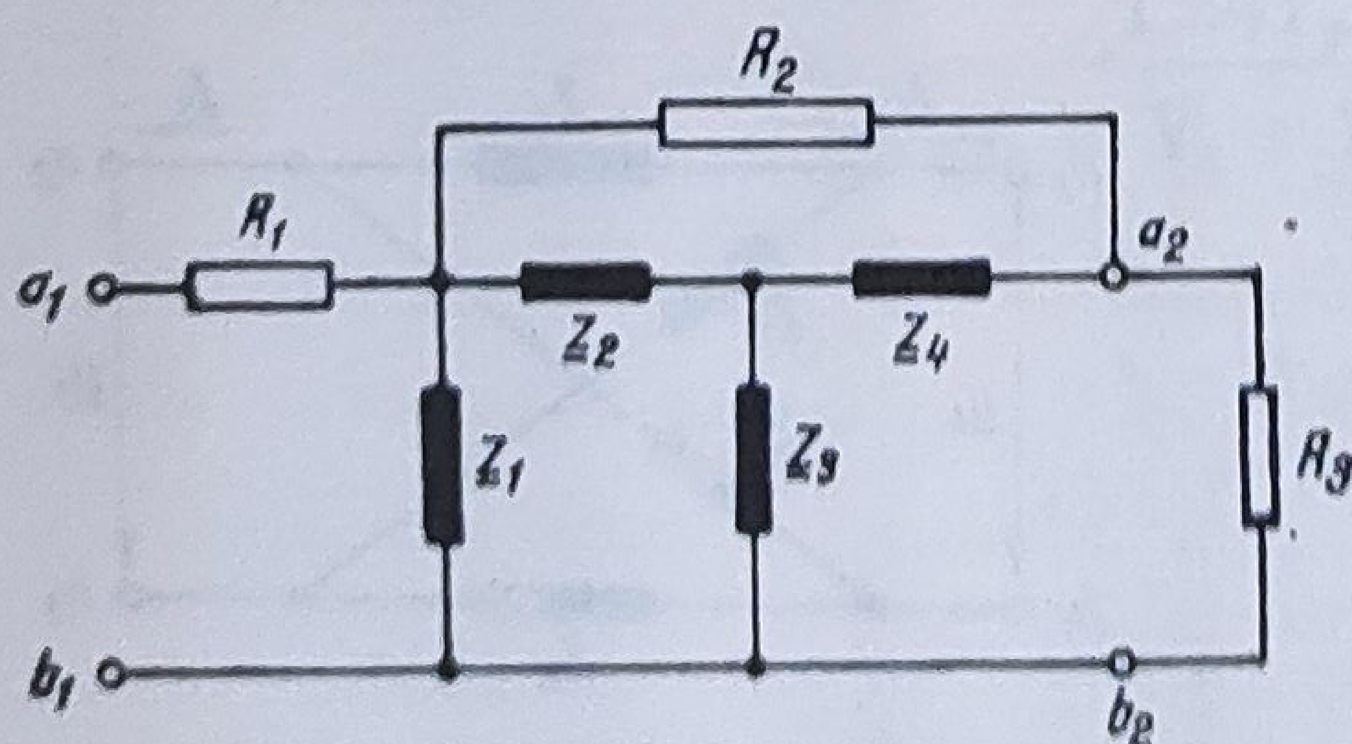


Fig. 6.77. Circuit de analizat.

* Vezi 6.4.4.10. *b*.

Acest cuadripol poate fi descompus în doi cuadripoli centrali legați în lanț (structurile B și C), avînd legat în paralel un al treilea cuadripol serie E, întreg sistemul fiind legat în lanț, la fiecare extremitate, cu cîte un cuadripol (structurile A și D) (fig. 6.78).

Matricea $[\gamma]$ a cuadripolului central se obține înmulțind cele două matrice caracteristice ale cuadripolilor B și C constitutivi. Se găsește

$$[\gamma_1] = \begin{bmatrix} 1{,}3-j\,0{,}4 & 20+j\,40 \\ 0{,}09-j\,0{,}110 & 8{,}8+j\,3 \end{bmatrix}.$$

Cu ajutorul relațiilor din tabloul 6.4 se găsește matricea $[\eta]$ corespunzătoare.

$$[\eta_1] = \begin{bmatrix} 0{,}148-j\,0{,}146 & 0{,}064-j\,0{,}123 \\ 0{,}01-j\,0{,}02 & -0{,}005+j\,0{,}03 \end{bmatrix}.$$

Matricea de admitanță a cuadripolului E fiind

$$[\eta_2] = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & -0{,}1 \end{bmatrix},$$

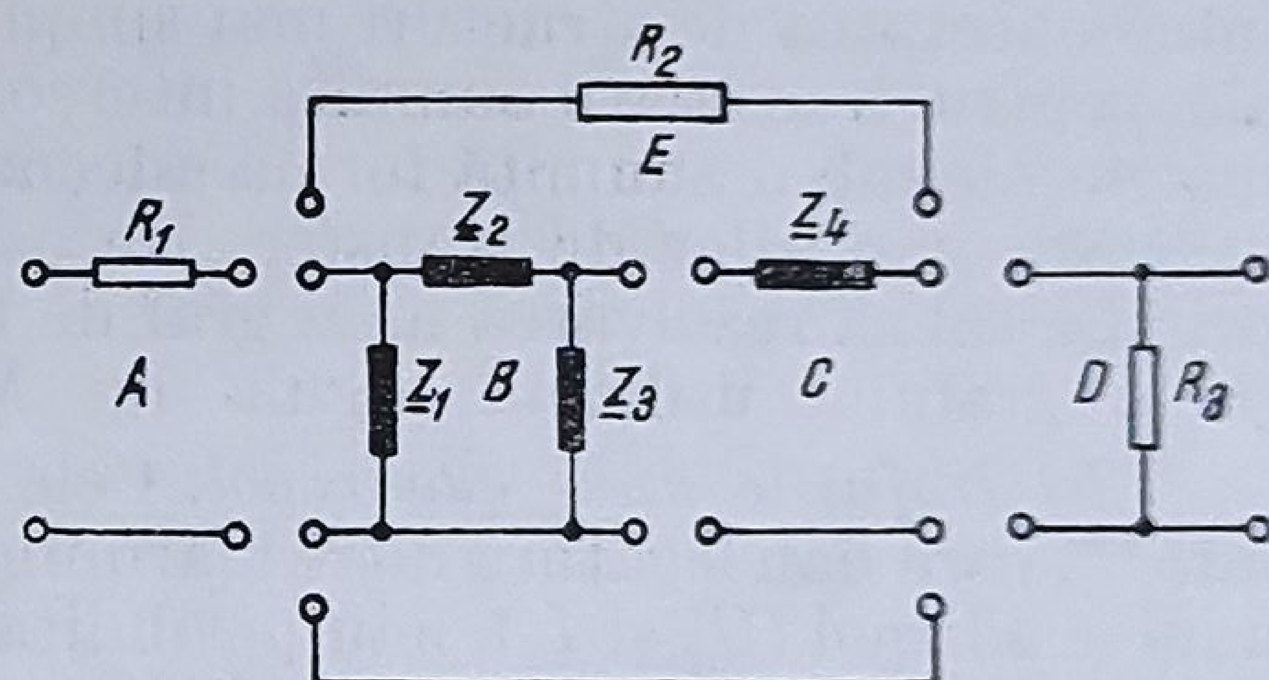


Fig. 6.78. Descompunerea circuitului în cuadripoli simpli.

matricea de admitanță rezultantă a grupului de cuadripoli B, C, E va fi

$$[\eta] = [\eta_1] + [\eta_2] = \begin{bmatrix} 0{,}248-j\,0{,}146 & -0{,}036-j\,0{,}123 \\ 0{,}11-j\,0{,}02 & -0{,}105+j\,0{,}03 \end{bmatrix}.$$

Utilizînd din nou relațiile din tabloul 6.4 se găsește matricea caracteristică corespunzătoare

$$[\gamma_2] = \begin{bmatrix} -0{,}972+j\,0{,}096 & 20-j\,40 \\ -0{,}191+j\,0{,}259 & 2{,}416+j\,0{,}888 \end{bmatrix}.$$

Matricele caracteristice ale cuadripolilor A și D fiind respectiv

$$[\gamma_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad [\gamma_4] = \begin{bmatrix} 1 & \\ 0{,}05 & 1 \end{bmatrix},$$

matricea caracteristică rezultantă a cuadripolului dat va fi

$$[\gamma] = [\gamma_3]\,[\gamma_2]\,[\gamma_4] = \begin{vmatrix} 0{,}765 - j\,3{,}43 & 42{,}416 - j\,80{,}888 \\ -0{,}07 + j\,0{,}215 & 2{,}416 - j\,0{,}888 \end{vmatrix}.$$

Din această matrice, se pot deduce toate celelalte matrice prin aplicarea relațiilor din tabloul 6.4.

6.4.4.13. **Aplicarea teoriei grafurilor la studiul cuadripolilor.** *a) Generalități.* Metoda matriceală pentru studiul cuadripolilor poate fi dezvoltată și utilizată folosind grafurile de transfer. Desenînd grafurile de transfer în formă de cuadripoli, se poate stabili graful de transfer al unei rețele complete — și în consecință ecuațiile sale — prin interconectarea grafurilor elementare, întocmai cum se procedează și cu cuadripolii simpli. Utilizarea grafurilor de fluență prezintă avantajul față de metoda matriceală că, formularea matematică a problemei rămîne mult mai apropiată de structura fizică a sistemului. Grafurile de transfer măresc de asemenea și supletea studiului unei rețele prin descompunerea și interconectarea de structuri mai simple; într-adevăr, în cazul metodei matriceale, pentru a se face o anumită interconectare, este necesar să se scrie ecuațiile matriceale sub o anumită formă adecuată, restricție care nu mai există în cazul utilizării grafurilor de transfer. De asemenea, calculele sînt mult simplificate prin faptul că rezolvarea unui graf de transfer se poate face prin simplă inspecție a grafului utilizînd regula lui MASON*.

b) Grafurile unui cuadripol. Cele șase ecuații matriceale stabilite mai înainte**, care dau legătura între mărimile de intrare ($\underline{U}_1$ și $\underline{I}_1$) și mărimile de ieșire a unui cuadripol ($\underline{U}_2$ și $\underline{I}_2$), dau posibilitatea desenării imediate a grafurilor corespunzătoare. Aceste grafuri pot fi desenate în două moduri diferite, utilizîndu-se forma cea mai convenabilă pentru calcule (Tab. 6.5). În forma de prezentare *a*) s-a căutat să se păstreze forma cuadripolului, cu elementele de intrare la stînga și cele de ieșire la dreapta, astfel încît să se păstreze o corespondență între nodurile grafurilor și variabilele cuadripolului. Pentru a ușura efectuarea de interconexiune a mai multor grafuri, au fost indicate explicit nodurile sursă și nodurile puț și anume, nodurile sursă au fost desenate cu semicercuri pline, iar cele puț cu semicercuri simple. Prin convenție un graf de tip ζ corespunde ecuației matriceale de tip $[\zeta]$***.

În tabloul 6.6 au fost prezentate grafurile cuadripolilor simpli serie, iar în tabloul 6.7 pe acelea ale cuadripolilor simpli în paralel.

c) Transformarea grafurilor cuadripolilor. Trecerea de la o formă a ecuației matriceale a unui cuadripol la altă formă se face transformînd matricea coeficienților în funcție de coeficienții altei matrice. Relațiile între coeficienții diverselor matrice sînt date în tabloul 6.1. Aceste relații se obțin ușor prin transformarea grafurilor cuadripolilor. Într-adevăr, trecerea de la un tip de matrice a cuadripolului la altul constă de fapt în alegerea altor variabile dependente și independente. Această operație se face, în cazul grafurilor, prin inversarea a unei sau două laturi pentru determinarea noilor noduri sursă corespunzătoare variabilelor alese ca independente.

---

* Vezi [245] pag. 99 și 6.3.2.6.

** Vezi 6.4.4.4.

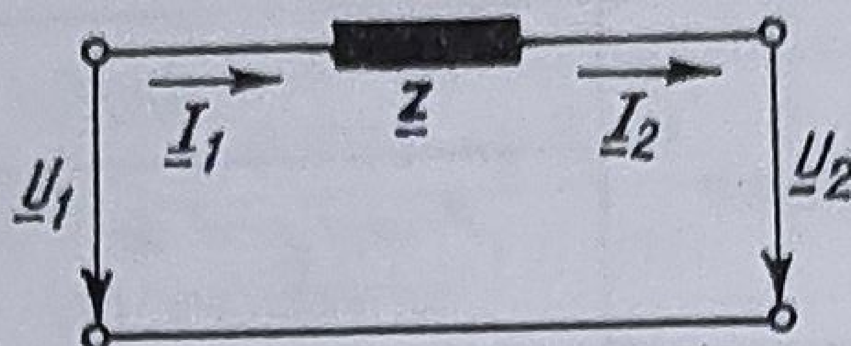
*** Ecuația (6.121)

MATRICELE ȘI GRAFURILE CUADRIPOLILOR

Tabloul 6.5.

Nr. crt.	Tipul cuadripolului	Ecuația matriceală	Graful de transfer	
			Primul mod de reprezentare (a)	Al doilea mod de reprezentare (b)
1	α	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$		
2	τ	$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$		
3	η	$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$		
4	ζ	$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$		
5	δ	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$		
6	φ	$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$		

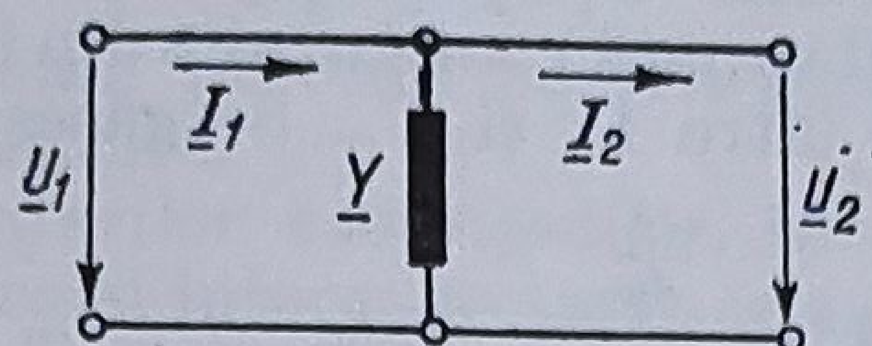
MATRICELE ŞI GRAFURILE CUADRIPOLILOR SIMPLI, TIP SERIE



Tabloul 6.8.

Nr. crt.	Tipul cuadripolului	Ecuaţia matriceală	Graful de transfer: Primul mod de reprezentare (a)	Graful de transfer: Al doilea mod de reprezentare (b)
1	γ	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$	U_1, U_2, I_1, I_2; 1, Z, 1	1, Z, 1; U_2, U_1, I_2, I_1
2	τ	$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -Z \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$	U_1, U_2, I_1, I_2; 1, $-Z$, 1	1, $-Z$, 1; U_1, U_2, I_1, I_2
3	η	$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & -\frac{1}{Z} \\ \frac{1}{Z} & -\frac{1}{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$	U_1, U_2, I_1, I_2; $1/Z$, $-1/Z$, $-\frac{1}{Z}$, $\frac{1}{Z}$	$1/Z$; $1/Z$, $-1/Z$, $-1/Z$; U_1, I_1, U_2, I_2
4	δ	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$	U_1, U_2, I_1, I_2; 1, Z, 1	1, Z, 1; I_2, I_1, U_1, U_2
5	φ	$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & -Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$	U_1, U_2, I_1, I_2; 1, $-Z$, 1	1, $-Z$, 1; I_1, I_2, U_2, U_1

MATRICELE ȘI GRAFURILE CUADRIPOLILOR SIMPLI, TIP DERIVAȚIE



Tabloul 6.7.

Nr. crt.	Tipul cuadripolului	Ecuația matriceală	Graful de transfer: Primul mod de reprezentare (a)	Graful de transfer: Al doilea mod de reprezentare (b)
1	γ	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ Y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$	$U_2 \xrightarrow{1} U_1$; $U_2 \xrightarrow{Y} I_1$; $I_2 \xrightarrow{1} I_1$	U_1, U_2, I_1, I_2: 1, Y, 1
2	τ	$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ -Y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$	$U_1 \xrightarrow{1} U_2$; $U_1 \xrightarrow{-Y} I_2$; $I_1 \xrightarrow{1} I_2$	U_2, U_1, I_2, I_1: 1, −Y, 1
3	ξ	$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Y} & -\frac{1}{Y} \\ \frac{1}{Y} & -\frac{1}{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$	$I_1 \xrightarrow{1/Y} U_1$; $I_1 \xrightarrow{1/Y} U_2$; $I_2 \xrightarrow{-1/Y} U_1$; $I_2 \xrightarrow{-1/Y} U_2$	I_1, U_1, I_2, U_2: 1/Y, −1/Y, −1/Y; 1/Y
4	δ	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & -Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$	$U_2 \xrightarrow{1} U_1$; $U_2 \xrightarrow{-Y} I_2$; $I_1 \xrightarrow{1} I_2$	U_1, U_2, I_2, I_1: 1, −Y, 1
5	φ	$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$	$U_1 \xrightarrow{1} U_2$; $U_1 \xrightarrow{Y} I_1$; $I_2 \xrightarrow{1} I_1$	I_2, I_1, U_1, U_2: 1, Y, 1

Fie să determinăm matricea $[\tau]$ din matricea $[\gamma]$ a grafului unui cuadripol (fig. 6.79, *a*). Inversăm* laturile U_1U_2 şi I_1I_2 obţinînd graful din figura 6.79, *b*. Izolînd nodul sursă I_1, graful capătă configuraţia din figura 6.79, *c*, pe care îl reducem obţinînd transmitanţa între U_1 şi U_2. Se găseşte

$$T_{U_1U_2} = \frac{\dfrac{1}{A_{11}}}{1-\left(-\dfrac{A_{12}}{A_{11}}\right)\left(-\dfrac{A_{21}}{A_{22}}\right)} = \underline{A}_{22}\,.$$

În acelaşi mod se determină transmitanţa între I_1 şi I_2, izolînd nodul sursă U_1 (fig. 6.79, *d*); se găseşte

$$T_{I_1I_2} = \frac{\dfrac{1}{A_{22}}}{1-\left(-\dfrac{A_{12}}{A_{11}}\right)\left(-\dfrac{A_{21}}{A_{22}}\right)} = \underline{A}_{11}\,.$$

Subgraful care dă legătura între U_1 şi I_2 se reduce dedublînd nodul U_2 (fig. 6.79, *e*); se determină transferanţa dintre U_1 şi I_2

$$T_{U_1I_2} = \frac{\dfrac{1}{A_{11}}\cdot\left(-\dfrac{A_{21}}{A_{22}}\right)}{1-\left(-\dfrac{A_{12}}{A_{11}}\right)\left(-\dfrac{A_{21}}{A_{22}}\right)} = -\underline{A}_{21}\,.$$

De asemenea subgraful care dă legătura între I_1 şi U_2 se reduce dedublînd nodul I_2 (fig. 6.79, *f*); se determină astfel transferanţa dintre I_1 şi U_2

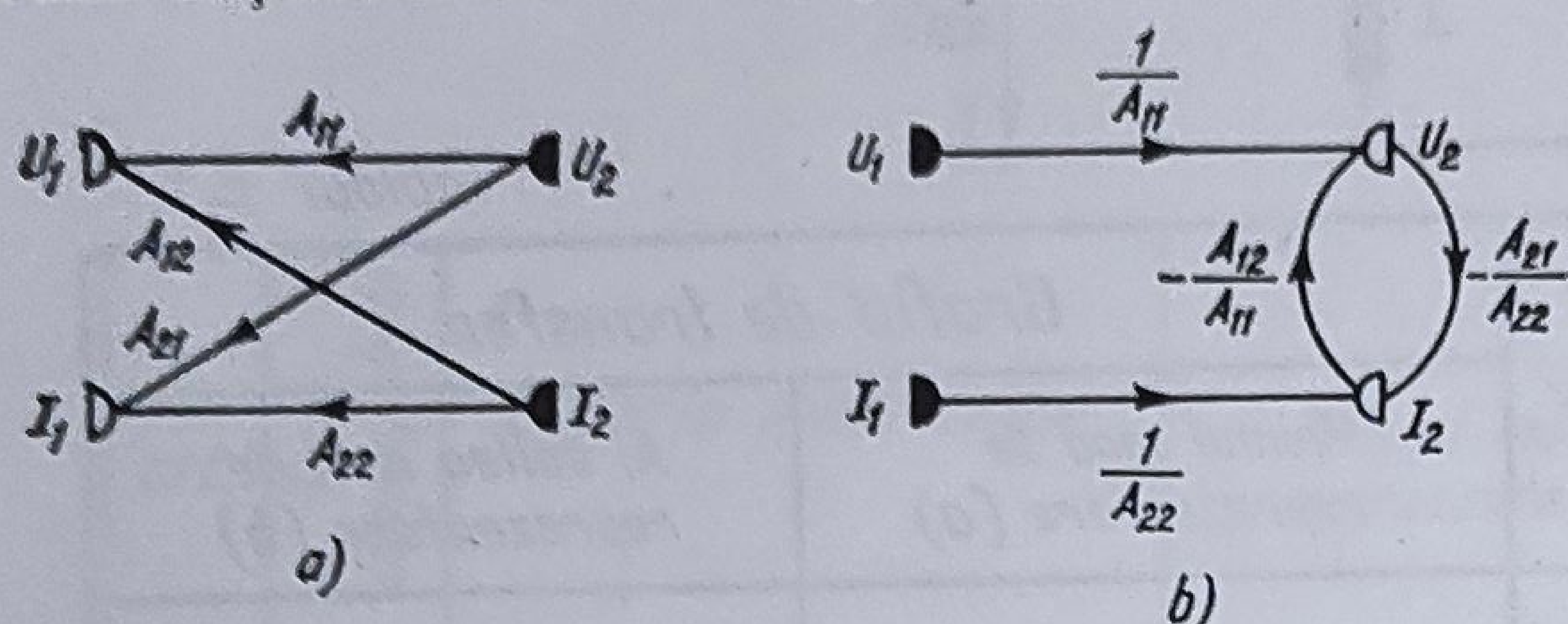
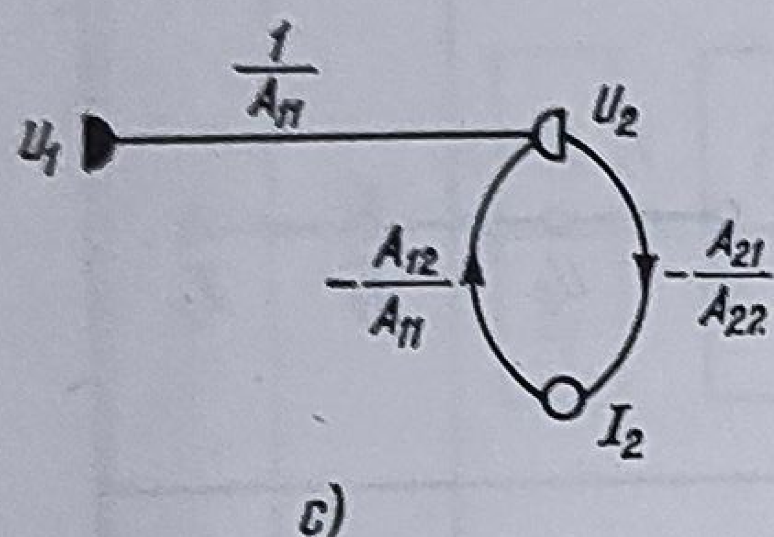
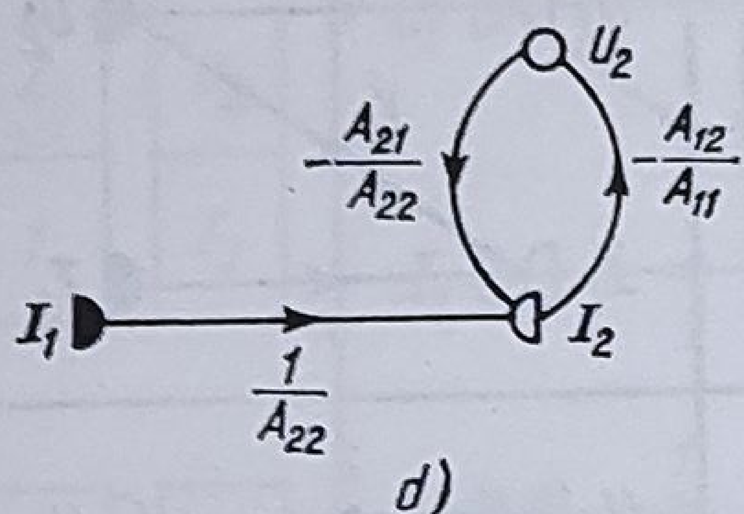
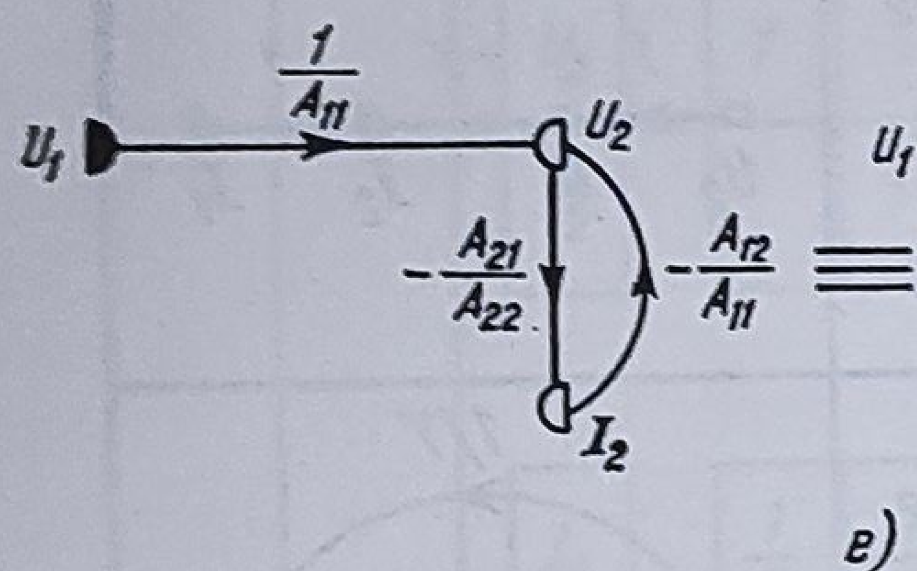
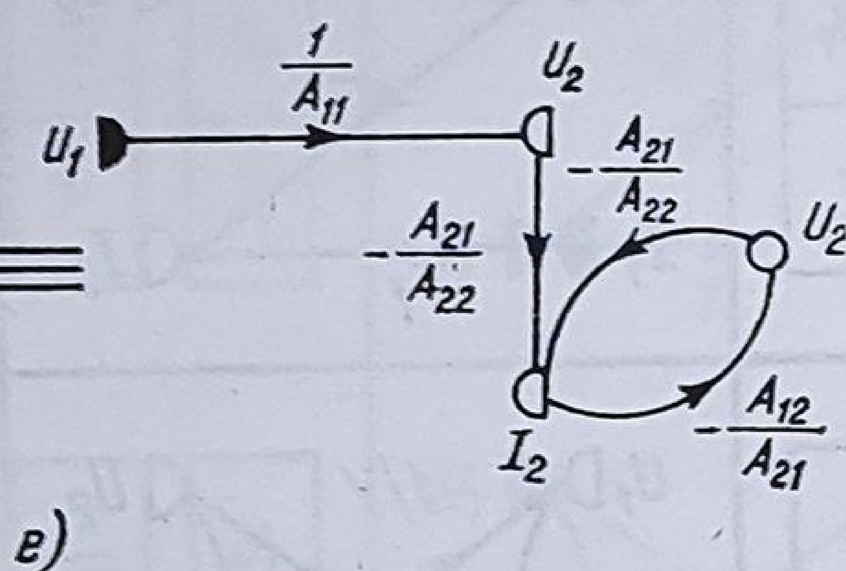
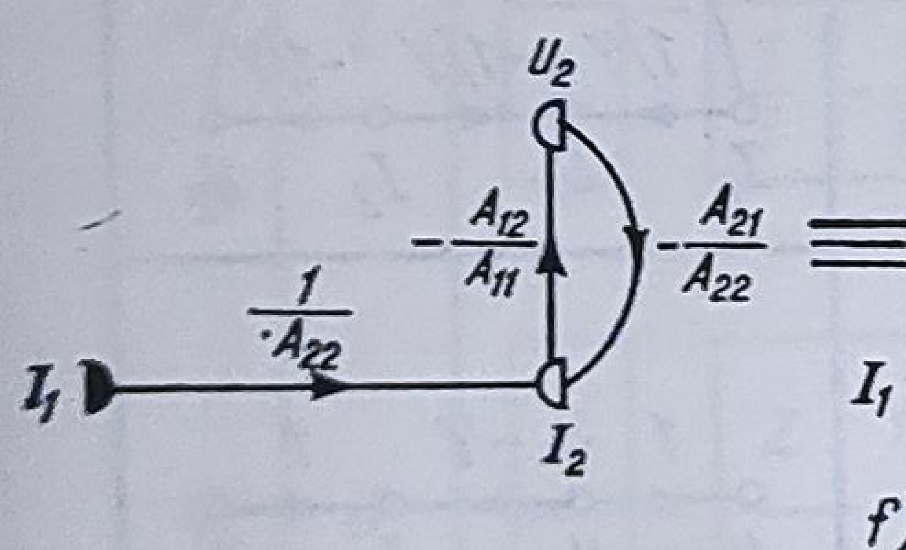
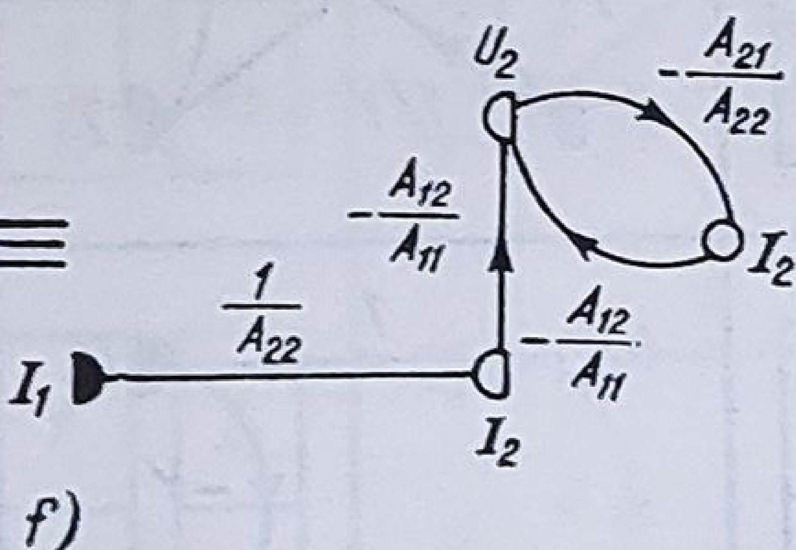
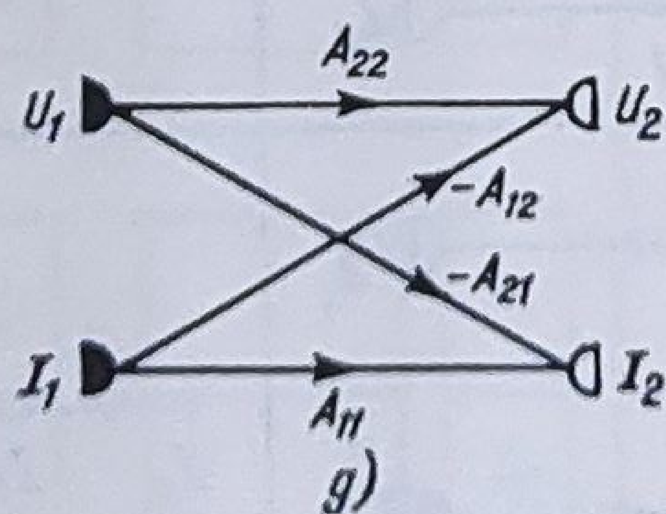









Fig. 6.79. Transformarea unui graf de tip γ într-un graf de tip τ.

$$T_{I_1U_2} = \frac{\dfrac{1}{A_{22}}\left(-\dfrac{A_{12}}{A_{11}}\right)}{1-\left(-\dfrac{A_{12}}{A_{11}}\right)\left(-\dfrac{A_{21}}{A_{22}}\right)} = -\underline{A}_{12}\,.$$

---

* Operaţiile indicate se fac conform regulilor date în paragraful 6.3.2.5.

Graful de transfer căutat este dat în figura 6.79, *g* și corespunde ecuației matriceale (6.114).

În același nod se poate proceda pentru găsirea matricei cuadripolului sub orice formă de prezentare.

d) Interconectarea grafurilor cuadripolilor. Interconectarea grafurilor cuadripolilor se face întocmai ca și interconectarea cuadripolilor, rezultatul obținut fiind un graf simplu. În raport cu modul cum se face această interconectare (lanț, serie, paralel etc.) se va utiliza tipul de graf de cuadripol, efectuîndu-se operațiile respective de reducere și transformare a grafurilor conform principiilor indicate mai înainte.

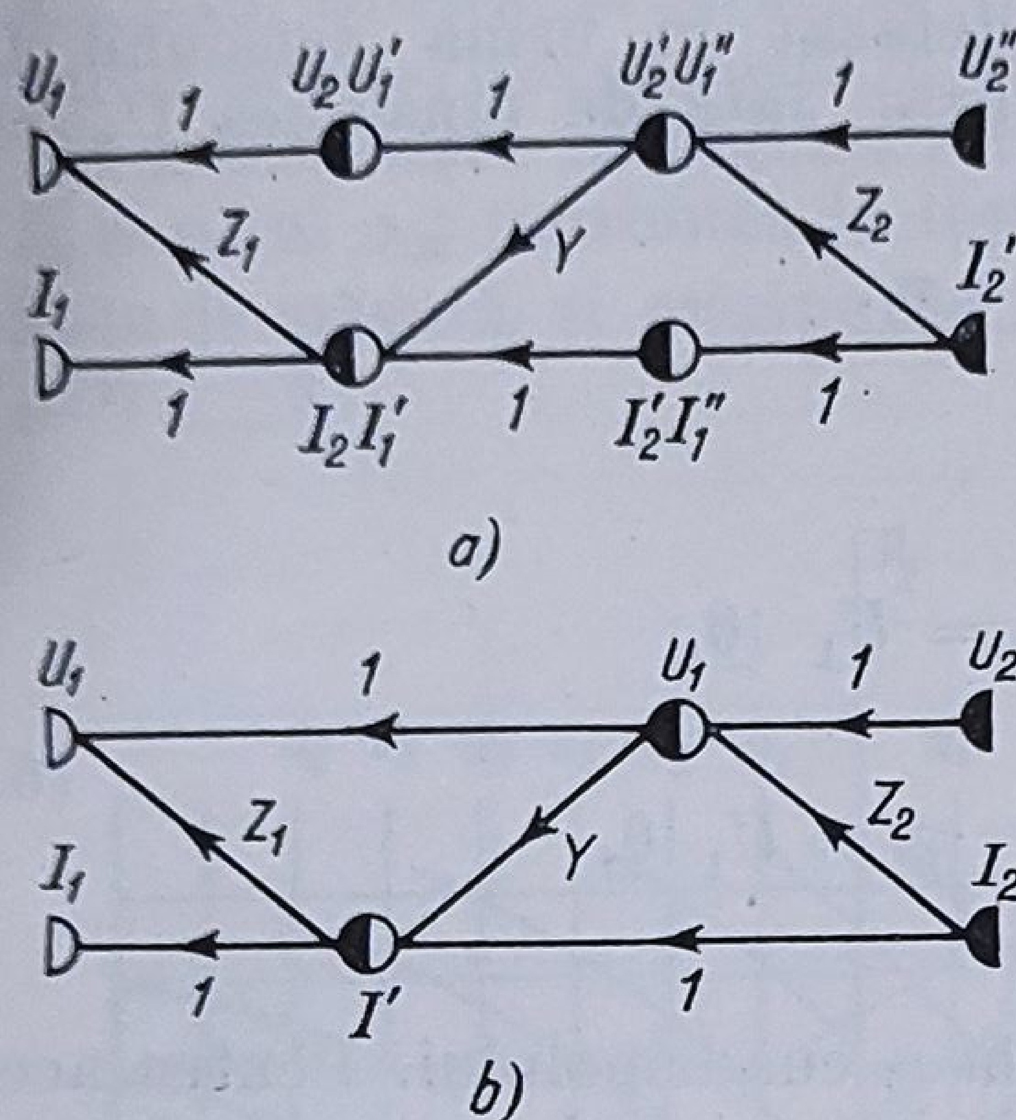


Fig. 6.80. Graful a trei cuadripoli legați în lanț.

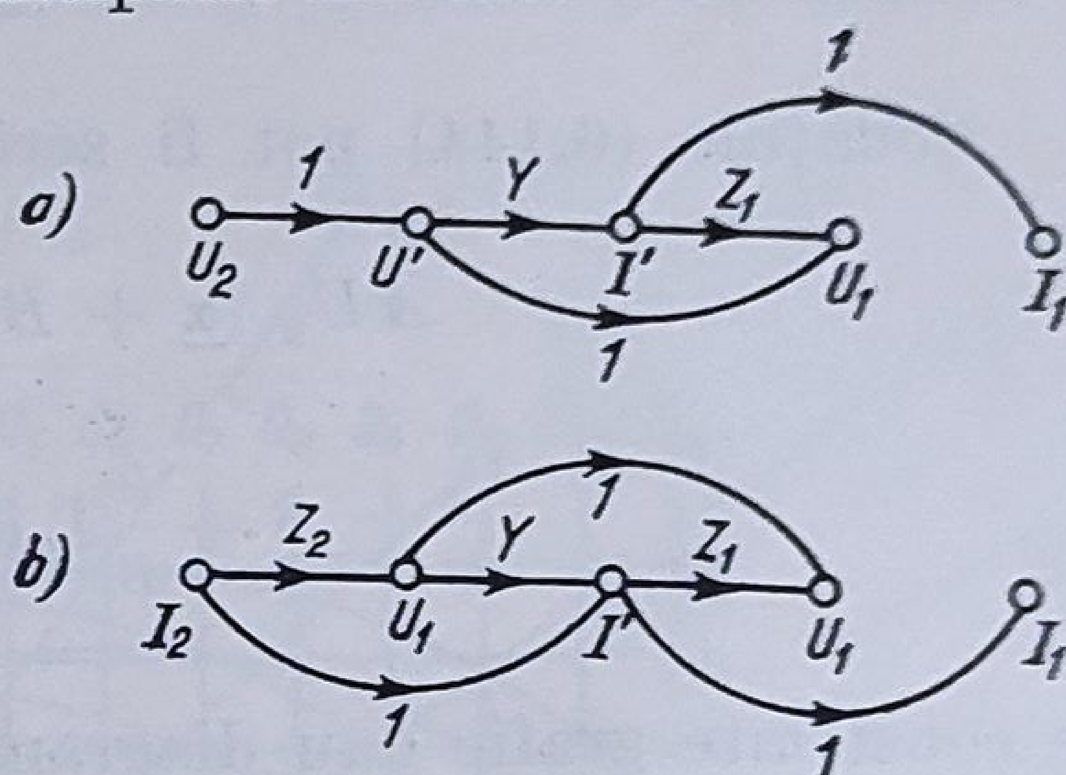


Fig. 6.81. Grafurile echivalente.

a) Pentru $\underline{I}_2 = 0$; *b)* pentru $\underline{U}_2 = 0$

Pentru exemplificare fie să determinăm graful unui cuadripol în *T* obținut din interconectarea în cascadă a trei structuri simple (Tab.6.6 și 6.7); se obține graful din figura 6.80,*a*, care, reducînd nodurile $\underline{U}_2\underline{U}_1$ și $\underline{I}'_2\,\underline{I}'_1$, poate fi reprezentat mai simplu (fig. 6.80, *b*). Graful rezultant este o structură γ, căreia urmează să-i determinăm parametrii. Pentru aceasta facem pe rînd $\underline{I}_2 = 0$ și $\underline{U}_2 = 0$ și calculăm transmitanțele corespunzătoare relațiilor (6.105) și (6. 106). Calculul se face* aplicînd formula lui MASON (6.63) fie direct asupra grafului din figura 6.79, *b*, fie desenînd din nou acest graf sub o formă mai ușor de analizat (fig. 6.81). Calculul, care nu prezintă nici o dificultate, conduce la expresiile parametrilor identice cu acelea din ecuațiile (6.138).

6.4.4.14. **Diagrama generală a cuadripolului.** Fie un cuadripol avînd parametrii $\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}\ \underline{D}$ și ecuațiile generale scrise sub forma

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}\ \underline{U}_2 + \underline{B}\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\ \underline{U}_2 + \underline{D}\ \underline{I}_2 \end{aligned}\right\} \tag{6.142}$$

$$\underline{A}\,\underline{D} - \underline{B}\,\underline{C} = 1, \tag{6.143}$$

în care tensiunile și curenții au semnificațiile obișnuite. Eliminînd pe $\underline{I}_2$ se obțin relațiile

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\,\underline{U}_2 + \underline{B}\,\underline{I}_2 = \frac{1}{\underline{D}}\underline{U}_2 - \frac{\underline{B}}{\underline{D}}\,\underline{I}_1\,. \tag{6.144}$$

---

* Există formule care dau direct parametrii grafului echivalent al unei cascade cu oricîte elemente. Vezi [245] pag. 118.

Fie

$$\underline{A} = A\,|\underline{\alpha}, \quad \underline{B} = B\,|\underline{\beta}, \quad \underline{D} = D\,|\underline{\delta},$$

$$\underline{U}_1 = U_1\,|\underline{\theta}, \quad \underline{U}_2 = U_2\,|\underline{0}, \quad \underline{I}_2 = I_2\,|\underline{-\varphi_2};$$

se ia tensiunea $\underline{U}_2$ atît ca origine de fază, cît și ca unitate de măsură pentru tensiuni.

Dacă se consideră și curentul $\underline{I}_1$, defazat în urma tensiunii $\underline{U}_1$ cu unghiul φ_1, atunci acest curent va fi defazat față de tensiunea $\underline{U}_2$ cu unghiul $\theta - \varphi_1$ și expresia sa va fi

$$\underline{I}_1 = I_1\,|\underline{\theta - \varphi_1}.$$

Ecuațiile (6.144) pot fi scrise

$$\left.\begin{aligned} AU_2\,|\underline{\alpha} + BI_2\,|\underline{\beta - \varphi_2} &= U_1\,|\underline{\theta}, \\ \frac{U_2}{D}\,|\underline{-\delta} + \frac{B}{D} I_1\,|\underline{\beta - \delta + \theta - \varphi_1} &= U_1\,|\underline{\theta}, \end{aligned}\right\} \quad (6.145)$$

care construite grafic dau diagrama generală a cuadripolului. Pentru aceasta, se consideră un anumit regim de funcționare la ieșire, adică se consideră cunoscute U_2, I_2 și φ_2.

Prima din ecuațiile (6.145) arată că tensiunea de alimentare a cuadripolului este egală cu suma a doi fazori: fazorul $A\underline{U}_2|\underline{\alpha}$ constant ca lungime și care face un unghi α cu originea fazelor și fazorul $B\underline{I}_2\,|\underline{\beta - \varphi_2}$, care face unghiul $\beta - \varphi_2$ cu originea fazelor (fig. 6.82). A doua ecuație (6.145) arată că aceeași tensiune $\underline{U}_1$ poate fi obținută tot din suma a doi fazori, fazorul $(\underline{U}_2/D)\,|\underline{-\delta}$ cunoscut și fazorul $(B\underline{I}_1/D)\,|\underline{\beta-\delta+\theta-\varphi_1}$ necunoscut, dar care acum poate fi determinat destul de ușor. Într-adevăr, construind fazorul $(\underline{U}_2/D)\,|\underline{-\delta}$ și, unind vîrful său O_2 cu vîrful M al fazorului $\underline{U}_1$, se obține dreapta $\overline{O_2M}$ care este chiar fazorul căutat.

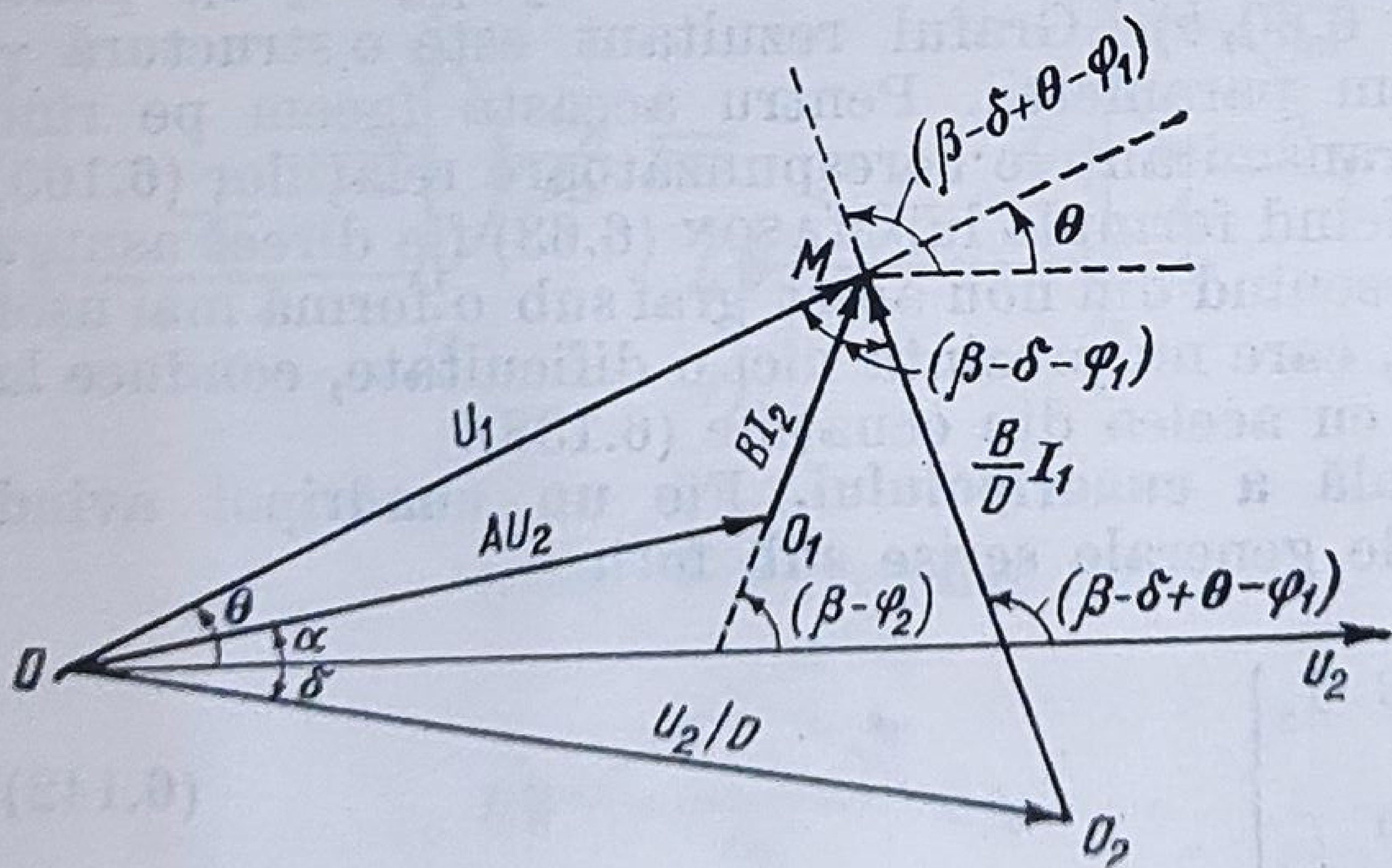


Fig. 6.82. Diagrama generală a cuadripolului.

Coeficientul $\frac{B}{D}$ fiind cunoscut, modulul fazorului $\overline{O_2M}$ va da mărimea curentului $\underline{I}_1$, iar argumentul său va da defazajul $\theta - \varphi_1$ al acestui curent.

Este ușor de văzut că

$$\sphericalangle\, OMO_2 = \beta - \delta - \varphi_1$$

și deci, aceeași diagramă determină direct unghiul φ_1, deoarece β și δ sînt cunoscute.

Ecuaţiile (6.142) şi (6.143) ale cuadripolului dau posibilitatea construirii unor diagrame sau topograme generale, care să permită rezolvarea tuturor problemelor ce privesc un anumit cuadripol într-un timp minim. Aceste topograme sînt de două tipuri: topograme sau diagrame cu un singur pol de tensiune şi topograme sau diagrame cu poli multipli de tensiune. Ele pot rezolva toate problemele specifice cuadripolului.

6.4.4.15. Diagrama cercului cu un singur pol de tensiune pentru cuadripol. Construcţia acestei diagrame se face pornind de la diagrama generală a cuadripolului. Se construieşte triunghiul fundamental OO_1M, pentru o anumită valoare a lui I_2 şi a lui φ_2, tensiunea la ieşire U_2 fiind considerată constantă şi luată ca unitate de măsură şi origine de fază (fig. 6.83), precum şi fazorul $\overline{OO_2} = (U_2/D) \underline{|-\delta}$.

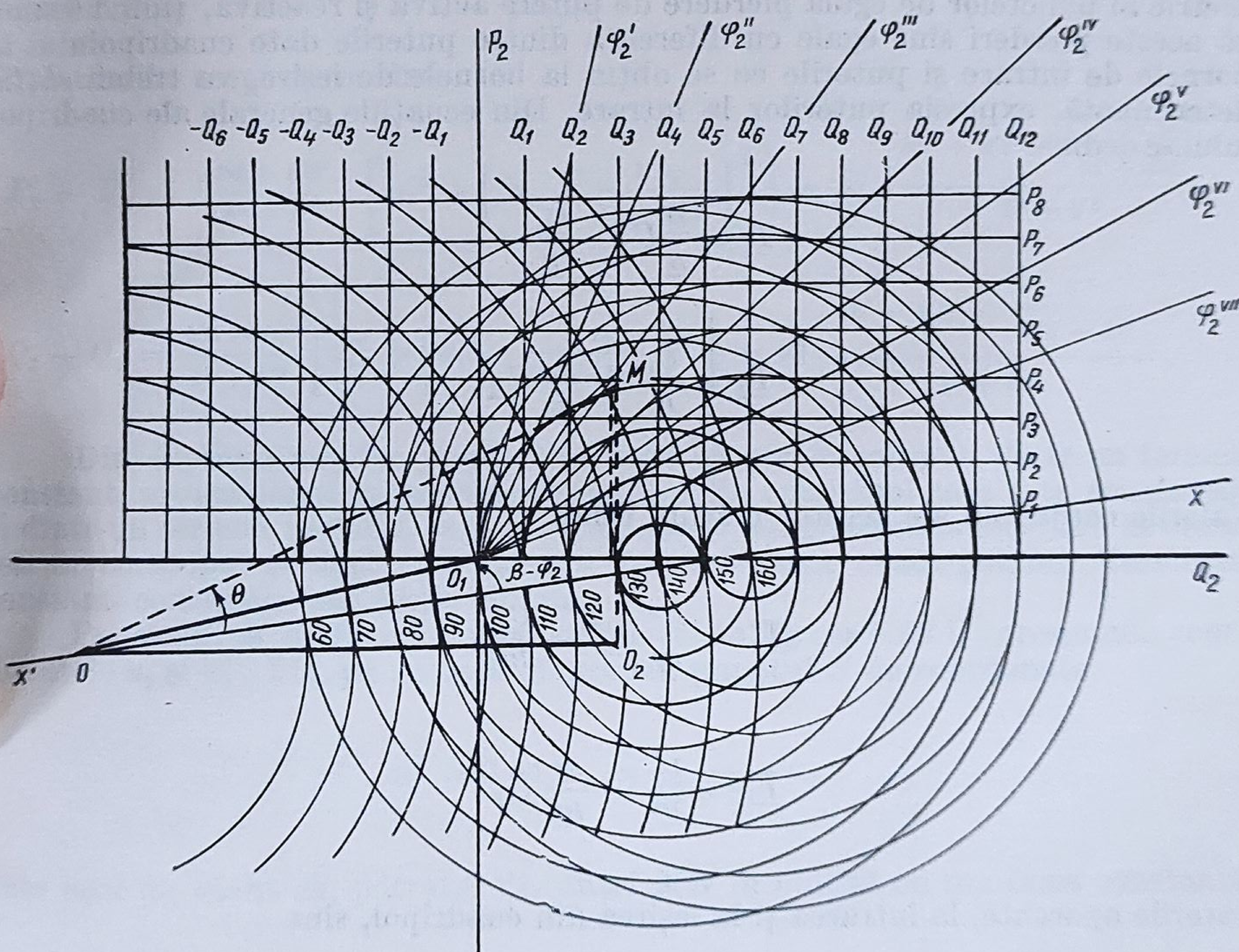


Fig. 6.83. Diagrama cercului cu un singur pol de tensiune pentru cuadripol.

Tensiunea la intrare $\underline{U}_1$ fiind reprezentată de fazorul $\overline{OM}$, locul geometric al punctelor de egală tensiune efectivă este o familie de cercuri concentrice, cu centrul în O. Aceste cercuri se gradează în procente din tensiunea U_2, luată ca unitate de măsură. În particular, locul geometric al punctelor de egală tensiune la intrare şi la ieşire este cercul cu centrul în O şi cu raza egală cu U_2.

Acest cerc va purta gradaţia 100 sau 1.

Locul geometric al punctelor de egal defazaj la sosire este format dintr-o familie de drepte trecînd prin punctul O_1 şi făcînd un unghi $\beta - \varphi_2$ cu axa origine de fază. În particular, dreapta O_1P_2, care face cu axa de origine unghiul β,

este locul geometric al fazorului $\underline{B}\underline{I}_2$ pentru care, φ_2 este egal cu zero; ea este deci locul geometric al punctelor corespunzînd componentei *active* a curentului la ieşire; tensiunea U_2 fiind constantă, această dreaptă poate fi gradată în *unităţi de putere activă P_2 la ieşire*, procedîndu-se în felul următor: gradarea fiind liniară şi ţinînd seama că, în O_1, $P_2 = 0$ rezultă că, dîndu-se o valoare particulară pentru I_2, care corespunde la o anumită putere activă $U_2 I_2$, se poate găsi un al doilea punct al scării şi deci scara însăşi.

De asemenea, pentru $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ se obţine dreapta $\overline{O_1O_2}$ care este locul geometric al punctelor corespunzînd componentei *reactive* a curentului la ieşire; ea poate fi gradată deci în unităţi de putere reactivă la ieşire Q_2.

Scara ei este aceeaşi ca şi a dreptei de putere activă.

Pentru a avea diagrama completă, este necesar a se determina locul geometric al punctelor de egală pierdere de putere activă şi reactivă, ţinînd seama că aceste pierderi sînt egale cu diferenţa dintre puterile date cuadripolului la bornele de intrare şi puterile ce se obţin la bornele de ieşire, va trebui să fie determinată, expresia puterilor la intrare. Din ecuaţiile generale ale cuadripolului se deduce

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{D}}{\underline{B}}\underline{U}_1 - \frac{\underline{U}_2}{\underline{B}},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{B}} - \frac{\underline{A}}{\underline{B}}\underline{U}_2.$$

Valorile conjugate ale acestor mărimi fiind

$$\underline{I}_1^* = \frac{\underline{D}^*}{\underline{B}^*}\underline{U}_1^* - \frac{\underline{U}_2}{\underline{B}^*},$$

$$\underline{I}_2^* = \frac{\underline{U}_1^*}{\underline{B}^*} - \frac{\underline{A}^*}{\underline{B}^*}\underline{U}_2,$$

puterile aparente, la intrarea şi la ieşirea din cuadripol, sînt

$$\left.\begin{aligned} \underline{S}_1 &= P_1 + \mathrm{j}\,Q_1 = \underline{U}_1\underline{I}_1^* = \frac{\underline{D}^*}{\underline{B}^*}\underline{U}_1\underline{U}_1^* - \frac{\underline{U}_2}{\underline{B}^*}\underline{U}_1 \\ \underline{S}_2 &= P_2 + \mathrm{j}\,Q_2 = \underline{U}_2\underline{I}_2^* = \frac{\underline{U}_1^*\underline{U}_2}{\underline{B}^*} - \frac{\underline{A}^*}{\underline{B}^*}\underline{U}_2^2. \end{aligned}\right\} \tag{6.146}$$

Punînd

$$\underline{U}_1 = u_1 + \mathrm{j}u_1', \quad \underline{U}_2 = u_2, \quad \underline{A} = a + \mathrm{j}a', \quad \underline{B} = b + \mathrm{j}b', \quad \underline{D} = d + \mathrm{j}d'$$

se obține

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= \frac{(bd + b'd')\,(u_1^2 + u_1'^2) - (bu_1 - b'u_1')\,u_2}{b^2 + b'^2}\,,\\
Q_1 &= \frac{(b'd - bd')\,(u_1^2 + u_1'^2) - (b'u_1 + bu_1')\,u_2}{b^2 + b'^2}\,,\\
P_2 &= \frac{-\,(ab + a'b')\,u_2^2 + (bu_1 + b'u_1')\,u_2}{b^2 + b'^2}\,,\\
Q_2 &= \frac{-\,(ab' - a'b)\,u_2^2 + (b'u_1 - bu_1')\,u_2}{b^2 + b'^2}
\end{aligned}\right\}$$

și pierderile respective sînt

$$P_1 - P_2 = \frac{bd + b'd'}{b^2 + b'^2}\left[u_1'^2 + \left(u_1 - \frac{b'u_2}{bd + b'd'}\right)^2\right] + u_2^2\,\frac{ab' + a'b' - \dfrac{b^2}{bd + b'd'}}{b^2 + b'^2}$$

$$Q_1 - Q_2 = \frac{b'd - bd'}{b^2 + b'^2}\left[u_1'^2 + \left(u_1 - \frac{b'u_2}{bd - bd'}\right)^2\right] + u_2^2\,\frac{ab' - a'b - \dfrac{b'^2}{b'd - bd'}}{b^2 + b'^2}\,.$$

Din expresia acestor pierderi se vede că ele se compun dintr-un termen constant, proporțional cu tensiunea la ieșirea din cuadripol care este constantă, și dintr-un termen variabil, care este funcție de componentele tensiunii la intrarea în cuadripol și deci este funcție de încărcarea cuadripolului. Termenul constant constituie pierderile minime p_m.

Punctului M de funcționare, considerat în figura 6.82 îi corespunde coordonatele u_1 și u_1'. Fie, pe această diagramă, punctul N de coordonate

$$u_1' = 0 \text{ și } u_1 = \frac{b}{bd + b'd'}\,u_2\,.$$

Este ușor de văzut că, pătratul distanței $\overline{MN}$ înmulțită cu mărimea constantă

$$\frac{bd + b'd'}{b^2 + b'^2}$$

reprezintă tocmai partea variabilă a pierderilor.

În consecință, locul geometric al punctelor de egală pierdere de *putere activă* este format dintr-o familie de cercuri concentrice, cu centrul în N. Gradarea locului geometric se face înmulțind pătratul razei cercului respectiv *măsurată în volți* cu *partea reală* a admitanței $\dfrac{D}{B}$ de scurtcircuit și adunînd acestui produs valoarea pierderilor minime de putere activă.

La fel, se arată că şi locul geometric al pierderilor reactive este format dintr-o altă familie de cercuri concentrice, cu centrul în punctul T de coordonate,

$$u_1' = 0 \text{ şi } u_1 = \frac{b'}{b'd - bd'} u_2.$$

Gradarea acestui loc geometric se face înmulţind pătratul razei respective, măsurată în volţi, cu *partea complexă* a admitanţei ($\underline{D}/\underline{B}$) de funcţionare în scurtcircuit şi adunînd la acest produs valoarea pierderilor minime de putere reactivă.

Diagrama se utilizează în modul următor :

— Se defineşte regimul de funcţionare dîndu-se P_2 şi Q_2 (sau P_2 şi φ_2) stabilindu-se pe diagramă poziţia punctului M corespunzătoare funcţionării date.

— Se determină pe cercul respectiv tensiunea la intrare U_1 precum şi defazajul acesteia θ faţă de tensiunea la ieşire U_2.

— Pe cercurile respective, se determină pierderile activă p şi reactivă q deducîndu-se astfel puterile activă şi reactivă la intrare.

— Cunoscînd aceste puteri, se deduce defazajul φ_1 la intrare, precum şi randamentul electric al circuitului.

— Tot pe această diagramă se poate determina direct şi curentul la intrare I_1, precum şi defazajul la intrare φ_1. Pentru aceasta, se uneşte punctul O_2 cu punctul M de funcţionare considerat : segmentul $\overline{O_2M}$, măsurat la scara curentului I_1, dă mărimea acestui curent.

OBSERVAŢIE. Dacă diagrama ar fi fost construită cu o unitate de tensiune $\underline{U}_2'$ diferită de $\underline{U}_2$, s-ar fi obţinut o figură homotetică cu precedenta : toate lungimile $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{OB}$, ar fi fost reduse în raportul U_2'/U_2.

Pentru o aceeaşi putere la ieşire $P_2 = I_2U_2'$, punctul respectiv ar fi avut ordonata redusă în raportul $(U_2'/U_2)^2$. Într-adevăr, curentul la ieşire $\underline{I}_2$ este proporţional cu $\overline{AB}$ şi tensiunea este proporţională cu $\overline{OA}$, fiecare din acestea fiind reduse în raportul U_2'/U_2, rezultă că ordonata punctului P de pe axa OP va fi proporţională cu produsul celor două segmente reduse, deci ordonata punctului $\underline{P}_2$ va fi redusă în raportul $(U_2'/U_2)^2$.

Rezultă dar, că diagrama dată poate fi folosită pentru orice tensiune la ieşire $\underline{U}_2'$, diferită de tensiunea $\underline{U}_2$ care a fost luată ca unitate pentru construirea diagramei, cu condiţia de a reduce scările tensiunilor în raportul U_2'/U_2 şi scările puterilor în raportul $(U_2'/U_2)^2$.

6.4.4.16. **Diagrama puterilor sau diagrama cercului cuadripolului cu doi poli de tensiune.** Se poate construi pentru cuadripol o diagramă la care se fixează axele puterilor activă şi reactivă, deducîndu-se locul punctelor de egală tensiune. Pentru aceasta, se consideră puterea aparentă la intrarea în cuadripol şi la ieşirea din cuadripol, a căror expresii sînt date de relaţiile (6.146).

Luînd ca origine de fază tensiunea de sosire $\underline{U}_2$, rezultă

$$\underline{U}_1 = U_1 \underline{|\theta}, \quad \underline{U}_2 = U_2 \underline{|0}, \quad \underline{B} = B \underline{|\beta}, \quad \underline{D} = D \underline{|\delta}$$

şi deci expresia puterii aparentă la intrarea în cuadripol este

$$\underline{S}_1 = P_1 + jQ_1 = \frac{D}{B} U_1^2 \underline{|\beta - \delta} - \frac{U_1 U_2}{B} \underline{|\theta + \beta}. \qquad (6.147)$$

Expresia explicită a celor două puteri este

$$P_1 = \frac{D}{B} U_1^2 \cos(\beta - \delta) - \frac{U_1 U_2}{B} \cos(\theta + \beta),$$

$$Q_1 = \frac{D}{B} U_1^2 \sin(\beta - \delta) - \frac{U_1 U_2}{B} \sin(\theta + \beta).$$

Pentru calculul puterii aparente la ieşire, se procedează în acelaşi mod şi se găseşte

$$\underline{S}_2 = P_2 + jQ_2 = \frac{U_1 U_2}{B} \underline{|\beta - \theta} - \frac{A}{B} U_2^2 \underline{|\beta - \alpha}, \tag{6.148}$$

de unde

$$P_2 = \frac{U_1 U_2}{B} \cos(\beta - \theta) - \frac{A}{B} U_2^2 \cos(\beta - \alpha),$$

$$Q_2 = \frac{U_1 U_2}{B} \sin(\beta - \theta) - \frac{A}{B} U_2^2 \sin(\beta - \alpha).$$

Se construiesc relaţiile (6.147) şi (6. 148), în sistemul de axe de coordonate OP şi OQ (fig. 6.84). Din relaţia (6.147) rezultă că fazorul $\underline{S}_1$ se compune din fazorul

$$\overline{OO_1} = \frac{D}{B} U_1^2 \underline{|\beta - \delta},$$

la care se adaugă fazorul

$$\overline{O_1N_1} = -\frac{U_1 U_2}{B} \underline{|\beta + \theta}.$$

Puterea aparentă la intrare $\underline{S}_1$ este deci reprezentată de fazorul $\overline{ON_1}$, a cărui componente pe cele două axe sînt puterea activă şi puterea reactivă, furnizate cuadripolului la intrare.

Se poate arăta uşor pe figură că unghiul OO_1N_1 este egal cu $(\delta + \theta)$; pentru anumite valori determinate pentru U_1 şi U_2, dacă unghiul θ variază, punctul N_1 descrie un cerc cu centrul în punctul O_1 şi cu raza

$$\overline{O_1 N_1} = \frac{U_1 U_2}{B}.$$

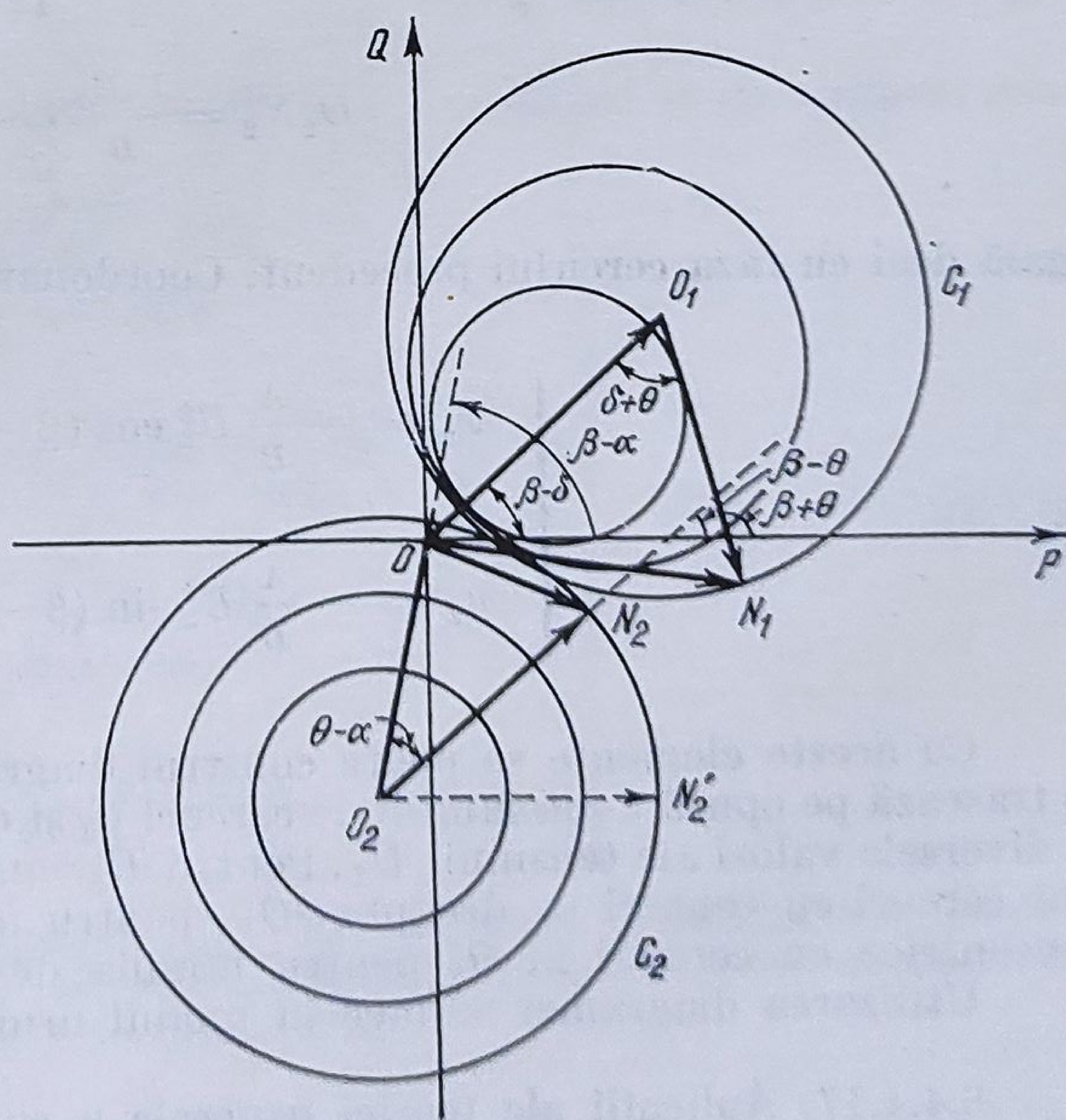


Fig. 6.84. Diagrama puterilor pentru cuadripol.

Coordonatele centrului O_1 sînt

$$x_1 = \frac{D}{B} U_1^2 \cos(\beta - \delta),$$

$$y_1 = \frac{D}{B} U_1^2 \sin(\beta - \delta).$$

În acelaşi mod, se construieşte fazorul $\underline{S}_2$ care este format din fazorul fix

$$\overline{OO_2} = -\frac{A}{B} U_2 \underline{|\beta - \alpha},$$

la care se adaugă fazorul

$$\overline{O_2N_2} = \frac{U_1U_2}{B} \underline{|\beta - \theta}.$$

Puterea aparentă la ieşire $\underline{S}_2$ va fi deci reprezentată de fazorul $\overline{ON_2}$ ale cărui proiecţii pe cele două axe dau puterea activă şi reactivă la ieşirea din cuadripol.

Este uşor de văzut că, fazorul $\overline{O_2N_2}$ este şi el mobil în jurul punctului O_2 şi deci punctul N_2 descrie un cerc cu centrul în O_2 cînd unghiul θ variază şi pentru anumite valori ale lui U_1 şi U_2, unghiul OO_2N_2 fiind egal cu $(\alpha - \theta)$ în acest caz. Raza acestui cerc este

$$\overline{O_2N_2} = \frac{U_1U_2}{B},$$

egală deci cu raza cercului precedent. Coordonatele centrului sînt:

$$\begin{cases} x_2 = -\dfrac{A}{B} U_2^2 \cos(\beta - \alpha) \\ y_2 = -\dfrac{A}{B} U_2^2 \sin(\beta - \alpha) \end{cases}$$

Cu aceste elemente se poate construi diagrama căutată: pentru aceasta, se trasează pe epură două familii de cercuri C_1 şi C_2, de rază egală, corespunzînd la diversele valori ale tensiunii U_1. Pentru U_2 constant, aceste familii de cercuri sînt cercuri cu centrul pe dreapta OO_1, pentru familia de cercuri C_1 şi cercuri concentrice cu centrul în O_2 pentru familia de cercuri C_2.

Utilizarea diagramei se face în modul următor.

6.4.4.17. Aplicaţii ale teoriei generale a cuadripolului. 1. *Studiul punţii* *Wheatstone*. O punte Wheatstone (fig. 6.85) poate fi privită ca un cuadripol la care bornele a_1b_1 (corespunzătoare diagonalei pilă) sînt bornele de intrare ale

cuadripolului şi bornele a_2b_2 (corespunzătoare diagonalei galvanometru) sînt bornele de ieşire ale cuadripolului. Să determinăm cei patru parametri $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ şi $\underline{D}$ ai acestui cuadripol. Pentru aceasta se aplică metoda generală *.

— Se leagă în scurtcircuit bornele de ieşire şi se determină impedanţa circuitului. În cazul de faţă, această determinare se poate face prin calcul. Într-adevăr, bornele a_2 şi b_2 fiind în scurtcircuit, impedanţele $\underline{Z}_1$ şi $\underline{Z}_3$ sînt în paralel; de asemenea şi impedanţele $\underline{Z}_2$ şi $\underline{Z}_4$ sînt în paralel; cele două grupuri de impedanţe sînt apoi legate în serie. Impedanţa echivalentă este deci

$$\underline{Z}_{1sc} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}}.$$

— Se lasă cuadripolul deschis la ieşire (bornele a_2b_2 izolate). Impedanţa corespunzătoare se compune din impedanţele $(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$ şi $(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)$ legate în paralel

$$\underline{Z}_{10} = \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}.$$

Dacă se alimentează cuadripolul prin bornele de ieşire a_2b_2 bornele de intrare fiind izolate, impedanţa echivalentă se compune din impedanţele $(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)$ şi $(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)$ legate în paralel. Se obţine

$$\underline{Z}_{20} = \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}}.$$

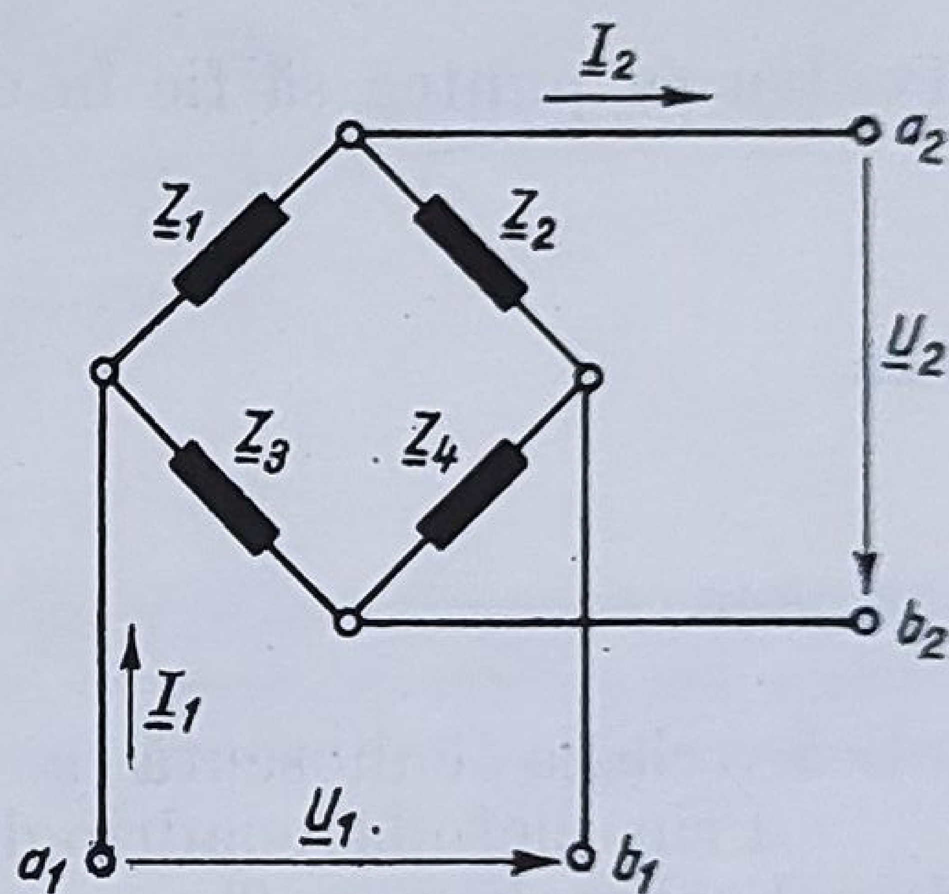


Fig. 6.85. Puntea WHEATSTONE.

Cei patru parametri ai cuadripolului pot fi calculaţi şi cu ajutorul relaţiilor (6. 110) găsindu-se

$$\left.\begin{aligned}
\underline{A} &= \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_2\underline{Z}_3 - \underline{Z}_1\underline{Z}_4}\\
\underline{B} &= \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_2\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_2\underline{Z}_3 - \underline{Z}_1\underline{Z}_4}\\
\underline{C} &= \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2\underline{Z}_3 - \underline{Z}_1\underline{Z}_4}\\
\underline{D} &= \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_2\underline{Z}_3 - \underline{Z}_1\underline{Z}_4}.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.149)$$

Fie de găsit acum condiţia de echilibru a punţii WHEATSTONE. Dacă $\underline{Z}$ este impedanţa galvanometrului sau aparatului de zero folosit şi care se montează la bornele de ieşire *cd* ale cuadripolului, atunci

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}\,\underline{I}_2 \qquad (6.150)$$

* Vezi 6.4.4.3.

Din prima ecuaţie a cuadripolului (6. 142), ţinînd seama de relaţia (6.150), se deduce

$$\underline{U}_1 = (\underline{A}\,\underline{Z} + \underline{B})\,\underline{I}_2,$$

de unde

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{A}\,\underline{Z} + \underline{B}}$$

sau, ţinînd seama de valorile obţinute pentru coeficienţii $\underline{A}$ şi $\underline{B}$ în relaţiile (6.149) se obţine

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1\,(\underline{Z}_2\underline{Z}_3 - \underline{Z}_1\underline{Z}_4)}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\,(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)\,\underline{Z} + \underline{Z}_1\,\underline{Z}_3\,(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_2\,\underline{Z}_4\,(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}.$$

Pentru ca puntea să fie în echilibru trebuie ca $\underline{I}_2 = 0$, ceea ce se obţine cînd

$$\underline{Z}_2\underline{Z}_3 = \underline{Z}_1\underline{Z}_4$$

sau

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4},$$

adică relaţia cunoscută a punţii.

Prin metoda cuadripolului, fie direct, fie prin transformare într-un cuadripol echivalent în T sau π, se poate rezolva orice problemă de punte.

2. *Cablu subteran.* Un cablu subteran, de 3×150 mm² secţiune, avînd caracteristicile pe fază : $R = 0{,}121\ \Omega$/km, $L = 0{,}7$ mH/km şi $C = 0{,}32\ \mu$F/km şi o lungime de 60 km, este închis pe impedanţa sa caracteristică. Dacă acest cablu este alimentat cu o tensiune de 60 kV între faze, 50 Hz, se cere : curentul la plecare, curentul la sosire, defazajele respective şi curentul de încărcare a cablului.

Se neglijează conductanţa, iar L şi C sînt respectiv inductanţa şi capacitatea de serviciu a cablului.

Sistemul, fiind presupus perfect simetric şi echilibrat, poate fi studiat monofazat între o fază şi pămînt. Pe de altă parte, cablul fiind scurt, poate fi asemuit cu un cuadripol în T, în care

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{1}{2}\,(R + \mathrm{j}\,L\,\omega)\,l$$

$$\underline{Y} = \mathrm{j}\,C\,\omega\,l,$$

l fiind lungimea cablului.

Constantele cuadripolului se deduc din relaţiile

$$\underline{A} = \underline{D} = 1 + \underline{Z}\,\underline{Y},\ \underline{B} = 2\underline{Z} + \underline{Z}^2\underline{Y},\ \underline{C} = \underline{Y}.$$

Ţinînd seama că

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}\,\underline{I}_2$$

în care, cuadripolul fiind simetric

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}},$$

ecuațiile cuadripolului devin

$$\underline{U}_1 = (\underline{A}\,\underline{Z}_c + \underline{B})\,\underline{I}_2$$

și

$$\underline{I}_1 = (\underline{C}\,\underline{Z}_c + \underline{A})\,\underline{I}_2,$$

din care se găsește

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{C}\,\underline{Z}_c + \underline{A}}{\underline{A}\,\underline{Z}_c + \underline{B}}\,\underline{U}_1, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{A}\,\underline{Z}_c + \underline{B}}, \quad \underline{I}_i = \underline{I}_1 - \underline{I}_2.$$

Numeric se găsește

$$\underline{I}_1 = 450 + \mathrm{j}\,1\,050 = 1\,145\ \underline{|66°46'}\ \mathrm{A},$$

$$\underline{I}_2 = 419 + \mathrm{j}\ \ 820 = \ \ 920\ \underline{|62°58'}\ \mathrm{A},$$

$$\underline{I}_i = \ \ 31 + \mathrm{j}\ \ 236 = \ \ 238\ \underline{|81°56'}\ \mathrm{A}.$$

6.4.5. STUDIUL DIPOLULUI

6.4.5.1. **Ecuația dipolului.** Fie o rețea formată dintr-o grupare oarecare de impedanțe cuprinse între două borne a_1 și a_2 în interiorul căreia nu există nici o forță electromotoare și care, în afară de bornele a_1 și a_2, nu mai are nici un fel de legătură electrică sau magnetică cu alte circuite exterioare (fig. 6.86).

Acest sistem poartă numele de *dipol*.

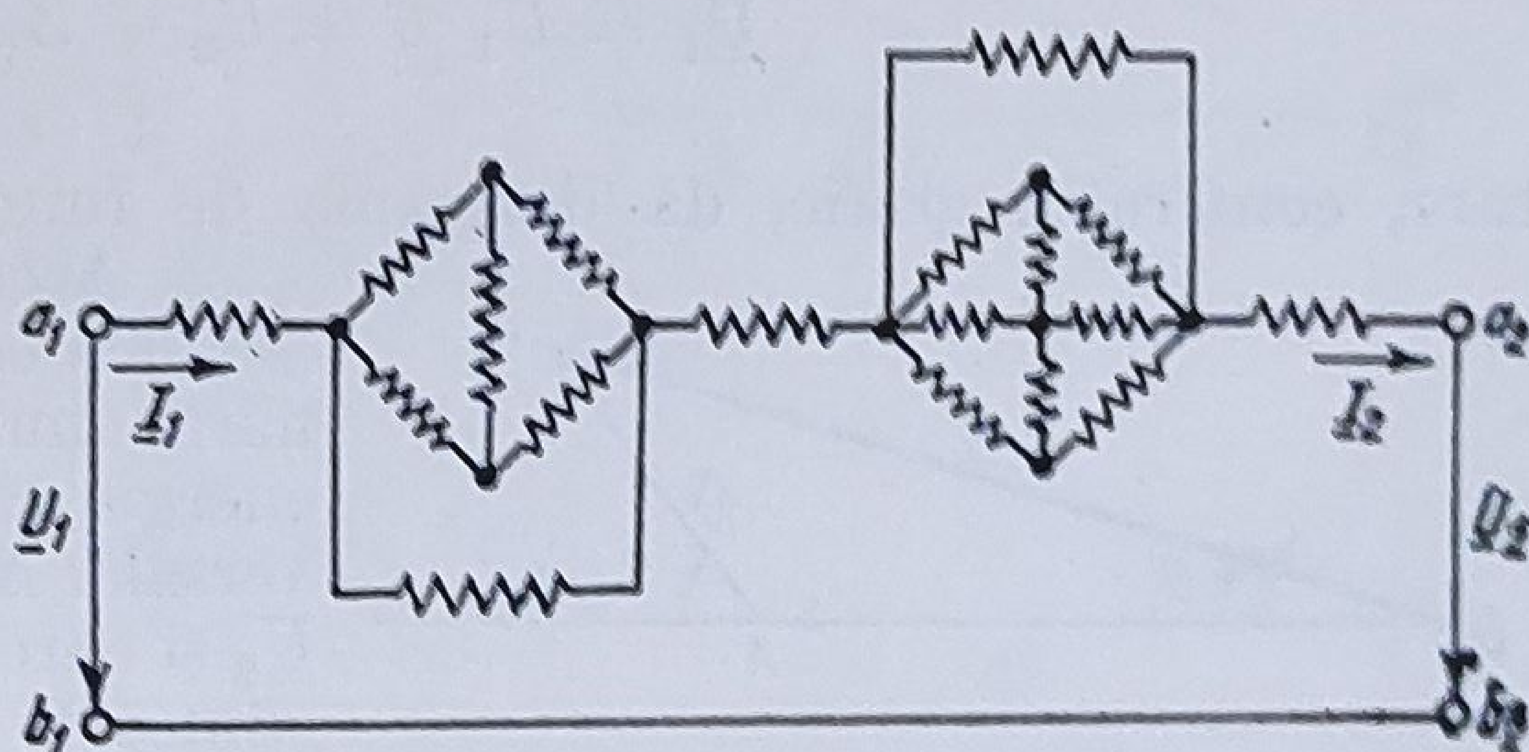


Fig. 6.86. Dipol în general.

La bornele de intrare a_1b_1 se aplică o tensiune periodică sinusoidală, iar la bornele de ieșire a_2b_2 o impedanță $\underline{Z}_s$, care constituie sarcina dipolului. În aceste condiții, în circuitele dipolului vor apărea diverși curenți, care se presupun a fi de asemenea periodici sinusoidali. Întrucît în dipol nu există legături transversale, curentul care intră prin borna de intrare a_1 este identic cu cel care iese prin borna de ieșire a_2. Pe de altă parte, sarcina dipolului poate fi înlocuită cu o tensiune periodică sinusoidală *preluată* la bornele de ieșire a_2b_2 ale dipolului și care este egală cu căderea de tensiune în impedanța de sarcină a acestuia.

Stabilirea ecuației dipolului se poate face în același mod ca și pentru stabilirea ecuațiilor cuadripolului *. Se observă însă că un dipol nu este altceva decît un cuadripol simplu serie **, astfel că ecuația sa este

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z}\,\underline{I}, \tag{6.151}$$

---

* Vezi 6.4.4.2.

** Vezi 6.4.4.11. *a*.

în care am notat cu $\underline{I}$ valoarea comună a celor doi curenţi şi cu $\underline{Z}$ impedanţa reţelei cuprinsă între bornele a_1 şi a_2.

Ecuaţia (6.151) se numeşte ecuaţia de funcţionare a dipolului. Ea se întîlneşte în studiul circuitelor electrice în care nu există legături transversale, ca de exemplu reţelele de transmitere de energie electrică, formate din linii şi transformatoare la care se neglijează pierderile prin curenţi derivaţi, curenţii capacitivi şi pierderile prin conductanţă, precum şi curenţii de magnetizare ai transformatoarelor. Tot cu ajutorul teoriei dipolului se poate studia funcţionarea maşinilor electrice la care se neglijează pierderile de mers în gol şi curentul de magnetizare.

Legîndu-se la bornele de ieşire o impedanţă variabilă $\underline{Z}_s$, se poate studia funcţionarea dipolului, adică variaţia curentului absorbit de dipol în funcţie de această impedanţă pentru o tensiune de alimentare constantă, aplicîndu-se o metodă de inversiune sau construind direct diagrama.

Rezolvarea ecuaţiei (6.151) poate fi făcută analitic sau grafic. În primul caz, se înlocuiesc fazorii daţi cu expresiile lor analitice, rezultînd, în mărime şi fază, fazorii necunoscuţi.

Metoda grafică constă în a construi ecuaţia (6.151). Pentru aceasta, se ia ca origine de fază una din mărimile date, de exemplu tensiunea $\underline{U}_2$. În acest caz rezultă

$$\underline{U}_1 = U_1 \underline{|\theta}, \quad \underline{U}_2 = U_2 \underline{|0}, \quad \underline{I} = I \underline{|-\varphi}, \quad \underline{Z} = Z \underline{|\psi}$$

şi ecuaţia (6.151) se poate scrie

$$\underline{U}_1 = U_1 \underline{|\theta} = U_2 + Z I \underline{|\psi - \varphi}, \tag{6.152}$$

care, construită grafic, dă diagrama de funcţionare a dipolului (fig. 6.87).

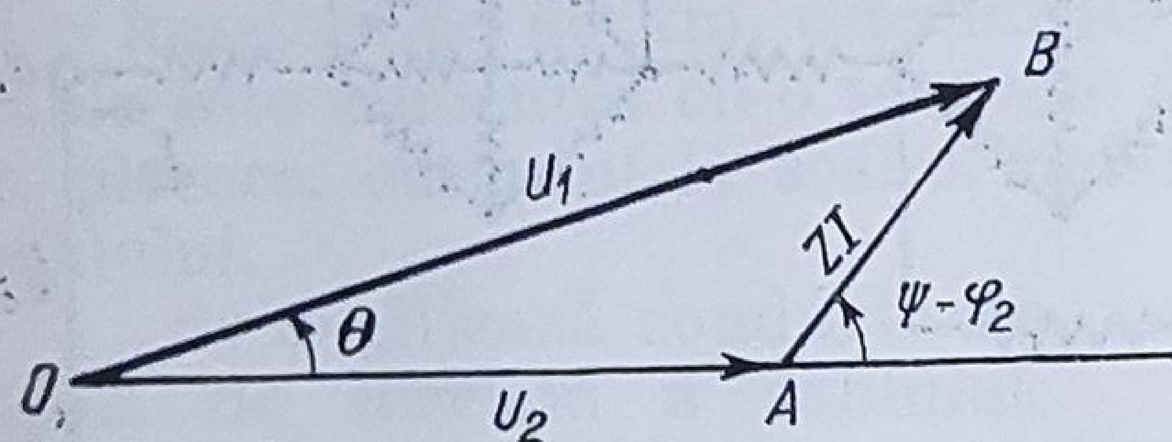


Fig. 6.87. Diagrama generală a dipolului.

Această diagramă rezolvă toate problemele ce se pot pune în cazul funcţionării unui sistem electric (transmitere de energie sau maşină) fără pierderi transversale. Astfel, dîndu-se tensiunea la ieşire $\underline{U}_2$ şi curentul $\underline{I}$, se poate determina tensiunea la intrare în dipol $\underline{U}_1$, cu defazajul său θ, precum şi defazajul curentului la intrare în dipol.

Cu ajutorul ecuaţiei (6.151) se poate trasa şi o diagramă sau topogramă generală de funcţionare a sistemului, ca şi în cazul cuadripolului.

Topogramele de funcţionare ale unui dipol pot fi construite şi ele după două principii diferite :

— topograme sau diagrame cu un singur pol de tensiune;
— topograme sau diagrame cu poli multipli de tensiune (în particular cu doi poli de tensiune).

6.4.5.2. **Diagrama cercului cu un singur pol de tensiune pentru dipol.** Construcţia acestei diagrame se face pornind de la ecuaţia (6.151) şi de la diagrama de funcţionare a dipolului (fig. 6.87). Din această diagramă rezultă că, locul geometric al vîrfului fazorului tensiunii $\underline{U}_1$, aplicată dipolului, cînd curentul în dipol variază, atît în mărime cît şi în fază, este o familie de cercuri concentrice cu centrul în O

(fig. 6.88); tensiunea la ieșire $\underline{U}_2$ fiind presupusă constantă și luată ca unitate de măsură, cercurile-loc geometric ale lui $\underline{U}_1$ pot fi gradate fie în valoare absolută, fie în procente din $\underline{U}_2$. De asemenea, locul geometric al punctelor care au un același defazaj φ_2 la ieșire este o familie de drepte trecînd prin vîrful A al fazorului $\underline{U}_2$ și făcînd unghiul $\psi - \varphi_2$ cu axa OA luată ca origine de fază. În particular, locul geometric al punctelor de defazaj nul la ieșire ($\varphi_2 = 0$), pentru care factorul de putere este egal cu unitatea, este dreapta AP care face cu axa OA unghiul ψ; de asemenea, locul geometric al punctelor de defazaj $\pi/2$, pentru care factorul de putere este nul, este dreapta AQ, perpendiculară pe precedenta. Axele ortogonale AP și AQ sînt în același timp și axele de putere activă și reactivă și, în consecință, pot fi gradate ca atare. Pentru aceasta, tensiunea la ieșire U_2 fiind luată ca unitate de măsură se dă o putere la ieșire; P_2 corespunde unui curent la ieșire $I_2 = \frac{P_2}{U_2}$. Pe axa AP, în diagrama tensiuni-

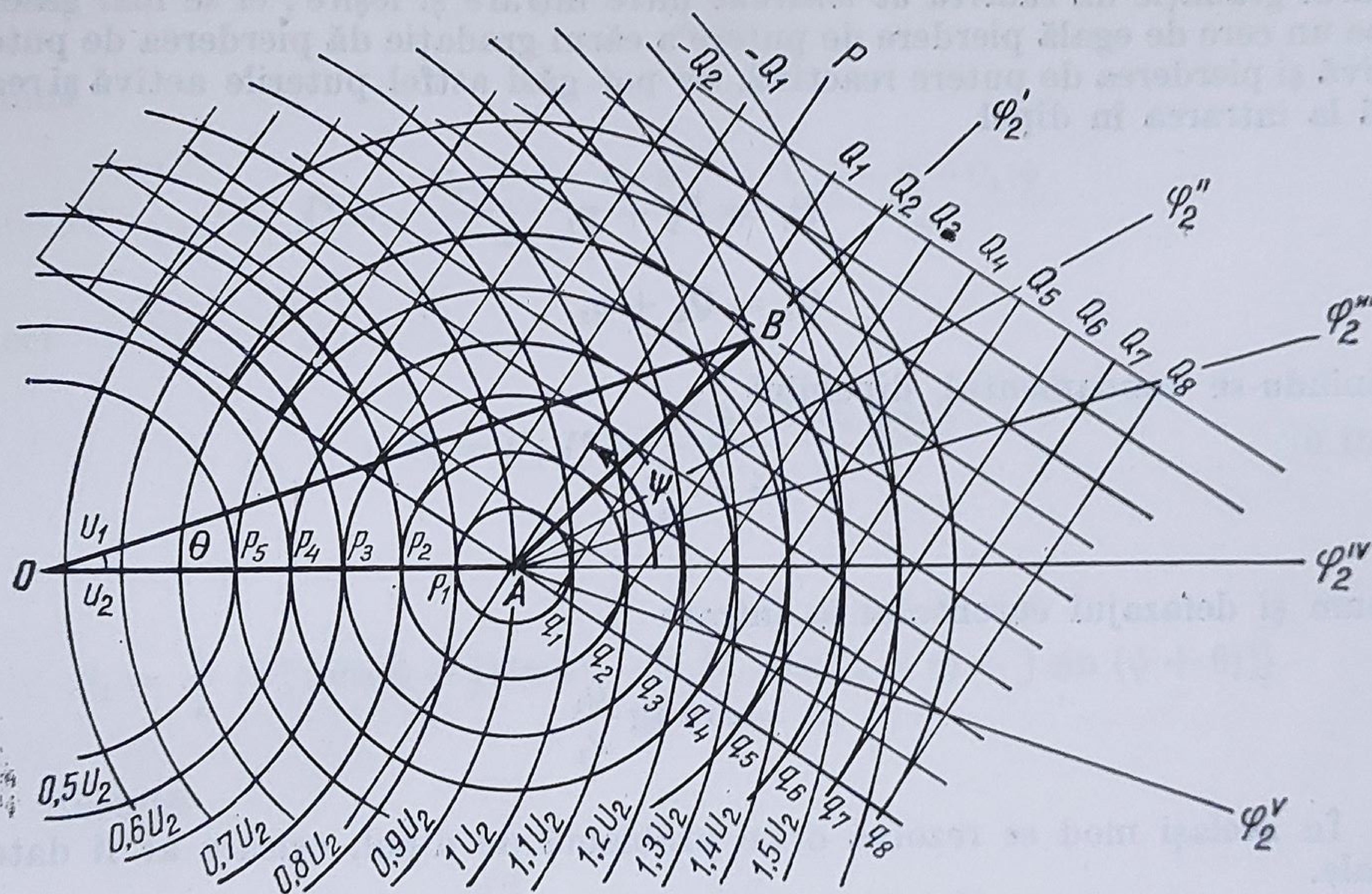


Fig. 6.88. Diagrama cercului cu un singur pol de tensiune pentru dipol.

lor, acestui curent îi corespunde un punct P_2 astfel determinat, încît lungimea AP_2 este egală cu ZP_2/U_2. Odată cu punctul P_2 este determinată și scara puterilor active. În același mod se determină și scara puterilor reactive.

Pentru determinarea pierderilor în dipol se procedează astfel: unui punct B al diagramei îi corespunde un curent a cărui valoare efectivă este dată de relația

$$I = \frac{\overline{AB}}{Z},$$

astfel că pierderile prin efect JOULE sînt

$$RI^2 = \frac{R}{Z^2}(\overline{AB})^2,$$

iar pierderile reactive

$$XI^2 = \frac{X}{Z^2} (\overline{AB})^2 .$$

Cum aceste pierderi sînt independente de defazaj, locul geometric al punctelor de egală pierdere de putere activă sau reactivă în dipol va fi o familie de cercuri concentrice cu centrul în punctul A, aceste pierderi fiind proporţionale cu vectorul AB. Această familie de cercuri va fi gradată în pierderi de putere activă şi reactivă (în valori absolute sau relative).

Utilizarea diagramei se face în felul următor : se dă de exemplu puterea activă P_2 şi puterea reactivă Q_2 la ieşire, coordonatele punctului de funcţionare B în sistemul de axe AP şi AQ. Acest punct se găseşte pe un cerc de egală tensiune a cărui gradaţie dă *căderea de tensiune* între intrare şi ieşire ; el se mai găseşte şi pe un cerc de egală pierdere de putere a cărui gradaţie dă pierderea de putere activă şi pierderea de putere reactivă. Se pot găsi astfel puterile activă şi reactivă la intrarea în dipol

$$P_1 = P_2 + p,$$

$$Q_1 = Q_2 + q,$$

obţinîndu-se randamentul dipolului

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}$$

precum şi defazajul curentului la intrare

$$\varphi_1 = \text{arc tg} \frac{Q_1}{P_1}$$

În acelaşi mod se rezolvă orice problemă de dipol, oricare ar fi datele iniţiale.

OBSERVAŢIE. Diagrama precedentă poate fi folosită şi pentru o altă tensiune U_2' diferită de tensiunea U_2 pentru care a fost întocmită *.

Pentru aceasta, se înmulţesc toate valorile tensiunilor cu raportul (U_2'/U_2) şi valorile puterilor cu raportul $(U_2'/U_2)^2$.

6.4.5.3. **Diagrama puterilor sau diagrama cercului dipolului cu doi poli de tensiune.** Diagrama precedentă a fost stabilită pornindu-se de la diagrama tensiunilor, deducîndu-se apoi axele puterilor şi gradarea lor respectivă. Se poate proceda şi invers, dîndu-se axele de putere şi deducîndu-se locul punctelor de egală tensiune.

Pentru aceasta, se porneşte de la ecuaţia fundamentală a dipolului (6.151).

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z}\, \underline{I},$$

* Vezi 6.4.4.15, observaţia.

din care se deduce

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{\underline{Z}}.$$

Puterea aparentă la intrarea în dipol $\underline{S}_1$ se obţine înmulţind tensiunea $\underline{U}_1$ cu conjugata curentului $\underline{I}$. Dacă se ia ca origine de fază tensiunea $\underline{U}_2$ şi dacă θ este unghiul de defazaj între $\underline{U}_1$ şi $\underline{U}_2$ iar ψ argumentul lui $\underline{Z}$, atunci

$$\underline{U}_1 = U_1 \underline{|\theta}, \quad \underline{Z} = Z \underline{|\psi}, \quad \underline{U}_2 = U_2 \underline{|0},$$

$$\underline{I} = \frac{U_1 \underline{|\theta} - U_2 \underline{|0}}{Z \underline{|\psi}}$$

de unde

$$\underline{I}^* = \frac{U_1 \underline{|-\theta} - U_2 \underline{|0}}{Z \underline{|-\psi}} = \frac{U_1 \underline{|\psi - \theta} - U_2 \underline{|\psi}}{Z}$$

şi deci

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}^* = \frac{U_1^2 \underline{|\psi} - U_1 U_2 \underline{|\psi + \theta}}{Z} \qquad (6.153)$$

sau

$$\underline{S}_1 = \frac{1}{Z}\{U_1^2(\cos\psi + \mathrm{j}\sin\psi) - U_1 U_2[\cos(\psi + \theta) + \mathrm{j}\sin(\psi + \theta)]\}$$

Rezultă

$$P_1 = \frac{U_1^2}{Z}\cos\psi - \frac{U_1 U_2}{Z}\cos(\psi + \theta),$$

$$Q_1 = \frac{U_1^2}{Z}\sin\psi - \frac{U_1 U_2}{Z}\sin(\psi + \theta).$$

În mod analog, se obţin puterile activă şi reactivă la ieşire, găsindu-se

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}^* = \frac{U_1 U_2 \underline{|-\theta} - U_2^2 \underline{|0}}{Z \underline{|-\psi}} = \frac{U_1 U_2 \underline{|\psi - \theta} - U_2^2 \underline{|\psi}}{Z} \qquad (6.154)$$

sau

$$\underline{S}_2 = \frac{1}{Z}\{U_1 U_2[\cos(\psi - \theta) + \mathrm{j}\sin(\psi - \theta)] - U_2^2(\cos\psi + \mathrm{j}\sin\psi)\},$$

de unde rezultă

$$P_2 = \frac{U_1 U_2}{Z} \cos(\psi - \theta) - \frac{U_2^2}{Z} \cos\psi,$$

$$Q_2 = \frac{U_1 U_2}{Z} \sin(\psi - \theta) - \frac{U_2^2}{Z} \sin\psi.$$

Fie sistemul de axe de coordonate ortogonale OP și OQ gradate respectiv în puteri active și reactive, în care se trasează sistemul de fazori al puterilor aparente $\underline{S}_1$ și $\underline{S}_2$.

Din relația (6.153) se vede că S_1 este un fazor format (fig. 6.89) din fazorul

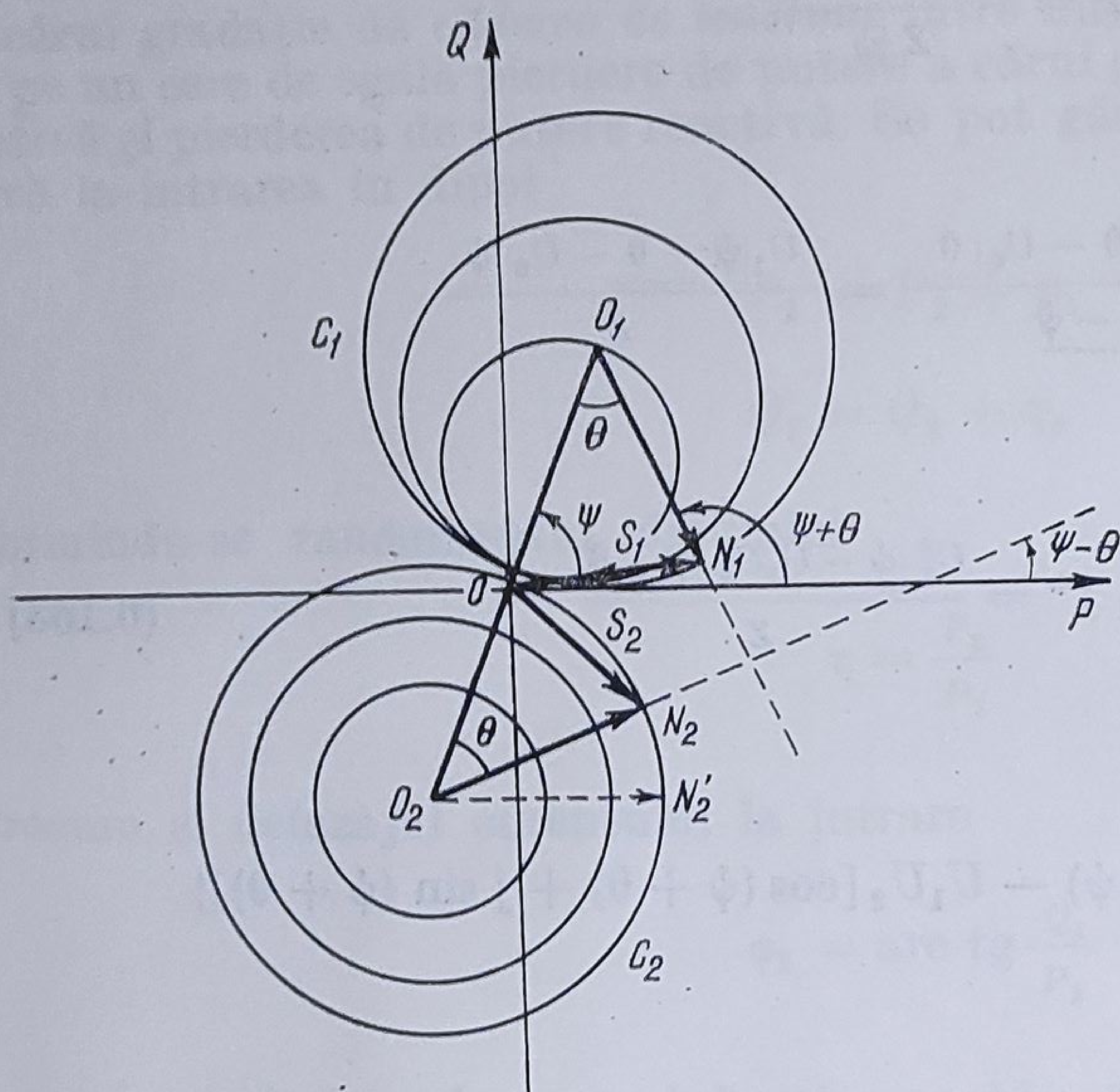


Fig. 6.89. Diagrama puterilor pentru dipol.

$$\overline{OO_1} = \frac{U_1^2}{Z} \underline{|\psi}$$

la care se adaugă fazorul

$$\overline{O_1N_1} = -\frac{U_1 U_2}{Z} \underline{|\psi + \theta}.$$

Puterea aparentă la intrare $\underline{S}_1$ va fi deci reprezentată de fazorul ON a cărui componente pe cele două axe reprezintă puterile activă și reactivă furnizate dipolului la intrare.

Este ușor de văzut că unghiul OO_1N_1 este egal cu θ. Rezultă dar, că dacă $\underline{U}_1$ și $\underline{U}_2$ sînt constante iar unghiul θ variază, punctul N_1 va descrie un cerc C_1 cu centrul în O_1 și de rază

$$\overline{O_1N_1} = \frac{U_1 U_2}{Z}.$$

În mod analog, din relația (6.154) se vede că $\underline{S}_2$ este un fazor egal cu suma fazorilor

$$\overline{OO_2} = -\frac{U_2^2}{Z} \underline{|\psi}$$

și

$$\overline{O_2N_2} = \frac{U_1 U_2}{Z} \underline{|\psi - \theta}.$$

Puterea aparentă la ieșire $\underline{S}_2$ va fi deci reprezentată de fazorul $\overline{ON_2}$ a cărui componente după cele două axe reprezintă puterile activă și reactivă ieșite din dipol. Aceasta poate fi dirijată dinspre dipol către exterior dacă coordonatele sînt pozitive și invers dacă ele sînt negative.

Și în acest caz, se vede ușor că unghiul OO_2N_2 este egal cu θ; în consecință, dacă U_1 și U_2 sînt constante, iar unghiul θ variază, punctul N_2 descrie cercul C_2 de centrul O_2 și avînd raza

$$\overline{O_2N_2} = \frac{U_1U_2}{Z},$$

egală cu a cercului precedent. Se vede de asemenea, că punctele O_1 O și O_2 sînt coliniare, ceea ce rezultă din însăși construcția fazorilor $\overline{OO_1}$ și $\overline{OO_2}$.

Coordonatele centrelor O_1 și O_2 ale cercurilor C_1 și C_2 sînt

pentru O_1 $\qquad x_1 = \frac{U_1^2}{Z}\cos\psi$;* și $\quad y_1 = \frac{U_1^2}{Z}\sin\varphi,$

pentru O_2 $\qquad x_2 = -\frac{U_2^2}{Z}\cos\psi$ și $\quad y_2 = -\frac{U_2^2}{Z}\sin\varphi.$

Topograma se construiește trasînd pe epură două familii de cercuri C_1 și C_2, de rază egală, corespunzînd diverselor valori ale tensiunilor U_1 și U_2.

Considerînd, ca și în cazul precedent, că U_2 este constant, rezultă că centrul cercului C_2 este fix și deci familia acestui cerc este formată din cercuri concentrice, raza lor variind cu U_1. Coordonatele centrului O_1 fiind funcție de U_1, centrele cercurilor C_1 se vor deplasa pe dreapta OO_1.

Utilizarea diagramei se face în felul următor: se dau puterile activă și reactivă la ieșire P_2 și Q_2, cu ajutorul cărora se fixează coordonatele punctului N_2, care se găsește pe un cerc C_2 de rază (U_1U_2/Z). Dacă mărimea tensiunii la ieșire este dată, se deduce mărimea tensiunii la intrare U_1.

Se deduce, de asemenea, unghiul $\theta = \sphericalangle N_2O_2O$ pe care îl fac cele două tensiuni. Cunoscînd tensiunea la intrare U_1 se determină punctul O_1, centrul cercului C_1 și se trasează apoi dreapta O_1N_1 care face unghiul θ cu dreapta $\overline{OO_1}$, determinîndu-se punctul de funcționare la intrare N_1 pe cercul de rază U_1U_2/Z.

Coordonatele acestui punct dau puterea activă P_1 și puterea reactivă Q_1 la plecare. Cu aceste date se poate calcula randamentul dipolului și defazajul între tensiune și curent la intrare.

OBSERVAȚIE. Aplicînd această diagramă sistemelor de transmitere de energie electrică se poate deduce o proprietate importantă a acestora și anume că, pentru U_1 și U_2 constante, nu se poate depăși puterea activă de transmis peste o anumită limită. Această putere corespunde punctului de pe cercul C_2, care are abscisa maximă și care corespunde unghiului $\theta = \psi$* .

Valoarea acestei puteri este

$$P_{2m} = \frac{U_1U_2}{Z} - \frac{U_2^2}{Z}\cos\psi.$$

---

* Raza ON_2' este paralelă cu axa OP.

6.4.5.4. Puterea maximă transferată printr-un dipol. Fie un dipol a cărui ecuaţie de funcţionare este (6.151)

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z}\, \underline{I}_2$$

şi căruia i se aplică la ieşire o sarcină $\underline{Z}_2$. Conform teoremei lui THÉVENIN, curentul ce străbate această impedanţă este

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z} + \underline{Z}_2},$$

căderea de tensiune la bornele sale fiind

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2\, \underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z} + \underline{Z}_2}\, \underline{U}_1.$$

Ne propunem să determinăm puterea maximă absorbită de impedanţa $\underline{Z}_2$ şi deci transferată de dipol.

Puterea aparentă absorbită de sarcină este dată de relaţia

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z} + \underline{Z}_2}\, \underline{U}_1 \cdot \frac{\underline{U}_1^*}{\underline{Z}^* + \underline{Z}_2^*} = \frac{\underline{Z}_2}{(\underline{Z} + \underline{Z}_2)(\underline{Z}^* + \underline{Z}_2^*)}\, U_1^2. \qquad (6.155)$$

Să punem

$$\underline{Z}_2 = \varepsilon^{2\underline{a}}\, \underline{Z}, \qquad (6.156)$$

în care

$$\underline{a} = a_1 + \mathrm{j} a_2;$$

cu această notaţie relaţia (6.155) devine

$$\underline{S}_2 = \frac{U_1^2}{\underline{Z}^*}\, \frac{\varepsilon^{2\underline{a}}}{(1+\varepsilon^{2\underline{a}})(1+\varepsilon^{2\underline{a}^*})},$$

sau, împărţind numărătorul şi numitorul cu $4\varepsilon^{\underline{a}}\, \varepsilon^{\underline{a}^*}$,

$$\underline{S}_2 = \frac{U_1^2}{4\underline{Z}^*} \cdot \frac{\varepsilon^{\mathrm{j}2a_2}}{\mathrm{ch}\, \underline{a} \cdot \mathrm{ch}\, \underline{a}^*} = \frac{U_1^2}{2\underline{Z}^*}\, \frac{\varepsilon^{\mathrm{j}2a_2}}{\mathrm{ch}\, 2a_1 + \cos 2a_2}, \qquad (6.157)$$

întrucît

$$\frac{\varepsilon^{\underline{a}}}{\varepsilon^{\underline{a}^*}} = \varepsilon^{\mathrm{j}2a_2}.$$

Notînd

$$\underline{Z} = Z\,|\underline{\psi} \qquad \text{şi} \qquad \underline{Z}_2 = Z_2\,|\underline{\psi_2}$$

relaţia (6.156) poate fi scrisă

$$Z_2\,|\underline{\psi_2} = \varepsilon^{2a_1}\, Z\,|\underline{\psi + 2a_2}, \qquad (6.158)$$

de unde rezultă

$$\psi_2 = \psi + 2a_2$$

şi deci

$$2a_2 = \psi_2 - \psi.$$

Cu această notaţie şi ţinînd seama că

$$\varepsilon^{j2a_2} = \cos\, 2a_2 + j\, \sin\, 2a_2 = \cos\, (\psi_2 - \psi) + j\, \sin\, (\psi_2 - \psi),$$

expresia (6.157) a puterii aparente absorbită de sarcină poate fi pusă sub forma

$$\underline{S}_2 = \frac{U_1^2}{2Z} \cdot \frac{\cos\, \psi_2}{\mathrm{ch}\, 2a_1 + \cos\, (\psi_2 - \psi)} + j\, \frac{U_1^2}{2Z} \cdot \frac{\sin\, \psi_2}{\mathrm{ch}\, 2a_1 + \cos\, (\psi_2 - \psi)} = P_2 + jQ_2, \qquad (6.159)$$

scoţîndu-se astfel în evidenţă expresia puterii active şi a puterii reactive absorbite de sarcină şi deci transferate de dipol.

a) Să examinăm mai întîi condiţiile în care se transferă prin dipol puterea aparentă maximă.

Modulul puterii aparente este

$$S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = \frac{U_1^2}{2Z} \cdot \frac{1}{\mathrm{ch}\, 2a_1 + \cos\, (\psi_2 - \psi)}.$$

Pentru ca această expresie să fie maximă este necesar ca numitorul ei să fie minim, condiţie ce este realizată dacă cele două funcţii de la numitor au valorile minime.

Pentru funcţia hiperbolică, valoarea minimă este egală cu 1 şi se obţine atunci cînd argumentul său este nul; rezultă deci

$$a_1 = 0.$$

Pentru a determina minimul funcţiei sinusoidale, trebuie să observăm că argumentul ψ_2 al impedanţei de sarcină trebuie să fie cuprins în intervalul $\left(+\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ adică, trebuie să avem

$$-\frac{\pi}{2} < \psi_2 = \psi + 2a_2 < \frac{\pi}{2}.$$

Luînd valoarea acestui argument egală cu valoarea limitei inferioare, rezultă

$$\psi_2 = \psi + 2a_2 = -\frac{\pi}{2},$$

de unde

$$\psi_2 - \psi = -\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)$$

şi deci

$$\cos\ (\psi_2 - \psi) = \cos\ \left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = -\ \sin\psi.$$

Expresia puterii aparente maxime transferate prin dipol este deci

$$S_{2\,max} = \frac{U_1^2}{2Z} \cdot \frac{1}{1 - \sin\psi}.$$

Ţinînd seama de rezultatele obţinute mai sus şi de relaţia (6.158) expresia impedanţei de sarcină devine

$$Z_2 = Z \,\Big|\!-\frac{\pi}{2}$$

unde $Z = |Z|$, ceea ce arată că sarcina este pur capacitivă.

b) Să examinăm acum condiţiile necesare pentru ca prin dipol să fie transferată puterea activă maximă.

Expresia puterii active este (6.159)

$$P = \frac{U_1^2}{2Z} \cdot \frac{\cos\psi_2}{\operatorname{ch} 2a_1 + \cos\ (\psi_2 - \psi)}. \tag{6.160}$$

Minimul acestei expresii se obţine pentru valorile lui a_1 şi ψ_2 pentru care

$$\frac{\partial P}{\partial a_1} = 0 \qquad \text{şi} \qquad \frac{\partial P}{\partial \psi_2} = 0.$$

Derivînd expresia (6.160) în raport cu a_1 şi anulînd această derivată se obţine

$$\operatorname{sh} 2\,a_1 = 0,$$

de unde rezultă $a_1 = 0$.

Introducem această valoare în expresia (6.160) şi apoi o derivăm; anulînd derivata respectivă, se obţine

$$-\sin\psi_2\,[1 + \cos\ (\psi_2 - \psi)] + \cos\psi_2\,\sin\ (\psi_2 - \psi) = 0,$$

de unde rezultă

$$\sin\psi_2 + \sin\psi = 0$$

sau

$$\psi_2 = -\psi.$$

Din relaţia (6.158) rezultă

$$\underline{Z}_2 = Z_2 \underline{|\psi_2} = Z \underline{|\psi_2} = Z \underline{|-\psi} = \underline{Z}^*,$$

care exprimă condiţia ca prin dipol să fie transferată puterea activă maximă.

Expresia acestei puteri este

$$P_{2max} = \frac{U_1^2}{2Z} \cdot \frac{\cos\psi}{1 + \cos 2\psi} = \frac{U_1^2}{4Z} \cdot \frac{1}{\cos\psi} .$$

Randamentul transmisiei în aceste condiţii nu depăşeşte 50%. Într-adevăr, puterea activă la intrarea în dipol este

$$P_1 = \mathcal{R}\mathrm{e}\,[\underline{U}_1 \underline{I}_2^*] = U_1^2\, \mathcal{R}\mathrm{e}\left[\frac{1}{\underline{Z}^* + \underline{Z}_2^*}\right] = \frac{U_1^2}{Z}\, \mathcal{R}\mathrm{e}\left[\frac{1}{\underline{|-\psi} + \underline{|+\psi}}\right] = \frac{U_1^2}{2\,Z}\, \frac{1}{\cos\psi}$$

şi deci

$$\eta = \frac{P_{2max}}{P_1} = \frac{\dfrac{U_1^2}{4Z} \cdot \dfrac{1}{\cos\psi}}{\dfrac{U_1^2}{2Z} \cdot \dfrac{1}{\cos\psi}} = \frac{1}{2} .$$

c) În sfîrşit, să examinăm condiţiile necesare pentru ca prin dipol să se transfere puterea reactivă maximă.

Din relaţia (6.159) rezultă expresia puterii reactive absorbită de sarcină, sub forma

$$Q = \frac{U_1^2}{2Z} \cdot \frac{\sin\psi_2}{\mathrm{ch} 2a_1 + \cos(\psi_2 - \psi)} .$$

Aplicînd aceeaşi metodă ca şi în cazul puterii active, se găseşte că maximul puterii reactive se obţine, dacă

$$\mathrm{sh}\, 2a_1 = 0$$

şi

$$\cos\psi_2 + \cos\psi = 0.$$

Din prima dintre aceste relaţii rezultă

$$a_1 = 0,$$

iar din a doua

$$\psi_2 - \psi = \pm\pi$$

În aceste condiţii, din relaţia (6.158) rezultă

$$\underline{Z}_2 = Z_2 \underline{|\psi_2} = Z \underline{|\psi_2} = Z \underline{|\pi + \psi} = -Z \underline{|\psi} = -\underline{Z}, \tag{6.161}$$

ceea ce nu este posibil decît dacă, dipolul avînd impedanţa formată dintr-o reactanţă inductivă pură, sarcina este o reactanţă capacitivă pură şi reciproc.

În general, cum $R \neq 0$, condiția (6.161) nu poate fi îndeplinită și deci, în cazul general nu poate exista transfer maxim de putere reactivă.

6.4.5.5. **Dipoli fără pierderi de putere activă.** Un asemenea dipol este format dintr-o combinație de inductanțe și capacități perfecte — fără pierderi ohmice. Ecuația acestui dipol este

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + jX\underline{I}$$

și se caracterizează prin aceea că reactanța sa, care depinde de frecvență, se bucură de următoarele proprietăți :

a) Derivata sa în raport cu frecvența este întotdeauna pozitivă.

b) În origine, valoarea ei este nulă sau $-\infty$.

c) Pentru frecvențe infinite, valoarea ei este nulă sau $+\infty$.

d) Prin fixarea punctelor de zero și infinit, precum și a unei valori particulare, reactanța este perfect determinată.

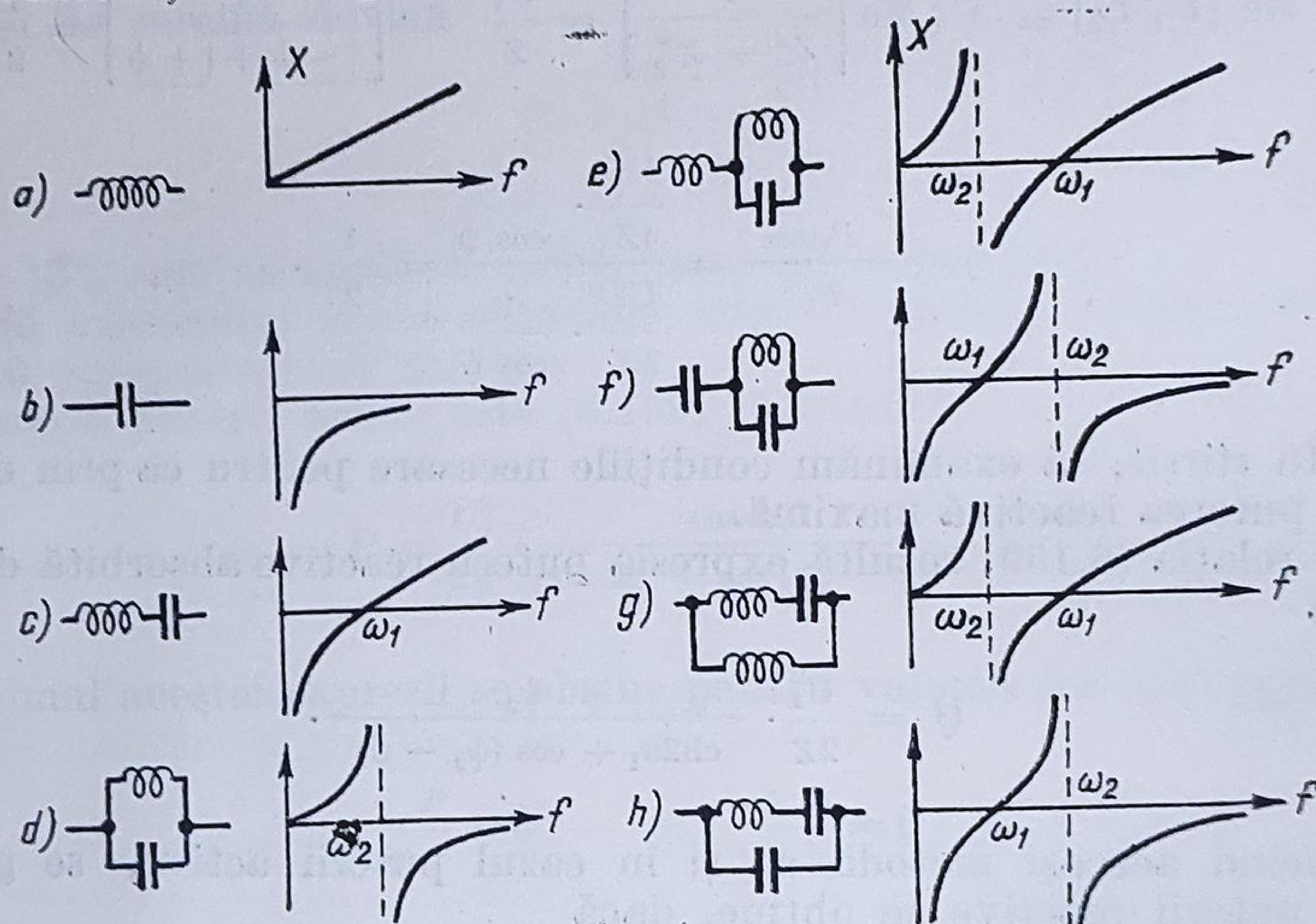


Fig. 6.90. Reactanța unor dipoli reactivi.

În figura 6.90 sînt dați cei mai simpli dipoli cu reactanță pură, precum și variația valorii acesteia în funcție de frecvență.

Demonstrarea proprietăților indicate se face prin verificare directă. Într-adevăr, fie dipolul de tipul *g* (fig. 6.90). Avem

$$X = \frac{j\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right) \cdot jL_2\omega}{j(L_1 + L_2)\omega - j\frac{1}{C_1\omega}} = j\frac{L_1L_2C_1\omega^3 - L_2\omega}{(L_1 + L_2)C_1\omega^2 - 1}.$$

Se vede imediat că

$$\text{pentru} \begin{cases} \omega = 0, & X = 0 \\ \omega = +\infty, & X = +\infty. \end{cases}$$

Reactanța se mai anulează pentru valoarea

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}},$$

corespunzătoare rezonanței circuitului serie (L_1, C_1); pentru valoarea

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2) C_1}},$$

expresia reactanței este discontinuă.

Calculînd derivata, se găsește

$$\frac{dX}{d\omega} = \frac{2L_2^2 C_1 \omega}{[(L_1 + L_2) C_1 \omega^2 - 1]^2},$$

care este întotdeauna pozitivă întrucît $\omega > 0$.

Din examinarea figurii 6.90 rezultă că există dipoli fără pierderi la care aranjarea diferită a inductanțelor și capacităților să producă aceleași efecte (montajele *e* și *g*) sau efecte întîrziate (montajele *c* cu *e* și *g*).

Aceste montaje au numeroase aplicații în practică unde se utilizează fenomenul de rezonanță electrică.

6.4.5.6. **Exemplu de aplicație a teoriei dipolului.** Ne propunem să studiem funcționarea unui motor sincron, la care se neglijează pierderile la mersul în gol, folosind diagrama cu doi poli de tensiune.

Un motor sincron poate funcționa în două moduri : *subexcitat* și *supraexcitat**. Se va examina problema în ambele cazuri.

a) Motorul subexcitat. Fie $\underline{U}'$ tensiunea *aplicată* la borne, care este egală și de sens contrar cu tensiunea $\underline{U}$ *produsă* la borne de motor, $\underline{E}$ forța electromotoare a motorului, $\underline{I}$ curentul absorbit de motor, φ unghiul de defazaj al curentului $\underline{I}$ față de tensiunea produsă $\underline{U}$, θ unghiul de defazaj al forței electromotoare $\underline{E}$ față de aceeași tensiune $\underline{U}$ și ψ unghiul de defazaj al impedanței $\underline{Z}$ față de curentul $\underline{I}$, definit prin relația $\operatorname{tg} \psi = \frac{X}{R}$.

Ecuația tensiunilor motorului este

$$\underline{E} = \underline{U} + R\underline{I} + jX\underline{I} = \underline{U} + \underline{Z}\,\underline{I},$$

analoagă cu ecuația de funcționare a unui dipol.

Motorul funcționînd subexcitat, rezultă $E < U$ și diagrama tensiunilor este dată în figura 6.91.

Ecuațiile puterilor sînt :

— puterea aparentă internă (produsă)

$$\underline{S}_1 = \underline{E} \cdot \underline{I}^*;$$

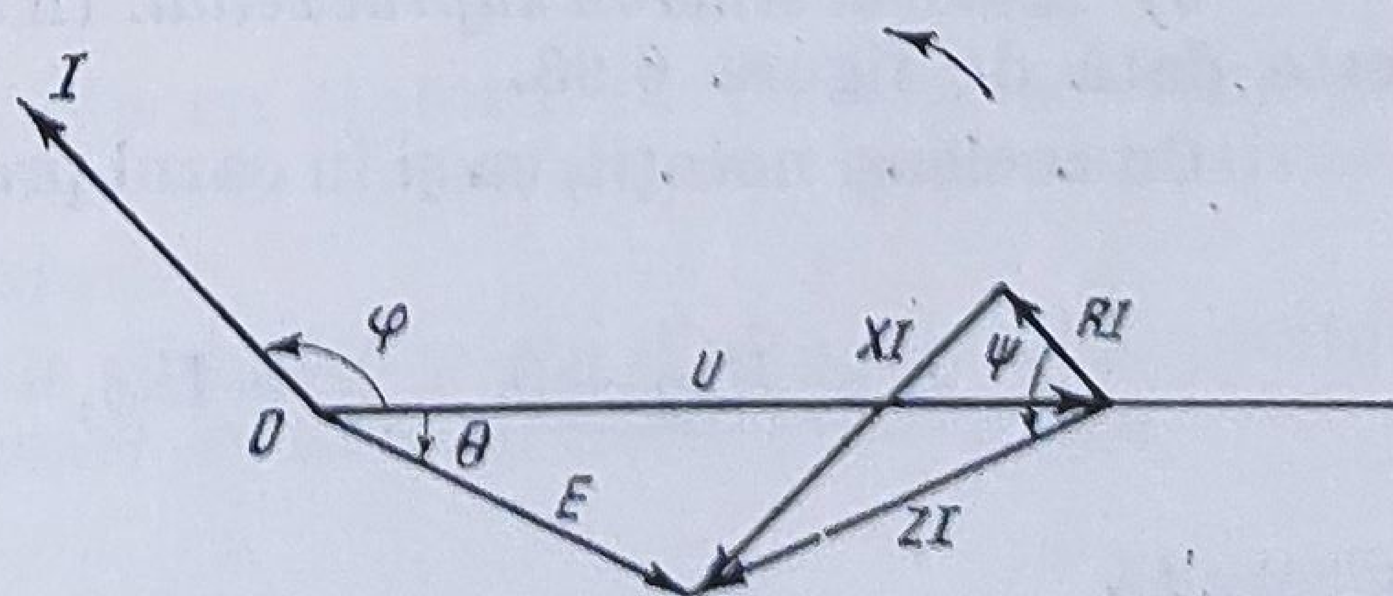


Fig. 6.91. Diagrama motorului sincron subexcitat.

* Vezi [14] pag. 452 ; vezi și [192] pag. 330

— puterea aparentă la borne

$$\underline{S}_2 = \underline{U} \cdot \underline{I}^*.$$

Dacă se ia ca origine de fază fazorul $\underline{I}$, atunci

$$\underline{E} = E\,\underline{|-\theta-\varphi}, \qquad \underline{U} = U\,\underline{|-\varphi}, \qquad \underline{Z} = Z\,\underline{|\psi}, \qquad \underline{I} = \frac{\underline{E}-\underline{U}}{\underline{Z}}$$

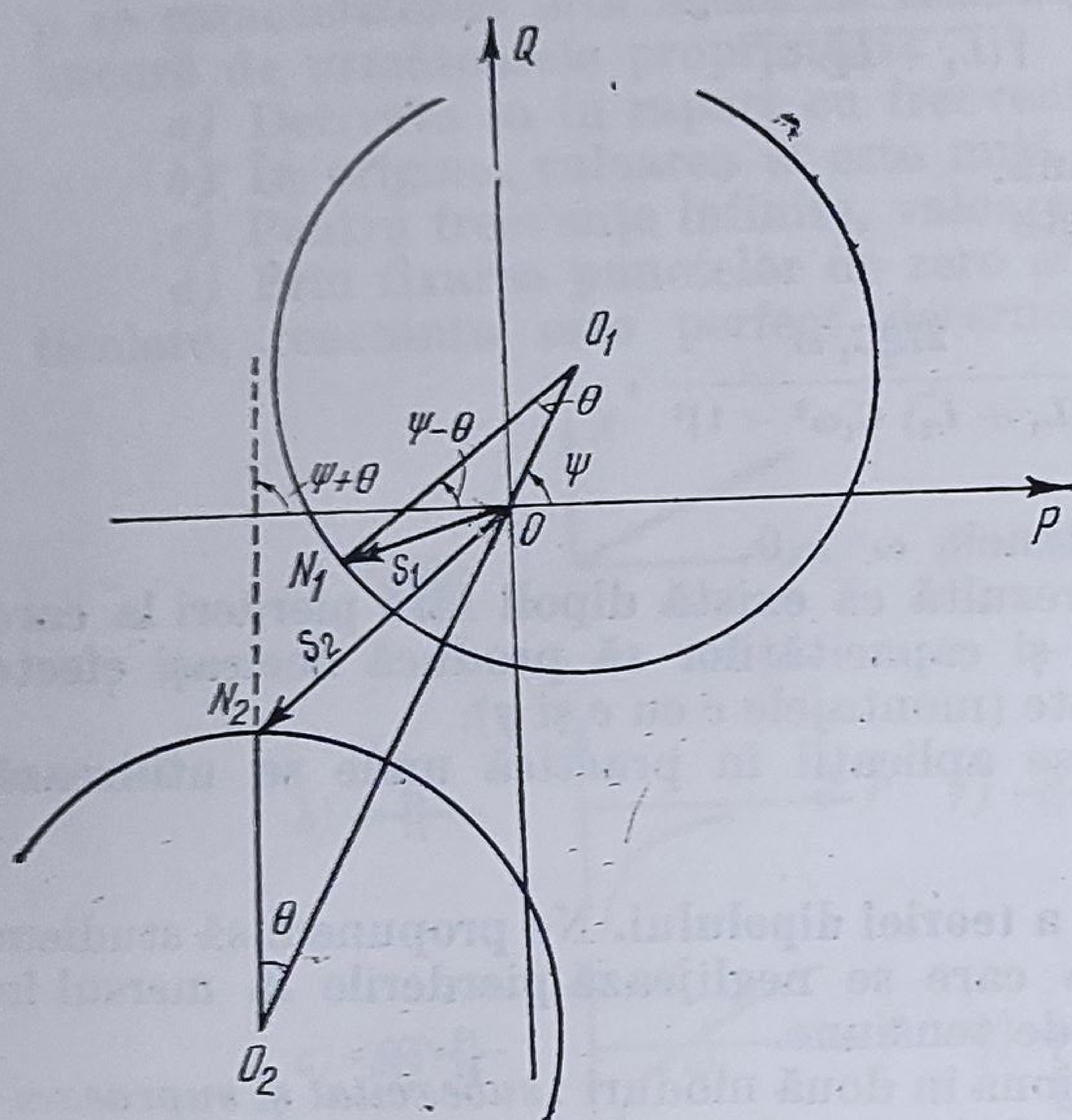


Fig. 6.92. Diagrama puterilor motorului sincron subexcitat.

şi rezultă

$$\underline{I}^* = \frac{E\,\underline{|\theta+\varphi} - U\,\underline{|\varphi}}{Z\,\underline{|-\psi}} =$$

$$= \frac{E}{Z}\,\underline{|\theta+\varphi+\psi} - \frac{U}{Z}\,\underline{|\varphi+\psi}$$

de unde

$$\underline{S}_1 = \frac{E^2}{Z}\,\underline{|\psi} - \frac{EU}{Z}\,\underline{|\psi-\theta},$$

şi

$$\underline{S}_2 = \frac{EU}{Z}\,\underline{|\psi+\theta} - \frac{U^2}{Z}\,\underline{|\psi}.$$

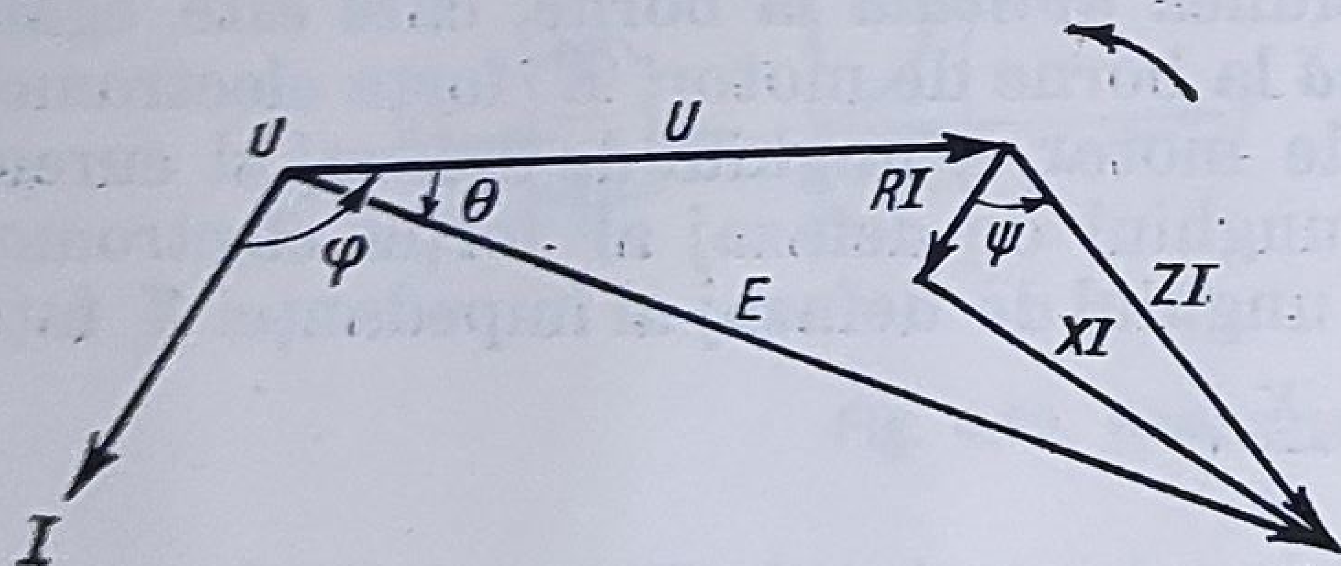


Fig. 6.93. Diagrama motorului sincron supraexcitat.

Diagrama puterilor se construieşte uşor şi este cea din figura 6.92. Din această diagramă rezultă imediat că motorul sincron subexcitat *absoarbe* atît putere activă cît şi putere reactivă. Se deduce, de asemenea, randamentul electric al motorului, care este raportul P_1/P_2.

b) Motorul sincron supraexcitat. În acest caz $U < E$ şi diagrama tensiunilor este dată de figura 6.93.

Cu aceleaşi notaţii, ca şi în cazul precedent, se obţine

$$\underline{E} = E\,\underline{|\varphi-\theta}, \qquad \underline{U} = U\,\underline{|\varphi}, \qquad \underline{Z} = Z\,\underline{|\psi}, \qquad \underline{I} = \frac{\underline{E}-\underline{U}}{\underline{Z}}.$$

şi rezultă

$$\underline{I}^* = \frac{E\,\underline{|-\varphi+\theta} - U\,\underline{|-\varphi}}{Z\,\underline{|-\psi}} = \frac{E}{Z}\,\underline{|\theta-\varphi+\psi} - \frac{U}{Z}\,\underline{|-\varphi+\psi},$$

de unde

$$\underline{S}_1 = \frac{E^2}{Z} \underline{|\psi} - \frac{EU}{Z} \underline{|\psi - \theta}$$

şi

$$\underline{S}_2 = \frac{EU}{Z} \underline{|\psi + \theta} - \frac{U^2}{Z} \underline{|\psi} \cdot$$

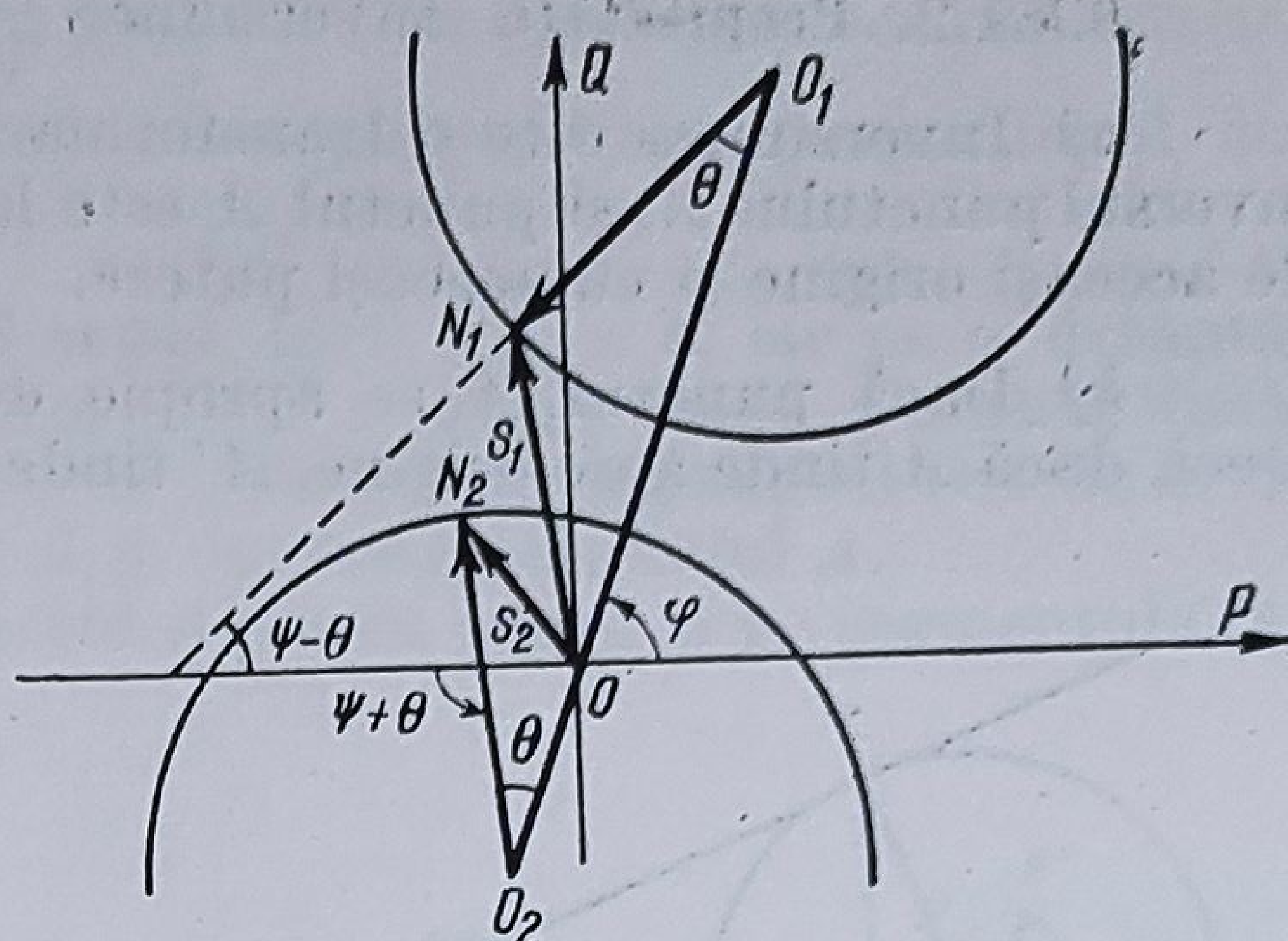


Fig. 6.94. Diagrama puterilor motorului sincron supraexcitat.

Se observă că ecuaţiile puterii au aceeaşi formă, ceea ce era, de-altfel, de aşteptat. Diagrama puterilor este dată în figura 6.94, construcţia ei nereprezentînd nici o dificultate.

Din această diagramă rezultă imediat că, motorul supraexcitat *prodcce* putere reactivă.

6.5. UTILIZAREA INVERSIUNII LA STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE

6.5.1. INVERSIUNEA GEOMETRICĂ *

6.5.1.1. **Definiţii.** A fiind un punct al unei figuri şi O un punct în plan sau în spaţiu, un punct A' situat pe dreapta OA, astfel încît $OA \times OA' = \pm k^2$, se numeşte inversul punctului A (fig. 6.95).



Fig. 6.95. Puncte inverse.

Punctul O se numeşte *origine, pol* sau *centru de inversiune*. Punctele A şi A' se numesc *puncte inverse* sau *puncte reciproce*. Dreptele OA şi OA' se numesc *raze vectoare reciproce*.

Două figuri se numesc reciproce sau inverse dacă sînt formate din puncte inverse, două cîte două, în raport cu un acelaşi punct luat ca centru de inversiune.

Transformarea unei figuri într-o alta cu ajutorul inversiunii se numeşte *transformare prin raze vectoare reciproce* sau *transformare prin inversiune*.

$\pm k^2$ se numeşte *putere de inversiune*.

Puterea negativă arată că punctele sînt de o parte şi alta a originii; puterea este pozitivă cînd punctele sînt situate de aceeaşi parte cu originea.

* Acest paragraf a fost redactat de Prof. AL. AL. ROŞU.

6.5.1.2. Proprietăţi. Inversiunea se bucură de următoarele proprietăţi.

a) Inversiunea este o transformare punctuală reciprocă. Punctul A' fiind inversul punctului A, şi punctul A este la rîndul său inversul punctului A' faţă de aceeaşi origine şi cu aceeaşi putere.

b) Dacă punctul A se apropie de origine, inversul său se depărtează. Deci, dacă A tinde spre origine, A' tinde spre infinit şi reciproc.

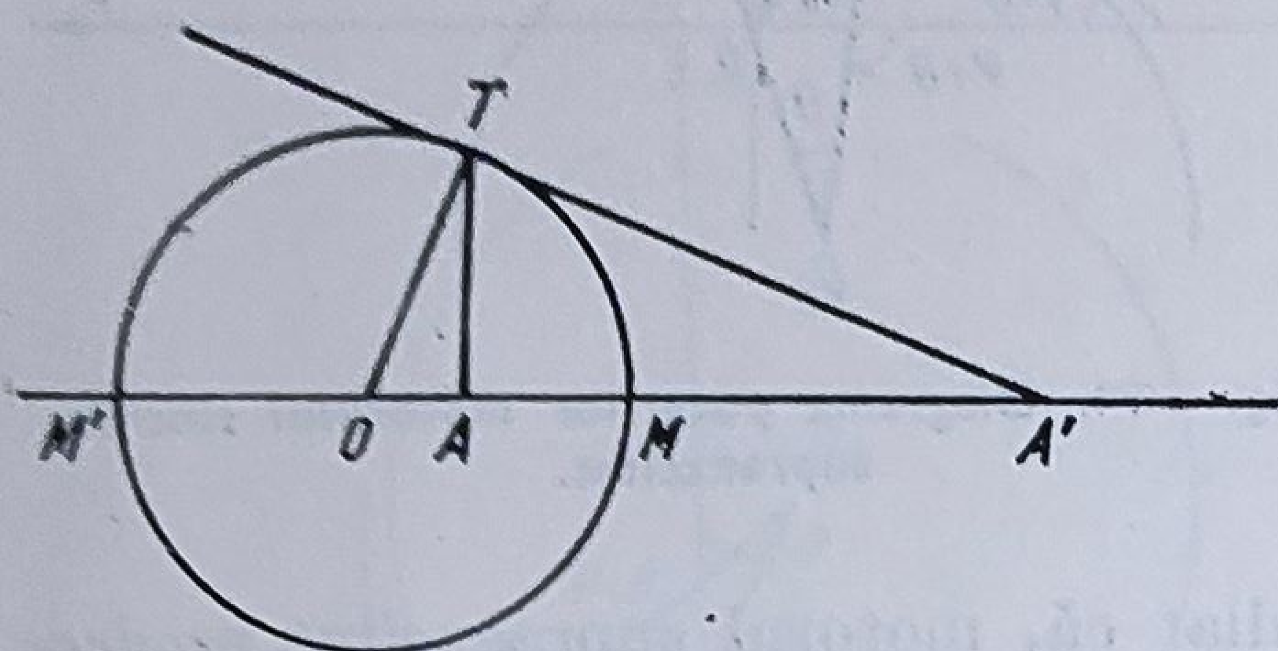


Fig. 6.96. Construirea inversului unui punct cu ajutorul cercului de inversiune.

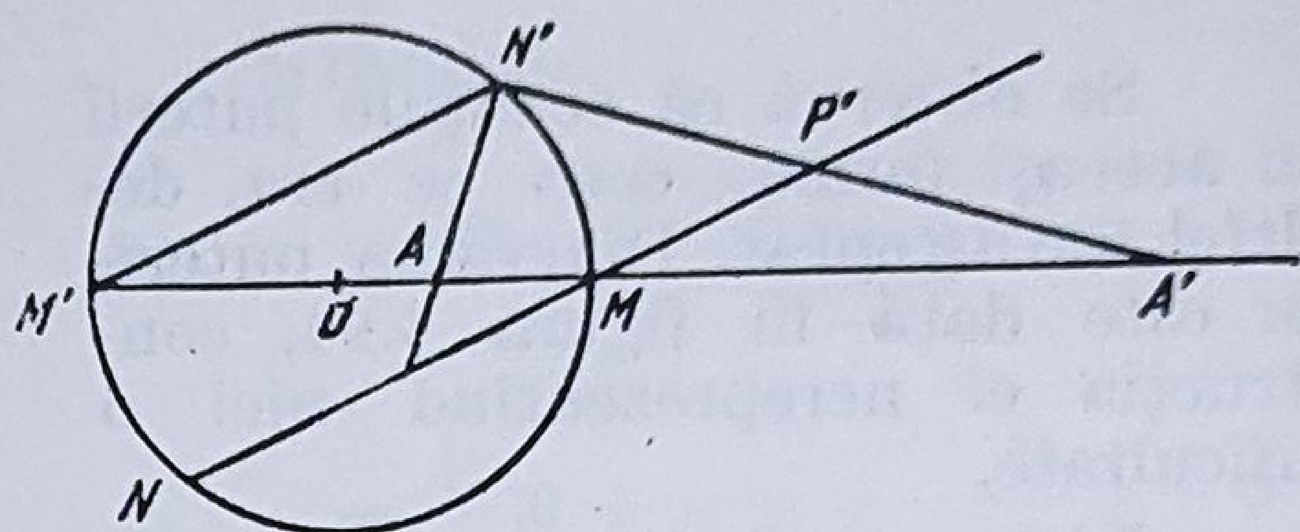


Fig. 6.97. Construirea conjugatului armonic a unui punct.

c) Inversiunea are o infinitate de puncte duble, adică de puncte care se transformă în ele însăşi. Toate aceste puncte se găsesc situate pe un cerc cu centrul în origine şi avînd raza egală cu k. Acest cerc poartă numele de *cerc de inversiune* sau *cerc fundamental*.

d) Cercul de inversiune poate servi la construirea inversului unui punct dat (fig. 6.96). Dacă O este originea, iar k^2 puterea de inversiune, raza cercului de inversiune fiind k, ne propunem să găsim inversul unui punct dat A, adică un punct A', astfel ca $OA \cdot OA' = k^2$. Pentru aceasta se ridică din A o perpendiculară pe segmentul OA care intersectează cercul fundamental în T şi se duce tangenta în T la acest cerc. Această tangentă va intersecta dreapta OA în punctul A', inversul punctului A. Într-adevăr, conform teoremei catetei, în triunghiul dreptunghic OTA' avem $OA \cdot OA' = OT^2 = k^2$.

Dacă punctul A' este exterior cercului de inversiune, inversul său este în interior şi se obţine ducînd din A' tangenta la cerc. Punctul A unde coarda contactelor intersectează dreapta OA', este inversul punctului A' dat.

Punctele M, M' unde dreapta AA' intersectează cercul fundamental, formează împreună cu punctele A, A' o diviziune armonică. În consecinţă, găsirea inversului unui punct A revine în a căuta conjugatul armonic al acestui punct în raport cu punctele unde raza vectoare OA intersectează cercul fundamental.

Construcţia se poate face ducîndu-se prin punctele M, M' două coarde arbitrare paralele care intersectează a doua oară cercul fundamental în punctele N, N' (fig. 6.97). Dreapta AN' intersectează coarda MN în punctul P. Se notează cu P' simetricul punctului P în raport cu M, situat pe coarda MN. Dreapta $N'P'$ intersectează dreapta MM' în punctul A', care este conjugatul armonic al punctului A în raport cu M şi M'.

Dacă punctul A este exterior cercului, construcţia este aceeaşi.

O altă construcție a inversului unui punct dat se poate face scriind relația $OA \cdot OA' = k^2$ sub forma $\frac{OA}{k} = \frac{k}{OA'}$ și construind al patrulea proporțional cu 3 segmente date.

Se ia pe segmentul OA punctul B astfel, încît $OB = k$, iar pe o dreaptă oarecare, trecînd prin O, un punct C astfel ca $OC = k$ (fig. 6.98). Paralela dusă din B la AC intersectează dreapta OC în A''. Luînd pe segmentul OA de la O către A ($OA' = OA''$) se va obține punctul A' inversul punctului A.

În cazul unei puteri negative, punctul A' se va construi pe segmentul OA în sens opus lui A.

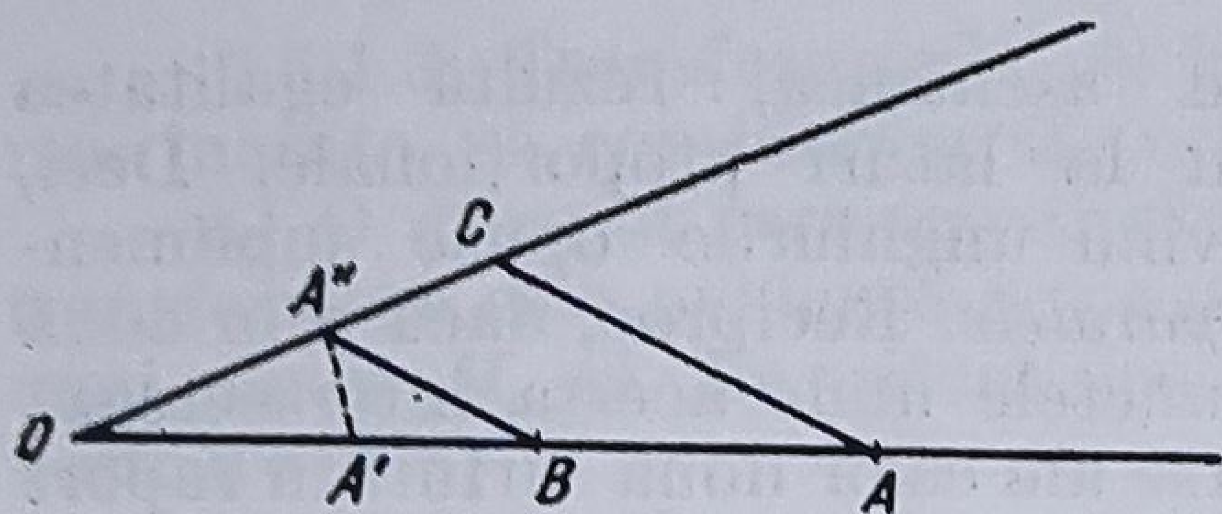


Fig. 6.98. Construirea celei de a patra proporționale.

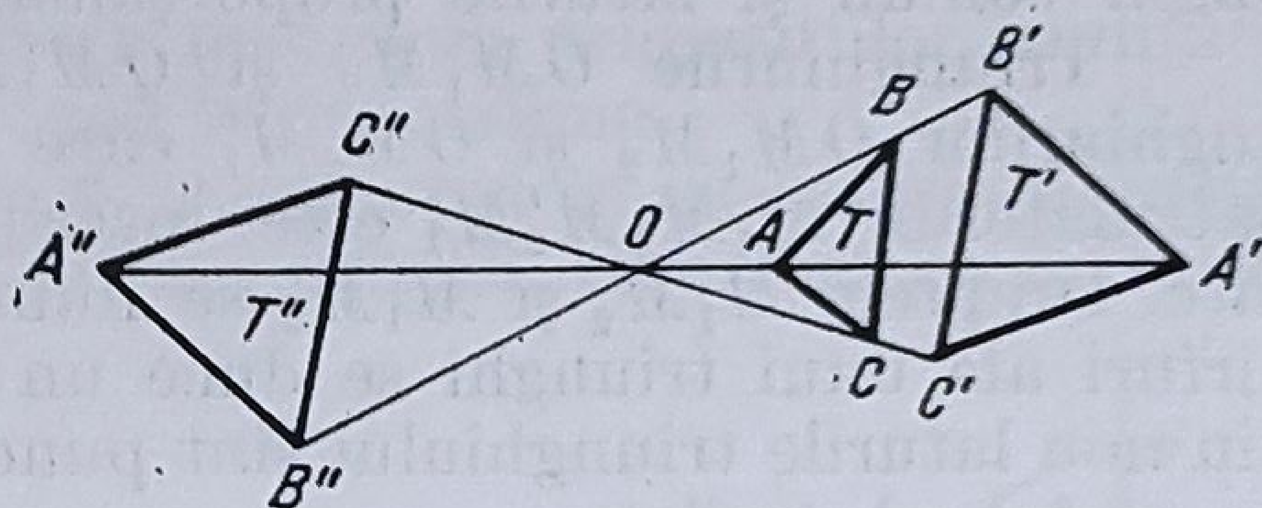


Fig. 6.99. Figuri inverse.

e) Un cerc care trece prin două puncte inverse intersectează ortogonal cercul fundamental.

Reciproc, dacă două puncte M, M' au proprietatea că oricare cerc trecînd prin ele intersectează sub un unghi drept un cerc dat, atunci ele sînt inverse în raport cu acesta din urmă.

f) Dacă se caută inversele unui punct M față de o origine O cu puteri de inversiune k_1^2 și k_2^2, se obțin punctele M_1 și M_2. Aceste puncte nu sînt inverse față de originea O, ci sînt omotetice în raportul k_1^2/k_2^2.

Într-adevăr, din relațiile

$$OM \cdot OM_1 = k_1^2$$

și

$$OM \cdot OM_2 = k_2^2,$$

se obține prin împărțire

$$\frac{OM_1}{OM_2} = \frac{k_1^2}{k_2^2},$$

ceea ce arată că punctul M_2 nu este inversul punctului M_1, ci omoteticul său.

Se mai observă că dacă $k_1^2 = -k_2^2$, punctul M_1 este simetricul punctului M_2 față de originea O_1. Deci, dacă o figură T se transformă printr-o inversiune de putere k^2, se obține o figură T', iar dacă se transformă printr-o inversiune de putere $-k^2$, se obține o figură T'', simetrică cu T' față de originea O. Figurile T' și T'' fiind simetrice, au aceleași proprietăți; deci, în locul unei inversiuni cu putere negativă, se poate face o inversiune de aceeași origine și de aceeași putere, dar pozitivă (fig. 6.99).

g) Două perechi de puncte inverse sînt conciclice (fig. 6.100). Dacă M_1' şi M_2' sînt inversele punctelor M_1 şi M_2 faţă de originea O, înseamnă că

$$OM_1 \cdot OM_1' = OM_2 \cdot OM_2'$$

sau

$$\frac{OM_1'}{OM_2'} = \frac{OM_2}{OM_1},$$

de unde rezultă că triunghiurile OM_1M_2 şi $OM_1'M_2'$ sînt asemenea, avînd un unghi comun şi laturile proporţionale.

Triunghiurile OM_1M_2 şi $OM_1'M_2'$ fiind asemenea, rezultă egalitatea unghiurilor OM_1M_2 şi $OM_2'M_1'$ care se opun la laturi proporţionale. Deci, patrulaterul $M_1M_2M_2'M_1'$ este inscriptibil avînd unghiurile opuse suplimentare. Dreptele M_1M_2 şi $M_1'M_2'$ se numesc *antiparalele*. Reciproc, dacă prin două vîrfuri ale unui triunghi se duce un cerc, punctele unde acesta intersectează din nou laturile triunghiului sînt puncte inverse ale celor două vîrfuri în raport cu vîrful al treilea.

h) Triunghiurile OM_1M_2 şi $OM_1'M_2'$ fiind asemenea (fig. 6.100), rezultă *relaţiile metrice*

$$M_1'M_2' = M_1M_2 \frac{k^2}{OM_1 \cdot OM_2},$$

deoarece

$$\frac{M_1'M_2'}{M_1M_2} = \frac{OM_1'}{OM_2} = \frac{OM_1 \cdot OM_1'}{OM_1 \cdot OM_2} = \frac{k^2}{OM_1 \cdot OM_2}$$

şi

$$M_1M_2 = M_1'M_2' \frac{k^2}{OM_1' \cdot OM_2'},$$

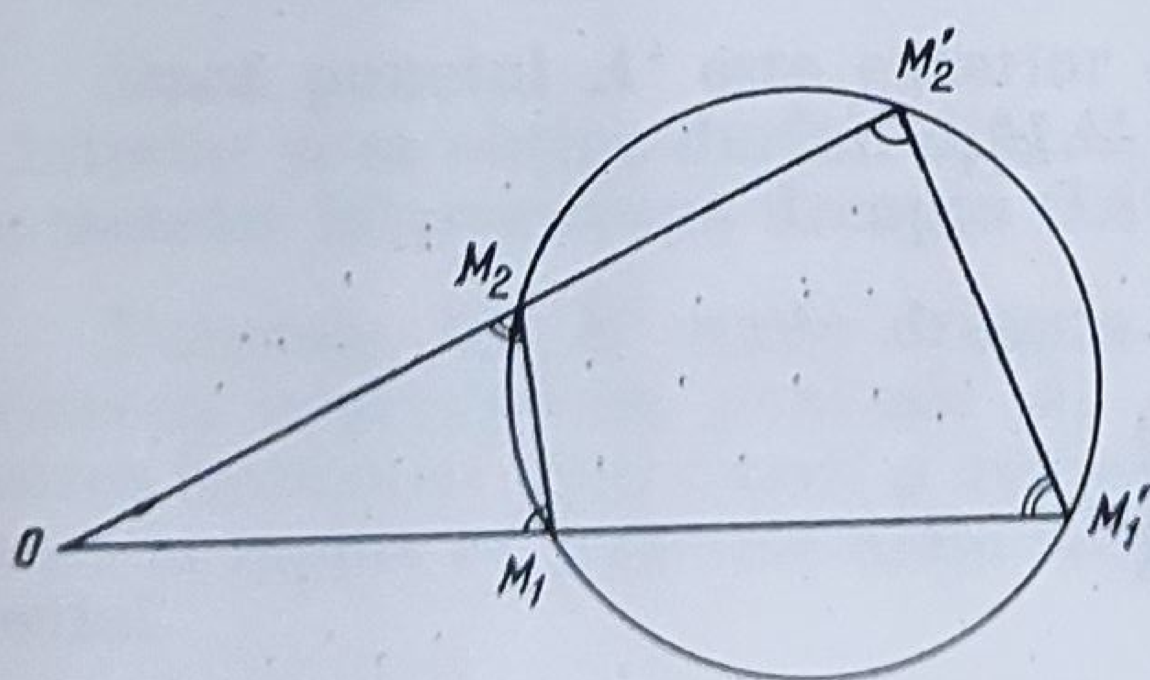


Fig. 6.100. Puncte inverse conciclice.

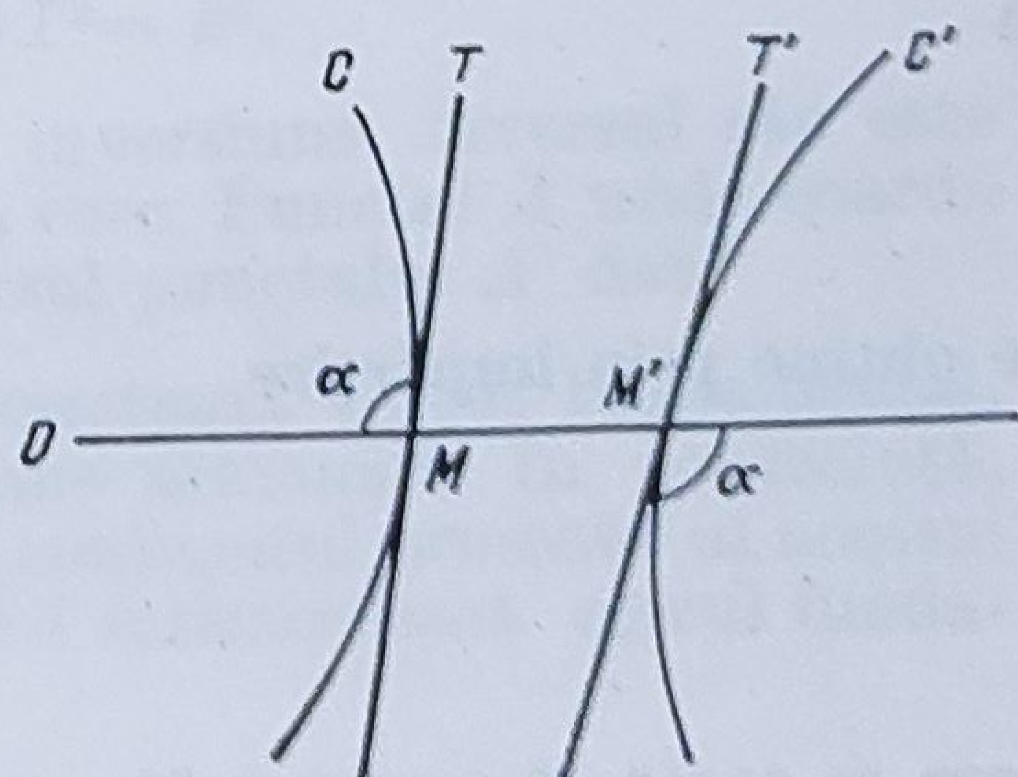


Fig. 6.101. Conservarea unghiurilor.

care servesc la determinarea mărimilor pe figura inversă în funcţie de mărimile iniţiale şi reciproc.

i) Inversiunea este o *transformare conformă*: ea conservă unghiurile. Dacă două curbe trecînd printr-un punct fac între ele un unghi α, acelaşi unghi α va fi făcut şi de inversele curbelor considerate (fig. 6.101).

Proprietatea rezultă imediat considerînd unghiul făcut de raza vectoare OM cu tangenta în M la curba C ca fiind egal cu unghiul făcut de raza vectoare OM' cu tangenta în M' la curba C', inversa curbei C (punctul M' fiind inversul punctului M). Această egalitate se deduce prin trecerea la limită a secantei M_1M_2 din figura 6.100, considerînd punctele M_1 și M_2 situate pe o curbă C.

Dacă prin punctul M vor trece două curbe, unghiul lor va fi diferența unghiurilor formate de tangentele în M la cele două curbe cu raza vectoare OM. Această diferență rămîne aceeași cînd curbele C_1 și C_2 se transformă în C_1' și C_2'. Dacă două curbe sînt tangente, atunci și inversele lor vor fi tangente.

6.5.1.3. **Transformările de bază.** Pentru ilustrarea propozițiilor enunțate mai înainte, să considerăm teoremele de bază în inversiune.

a) O dreaptă care trece prin origine se transformă în ea însăși. Această transformare este evidentă din chiar definiția inversiunii, care cere ca inversul unui punct M să fie situat pe raza vectoare OM.

b) O dreaptă oarecare se transformă într-un cerc trecînd prin origine.

Fie D dreapta dată și M un punct curent al ei (fig. 6.102); fie A piciorul perpendicularei duse din origine pe dreapta D; notînd cu A', M' inversele punctelor A și M, patrulaterul $AA'M'M$ trebuind să fie inscriptibil *, unghiul $MM'A'$ este drept. Punctele O și A' fiind fixe, cînd M descrie dreapta D, punctul M' — inversul lui M — va descrie cercul de diametru OA'. Din demonstrația de mai sus se desprinde ușor modul de a construi inversa unei drepte.

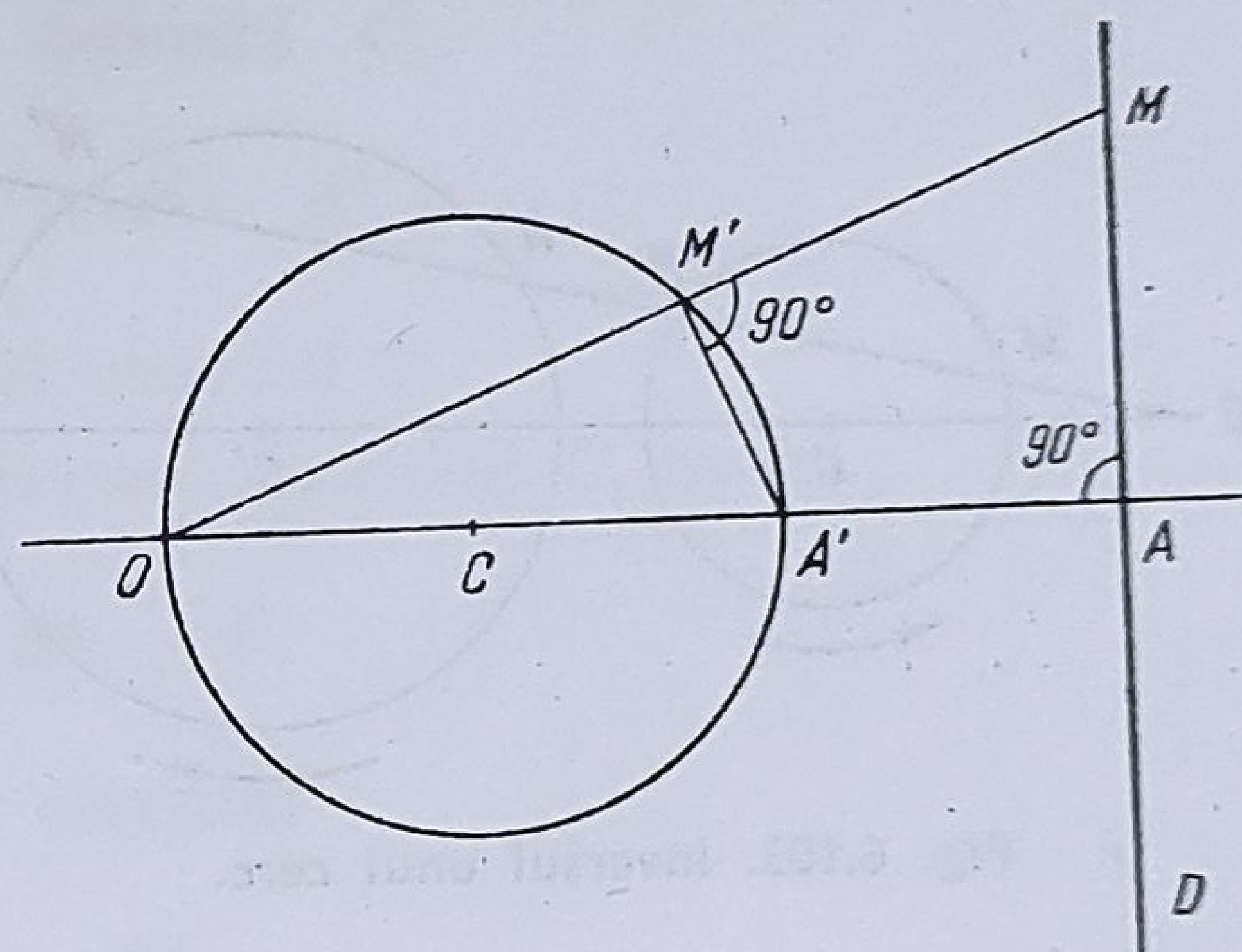


Fig. 6.102. Inversul unei drepte.

c) Un cerc trecînd prin origine se transformă într-o dreaptă. Teorema aceasta este reciproca teoremei precedente. Într-adevăr, dacă punctele de pe cerc sînt inversele punctelor dreptei D, atunci și punctele de pe dreaptă vor fi inversele punctelor de pe cerc **; construcția dreptei D, inversa cercului, trecînd prin origine, se face imediat: se duce diametrul trecînd prin origine, care va intersecta a doua oară cercul în punctul A'. Se construiește inversul punctului A', obținîndu-se punctul A. Perpendiculara în A pe diametrul OA' este inversa cercului.

Poziția dreptei D, inversa cercului dat, depinde de puterea de inversiune:

— cînd $\begin{cases} k^2 > 4R^2, & \text{dreapta este exterioară cercului;} \\ k^2 < 4R^2, & \text{dreapta intersectează cercul în două puncte:} \\ k^2 = 4R^2, & \text{dreapta este tangentă la cerc;} \\ k^2 = 2R^2, & \text{dreapta trece prin centrul cercului.} \end{cases}$

Aceste observații apar evidente dacă se scrie $k^2 = OA \cdot OA' = 2Rd$, unde d reprezintă distanța de la origine la dreapta D.

---

* Vezi 6.5.1.2, punctul *g*.
** Vezi 6.5.1.2, punctul *a*.

d) Un cerc care nu trece prin origine se transformă tot într-un cerc (fig. 6.103).

Fie cercul C de rază R și M un punct curent al său care devine prin inversiune M'.

Raza vectoare OM intersectează a doua oară cercul C, în punctul N.

Notînd cu p^2 puterea originii față de cercul C, $p^2 = OM \cdot ON$, și k^2 puterea care transformă prin inversiune pe M în M', adică $k^2 = OM \cdot OM'$, prin împărțire se obține

$$\frac{OM'}{ON} = \frac{k^2}{p^2}, \tag{6.162}$$

relație care arată că punctul M' este omoteticul punctului N. Deci, cînd punctul M și în același timp punctul N, descrie cercul C, omoteticul punctului N,

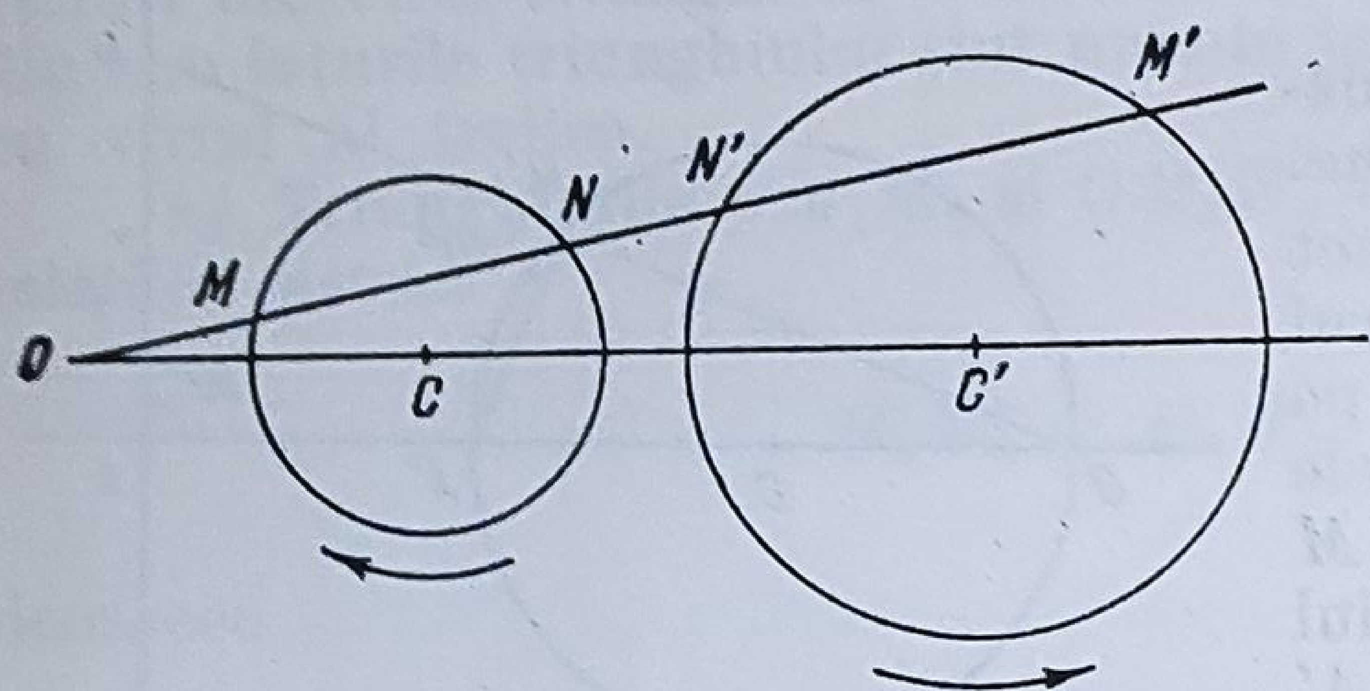


Fig. 6.103. Inversul unui cerc.

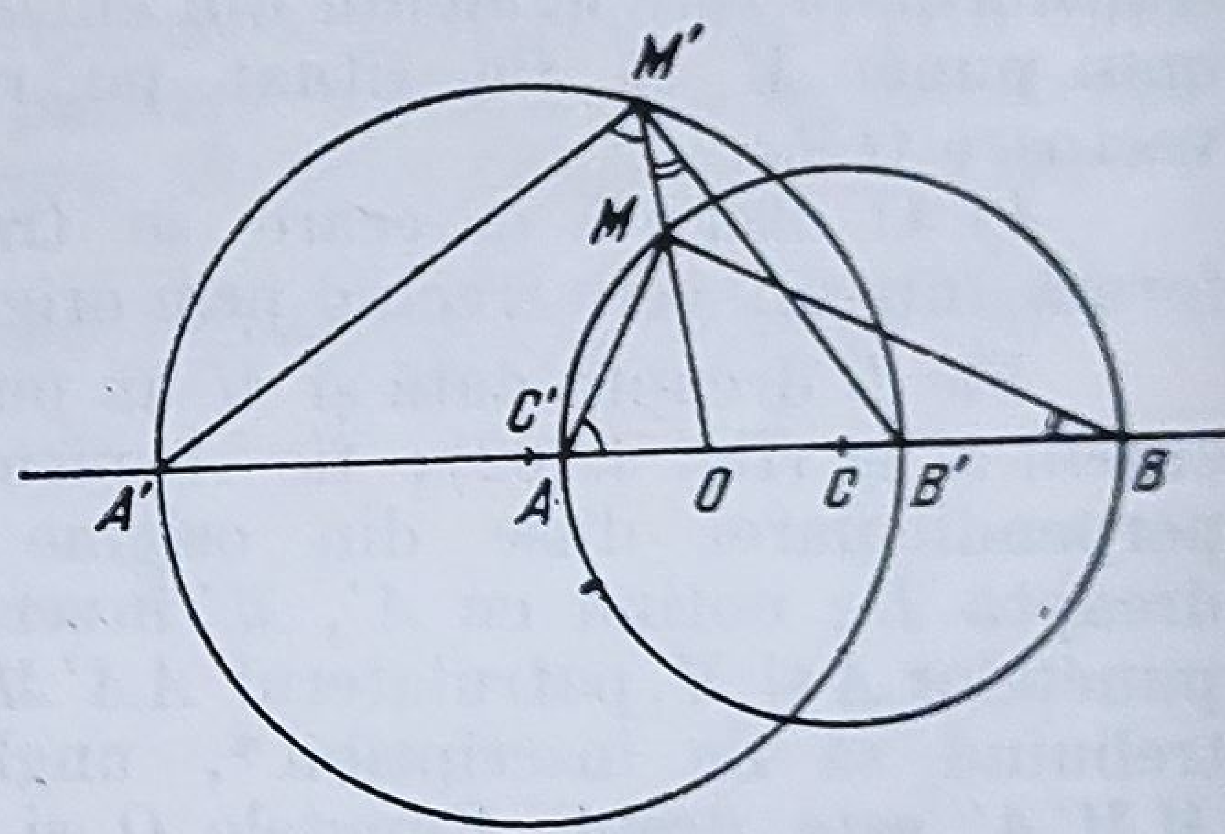


Fig. 6.104. Construirea inversului unui cerc.

adică punctul M' (inversul punctului M), va descrie omoteticul cercului C, adică tot un cerc C'.

Determinarea centrului și a razei cercului C', deci construirea arcului invers, se face prin omotetie. Astfel, centrul său C' este omotetic cu centrul C și în același raport de omotetie ca și punctele N și M'; de asemenea razele, adică

$$OC' = OC \times \frac{k^2}{p^2}; \quad R' = R \times \frac{k^2}{p^2}. \tag{6.163}$$

Se vede că centrul cercului C' este pe raza vectoare OC.

În concluzie, dacă se transformă, prin inversiunea de putere k^2, un cerc care nu trece prin origine, se obține un cerc omotetic cu cercul dat, centrul de omotetie fiind originea, iar raportul de omotetie fiind $\frac{k^2}{p^2}$, unde p^2 este puterea originii față de cercul dat.

Inversul unui cerc C față de un pol O se poate construi ușor observînd următoarele:

Dreapta OC intersectează cercul C în două puncte fixe A și B (fig. 6.104). Dacă A', B' sînt inversele punctelor A și B iar M' inversul unui punct oarecare M situat pe cercul C, atunci patrulaterele $AMM'A'$ și $BMM'B'$ sînt inscriptibile, deci

$$\sphericalangle MAO = \sphericalangle A'M'M \text{ și } \sphericalangle MBO = \sphericalangle MM'B';$$

cum

$$\sphericalangle MAO + \sphericalangle MBO = 90°$$

înseamnă că*

$$\sphericalangle A'M'M + \sphericalangle B'M'M = 90°.$$

Rezultă că unghiul $A'M'B'$ este drept şi cum punctele A', B' rămîn fixe, cînd M descrie cercul C, M' inversul lui M va descrie un cerc de diametru $A'B'$, cerc uşor de construit, indiferent unde se află polul O în raport cu cercul C.

OBSERVAŢII. 1. Puterea originii faţă de cercul dat,

$$p^2 = OM \cdot ON$$

este puterea de inversiune care transformă cercul în el însuşi.

Considerînd originea exterioară cercului C,

$$p^2 = OT^2 = d^2 - R^2,$$

unde d este distanţa de la pol la centrul cercului C.

2. În cazul cînd originea este interioară cercului C, avem

$$p^2 = R^2 - d^2.$$

3. Dacă originea este în centrul cercului

$$p^2 = R^2.$$

4. Poziţia inversului unui cerc se poate determina ţinînd seama de poziţia originii şi de valorile lui k^2. De exemplu, dacă originea este în centrul cercului C, atunci $OC = 0$, deci şi $OC' = 0$ şi se poate spune că inversul unui cerc, luînd drept origine centrul acestuia este un cerc concentric cu cercul considerat.

Din relaţia

$$R' = R = \frac{k^2}{p^2}$$

se deduce

$$R' = \frac{k^2}{R}$$

relaţie care va determina raza cercului în funcţie de k^2. Dacă $R^2 < k^2$, inversul cercului C va fi exterior acestuia ; dacă $R^2 > k^2$, inversul lui C va fi în interiorul acestuia.

5. Trebuie menţionat că centrele cercurilor inverse nu sînt puncte inverse ci puncte omotetice. De asemenea, coarda $M_1'M_2'$, unind inversele punctelor

* Demonstraţia se poate adapta oricum ar apărea pe figură punctele A', B', M'.

M_1, M_2, nu este inversa coardei M_1M_2, ci antiparalelă cu ea (deoarece inversa ar fi trebuit să fie un cerc).

6. Cînd originea este exterioară cercului, dacă un punct se mişcă pe acest cerc în sens direct, inversul său se mişcă în sens retrograd; cînd originea este interioară, punctul şi inversul său se mişcă în acelaşi sens.

e) O familie de drepte paralele oarecare se transformă într-o familie de cercuri tangente în polul inversiunii şi ale căror centre se găsesc pe perpendiculara din pol pe direcţia dreptelor paralele (fig. 6.105).

Dreapta tangentă cercului fundamental se transformă într-un cerc tangent cercului fundamental în punctul comun cu dreapta.

O reţea de drepte perpendiculare oarecare se transformă într-o reţea de cercuri ortogonale trecînd prin pol, tangente între ele în pol pe familii (fig. 6.106).

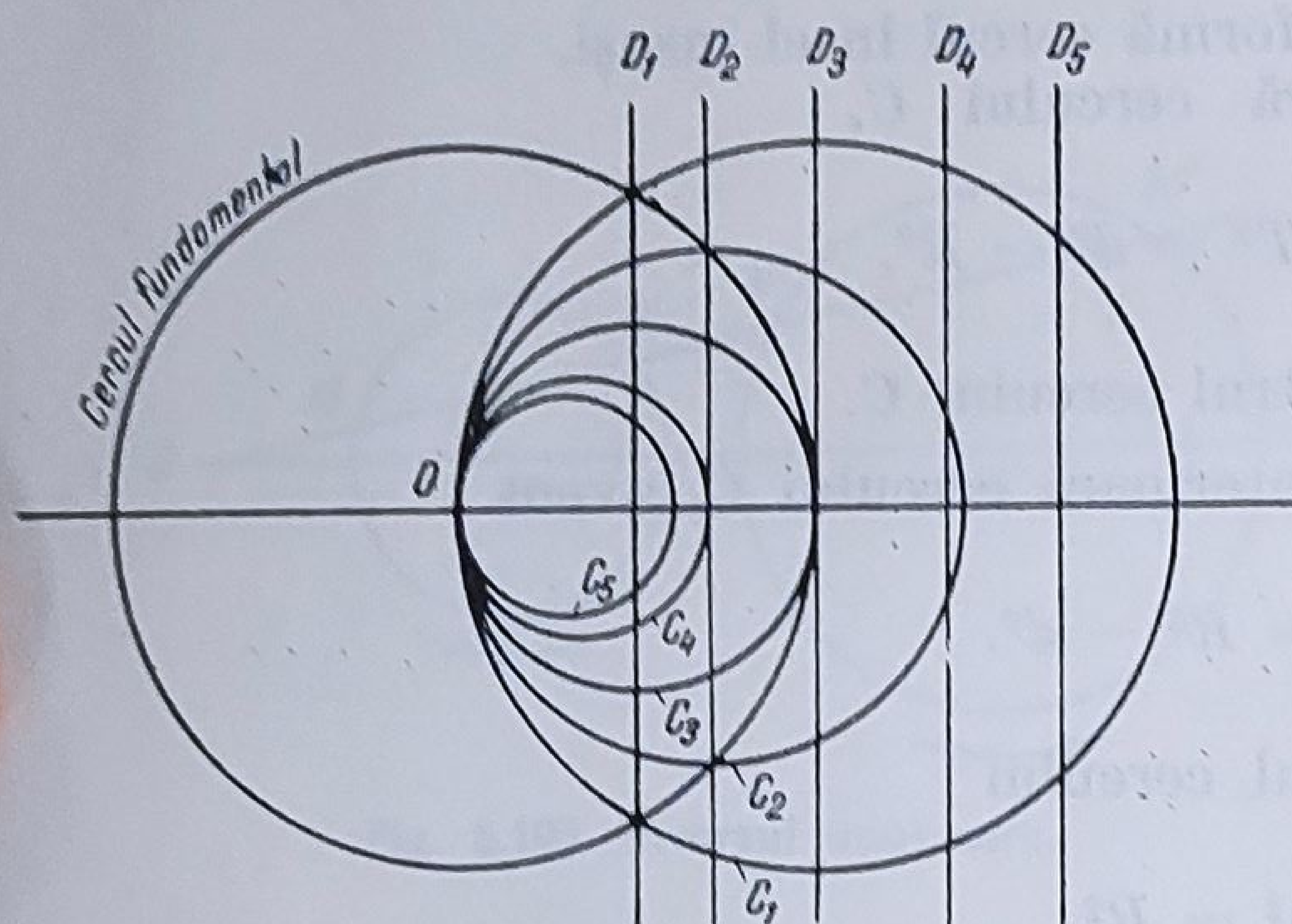


Fig. 6.105. Inversul unei familii de drepte paralele.

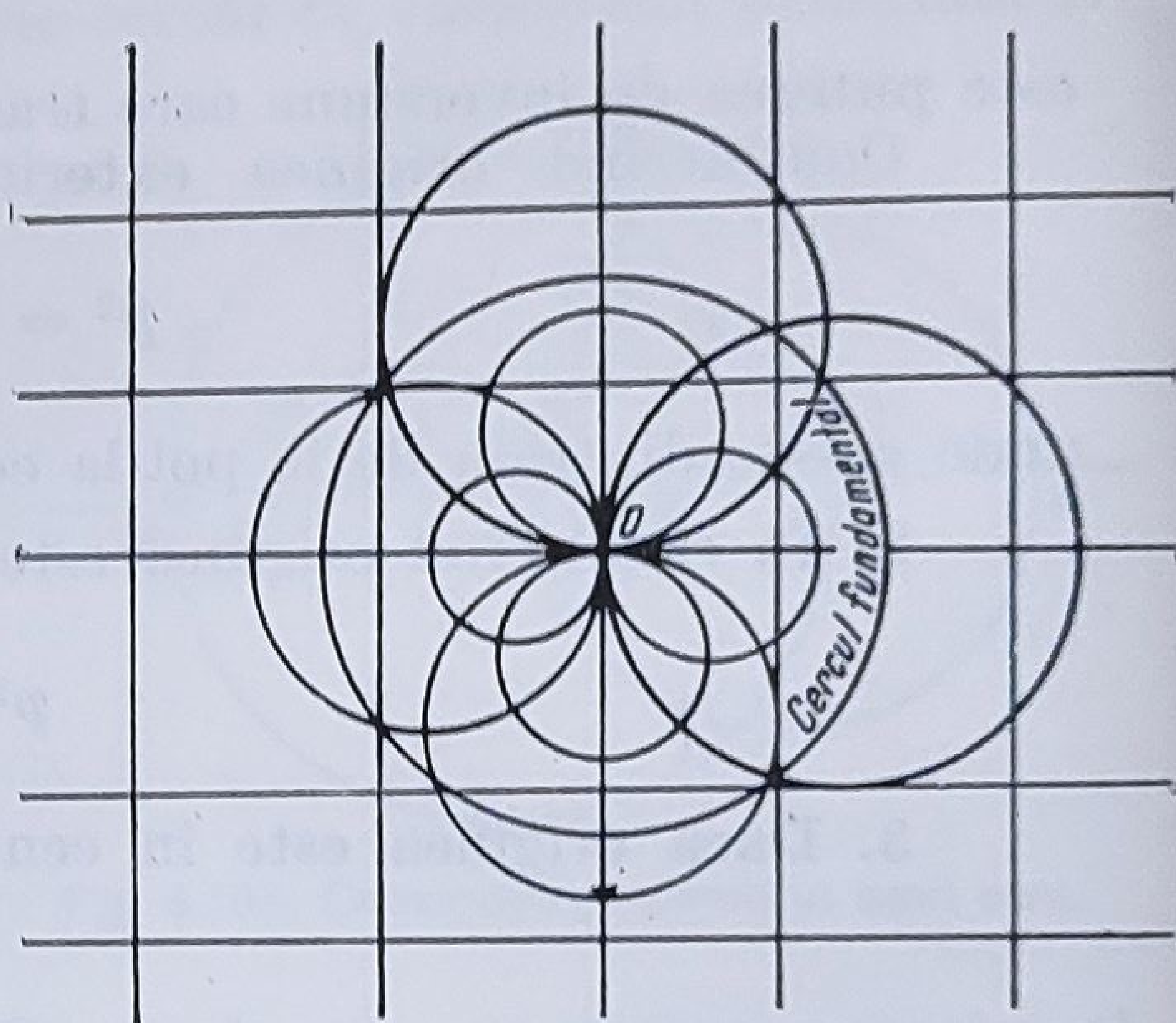


Fig. 6.106. Inversul unei familii de drepte ortogonale.

6.5.1.4. Studiul analitic al inversiunii geometrice. 1. Raportînd punctul $M(x, y)$ la un sistem de axe perpendiculare duse prin pol, găsim corespondenţa între coordonatele lui M şi ale punctului $M'(x'y')$, inversul lui M.

Din

$$\frac{OM}{x} = \frac{OM'}{x'}; \quad \frac{OM \cdot OM'}{xx'} = \frac{k^2}{xx'} = \left(\frac{OM}{x}\right)^2 = \left(\frac{OM'}{x'}\right)^2$$

şi

$$\frac{OM}{y} = \frac{OM'}{y'},$$

rezultă

$$x' = k^2 \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{şi} \quad y' = k^2 \frac{y}{x^2 + y^2} \tag{6.164}$$

sau

$$x = k^2 \frac{x'}{x'^2 + y'^2} \quad \text{şi} \quad y = k^2 \frac{y'}{x'^2 + y'^2}$$

Relațiile de mai sus arată reciprocitatea transformării prin inversiune și conduc la găsirea curbelor inverse, servind în același timp la regăsirea proprietăților inversiunii.

2. Cercul C

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

se transformă în cercul C'.

$$D(x^2 + y^2) + BK^2x + CK^2y + AK^4 = 0$$

Dacă $D = 0$ cercul C trece prin origine și atunci C' se reduce la o dreaptă.

Dacă $A = 0$, ecuația C se reduce la o dreaptă și atunci C' reprezintă un cerc trecînd prin pol.

Determinarea centrelor și razelor celor două cercuri se face cu ușurință și se regăsește analitic relația *

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{R'}{R} = \frac{K^2}{p^2}.$$

3. Tratarea analitică permite transformarea prin inversiune și a altor curbe.

4. În general, inversa unei conice în raport cu unul din focare este melcul lui PASCAL. Inversa parabolei este cardioida.

5. Dacă polul de inversiune este în $P\ (a, b)$, formulele de transformare devin

$$X = \frac{k^2\,(x - a)}{(x - a)^2 + (y - b)^2} \quad \text{și} \quad Y = \frac{k^2\,(y - b)}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

obținute din relațiile (6.164) prin translația axelor de coordonate în punctul $P(a,b)$.

6.5.1.5. **Aplicații.** Aplicînd proprietățile și transformările de bază indicate mai înainte, se deduc unele propoziții care pot fi aplicate la construcțiile grafice necesare rezolvării problemelor de inversiune, din studiul circuitelor electrice.

1. Două cercuri oarecare pot fi considerate unul inversul celuilalt. Rămîne de văzut, față de ce origine și de ce putere. Dacă se va lua drept origine S centrul de omotetie al celor două cercuri, iar ca putere de inversiune μ^2, media geometrică între puterile lui S față de cele două cercuri considerate, adică $\mu^4 = p_1^2 \cdot p_2^2$, sigur că unul din cercuri va fi inversul celuilalt. Într-adevăr, notînd cu C_1, C_2 și R_1, R_2 centrele și razele celor două cercuri, atunci

$$\frac{\overline{SC_1^2} - R_1^2}{\overline{SC_2^2} - R_2^2} = \frac{p_1^2}{{}_2^2} = \frac{p_1^4}{p_1^2\,p_2^2}.$$

* Vezi relațiile (6.162) și (6.163).

Cum însă

$$\frac{\overline{SC_1^2}}{\overline{SC_2^2}} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{p_1^2}{\mu^2},$$

rezultă că

$$\mu^4 = p_1^2 p_2^2$$

şi deci

$$\mu^2 = \sqrt{p_1^2 p_2^2}.$$

În consecinţă, două cercuri pot fi considerate unul ca inversul celuilalt în două moduri diferite, deoarece ele pot fi considerate ca omotetice în două moduri diferite, alegîndu-se ca pol centrele lor de asemănare.

2. Există o infinitate de inversiuni care transformă un cerc C în el însuşi.

În afara inversiunii avînd ca pol centrul cercului C iar ca putere R^2, care suprapune cercul fundamental cercului dat, orice punct al planului nesituat pe cercul C este polul unei inversiuni a cărei putere este egală cu puterea acelui punct faţă de cerc.

3. Raportul distanţelor de la un punct oarecare situat pe cercul fundamental la două puncte inverse este constant.

Într-adevăr, din relaţia $OA \cdot OA' = OM^2$, unde M este situat pe cercu- fundamental iar A, A' cele două puncte inverse, rezultă asemănarea triunghiul rilor OMA şi OMA', de unde se deduce

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{OA}{OM},$$

astfel, că raportul $\frac{MA}{MA'}$ nu depinde de poziţia lui M pe cercul fundamental.

4. Două cercuri date pot fi transformate totdeauna printr-o aceeaşi inversiune, fie în două drepte, fie în două cercuri concentrice, dacă cercurile nu se intersectează.

5. *Inversorul lui* PLANCELLIER este un instrument care trasează curbele plane transformate prin inversiune. Este construit pe baza teoremei :

Fie un romb $MPM'Q$ şi un punct O astfel, încît $OP = OQ$. Punctul O rămînînd fix, dacă presupunem rombul articulat şi lungimile OP, OQ constante, atunci punctele M, M' vor descrie două figuri inverse una faţă de cealaltă (fig. 6.107).

Într-adevăr, punctele M, M', O fiind egal depărtate de P şi Q sînt situate pe mediatoarea lui PQ. Descriind din P ca centru un cerc care trece prin M, M', produsul $OM \cdot OM'$ va fi constant ca fiind egal cu puterea punctului O în raport cu acest cerc, adică egal cu $OP^2 - PM^2$. Deci cînd punctul M descrie o curbă, punctul M' va descrie curba transformată prin inversiunea de pol O.

6. *Inversorul lui* HART este un alt instrument folosit pentru trasarea curbelor inverse şi se compune din patru bare articulate în punctele A, B, C, D

astfel, încît să formeze un contraparalelogram (un trapez isoscel fără baze). Printr-un punct fix O luat pe bara AB se duce o paralelă cu bazele care intersectează celelalte bare în punctele M, M', L devenite indisolubil fixate pe aceste

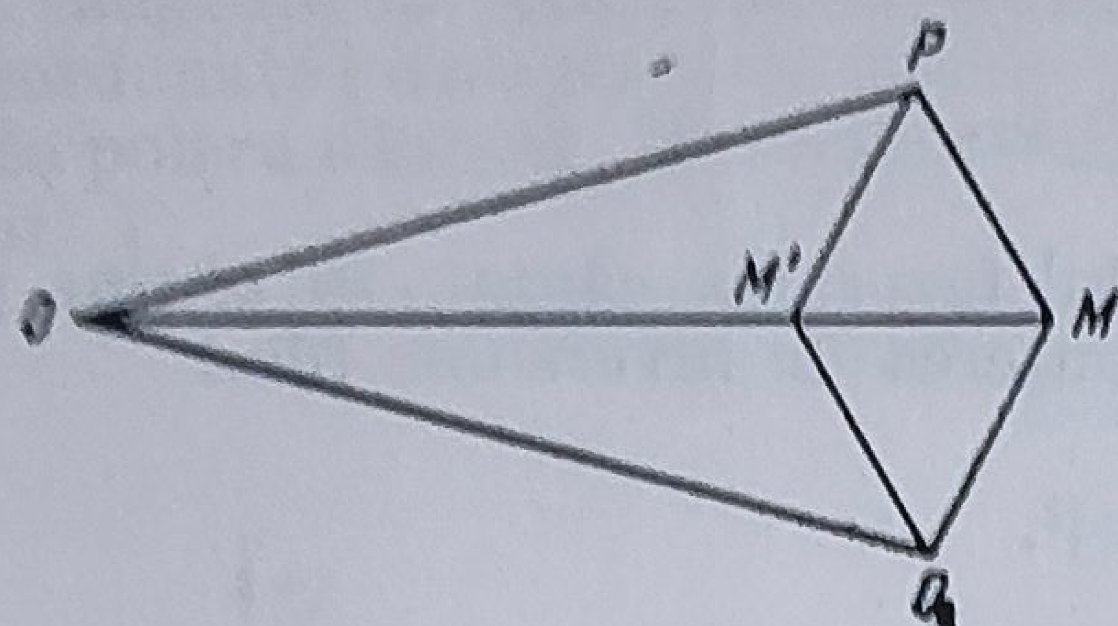


Fig. 6.107. Principiul inversorului lui PLANCELLIER.

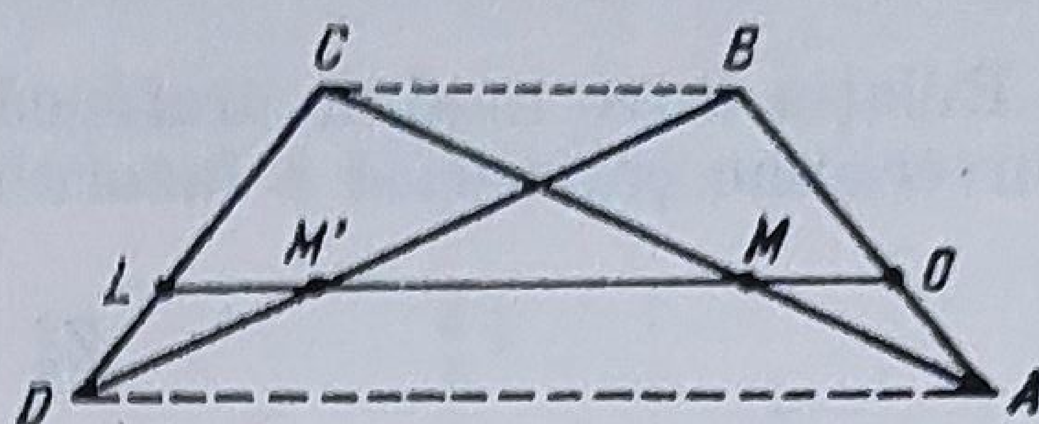


Fig. 6.108. Principiul inversorului lui HART.

bare. Produsul $OM \cdot OM'$ fiind constant indiferent de poziţia barelor, punctele M, M' sînt inverse; deci cînd M descrie o curbă dată, punctul M' va descrie curba inversă, polul inversiunii rămînînd fix în O (fig. 6.108).

6.5.2. INVERSIUNEA FAZORIALĂ

6.5.2.1. Generalităţi. Fie un fazor $\underline{V}$ de modul V şi de argument φ, a cărei expresie este

$$\underline{V} = V \underline{|\varphi}$$

Inversul acestui fazor faţă de originea sa, puterea de inversiune k^2 fiind un număr real, este fazorul

$$\underline{W} = \frac{k^2}{\underline{V}} = \frac{k^2}{V} \underline{|-\varphi},$$

a cărui modul satisface condiţia de inversiune

$$|\underline{W}| \cdot |\underline{V}| = k^2,$$

dar al cărui argument este conjugat argumentului fazorului dat.

Rezultă deci, că inversiunea fazorială se deosebeşte de inversiunea geometrică prin aceea că figura inversă este conjugată figurii inversate.

În cazul cînd puterea de inversiune este un număr complex, figura inversă este *simetrică* figurii inversate în raport cu afixul numărului complex, rădăcina pătrată a puterii de inversiune. Într-adevăr, fie $\underline{Z}_1$ fazorul de inversat, $\underline{Z}^2_0$ puterea de inversiune şi $\underline{Z}_2$ fazorul invers; inversiunea căutată este dată de relaţia

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_0^2}{\underline{Z}_1}$$

care, scrisă în funcţie de module şi argumente, devine

$$Z_2 \underline{|\varphi_2} = \frac{Z_0^2 \underline{|2\varphi_0}}{Z_1 \underline{|\varphi_1}},$$

de unde rezultă dubla egalitate

$$Z_2 = \frac{Z_0^2}{Z_1} \quad \text{sau} \quad Z_1 \cdot Z_2 = Z_0^2$$

şi

$$\varphi_2 = 2\varphi_0 - \varphi_1.$$

Relaţia între module arată că modulul fazorului căutat se obţine printr-o inversiune *geometrică* a fazorului $\underline{Z}_1$, puterea de inversiune fiind

$$Z_0^2 = [|\underline{Z}_0|]^2.$$

Relaţia între argumente, care poate fi scrisă

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

sau

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \varphi_2 - \varphi_0,$$

arată că direcţia fazorului $\underline{Z}_2$ este simetrică cu direcţia fazorului $\underline{Z}_1$ faţă de direcţia afixului lui $\underline{Z}_0$. Într-adevăr, luînd pe acesta din urmă ca origine de fază, se obţine

$$\varphi_2 = -\varphi_1,$$

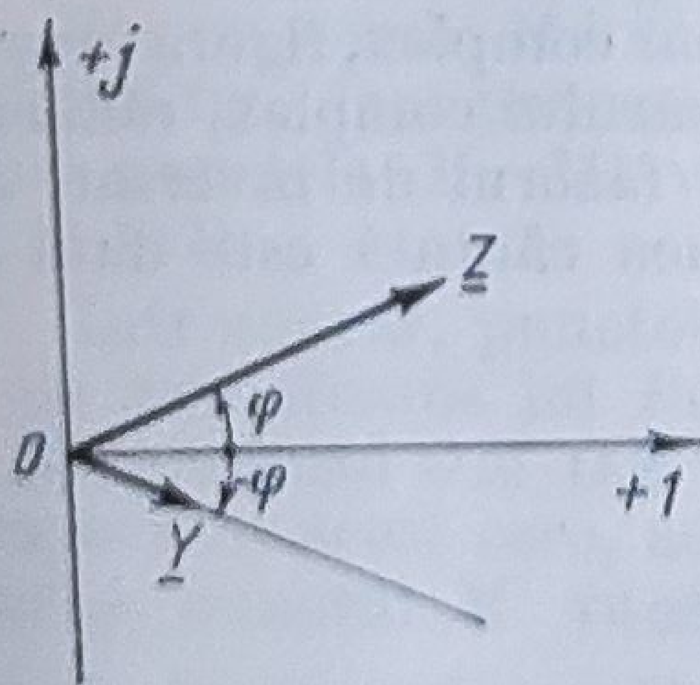
ceea ce arată simetria celor două direcţii faţă de $\underline{Z}_0$.

OBSERVAŢIE. Inversiunea fazorială la care puterea de inversiune este un număr real este un caz particular al inversiunii fazoriale la care puterea de inversiune este un număr complex, numărul real fiind un număr complex la care partea complexă e nulă şi afixul său este aşezat pe axa reală.

6.5.2.2. **Determinarea grafică a inversului unui fazor dat.** Determinarea grafică a inversului unui fazor se face diferit, după cum puterea de inversiune este un număr real sau complex.

a) Puterea de inversiune este un număr real. Fie fazorul $\underline{Z} = Z|\underline{\varphi}$. Inversul său este

$$\underline{Y} = \frac{k^2}{Z} |\underline{-\varphi}.$$



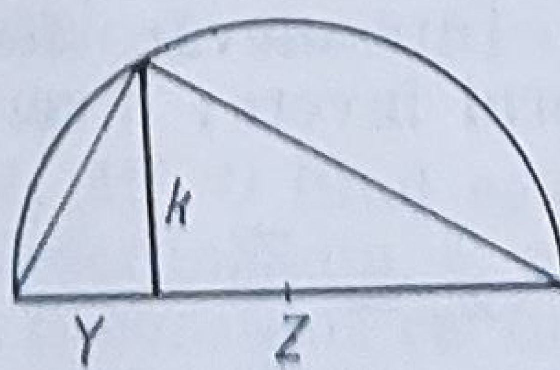


Fig. 6.109. Construirea inversului unui fazor, puterea de inversiune fiind un număr real.

Construcţia grafică a acestui fazor se face astfel (fig. 6.109): Se construieşte unghiul $-\varphi$, obţinîndu-se direcţia fazorului $\underline{Y}$. Pentru a determina modulul respectiv, se porneşte de la relaţia

$$Z \cdot Y = k^2,$$

care se poate obţine prin construcţia mediei proporţionale.

O construcţie mai potrivită epurelor pentru determinarea modulului fazorului invers se obţine folosind metoda de construire a polarei unui punct exterior faţă de un cerc dat (fig. 6. 110). Pentru aceasta se construieşte mai întîi fazorul conjugat $\underline{Z}^*$ al fazorului dat. Din vîrful acestui fazor se duc cele două tangente la cercul de inversiune construit cu centrul în originea axelor de coordonate; dreapta care uneşte punctele de contact ale celor două tangente este polara căutată. Ea intersectează fazorul $\underline{Z}^*$ în punctul $\underline{Y}$, vîrful fazorului căutat $\underline{Y}$.

Aplicînd triunghiului OPZ^* teorema catetei rezultă

$$Y \cdot Z = k^2.$$

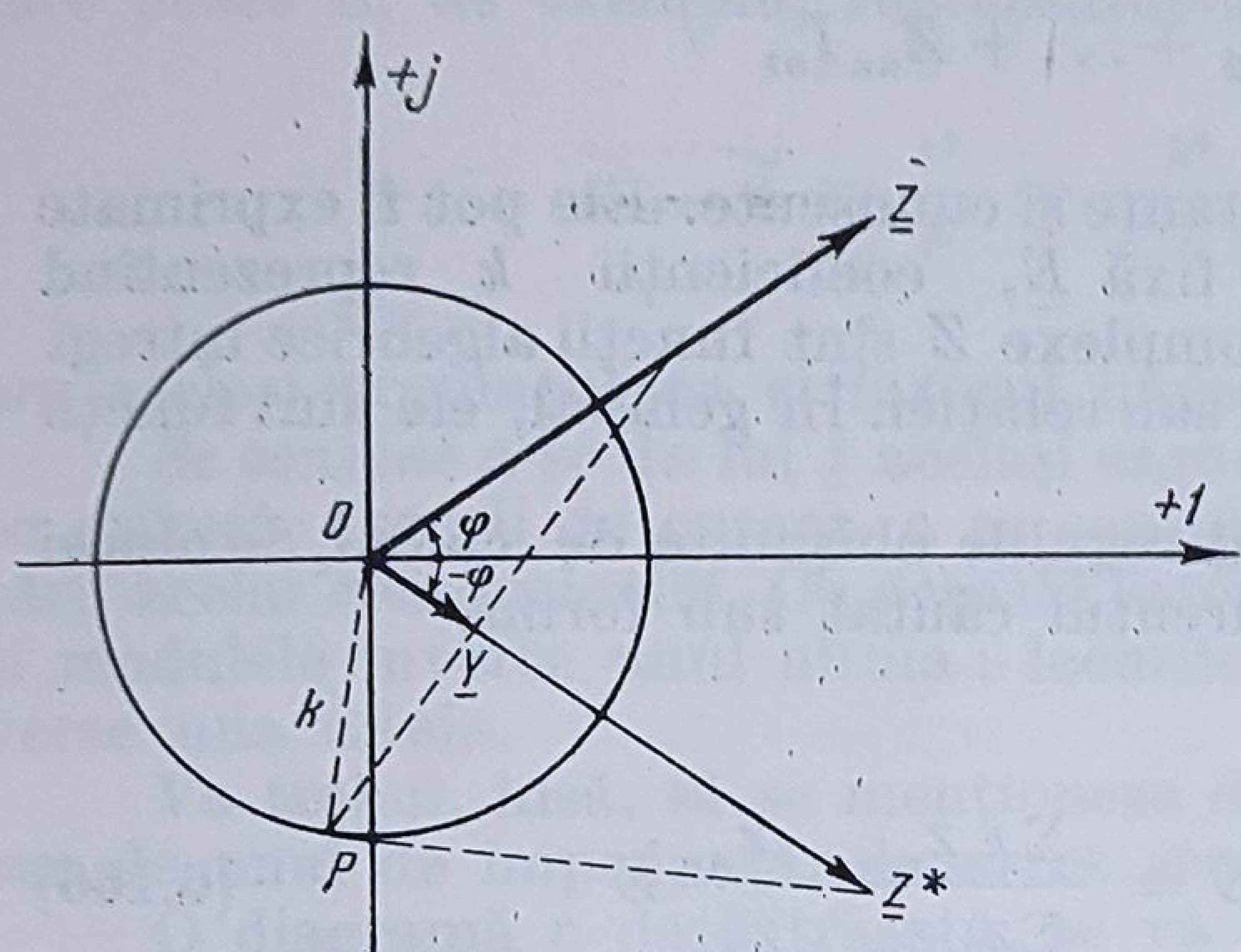


Fig. 6.110. Construirea inversului unui fazor cu ajutorul polarei.

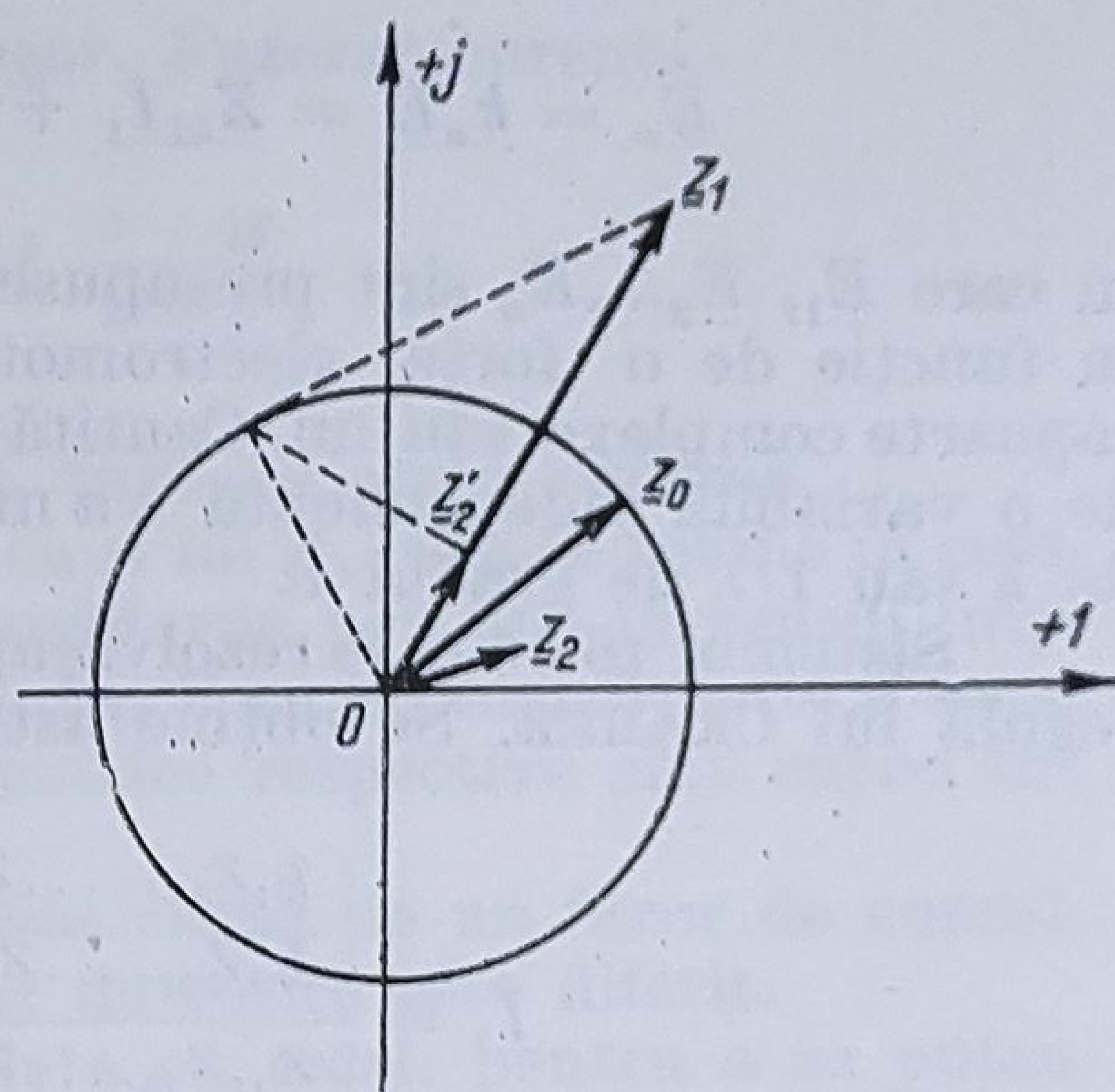


Fig. 6.111. Construirea inversului unui fazor, puterea de inversiune fiind un număr complex.

b) Puterea de inversiune este un număr complex. În acest caz (fig. 6.111), dacă $\underline{Z}_0^2$ este puterea de inversiune, se construieşte cercul de rază $|\underline{Z}_0|$ şi, în raport cu acest cerc, cu ajutorul polarei vîrfului fazorului $\underline{Z}_1$, se găseşte vîrful fazorului $\underline{Z}_2$, a cărui lungime este chiar modulul Z_2 căutat. Luîndu-se apoi simetricul acestui fazor faţă de afixul $\underline{Z}_0$, se găseşte fazorul inversat $\underline{Z}_2$ căutat.

OBSERVAŢII. 1. Pentru a construi polara căutată, nu este necesar a se duce cele două tangente la cerc. Este suficient a se construi un cerc de OZ^* ca diametru, care să intersecteze cercul de rază unitară chiar în punctele de contact căutate, după cum se poate demonstra uşor.

2. În cazul cînd fazorul a cărui inversiune se caută este mai mic decît raza cercului de inversiune, se procedează în sens invers: din vîrful fazorului $\underline{Y}$ se ridică o perpendiculară care intersectează cercul de inversiune în punctul P; ducîndu-se tangenta la cerc în acest punct, aceasta intersectează semidreapta OZ^* în punctul Z^*, vîrful fazorului conjugat $\underline{Z}^*$. Se construieşte conjugatul acestui fazor obţinîndu-se fazorul $\underline{Z}$ căutat.

6.6. DIAGRAMELE-LOC GEOMETRIC

6.6.1. GENERALITĂŢI

Fiind dată o maşină electrică alimentată de o reţea electrică de curent alternativ sinusoidal, sau o reţea electrică oarecare, la diverse regimuri de funcţionare, prin diferitele circuite circulă diverşi curenţi. Aceşti curenţi se

determină cu ajutorul teoremelor lui KIRCHHOFF, prin metoda circuitelor independente, obţinîndu-se un număr de ecuaţii liniare egal cu numărul curenţilor căutaţi.

Aceste ecuaţii se numesc ecuaţiile de funcţionare în regim permanent ale *maşinii* sau *reţelei* electrice şi sînt, în general,

$$\left.\begin{aligned} \underline{E}_1 &= k_1\underline{E} = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 + \ldots + \underline{Z}_{1n}\underline{I}_n, \\ \underline{E}_2 &= k_2\underline{E} = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 + \ldots + \underline{Z}_{2n}\underline{I}_n, \\ &\vdots \\ \underline{E}_n &= k_n\underline{E} = \underline{Z}_{n1}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{n2}\underline{I}_2 + \ldots + \underline{Z}_{nn}\underline{I}_n, \end{aligned}\right\} \quad (6.165)$$

în care $\underline{E}_1, \underline{E}_2, \ldots, \underline{E}_n$ sînt presupuse constante şi cunoscute. Ele pot fi exprimate în funcţie de o forţă electromotoare fixă $\underline{E}$, coeficienţii k reprezentînd rapoarte complexe sau nu. Cantităţile complexe $\underline{Z}$ sînt funcţii algebrice întregi de o variabilă independentă λ a maşinii sau relaţiei. În general, ele sînt funcţii de λ sau $1/\lambda$ de gradul 1.

Sistemul (6.165) se rezolvă aplicînd regulile obişnuite de calcul, de obicei regula lui CRAMER. Se obţine astfel curentul căutat sub forma

$$\underline{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} k_1\underline{Z}_{12}\ldots\ldots\underline{Z}_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_n\underline{Z}_{n2}\ldots\underline{Z}_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{12}\ldots\underline{Z}_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{Z}_{n1}\underline{Z}_{n2}\ldots\underline{Z}_{nn} \end{vmatrix}}\underline{E} = \frac{\Sigma k_1\underline{Z}_{22}\ldots\underline{Z}_{nn}}{\Sigma\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22}\ldots\underline{Z}_{nn}}\underline{E} \quad (6.166)$$

care reprezintă expresia generală a unui curent oarecare, circulînd în circuitul electric dat. Explicitînd expresia (6.166) în funcţie de o variabilă independentă, se obţine

$$\underline{I} = \underline{E}\,\frac{\underline{A}_0 + \underline{A}_1\lambda + \underline{A}_2\lambda^2 + \ldots + \underline{A}_m\lambda^m}{\underline{B}_0 + \underline{B}_1\lambda + \underline{B}_2\lambda^2 + \ldots + \underline{B}_n\lambda^n} = \underline{E}\,\frac{\underline{A}(m)}{\underline{B}(n)}. \quad (6.167)$$

În această expresie $\underline{A}_j$ şi $\underline{B}_j$ reprezintă mărimi complexe bine definite, iar $\underline{A}\,(m)$ şi $\underline{B}\,(n)$, funcţii complexe, de gradul m şi respectiv n.

Impedanţa aparentă a circuitului este dată de relaţia

$$Z = \frac{\underline{E}}{\underline{I}_1} = \frac{\Sigma\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22}\ldots\underline{Z}_{nn}}{\Sigma k_1\underline{Z}_{22}\ldots\underline{Z}_{nn}} = \frac{\underline{B}(n)}{\underline{A}(m)}. \quad (6.168)$$

Comparînd relaţiile (6.167) şi (6.168), se vede că $\underline{I}$ şi $\underline{Z}$ sînt funcţii inverse una alteia. Oricare din ele s-ar lua în consideraţie, se vede că, atunci cînd λ variază între $-\infty$ şi $+\infty$, fazorii respectivi $\underline{I}$ sau $\underline{Z}$ iau diverse valori (ca mărime şi poziţie). Vîrful oricăruia din aceşti fazori va descrie o curbă (un loc *geometric*, *hodograful* acelui fazor care se numeşte *diagrama-loc geometric a maşinii* sau *a reţelei electrice*, sau simplu *diagrama maşinii* sau *a reţelei*.

Trasarea diagramei-loc geometric se face, în general, dîndu-se diferite valori variabilei independente şi figurîndu-se punctele corespunzătoare într-un

sistem de referință dat. De multe ori, anumite proprietăți speciale ale figurilor permit construirea diagramei cu mai multă ușurință.

Se poate întîmpla, uneori, ca funcția inversă să fie mai ușor de construit (spre exemplu o diagramă de impedanță) se va construi atunci această diagramă și se va obține diagrama căutată aplicînd o metodă de inversiune. În acest caz, pentru simplificarea figurii, se face uneori o convenție asupra semnelor argumentelor după cum urmează:

Fie astfel fazorul impedanță

$$\underline{Z} = x + jy,$$

care poate fi, de exemplu, reprezentat mai ușor. Fazorul curent

$$\underline{I} = \frac{k^2}{\underline{Z}} = \frac{k^2}{x + jy} = k^2 \, \frac{x - jy}{x^2 + y^2}$$

are același argument ca și fazorul impedanță, însă de semn contrar.

Se convine a se da lui $\underline{I}$ același argument ca și lui $\underline{Z}$, ceea ce revine în ceea ce privește fazorii de curent, a se considera unghiurile pozitive în sensul mișcării acelor ceasornicului. Cu această convenție, $\underline{I}$ și $\underline{Z}$ au aceeași direcție și sens, iși modulele inverse unul altuia: locurile geometrice respective sînt curbe inverse una alteia.

Va trebui, însă, să se menționeze dacă este vorba de un fazor de curent sau de unul de impedanță, deoarece sensul lor de rotire este diferit.

O diagramă o dată trasată, se va completa cu *scări*, pentru a se putea determina în fiecare punct valoarea corespunzătoare a variabilei, precum și cu alte mărimi caracteristice.

Diagrama astfel completată va fi imaginea concretă a proprietăților mașinii sau ale rețelei electrice; ea va da posibilitatea urmăririi tuturor regimurilor de funcționare.

6.6.2. PROPRIETĂȚILE GENERALE ALE DIAGRAMELOR *

Relația (6.168) poate fi scrisă sub forma complexă explicită

$$\underline{Z} = \frac{B'(n) + jB''(n)}{A'(m) + jA''(m)} \tag{6.169}$$

sau, făcînd rațional numitorul,

$$\underline{Z} = \frac{[A'(m)\,B'(n) + A''(m)\,B''(n)] + j\,[A'(m)\,B''(n) - A''(m)\,B'(n)]}{[A'(m)]^2 + [A''(m)]^2} \tag{6.170}$$

Gradul numărătorului acestei expresii este $m + n$, iar al numitorului $2m$.

Dacă $A'(m)$ și $A''(m)$ au un număr m' de rădăcini comune**, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda$, ambii termeni ai expresiei (6.170) se divid cu produsul

$$(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,\ldots\ldots\,(\lambda - \lambda_{m'}),$$

* După L. OTS-CHEVALIER [209].

** Aceste rădăcini pot fi reale sau imaginare. În general, în cazurile care ne interesează, ele sînt reale.

ceea ce micşorează gradul lor cu m'. Expresia (6.170) devine atunci :

$$\underline{Z} = \frac{C'(m+n-m') + jC''(m+n-m')}{D'(2m-m')},$$

avînd componentele după axe

$$Z' = \frac{C'(m+n-m')}{D'(2m-m')} \text{ şi } Z'' = \frac{C''(m+n-m')}{D'(2m-m')}.$$

Din relaţia (6.169) se deduce modulul

$$\underline{Z}^2 = Z'^2 + Z''^2 = \frac{[B'(n)]^2 + [B''(n)]^2}{[A'(m)]^2 + [A''(m)]^2}.$$

Se enunţă următoarele proprietăţi, uşor de verificat :

a) Gradul curbei lui $\underline{Z}$ este dat de cea mai mare dintre valorile $m+n-m'$ şi $2m-m'$.

b) Curba lui $\underline{Z}$ trece prin origine, dacă $m > n$ sau $m' > 0$. Acest punct va fi simplu, dublu sau triplu,..., după valoarea lui n'', dacă $m=n$, sau după valoarea lui $n''+1$, dacă $m>n$, n'' fiind numărul de rădăcini *diferite* ale numărătorului.

c) Curba lui $\underline{Z}$ este discontinuă, dacă $m<n$ sau dacă $m'>0$. Numărul de ramuri ale acestei curbe este egal cu m'' sau cu $m''+1$, după cum $m>n$ sau $m<n$.

d) Forma curbei este astfel, încît ea nu poate fi intersectată de un cerc decît într-un număr de puncte dat de cea mai mare dintre valorile $2m$ sau $2n$.

e) Inversa curbei $\underline{Z}$ în raport cu un punct exterior oarecare este o curbă închisă de aceeaşi speţă, al cărei grad este dat de valoarea cea mai mare dintre $2m$ sau $2n$.

f) Inversa curbei lui $\underline{Z}$ în raport cu unul dintre punctele sale este o curbă de aceeaşi speţă însă discontinuă, al cărui grad este mai mic decît cea mai mare dintre valorile $2m$ sau $2n$.

6.6.3. STUDIUL CÎTORVA LOCURI GEOMETRICE PARTICULARE

În general, diagramele-loc geometric ale maşinilor electrice sau ale reţelelor electrice reprezintă curbe simple, adică drepte sau cercuri. Foarte rar întîlnim alte curbe de ordinul doi (conice) şi mai rar curbe de ordin superior. Acestea din urmă se întîlnesc mai ales în radiofonie.

În cele ce urmează se vor examina mai amănunţit locurile geometrice reprezentate prin dreapte sau cercuri.

6.6.3.1. Locul geometric al fazorului $\underline{Z} = \underline{A} + \lambda\underline{B}$. Fie

$$\underline{A} = a_0 + ja_1 \text{ şi } \underline{B} = b_0 + jb_1.$$

Ecuaţia fazorului al cărui loc geometric se caută poate fi scrisă

$$\underline{Z} = a_0 + ja_1 + \lambda(b_0 + jb_1) = a_0 + \lambda b_0 + j(a_1 + \lambda b_1).$$

Din această expresie reiese că $\underline{Z}$ este un fazor a cărei parte reală este

$$x = a_0 + \lambda b_0$$

şi a cărui parte complexă este

$$y = a_1 + \lambda b_1.$$

Dacă se elimină λ, între aceste două expresii, se obţine

$$\frac{x - a_0}{b_0} = \frac{y - a_1}{b_1}$$

care este ecuaţia unei drepte. Deci, locul geometric al fazorului

$$\underline{Z} = \underline{A} + \lambda\, \underline{B}, \tag{6.171}$$

cînd λ variază de la $-\infty$ la $+\infty$, este o dreaptă. Lucrul acesta se poate arăta şi direct. Într-adevăr, fie fazorii $\underline{A}$ şi $\underline{B}$ (fig. 6.112). Dacă se dau diverse valori lui λ, se obţine locul geometric căutat. Într-adevăr, pentru $\lambda = 0$ se obţine ca punct al locului geometric chiar vîrful A al fazorului $\underline{A}$. Pentru $\lambda = 1$ se

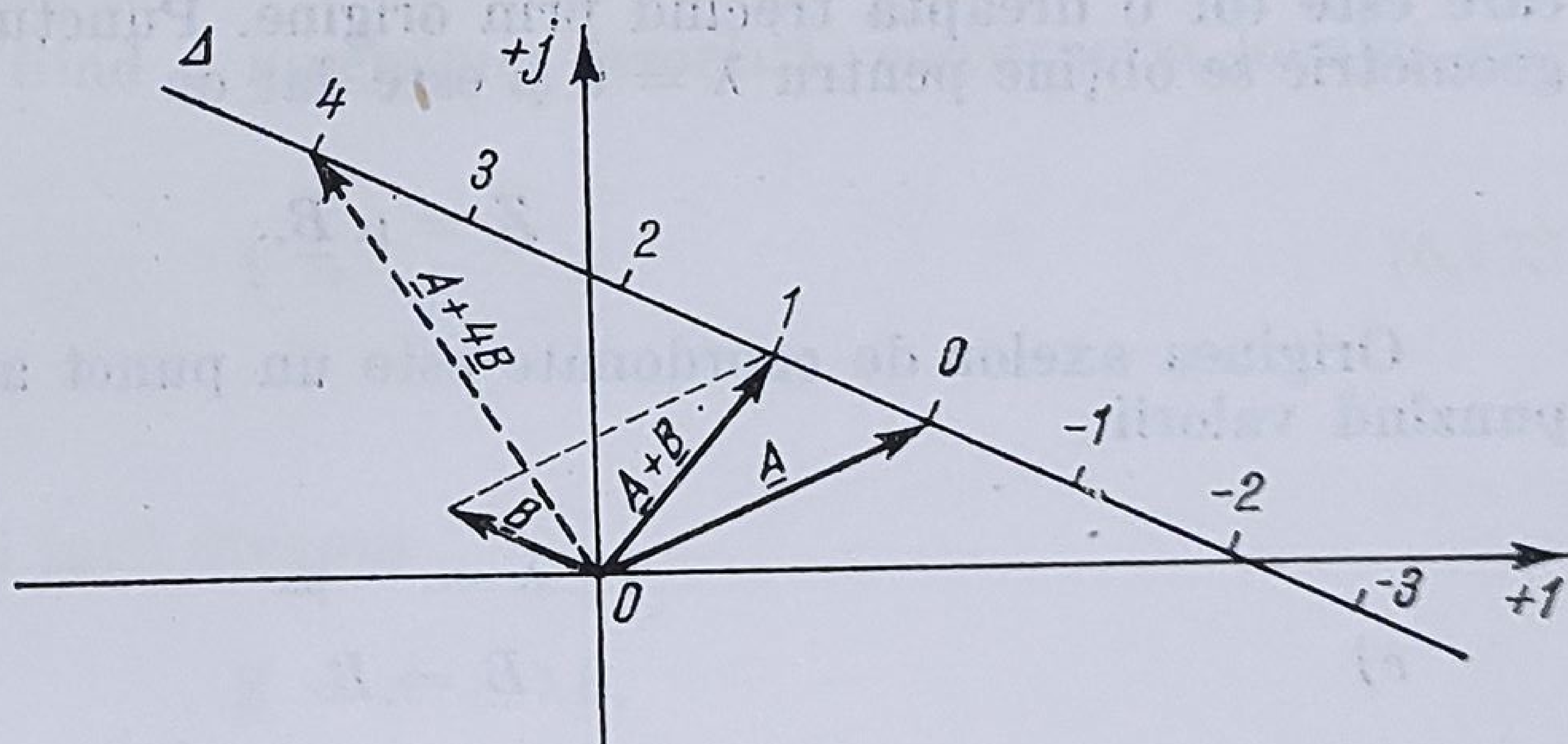


Fig. 6.112. Locul geometric al fazorului $\underline{Z} = \underline{A} + \lambda\underline{B}$.

obţine $\underline{Z} = \underline{A} + \underline{B}$, trebuind deci să se facă adunarea fazorilor $\underline{A}$ şi $\underline{B}$, operaţie cunoscută. Pentru $\lambda = 2$ va trebui să se adune fazorii $\underline{A}$ şi $2\underline{B}$, ceea ce înseamnă să se adauge rezultantei precedente încă o dată fazorul $\underline{B}$ şi să se facă rezultanta.

Procedînd în acelaşi mod, se găseşte locul geometric căutat, care este dreapta Δ, care se obţine aşezînd în continuare unul după altul fazorii echipolenţi cu $\underline{B}$.

De aici rezultă că locul geometric căutat este o dreaptă paralelă cu direcţia fazorului $\underline{B}$. În consecinţă, pentru a construi locul geometric al fazorului dat de ecuaţia (6.171) este suficient a duce prin vîrful fazorului $\underline{A}$ o paralelă la direcţia fazorului $\underline{B}$.

Gradarea locului geometric se face în funcţie de λ. Astfel, punctul de zero al scării este chiar punctul corespunzător vîrfului fazorului $\underline{A}$. Pornind de la acest punct se poartă de o parte şi de alta mărimi egale cu modulul fazorului $\underline{B}$,

luîndu-se acesta ca unitate de măsură. Sensul pozitiv sau negativ se determină ţinîndu-se seama de convenţia ce s-a făcut mai înainte*. În general, şi dacă nimic nu este specificat, se consideră ca sens pozitiv, sensul direct trigonometric.

Cazuri particulare. După forma fazorilor componenţi, se pot deosebi diverse cazuri particulare :

a)

$$\underline{A} = 0.$$

În acest caz, ecuaţia locului geometric este

$$\underline{Z} = \lambda \underline{B}$$

şi locul geometric căutat este o dreaptă trecînd prin origine şi a cărei direcţie se confundă cu direcţia vectorului $\underline{B}$. Punctul de zero al scării locului geometric este de data aceasta chiar originea axelor de coordonate.

b)

$$\underline{A} = \mu \underline{B}.$$

Ecuaţia locului geometric devine

$$\underline{Z} = (\lambda + \mu)\, \underline{B},$$

care este tot o dreaptă trecînd prin origine. Punctul de zero al scării locului geometric se obţine pentru $\lambda = 0$ şi este dat de

$$\underline{Z} = \mu\, \underline{B}.$$

Originea axelor de coordonate este un punct al locului geometric corespunzînd valorii

$$\lambda = -\mu.$$

c)

$$\underline{B} = B.$$

Ecuaţia locului geometric devine

$$\underline{Z} = \underline{A} + \lambda\, B.$$

Întrucît fazorul $\underline{B}$ s-a redus numai la componenta lui reală, locul geometric căutat este o dreaptă paralelă cu axa reală şi trecînd prin vîrful fazorului $\underline{A}$.

d)

$$\underline{B} = \pm \mathrm{j}B.$$

Ecuaţia locului geometric devine

$$\underline{Z} = \underline{A} \pm \lambda \mathrm{j} B$$

---

* Vezi 6.6.1

şi deoarece fazorul $\underline{B}$ s-a redus la componenta lui complexă, locul geometric căutat este o dreaptă paralelă cu axa complexă, trecînd prin vîrful fazorului $\underline{A}$.

Observaţii asupra variabilei independente λ. În studiul prezentat mai sus, nu s-a făcut nici o rezervă asupra formei variabilei independente λ. Aceasta poate fi la rîndul ei o funcţie oarecare de θ, de exemplu

$$\lambda = f(\theta). \tag{6.172}$$

În acest caz, scara poate să fie gradată în raport cu această variabilă independentă şi diviziunile ei să urmeze legea dată de funcţia (6.172); scara se numeşte *funcţională*.

În cazul cînd gradarea se face în funcţie de λ, scara este întotdeauna liniară, oricare ar fi funcţia lui λ.

6.6.3.2. **Locul geometric al fazorului** $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{A} + \lambda \underline{B}}$. Este uşor de văzut că fazorul dat este inversul fazorului

$$\underline{Z} = \underline{A} + \lambda \underline{B},$$

al cărui loc geometric este o dreaptă. Ţinînd seama că inversa unei drepte este un cerc care trece prin origine*, locul geometric al fazorului dat este un cerc trecînd prin origine.

Această inversiune fiind o inversiune fazorială, construcţia locului geometric al fazorului

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{A} + \lambda \underline{B}} \tag{6.173}$$

se face astfel:

Se construieşte mai întîi dreapta

$$\underline{Z} = \underline{A} + \lambda \underline{B},$$

apoi conjugata ei. Cercul invers al dreptei conjugate trece prin origine şi centrul său se găseşte pe perpendiculara dusă din origine pe această dreaptă. Dacă OP este distanţa de la origine la dreapta, atunci diametrul este dat de relaţia

$$2r = \frac{k^2}{OP} = OP_0,$$

şi se construieşte cu ajutorul cercului de inversiune. Trasarea cercului se face imediat iar gradarea lui se obţine ducînd din origine raze vectoare prin diviziunile dreptei $\underline{Z}^*$, conjugata dreptei $\underline{Z}$. Originea corespunde punctelor de la infinit ale dreptei (fig. 6.113).

---

* Vezi 6.5.1.3 punctul *b*.

Pe cale analitică, se poate arăta că locul geometric căutat este un cerc trecînd prin origine. Pentru aceasta, se explicitează ecuația (6.173) obținîndu-se

$$\underline{Y} = \frac{a_0 + \lambda b_0}{(a_0 + \lambda b_0)^2 + (a_1 + \lambda b_1)^2} - j \frac{a_1 + \lambda b_1}{(a_0 + \lambda b_0)^2 + (a_1 + \lambda b_1)^2}.$$

Notînd partea reală a fazorului $\underline{Y}$

$$\frac{a_0 + \lambda b_0}{(a_0 + \lambda b_0)^2 + (a_1 + \lambda b_1)^2} = x,$$

partea complexă

$$\frac{a_1 + \lambda b_1}{(a_0 + \lambda b_0)^2 + (a_1 + \lambda b_1)^2} = y$$

și eliminînd pe λ între aceste relații se obține

$$(x^2 + y^2)(a_1 b_0 - a_0 b_1) + b_1 x + b_0 y = 0,$$

care este ecuația unui cerc care trece prin origine.

Elementele caracteristice ale acestui cerc sînt coordonatele centrului

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_1}{a_0 b_1 - a_1 b_0};$$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0} \qquad (6.174)$$

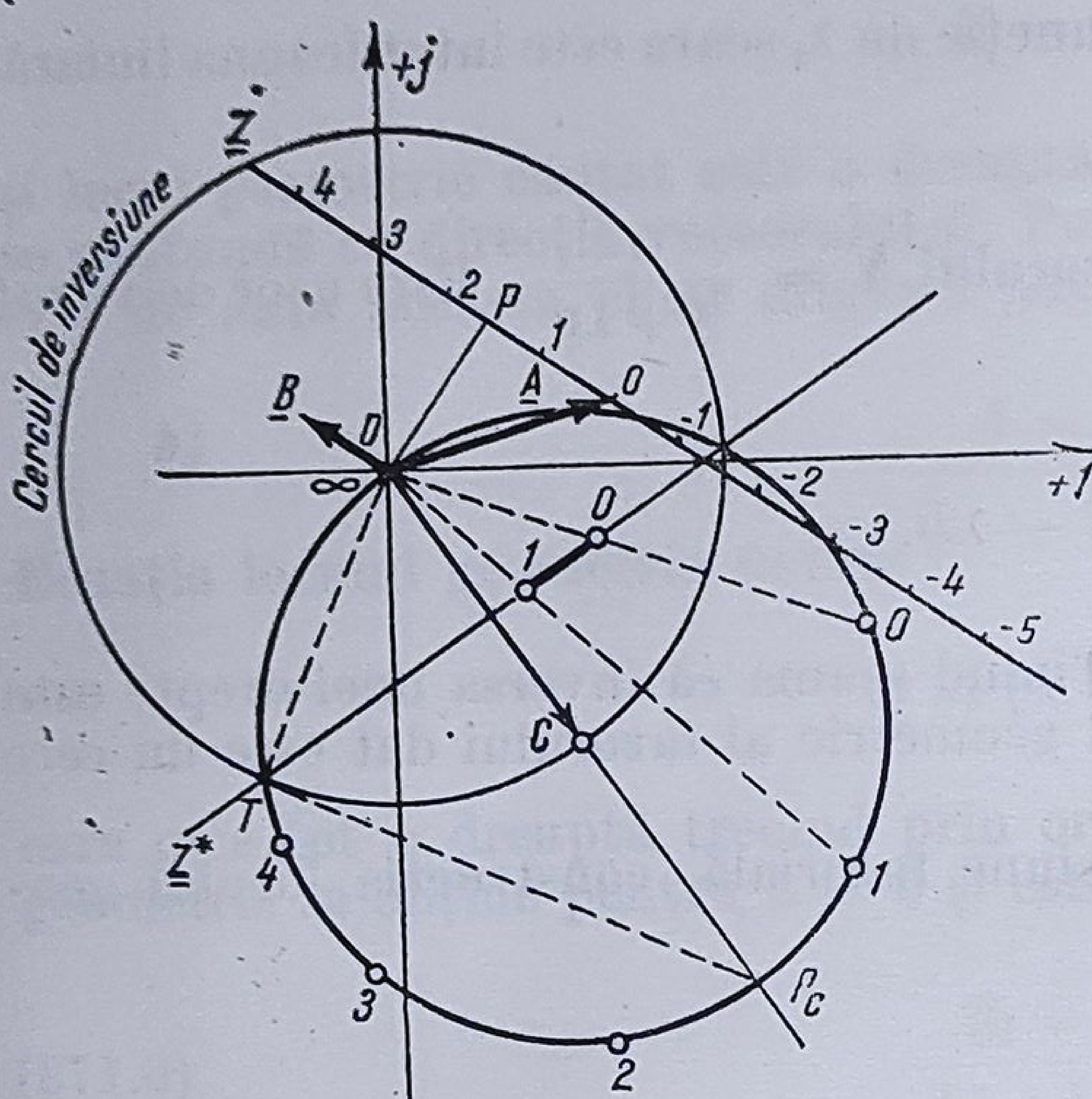


Fig. 6.113. Locul geometric al fazorului $\underline{Y} = 1/(\underline{A} + \lambda\underline{B})$.

și raza

$$\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_0^2 + b_1^2}{a_0 b_1 - a_1 b_0}. \qquad (6.175)$$

Scriind ecuația normală a dreptei reprezentînd locul geometric al fazorului $\underline{Z} = \underline{A} + \lambda \underline{B}$,

$$\frac{b_1}{\sqrt{b_0^2 + b_1^2}} x - \frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + b_1^2}} y + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{\sqrt{b_0^2 + b_1^2}} = 0, \qquad (6.176)$$

distanța de la origine la această dreaptă este

$$\delta = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{\sqrt{b_0^2 + b_1^2}}.$$

Comparînd această relație cu expresia (6.175) care dă mărimea razei, se vede că diametrul cercului-loc geometric căutat este egal cu inversa distanței OP de la origine la dreapta-loc geometric a fazorului $\underline{Z}$, adică același rezultat la care se ajunsese direct prin metoda inversiunii.

Coeficientul unghiular al dreptei (6.176) fiind

$$m = \frac{b_1}{b_0},$$

coeficientul unghiular al conjugatei acesteia este

$$m_c = -\frac{b_1}{b_0}.$$

Coeficientul unghiular al diametrului principal OM se obţine din relaţia (6.174) şi este

$$m_d = \frac{b_0}{b_1}.$$

Înmulţind aceşti doi coeficienţi unghiulari se obţine

$$m_c m_d = -1,$$

de unde rezultă că acest diametru este perpendicular pe conjugata dreptei de la numitor, ceea ce se găsise şi pe calea directă.

6.6.3.3. **Locul geometric al vectorului $\underline{\mathbf{I}} = (\underline{\mathbf{A}} + \lambda\underline{\mathbf{B}})/(\underline{\mathbf{C}} + \lambda\underline{\mathbf{D}})$.** Fie de găsit locul geometric al fazorului

$$\underline{I} = \frac{\underline{A} + \lambda \underline{B}}{\underline{C} + \lambda \underline{D}}. \tag{6.177}$$

Se observă de la început că această ecuaţie se reproduce prin inversiune, fapt destul de important şi care va fi folosit mai tîrziu.

Efectuînd împărţirea, se obţine

$$\underline{I} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}} + \left(\underline{A} - \frac{\underline{B}.\underline{C}}{\underline{D}}\right)\frac{1}{\underline{C} + \lambda \underline{D}} = \underline{M} + \underline{N} \times \underline{I}_0 \tag{6.178}$$

în care s-a notat

$$\underline{M} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}; \quad \underline{N} = \underline{A} - \frac{\underline{B}.\underline{C}}{\underline{D}}; \quad \underline{I}_0 = \frac{1}{\underline{C} + \lambda \underline{D}}.$$

Să interpretăm relaţia (6.178). Pentru aceasta, să considerăm o anumită valoare a lui λ. Produsul $\underline{N} \times \underline{I}_0$ arată că fazorul $\underline{I}_0$ este rotit cu un unghi egal cu argumentul fazorului $\underline{N}$ şi modulul său este înmulţit cu modulul aceluiaşi fazor. Pe de altă parte, locul geometric al fazorului $\underline{I}_0$ reprezintă un cerc al cărui centru şi diametru principal sînt bine definite şi care trece prin origine. Se poate spune deci, că prin înmulţirea cu fazorul $\underline{N}$, diametrul principal al cercului este rotit cu un unghi egal cu argumentul fazorului $\underline{N}$ iar mărimea acestui diametru se înmulţeşte cu modulul aceluiaşi fazor. Deci, $\underline{N} \times \underline{I}_0$ reprezintă tot un cerc trecînd prin origine.

Pentru a avea completă ecuația (6.178), urmează ca la fiecare punct al cercului obținut să se adauge fazorul constant $\underline{M}$. Rezultatul obținut va fi tot un cerc, *deplasat în același sens* cu cantitatea $\underline{M}$. Pentru aceasta este suficient a se deplasa numai centrul cercului $\underline{N} \times \underline{I}_0$ cu fazorul $\underline{M}$.

Din cele ce preced rezultă că locul geometric al vectorului reprezentat de ecuația (6.178) este un cerc pentru care originea este un punct exterior.

Există mai multe posibilități de a construi cercul-loc geometric al fazorului $\underline{I} = (\underline{A} + \lambda\underline{B}) / (\underline{C} + \lambda\underline{D})$:

a) O primă metodă constă în a construi relația fazorială (6.178). Pentru aceasta se procedează în modul următor (fig. 6. 114):

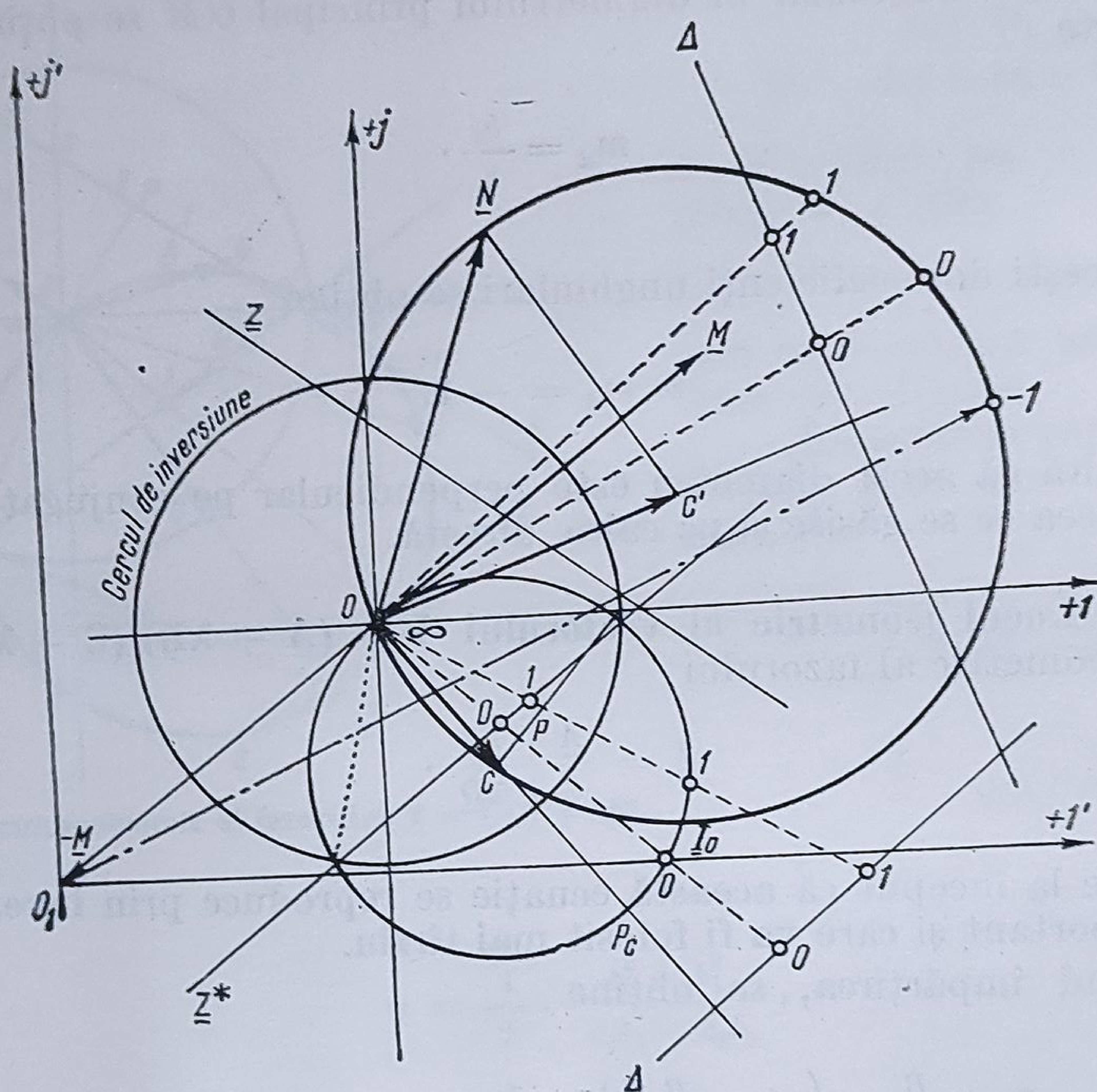


Fig. 6.114. Locul geometric al fazorului $\underline{I} = (\underline{A} + \lambda \underline{B})/(\underline{C} + \underline{D})$.

— Se trasează dreapta $\underline{Z} = \underline{C} + \lambda\underline{D}$, stabilindu-i-se o scară și o direcție. Se trasează apoi dreapta conjugată $\underline{Z}^*$.

— Se trasează perpendiculara OP pe dreapta $\underline{Z}^*$, se determină diametrul și centrul cercului $\underline{I}_0$, inversul dreptei $\underline{Z}$.

— Se determină fazorii $\underline{M} = \dfrac{\underline{B}}{\underline{D}}$ și $\underline{N} = \underline{A} - \dfrac{\underline{B} \cdot \underline{C}}{\underline{D}}$.

— Se efectuează produsul $\underline{N} \times \underline{I}_0$ operîndu-se asupra vectorului OC, corespunzător centrului C al cercului $\underline{I}_0$. Se obține astfel centrul cercului-loc geometric căutat și diametrul său principal.

— Se deplasează originea axelor de coordonate în vîrful vectorului $-\underline{M}$.

Pentru a se obține gradarea cercului se procedează astfel:

Se rotește dreapta Z^* pînă ce ea ajunge perpendiculară pe diametrul principal al cercului-loc geometric C. Se unesc diviziunile de pe această dreaptă cu originea O a axelor de coordonate și se obține gradarea cercului.

Diagrama cercului este astfel obținută și se poate determina pentru orice valoare a lui λ mărimea și poziția fazorului respectiv. În figura 6.113 s-a determinat această mărime pentru $\lambda = -1$.

b) O a doua metodă de a construi locul geometric căutat, constă în a se da trei valori particulare lui λ și a se determina astfel trei puncte prin care se poate duce cercul căutat. Se iau de obicei valorile caracteristice $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ și $\lambda = 1$, obținîndu-se fazorii

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}, \quad \underline{I}_\infty = \frac{\underline{B}}{\underline{D}} \text{ și } \underline{I}_1 = \frac{\underline{A} + \underline{B}}{\underline{C} + \underline{D}},$$

prin vîrfurile cărora se trasează cercul-loc geometric căutat (fig. 6.115). Pentru gradarea cercului se procedează în felul următor: unește I_∞ cu C, și perpendicular pe această direcție, se duce o dreaptă oarecare Δ.

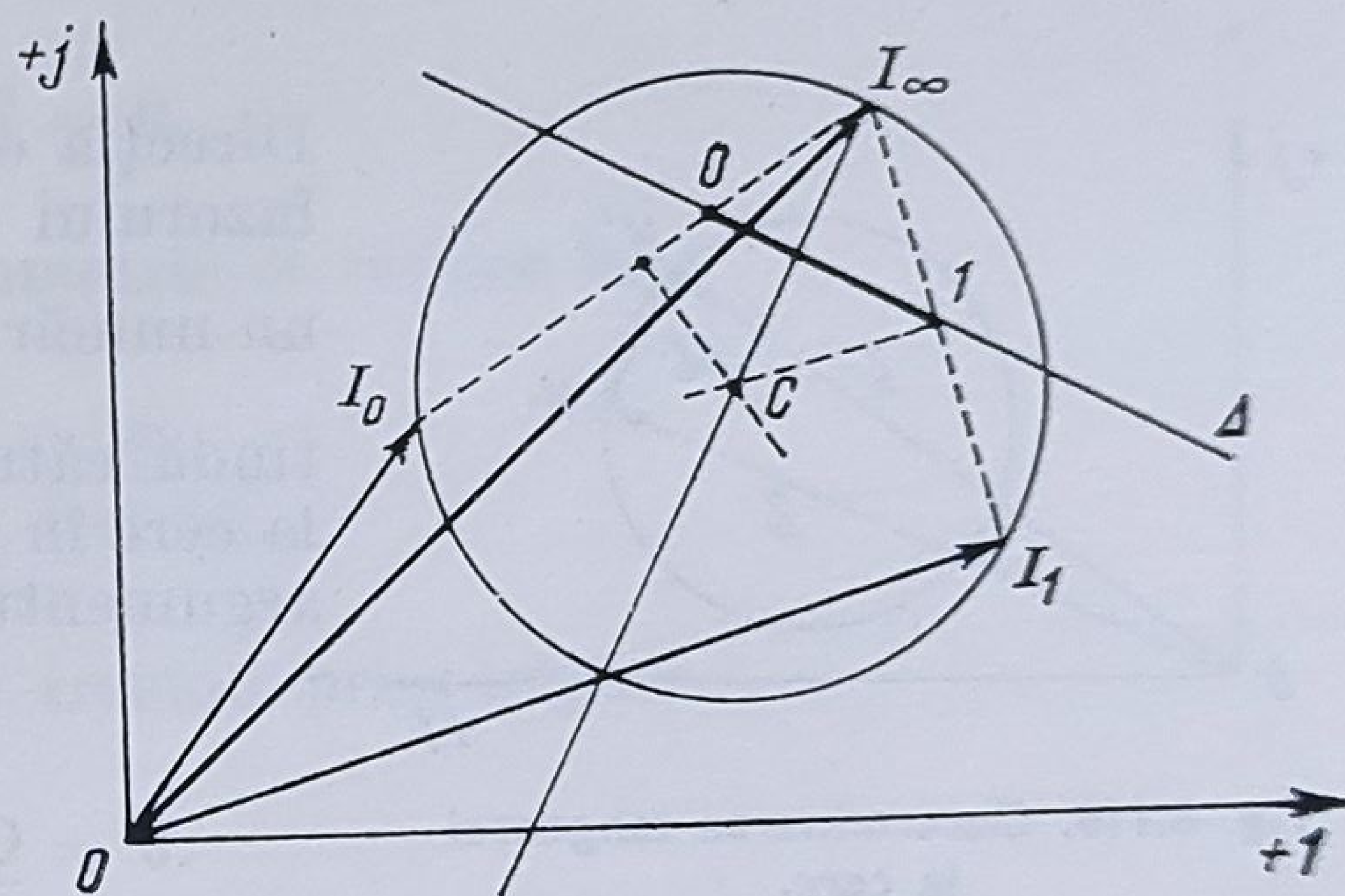


Fig. 6.115. Construcția industrială a fazorului $\underline{I} = (\underline{A} + \lambda\underline{B})/(\underline{C} + \lambda\underline{D})$.

Se duc direcțiile $\overline{I_\infty\ I_0}$ și $\overline{I_\infty\ I}$ și, unde acestea intersectează dreapta Δ, se obțin punctele 0 și 1. Se divide dreapta Δ cu această unitate și din I_∞ se duc raze vectoare la aceste diviziuni. Punctele de intersecție ale cercului cu aceste raze vectoare dau punctele de gradare ale cercului. Pentru a obține mărimea fazorului corespunzător unei anumite valori a lui λ, se unește originea axelor de coordonate cu diviziunea corespunzătoare de pe cerc și se obține fazorul căutat în mărime și în direcție.

OBSERVAȚII. 1. În cazul cînd segmentul unitate $0-1$ are dimensiuni nepotrivite epurei, fiind prea mare sau prea mic, se ia o altă dreaptă Δ_1, paralelă cu Δ, astfel ca segmentul unitate să aibă dimensiunile dorite.

2. În cazul cînd cercul urmează a fi gradat în valori inverse $\left(\theta = \frac{1}{\lambda}\right)$, se unește I_0 cu C și perpendicular pe această direcție se duce dreapta Δ'; segmentul unitate este determinat pe această dreaptă cu ajutorul razelor vectoare $\overline{I_0\ I_\infty}$ și $\overline{I_0\ I_1}$, care determină respectiv punctele 0 și 1. Într-adevăr pentru $\lambda = \infty$, $\theta = 0$ și pentru $\lambda = 1$, $\theta = 1$.

3. Dreptele Δ și Δ' sînt paralele respectiv cu tangentele la cerc în punctele I_∞ și I_0. Determinarea unui punct pe cerc se face mult mai greu printr-o tangentă decît printr-o secantă. În consecință, pentru a se determina punctul respectiv, se duce o paralelă cu tangenta corespunzătoare și, perpendiculara dusă prin centrul cercului pe această direcție va intersecta cercul în punctul căutat.

Într-adevăr, fie funcția

$$\underline{I} = \frac{\underline{A} + \lambda\underline{B}}{\underline{C} + \lambda\underline{D}},$$

Se rotește dreapta $\underline{Z}^*$ pînă ce ea ajunge perpendiculară pe diametrul principal al cercului-loc geometric C. Se unesc diviziunile de pe această dreaptă cu originea O a axelor de coordonate și se obține gradarea cercului.

Diagrama cercului este astfel obținută și se poate determina pentru orice valoare a lui λ mărimea și poziția fazorului respectiv. În figura 6.113 s-a determinat această mărime pentru $\lambda = -1$.

b) O a doua metodă de a construi locul geometric căutat, constă în a se da trei valori particulare lui λ și a se determina astfel trei puncte prin care se poate duce cercul căutat. Se iau de obicei valorile caracteristice $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ și $\lambda = 1$, obținîndu-se fazorii

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}, \quad \underline{I}_\infty = \frac{\underline{B}}{\underline{D}} \text{ și } \underline{I}_1 = \frac{\underline{A}+\underline{B}}{\underline{C}+\underline{D}},$$

prin vîrfurile cărora se trasează cercul-loc geometric căutat (fig. 6.115). Pentru gradarea cercului se procedează în felul următor: se unește I_∞ cu C, și perpendicular pe această direcție, se duce o dreaptă oarecare Δ.

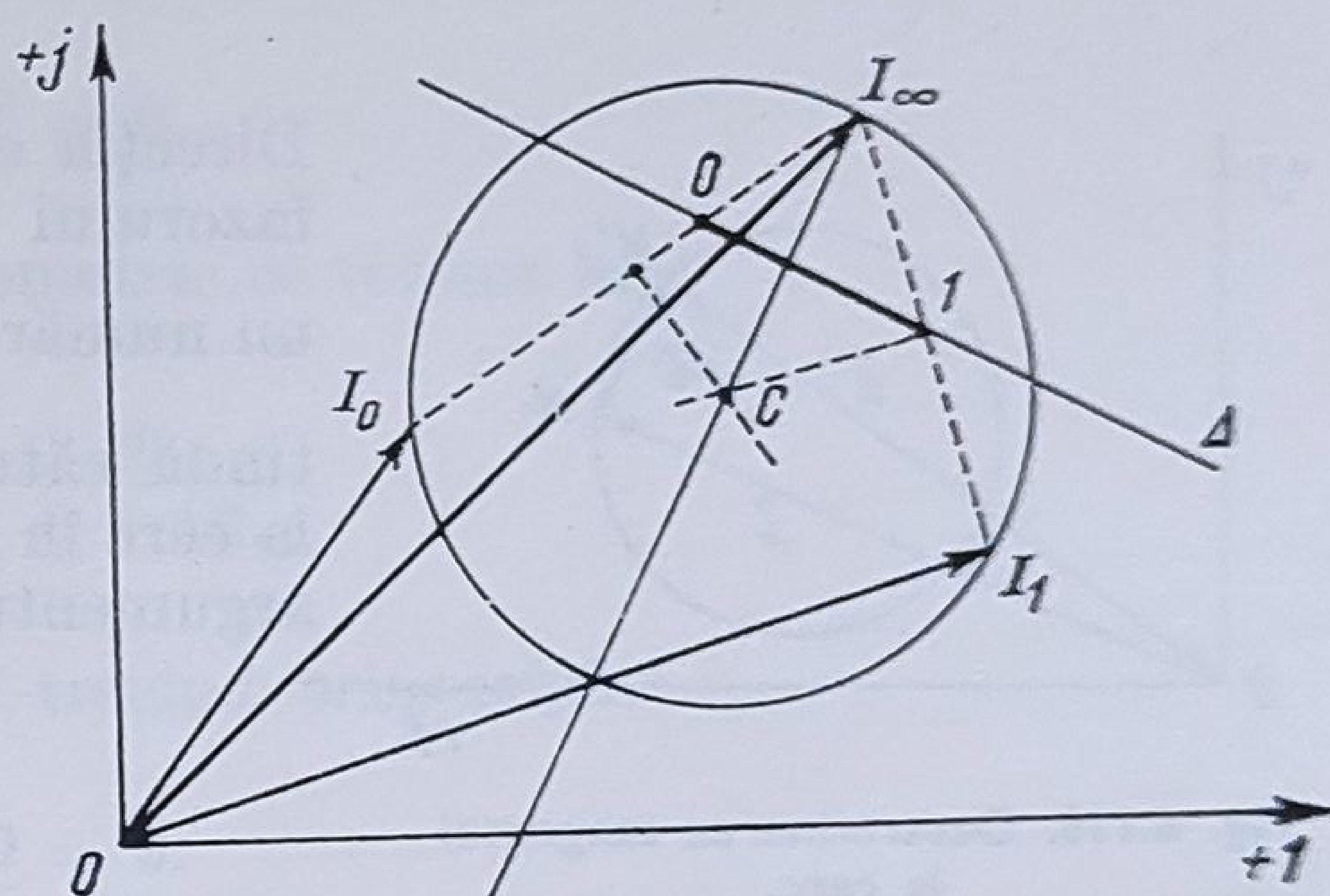


Fig. 6.115. Construcția industrială a fazorului $\underline{I} = (\underline{A} + \lambda\underline{B})/(\underline{C} + \lambda\underline{D})$.

Se duc direcțiile $\overline{I_\infty\ I_0}$ și $\overline{I_\infty\ I}$ și, unde acestea intersectează dreapta Δ, se obțin punctele 0 și 1. Se divide dreapta Δ cu această unitate și din I_∞ se duc raze vectoare la aceste diviziuni. Punctele de intersecție ale cercului cu aceste raze vectoare dau punctele de gradare ale cercului. Pentru a obține mărimea fazorului corespunzător unei anumite valori a lui λ, se unește originea axelor de coordonate cu diviziunea corespunzătoare de pe cerc și se obține fazorul căutat în mărime și în direcție.

OBSERVAȚII. 1. În cazul cînd segmentul unitate 0—1 are dimensiuni nepotrivite epurei, fiind prea mare sau prea mic, se ia o altă dreaptă Δ_1, paralelă cu Δ, astfel ca segmentul unitate să aibă dimensiunile dorite.

2. În cazul cînd cercul urmează a fi gradat în valori inverse $\left(\theta = \frac{1}{\lambda}\right)$, se unește I_0 cu C și perpendicular pe această direcție se duce dreapta Δ'; segmentul unitate este determinat pe această dreaptă cu ajutorul razelor vectoare $\overline{I_0\ I_\infty}$ și $\overline{I_0\ I_1}$, care determină respectiv punctele 0 și 1. Într-adevăr pentru $\lambda = \infty$, $\theta = 0$ și pentru $\lambda = 1$, $\theta = 1$.

3. Dreptele Δ și Δ' sînt paralele respectiv cu tangentele la cerc în punctele I_∞ și I_0. Determinarea unui punct pe cerc se face mult mai greu printr-o tangentă decît printr-o secantă. În consecință, pentru a se determina punctul respectiv, se duce o paralelă cu tangenta corespunzătoare și, perpendiculara dusă prin centrul cercului pe această direcție va intersecta cercul în punctul căutat.

Într-adevăr, fie funcția

$$\underline{I} = \frac{\underline{A} + \lambda\underline{B}}{\underline{C} + \lambda\underline{D}},$$

care pentru o anumită valoare a lui λ, reprezintă fazorul OM (fig. 6.116). Dacă se dă lui λ o creştere, $\Delta\lambda$ oricît de mică, îi va corespunde şi lui $\underline{I}$ o creştere, obţinîndu-se relaţia

$$\underline{I}' = \underline{I} + \Delta\underline{I} = \frac{\underline{A} + (\lambda + \Delta\lambda)\,\underline{B}}{\underline{C} + (\lambda + \Delta\lambda)\,\underline{D}}$$

care este reprezentată de fazorul OM'.

Creşterea $\Delta\,\underline{I}$ este reprezentată de coarda MM' şi are valoarea

$$\Delta\underline{I} = \underline{I}' - \underline{I} = \frac{(\underline{B}\,\underline{C} - \underline{A}\,\underline{D})\,\Delta\lambda}{(\underline{C} + \lambda\underline{D})\cdot[\underline{C} + (\lambda + \Delta\lambda)\,\underline{D}]}$$

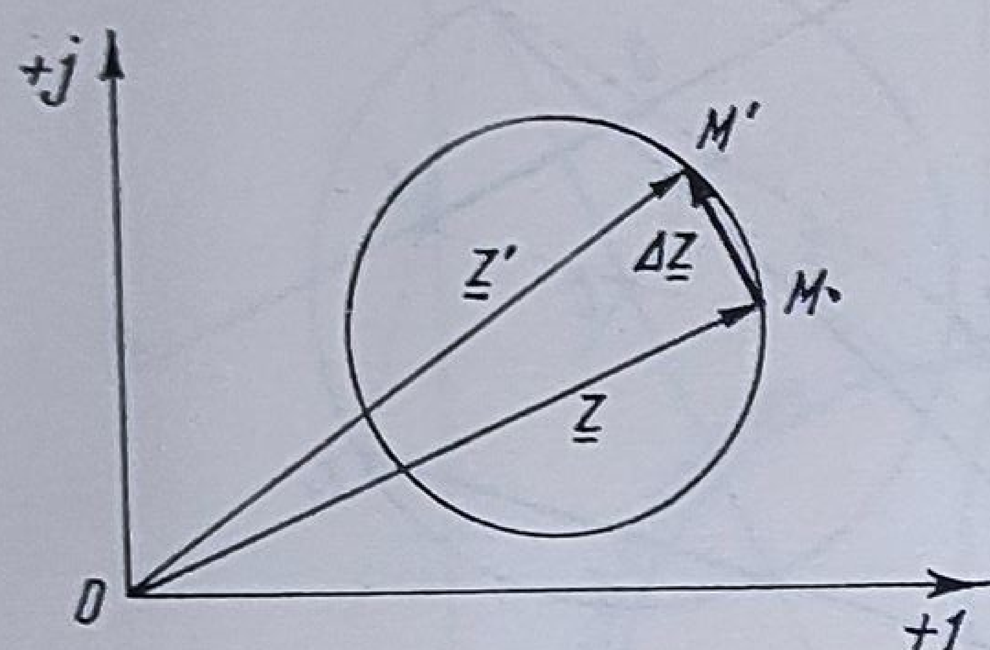


Fig. 6.116. Determinarea tangentei la cerc.

Direcţia coardei MM' este dată de argumentul fazorului $\Delta\,\underline{I}$ sau, ceea ce este tot una, $\Delta\lambda$ fiind un număr real, al fazorului $\frac{\Delta\underline{I}}{\Delta\lambda}$. Făcînd pe $\Delta\lambda$ să tindă către zero, coarda MM' devine tangentă la cerc în punctul M şi direcţia sa este dată de argumentul vectorului

$$\underline{T} = \frac{\underline{B}\,\underline{C} - \underline{A}\,\underline{D}}{(\underline{C} + \lambda\underline{D})^2}\,.$$

Dîndu-se diverse valori lui λ, se obţin direcţiile tangentelor corespunzătoare. Astfel,

pentru $\lambda = 0$, $\underline{T}_{\lambda=0} = \frac{\underline{B}\,\underline{C} - \underline{A}\,\underline{D}}{\underline{C}^2}$;

pentru $\lambda = \infty$, $\underline{T}_{\lambda=\infty} = \frac{\underline{B}\,\underline{C} - \underline{A}\,\underline{D}}{\underline{D}^2}$.

La această ultimă expresie se ajunge pornind de la relaţia (6.177) în care se face schimbarea de variabilă

$$\lambda = \frac{1}{\theta}\,.$$

În acest caz, direcţia tangentei este dată de argumentul vectorului

$$\underline{T}' = \frac{\underline{B}\,\underline{C} - \underline{A}\,\underline{D}}{(\theta\underline{C} + \underline{D})^2}$$

şi se vede că

$$\underline{T}'_{\theta=0} = \underline{T}_{\lambda=\infty} = \frac{\underline{B}\,\underline{C} - \underline{A}\,\underline{D}}{\underline{D}^2}\,.$$

Cazuri particulare. În raport cu forma fazorilor componenţi se pot deosebi diverse cazuri particulare :

a) $\underline{A} = 0.$

În acest caz, rezultă succesiv

$$\underline{I} = \frac{\lambda \underline{B}}{\underline{C} + \lambda \underline{D}} = \frac{1}{\frac{\underline{C}}{\lambda \underline{B}} + \frac{\underline{D}}{\underline{B}}} = \frac{1}{\underline{C}_1 + \theta \underline{D}_1}$$

şi locul geometric căutat este un cerc trecînd prin origine, avînd diviziunile corespunzătoare inverselor variabilei date (cerc cu scară inversă).

b) $\underline{B} = 0.$

În acest caz ecuaţia locului geometric se reduce la

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}}{\underline{C} + \lambda \underline{D}},$$

locul geometric căutat fiind un cerc trecînd prin origine.

c) $\underline{D} = 0.$

Ecuaţia locului geometric devine

$$\underline{I} = \frac{\underline{A} + \lambda \underline{B}}{\underline{C}},$$

care se vede uşor că este ecuaţia unei drepte.

d) $\underline{C} = 0.$

Ecuaţia locului geometric devine

$$\underline{I} = \frac{\underline{A} + \lambda \underline{B}}{\lambda \underline{D}} = \underline{A}_1 + \theta\, \underline{B}_1,$$

în care

$$\underline{A}_1 = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}, \quad \underline{B}_1 = \frac{\underline{A}}{\underline{D}} \quad \text{şi} \quad \theta = \frac{1}{\lambda};$$

rezultă dar, că locul geometric căutat este o dreaptă ale cărei diviziuni sînt inversele variabilei date.

e) $\underline{A} = m\, \underline{B}.$

În acest caz ecuaţia locului geometric devine

$$\underline{I} = (m + \lambda)\, \underline{B} \frac{1}{\underline{C} + \lambda \underline{D}}, \tag{6.179}$$

care este ecuaţia unui cerc trecînd prin origine. Într-adevăr, punînd

$$\theta = \frac{1}{m + \lambda}, \tag{6.180}$$

ecuaţia (6.178) se poate scrie

$$\underline{I} = \frac{\underline{B}}{\underline{D} + (\underline{C} - m\underline{D})\, \theta},$$

care este ecuaţia unui cerc trecînd prin origine cu scara funcţională θ.

f) $\underline{C} = m\, \underline{D}$.

Ecuaţia locului devine

$$\underline{I} = \frac{\underline{A} + \lambda \underline{B}}{(m + \lambda)\, \underline{D}}$$

şi făcînd aceeaşi substituţie (6.179) se obţine

$$\underline{I} = \left(\frac{\underline{B}}{\underline{D}}\right) + \left(\frac{\underline{A} - m\, \underline{B}}{\underline{D}}\right) \theta,$$

care este o dreaptă cu scara funcţională (6.180).

Dacă în acelaşi timp şi mărimea complexă $\underline{B}$ este nul, dreapta loc geometric trece prin origine, care corespunde valorii $\lambda = \infty$.

6.6.3.4. **Locul geometric al fazorului $\underline{I} = \underline{F} + \underline{R}\, \underline{|\varphi}$.** Sînt cazuri cînd variabila este un unghi, cum ar fi cazul unei mărimi reprezentată în funcţie de un defazaj. Ecuaţia locului geometric este

$$\underline{I} = \underline{F} + \underline{R}\, \varepsilon^{j\varphi} = \underline{F} + \underline{R}\, \underline{|\varphi}, \tag{6.181}$$

în care $\underline{F}$ şi $\underline{R}$ sînt doi fazori constanţi. Construirea locului se face imediat, observînd că fazorul $\underline{R}$, construit în vîrful fazorului $\underline{F}$ se roteşte în sensul direct cînd φ variază. Locul respectiv este deci un cerc cu centrul în vîrful fazorului $\underline{F}$ şi de rază $\underline{R}$; gradaţia zero a acestui cerc se obţine pentru $\varphi = 0$. Cercul se gradează în unităţi de φ (fig. 6. 117).

Un caz particular interesant este pentru $\underline{F} = 0$, locul respectiv fiind un cerc cu centrul în origine și cu raza egală cu modulul fazorului $\underline{R}$.

OBSERVAȚIE. Ecuațiile (6.177) și (6.181) reprezentînd ecuația generală a unui cerc, ele se pot deduce una din cealaltă. Aceasta se obține prin identificarea celor două ecuații.

Pentru aceasta este necesar să fie modificată forma ecuației (6.181). În această ecuație $\varepsilon^{j\varphi}$ este un fazor de modul unitate și de argument variabil. Punînd

$$\varepsilon^{j\varphi} = \frac{\underline{C}^* + \lambda \underline{D}^*}{\underline{C} + \lambda \underline{D}},$$

rezultă

$$\text{mod. } \varepsilon^{j\varphi} = 1,$$

$$\text{tg}\,\varphi = -2\frac{(c_1 + \lambda d_1)(c_2 + \lambda d_2)}{(c_1 + \lambda d_1)^2 - (c_2 + \lambda d_2)^2} = f(\lambda).$$

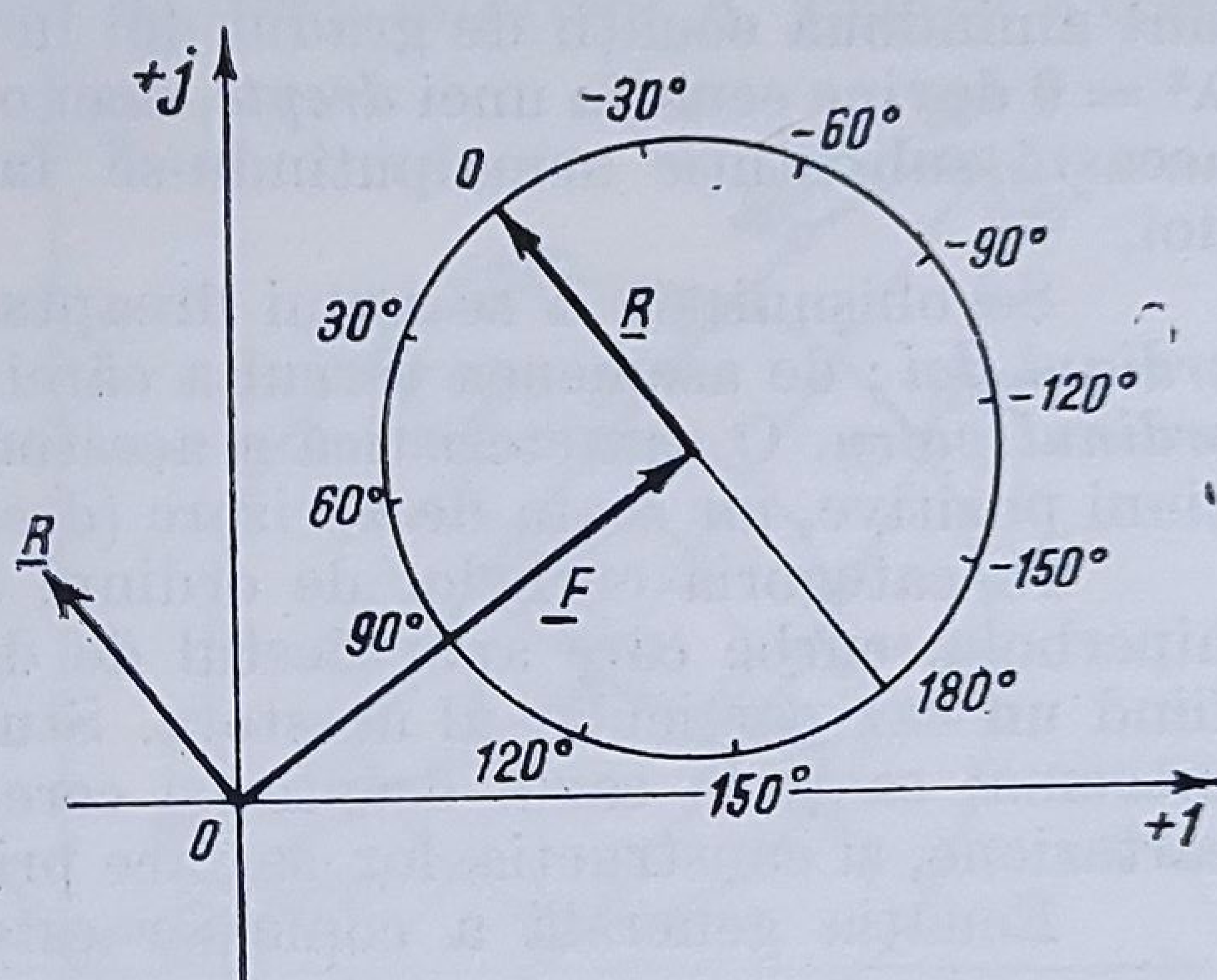


Fig. 6.117. Locul geometric al fazorului $\underline{I} = \underline{F} + \underline{R}\,|\varphi$.

Relația (6.181) se poate scrie

$$\underline{I} = \underline{F} + \underline{R}\frac{\underline{C}^* + \lambda \underline{D}^*}{\underline{C} + \lambda \underline{D}},$$

care identificată cu relația (6.177) dă

$$\underline{F} \cdot \underline{C} + \underline{R} \cdot \underline{C}^* = \underline{A},$$

$$\underline{F} \cdot \underline{D} + \underline{R} \cdot \underline{D}^* = \underline{B}$$

și rezultă

$$\underline{F} = \frac{\underline{A} \cdot \underline{D}^* - \underline{B}\,\underline{C}^*}{\underline{C} \cdot \underline{D}^* - \underline{D} \cdot \underline{C}^*} \text{ și } \underline{R} = \frac{\underline{B} \cdot \underline{C} - \underline{A} \cdot \underline{D}}{\underline{C} \cdot \underline{D}^* - \underline{D} \cdot \underline{C}^*}.$$

Modulul razei se calculează ușor din expresia respectivă.

Rezultă de aici că locul geometric căutat este perfect determinat atunci cînd se cunoaște fazorul care determină centrul și modulul razei.

6.6.3.5. **Locuri geometrice de ordin superior.** S-a arătat mai înainte că studiul circuitelor electrice (mașini sau rețele) conduce la un sistem de ecuații liniare între cantitățile complexe ale curentului, impedanței și forței electromotoare, care rezolvate dau o relație de forma (6.168)

$$\underline{Z} = \frac{\underline{B}_0 + \lambda \underline{B}_1 + \lambda^2 \underline{B}_2 + \ldots + \lambda^n \underline{B}_n}{\underline{A}_0 + \lambda \underline{A}_1 + \lambda^2 \underline{A}_2 + \ldots + \lambda^m \underline{A}_m},$$

în care $\underline{A}$ și $\underline{B}$ sînt cantități complexe (fazori) iar λ o variabilă reală care caracterizează funcționarea circuitului și în raport cu care se studiază această funcționare. Cum λ poate lua orice valoare între $-\infty$ și $+\infty$, rezultă că vîrful fazorului $\underline{Z}$ va descrie o curbă, care a fost numită locul geometric al fazorului $\underline{Z}$ sau diagrama-loc geometric.

Ecuaţia (6.168) este o curbă de un grad oarecare în λ. În cele ce preced au fost studiate curbele la care variabila era de gradul întîi şi anume : curbele de ordinul întîi (dreapta) şi curbele de ordinul doi (cercul).

În studiul maşinilor electrice, a circuitelor din radiotehnică etc., apar uneori curbe la care variabila este de un grad mai mare decît unu, formînd astfel clasa curbelor de ordin superior.

Este necesar a se face de la început o deosebire între gradul variabilei şi ordinul curbei respective. Astfel, ecuaţiile

$$\underline{Z} = \underline{A} + \lambda^2 \underline{B} \text{ şi } \underline{P} = \underline{A} + \lambda \underline{B} + \lambda^2 \underline{C}$$

sînt amîndouă ecuaţii de gradul doi în λ; însă pe cînd prima, prin substituţia $\lambda^2 = \theta$ devine ecuaţia unei *drepte*, deci o curbă de ordinul întîi, în a doua ecuaţie această substituţie nemaiputîndu-se face, curba rămîne o curbă de ordinul doi.

Se obişnuieşte a se numi dreapta a cărei variabilă este λ^2, o *dreaptă de ordinul doi* ; de asemenea cercul a cărei variabilă este λ^2 se numeşte un *cerc de ordinul patru*. O caracteristică a acestor curbe este că ele nu conţin decît diviziuni pozitive, iar scara de divizare (dreapta Δ) are diviziuni pătratice.

În categoria curbelor de ordinul doi intră şi *conicele*, elipsa, parabola şi hiperbola, curbe care apar destul de des în studiul maşinilor electrice, cercul fiind un caz particular al acestora. Studiul acestor curbe se efectuează direct, întocmai ca şi în cazul dreptei şi cercului, fără a se trece prin coordonatele carteziene, şi construcţia lor se face prin puncte, dînd diverse valori variabilei.

Ecuaţia generală a conicelor este

$$\underline{K} = \frac{\underline{A}' + \nu \underline{B}' + \nu^2 \underline{C}'}{a + \nu b + \nu^2 c},$$

în care ν este variabila şi *a*, *b*, *c* numere reale. Trinomul de la numitorul acestei expresii poate fi pus sub forma

$$c\,(\nu - \nu_1)\,(\nu - \nu_2),$$

în care

$$\nu_{1,2} = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} - \frac{a}{c}}$$

sînt rădăcinile sale. Natura conicelor depinde de natura acestor rădăcini, deci de natura realizantului lor.

a) *Elipsa.* Dacă realizantul rădăcinilor numitorului ecuaţiei conicelor este imaginar, rădăcinile ν_1 şi ν_2 sînt complex conjugate şi conica este o elipsă. Făcînd în ecuaţia conicei substituţia

$$2\nu = (\nu_1 + \nu_2) + j\,(\nu_1 - \nu_2)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2},$$

în care θ este un unghi real, ecuaţia elipsei devine

$$\underline{H} = \underline{A} + \underline{B}\,\varepsilon^{-j\theta} + \underline{C}\,\varepsilon^{j\theta} \tag{6.182}$$

în care

$$\underline{A} = -\frac{1}{c(\nu_1 - \nu_2)^2}[2\underline{A}' + (\nu_1 + \nu_2)\underline{B}' + 2\nu_1\nu_2\underline{C}'],$$

$$\underline{B} = -\frac{1}{c(\nu_1 - \nu_2)^2}[\underline{A}' + \nu_2\underline{B}' + \nu_2^2\underline{C}'],$$

$$\underline{C} = -\frac{1}{c(\nu_1 - \nu_2)^2}[\underline{A}' + \nu_1\underline{B}' + \nu_1^2\underline{C}'].$$

Studiul şi construcţia elipsei se face uşor cu ajutorul ecuaţiei (6.182), din care rezultă că centrul său se găseşte în vîrful fazorului $\underline{A}$. Pentru a construi elipsa se trasează, cu centrul în vîrful vectorului $\underline{A}$, două cercuri cu razele $|\underline{B}|$ şi $|\underline{C}|$, care se gradează unul în sens invers (cercul de rază $|\underline{B}|$) şi celălalt în sens direct (cercul de rază $|\underline{C}|$) (fig. 6.118).

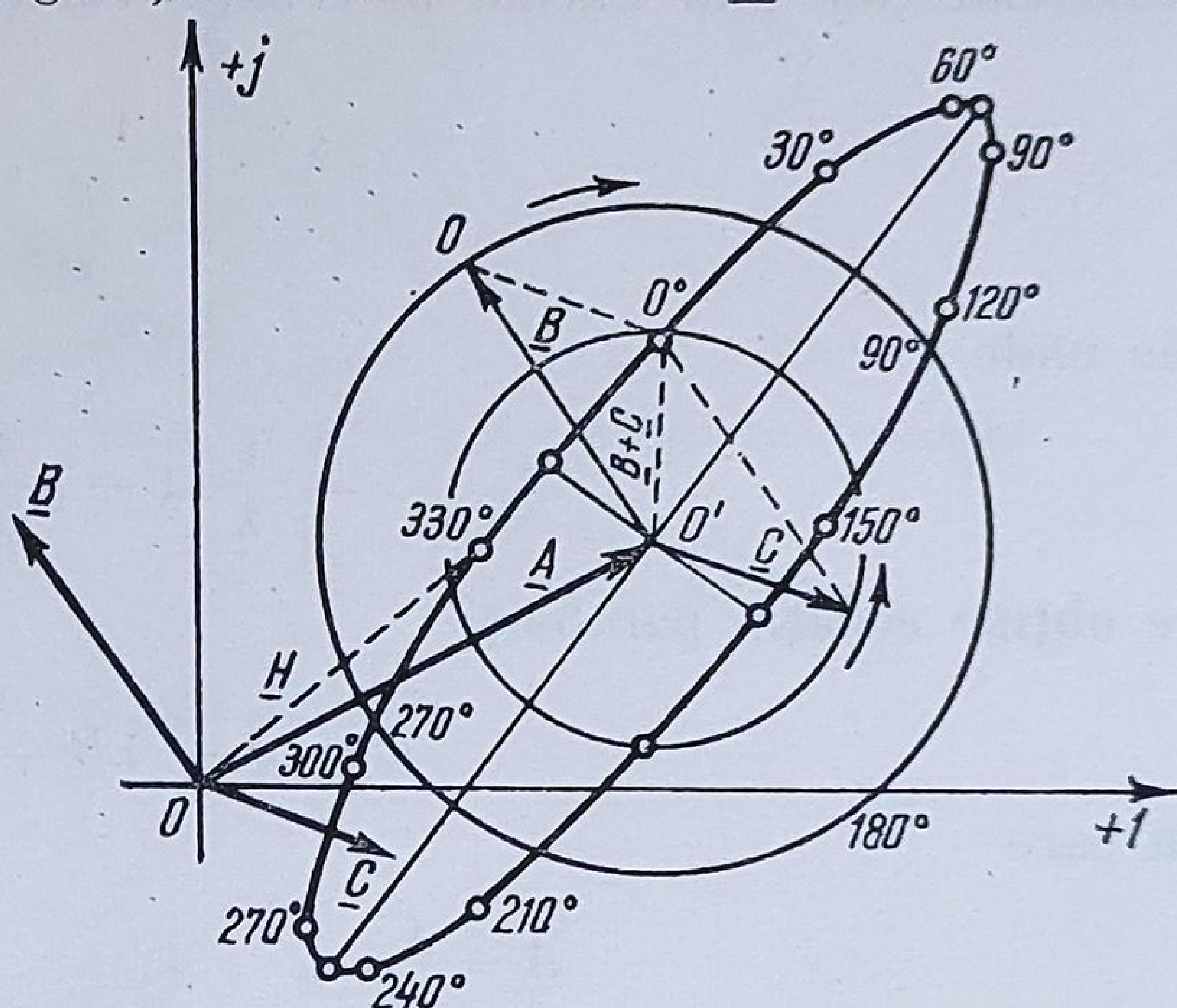


Fig. 6.118. Construcţia elipsei.

Originea gradării corespunde unghiului $\theta = 0$ şi se obţine ducînd în vîrful fazorului $\underline{A}$ fazori echipolenţi cu vectorii $\underline{B}$ şi $\underline{C}$. Punctul de zero al locului geometric corespunde sumei

$$\underline{H}_0 = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C}.$$

Locul geometric se obţine efectuînd suma (6.182) pentru diverse valori ale lui θ.

Cele două semiaxe sînt fazori cu originea în centrul elipsei (vîrful fazorului $\underline{A}$) şi avînd modulele, respectiv, $[|\underline{B}| + |\underline{C}|]$ şi $[|\underline{B}| - |\underline{C}|]$.

Argumentul θ_1 al axei mari corespunde unghiului θ pentru care cei doi fazori $\underline{B}$ şi $\underline{C}$ sînt în fază, iar argumentul θ_2 al axei mici corespunde unghiului θ pentru care cei doi fazori $\underline{B}$ şi $\underline{C}$ sînt în opoziţie, cele două argumente fiind legate prin relaţia $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

Grafic, argumentul θ_1 al axei mari se determină observînd că cei doi fazori se rotesc în sensuri contrarii cînd θ variază şi ei vor coincide cînd unghiurile parcurse de cei doi vectori vor fi egale. Mărimea unghiului θ de rotire al celor doi fazori, pentru momentul de coincidenţă de fază, se determină cu ajutorul relaţiei metrice

$$\beta - \theta = \gamma + \theta,$$

în care β este argumentul fazorului $\underline{B}$ iar γ argumentul fazorului $\underline{C}$, din care se deduce

$$\theta = \frac{\beta - \gamma}{2};$$

în consecință, direcția axei mari coincide cu direcția unghiului bisectoarei dintre cei doi fazori.

În cazul particular $\underline{B} = 0$ (sau $\underline{C} = 0$), ecuația (6.182) se transformă în ecuația (6.181) a cercului.

Dacă fazorii $\underline{B}$ și $\underline{C}$ au modulele egale, $|\underline{B}| = |\underline{C}|$, atunci $\underline{C} = \underline{B}\, \varepsilon^{j\gamma}$ iar relația (6.182) devine

$$\underline{H} = \underline{A} + \underline{B}\,[\varepsilon^{-j\theta} + \varepsilon^{(j\theta+\gamma)}],$$

din care se vede că elipsa degenerează într-un segment de dreaptă, avînd direcția axei mari a elipsei.

b) *Parabola*. În acest caz, realizantul rădăcinilor numitorului ecuației conicelor este nul. Făcînd în ecuația conicei substituția

$$\lambda = \frac{1}{\nu + \frac{b}{2c}},$$

de unde

$$\nu = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \lambda\frac{b}{2c}\right),$$

se obține ecuația parabolei

$$\underline{P} = \underline{A} + \lambda\underline{B} + \lambda^2\underline{C}, \qquad (6.183)$$

în care

$$\underline{A} = \frac{\underline{C}'}{c};$$

$$\underline{B} = \frac{1}{c}\left[\underline{B}' - \frac{b}{2c}\underline{C}'\right];$$

$$\underline{C} = \frac{1}{c}\left[\underline{A}' - \frac{b}{2c}\underline{B}' + \frac{b^2}{4c^2}\underline{C}'\right].$$

Construcția acestei curbe se face adăugîndu-se la fiecare punct al dreptei $\underline{A} + \lambda\underline{B}$ fazorul $\lambda^2\underline{C}$, a cărui modul crește cu pătratul lui λ (fig. 6.119)*.

Punctul de zero al diagramei coincide cu vîrful fazorului $\underline{A}$.

Se observă, de asemenea, că axa parabolei este paralelă cu dreapta $\underline{A} + \lambda^2\underline{C}$, adică cu fazorul $\underline{C}$. Față de direcția fazorului $\underline{B}$, dreapta $\underline{A} + \lambda^2\underline{C}$ este un diametru conjugat.

c) *Hiperbola*. Realizantul rădăcinilor numitorului ecuației conicelor este în acest caz real și, dacă se face substituția

$$\lambda = \frac{\nu - \nu_1}{\nu - \nu_2},$$

* Se poate obține parabola și dacă se pornește de la dreapta de ordinul doi $\underline{A} + \lambda^2\underline{C}$ la care se adaugă fazorul $\lambda\underline{B}$.

se obține ecuația hiperbolei sub forma

$$\underline{U} = \underline{A} + \lambda \underline{B} + \lambda^{-1} \underline{C},$$

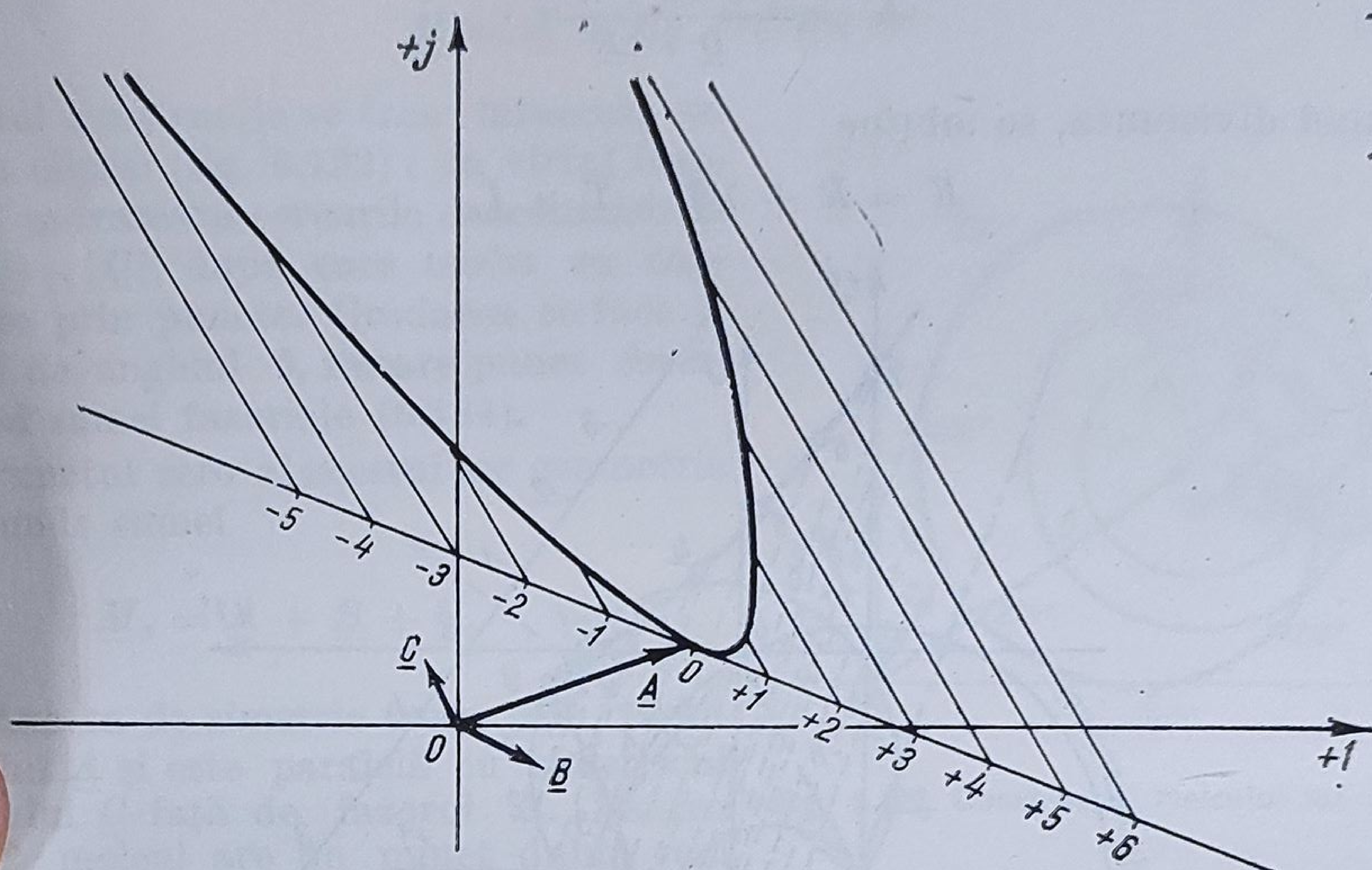


Fig. 6.119. Construcția parabolei.

în care

$$\underline{A} = \frac{1}{c\,(\nu_1 - \nu_2)^2} [2\,\underline{A}' + (\nu_1 + \nu_2)\ \underline{B}' + 2\nu_1\nu_2\ \underline{C}'],$$

$$\underline{B} = \frac{1}{c\,(\nu_1 - \nu_2)^2} [\underline{A}' + \nu_2\,\underline{B}' + \nu_2^2\,\underline{C}'],$$

$$\underline{C} = \frac{1}{c\,(\nu_1 - \nu_2)^2} [\underline{A}' + \nu_1\,\underline{B}' + \nu_1^2\,\underline{C}'].$$

Construcția acestei curbe se face observînd că dreptele

$$\underline{D}_1 = \underline{A} + \lambda \underline{B} \text{ și } \underline{D}_2 = \underline{A} + \lambda^{-1} \underline{C}$$

sînt asimptotele curbei și se întretaie în vîrful fazorului $\underline{A}$ (fig. 6.120).

În consecință, dreptei $\underline{D}_1$ i se adaugă fazorului $\lambda^{-1}\,\underline{C}$, iar dreptei $\underline{D}_2$, căreia i se face în prealabil substituția $\lambda^{-1} = \theta$, fazorului $\lambda \underline{B} = \theta^{-1}\,\underline{B}$, obținîndu-se ambele ramuri ale curbei, λ, respectiv θ, variind între $-\infty$ și $+\infty$.

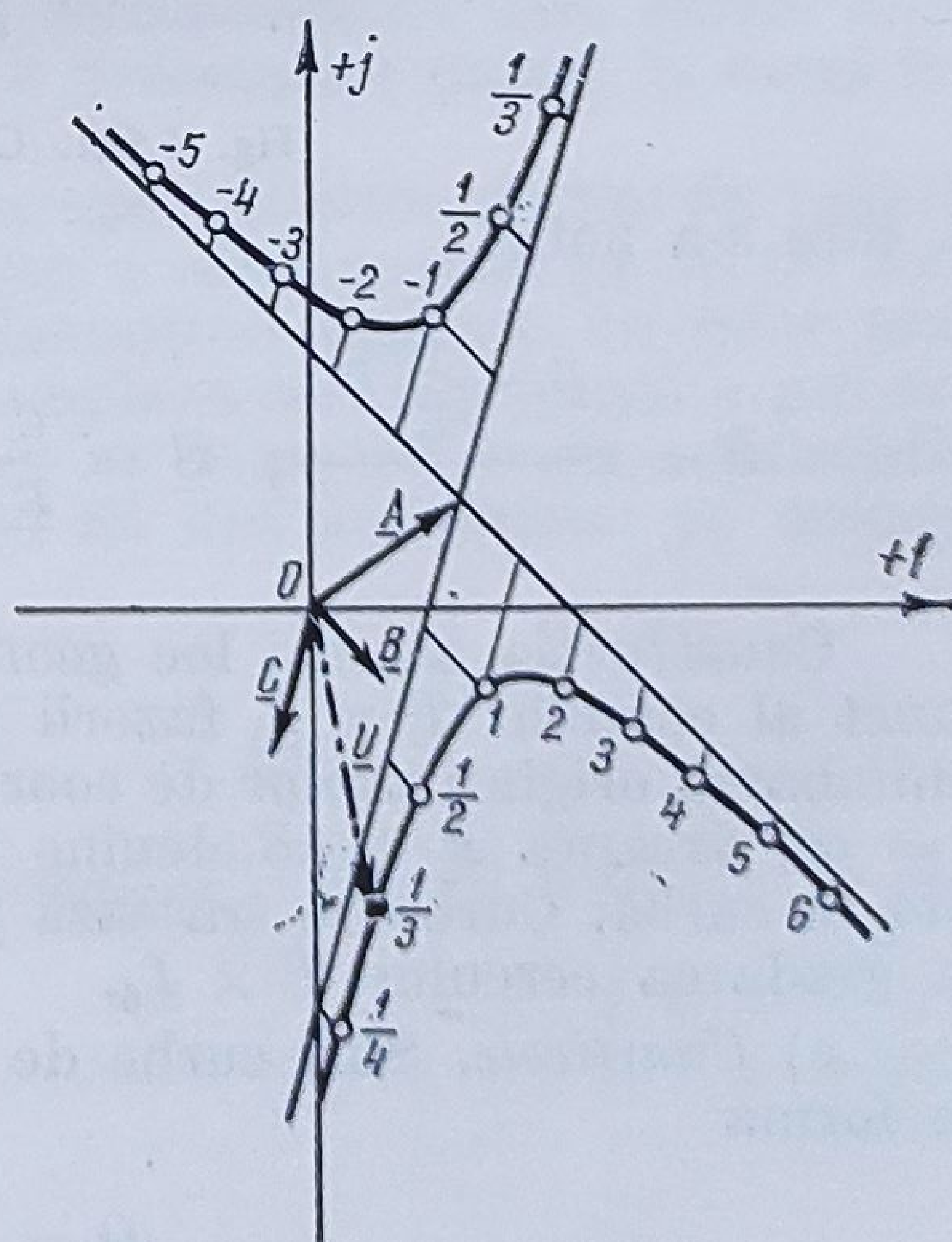


Fig. 6.120. Construcția hiperbolei.

Dintre curbele de ordin superior se va studia o curbă de ordinul trei, *cubica circulară*, şi o curbă de ordinul patru, *melcul lui* PASCAL.

d) *Cubica circulară*. Are ecuaţia

$$\underline{K} = \frac{\underline{A} + \lambda \underline{B} + \lambda^2 \underline{C}}{\underline{D} + \lambda \underline{E}}.$$

Efectuînd diviziunea, se obţine

$$\underline{K} = \underline{R} + \lambda \underline{S} + \underline{T} \times \underline{I}_0,$$

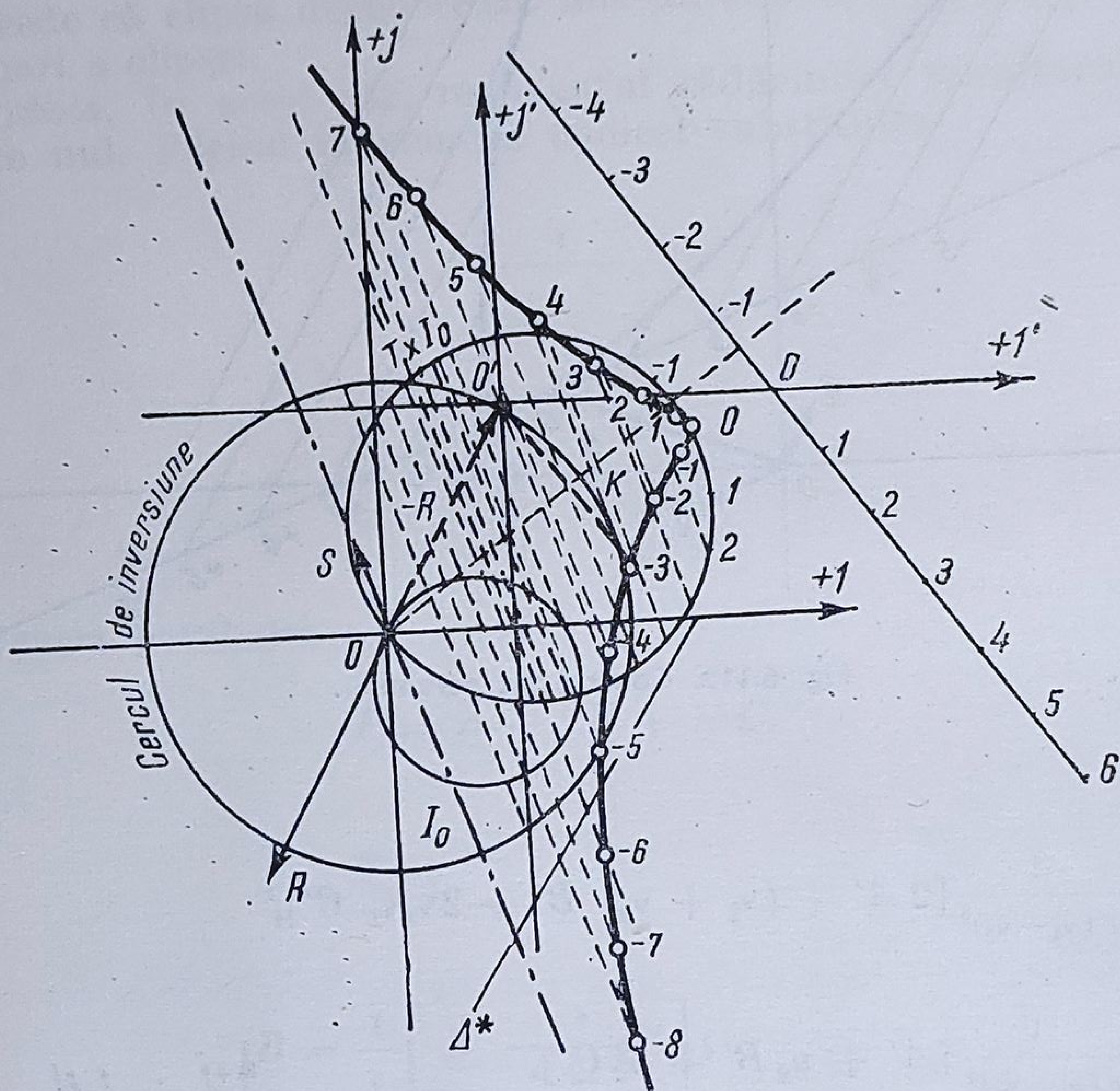


Fig. 6.121. Construcţia cubicei circulare

în care s-a notat

$$\underline{R} = \frac{\underline{B} - \frac{\underline{C}}{\underline{E}}\underline{D}}{\underline{E}}; \quad \underline{S} = \frac{\underline{C}}{\underline{E}}; \quad \underline{T} = \underline{A} - \underline{R} \cdot \underline{D}; \quad \underline{I}_0 = \frac{1}{\underline{D} + \lambda \underline{E}}.$$

Construcţia acestui loc geometric (fig. 6.121) se face adaugînd fiecărui punct al cercului $\underline{T} \times \underline{I}_0$ fazorii $\lambda \underline{S}$. Se observă că fazorul $\underline{R}$ are ca efect schimbarea originii axelor de coordonate, în vîrful fazorului $-\underline{R}$ şi că, pentru $\lambda = \infty$, dreapta $\underline{R} + \lambda \underline{S}$ devine infinită, ceea ce înseamnă că ea este asimtotă la curbă. Curba se trasează prin puncte şi gradarea ei se face în raport cu gradarea cercului $\underline{T} \times \underline{I}_0$.

e) *Cuarticele*. Sînt curbe de gradul patru, a căror ecuaţie generală este de forma

$$Q = \frac{\underline{A} + \lambda \underline{B} + \lambda^2 \underline{C}}{\underline{D} + \lambda \underline{E} + \lambda^2 \underline{F}}.$$

Sub forma aceasta generală, curbele de gradul patru sînt rar întîlnite în electrotehnică. Mai des se întîlneşte un caz particular al acestor curbe şi anume *melcul lui* PASCAL a cărui ecuaţie este

$$\underline{M} = \underline{A} + \underline{B}\varepsilon^{-j\theta} + \underline{C}\varepsilon^{-j2\theta} \qquad (6.184)$$

şi a cărui construcţie se face întocmai ca şi cea a elipsei (fig. 6.122) : în vîrful fazorului $\underline{A}$ se trasează cercurile concentrice de rază $|\underline{B}|$ şi $|\underline{C}|$, după care curba se construieşte prin puncte. Gradarea se face în funcţie de unghiul θ, fiecare punct corespunzînd sumei fazoriale (6.184).

Punctul zero al acestui loc geometric corespunde sumei

$$\underline{M}_0 = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C}.$$

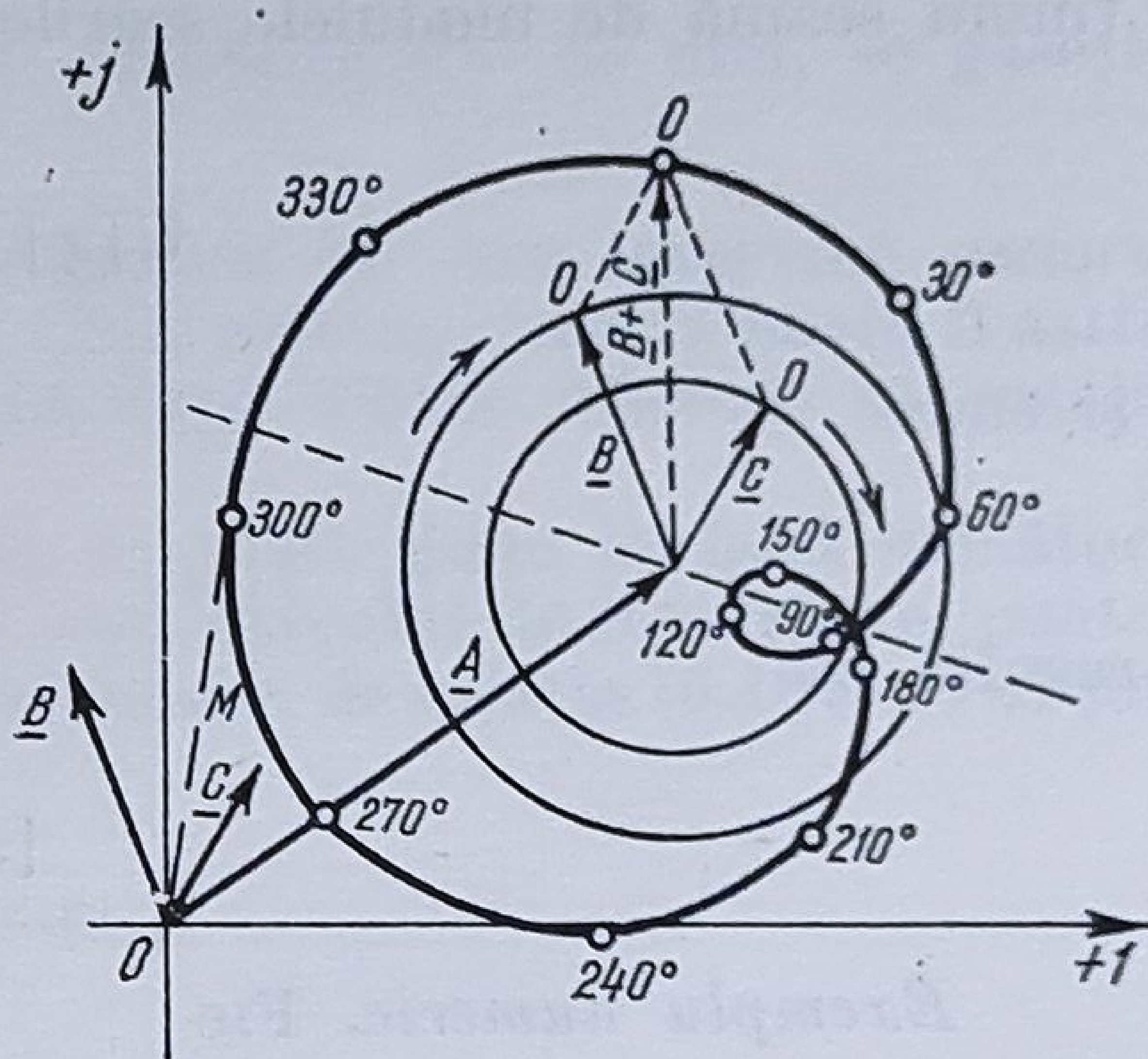


Fig. 6.122. Construcţia melcului lui PASCAL.

Axa sa de simetrie trece prin vîrful fazorului $\underline{A}$ şi este paralelă cu simetricul vectorului $\underline{C}$ faţă de fazorul $\underline{B}$. Pentru $C > B/2$, melcul are un punct dublu real situat pe cercul de rază C. Pentru $C = B/2$, punctul dublu este un punct de întoarcere şi melcul devine o *cardioidă*. Pentru $C < B/2$, punctul dublu este imaginar.

6.6.4. DESPRE SCĂRILE GRAFICE

În calculele grafice care se fac cu fazorii este necesar, ca după ce s-a trasat epura să se poată citi rezultatele.

Pentru aceasta, trebuie să se cunoască corespondenţa care există între diversele scări. Aceasta trebuie să constituie o preocupare numai în cazul înmulţirii, împărţirii şi inversiunii.

Într-adevăr, numai în aceste cazuri se fac operaţii între mărimi de natură cu totul diferită, rezultatul putînd fi o mărime a cărei natură să fie de asemenea diferită de a componentelor. Astfel, înmulţind algebric un fazor tensiune cu un fazor curent, se obţine o mărime complexă care reprezintă o putere.

O dată stabilită corespondenţa scărilor, se trasează scara rezultantă, care rămîne valabilă oricîte operaţii de acelaşi fel sînt de efectuat pe aceeaşi epură.

Fie produsul

$$\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I},$$

care trebuie efectuat grafic prin metoda cunoscută*. Pentru aceasta, se iau următoarele scări :

pentru impedanţa Z . . . . $1\ \Omega = a$ mm
pentru curentul I . . . . $1\ \text{A} = b$ mm
pentru vectorul unitate . . . . c mm.

şi fie x mm scara tensiunii rezultante.

* Vezi 4.2.4.2.

Din figura 4.20, care dă *grafic* mărimea modulului, rezultă

$$\frac{U}{Z} = \frac{I}{1}, \tag{6.185}$$

ţinînd seamă de modulele scărilor, se obţine

$$U[x] = \frac{Z\,[a] \times I\,[b]}{1 \cdot [c]},$$

şi cum

$$U = ZI,$$

rezultă că

$$[x] = \frac{[a]\,[b]}{[c]}. \tag{6.186}$$

Exemplu numeric. Fie

$$a = 20 \text{ mm}; \; b = 10 \text{ mm}; \; c = 25 \text{ mm};$$

rezultă

$$[x] = \frac{20 \times 10}{25} = 8 \text{ mm},$$

adică pentru scara tensiunilor se va lua 1 V = 8 mm.

Relaţia (6.185) se aplică şi în cazul diviziunii. Într-adevăr, fie de data aceasta y mm scara necunoscută a curentului, a mm scara tensiunilor, b mm scara impedanţelor şi c mm scara luată pentru vectorul unitate. Se obţine

$$I\;[y] = \frac{U\,[a]}{Z\,[b]} \times 1\,[c],$$

de unde rezultă

$$[y] = \frac{[a]\;[c]}{[b]}.$$

Cu valorile din exemplul numeric precedent, se găseşte

$$[y] = \frac{8 \times 25}{20} = 10 \text{ mm}.$$

Fie acum, cazul inversiunii

$$\underline{Y} = \frac{k^2}{\underline{Z}}.$$

Raţionînd ca mai sus, se obţine

$$[y] = \frac{[c]^2}{[a]} \tag{6.187}$$

şi, în cazul numeric tratat, pentru $a = 20$ mm/Ω şi $c = 25$ mm, se găseşte $y = 31{,}25$ mm.

OBSERVAŢIE. În toate operaţiile grafice în care intervine *vectorul unitate*, al cărui modul este fixat în mod cu totul arbitrar, acesta poate fi astfel fixat, încît dîndu-se anumite module pentru două dintre mărimi, să rezulte un *anumit* modul pentru a treia mărime.

Astfel, în cazul inversiunii, problema se poate pune în felul următor: scara impedanţelor fiind a mm/Ω, care este raza cercului de inversiune, pentru ca scara admitanţelor să fie b mm/S? Ţinînd seama de relaţia (6.187) se obţine

$$c = \sqrt{ab} \text{ mm}.$$

De asemenea, în exemplul dat în cazul înmulţirii, care este valoarea ce trebuie dată modulului vectorului unitate, pentru ca, pentru $a = 20$ mm/Ω şi $b = 10$ mm/A, să rezulte $x = 10$ mm/V?

Din relaţia (6.186) se deduce imediat

$$[c] = \frac{[a]\,[b]}{[x]} = \frac{20 \times 10}{10} = 20 \text{ mm}.$$

6.6.5. TRANSPUNEREA UNEI DIAGRAME-LOC GEOMETRIC ÎNTR-O CURBĂ CARACTERISTICĂ

Orice diagramă-loc geometric, obţinută în modul cum s-a arătat mai sus, poate fi transpusă într-o curbă care să reprezinte într-un sistem de axe de coordonate, variaţia fazorului respectiv în funcţie de variabila considerată. Pentru aceasta, se va lua un sistem de axe de coordonate în care, în abscisă se vor pune mărimi proporţionale cu variabila considerată, iar în ordonate mărimi proporţionale cu vectorul a cărui variaţie se studiază (fig. 6. 123).

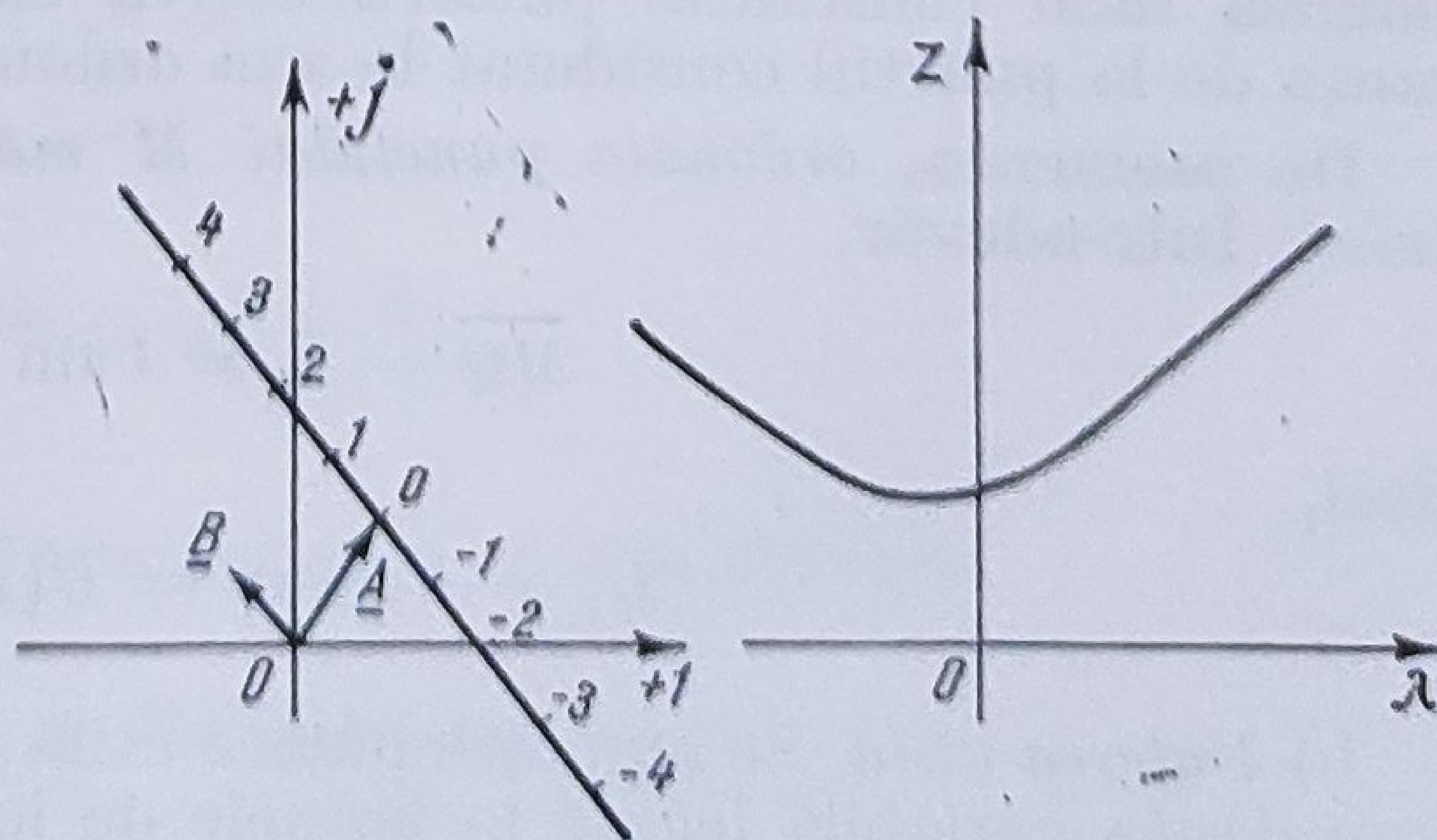


Fig. 6.123. Curba caracteristică.

Se obţin astfel o serie de puncte, care unite vor da o curbă numită *curba caracteristică* a fenomenului studiat.

6.6.6. DREAPTA PUTERII

Pentru a se putea rezolva cu ajutorul diagramei-loc geometric toate problemele privind funcţionarea circuitului electric corespunzător, aceasta trebuie completată cu anumite elemente, care să permită determinarea uşoară a mărimilor căutate. Una din aceste mărimi este *puterea*, activă sau reactivă, sub ambele ei aspecte, *puterea dată* din afara unui circuit, ceea ce este tot una cu *puterea absorbită* de circuit, şi *puterea utilă*, transformată sau utilizată efectiv de circuit. Cu ajutorul acestor elemente se pot deduce uşor *pierderile* în circuit şi *randamentul* circuitului.

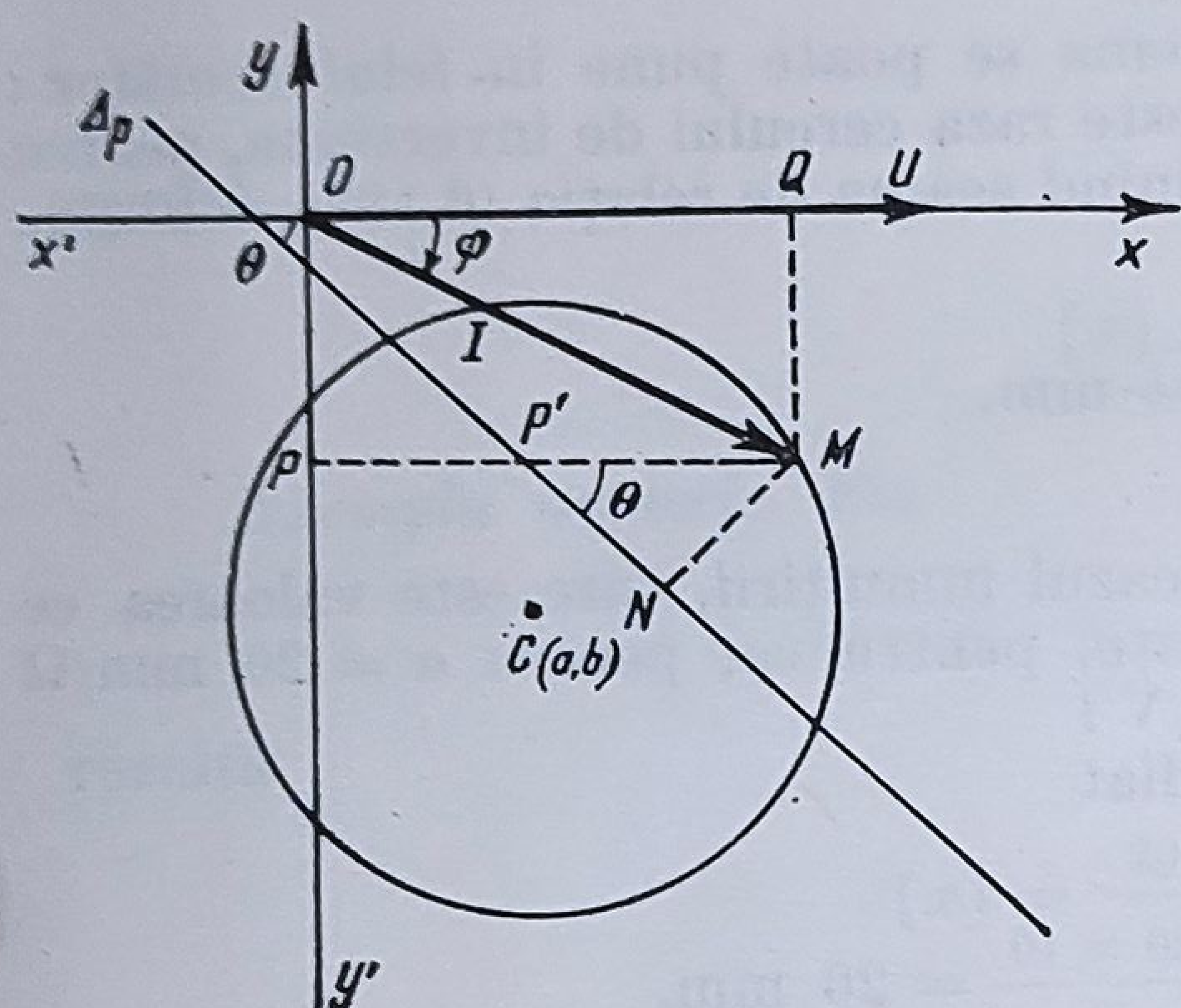


Fig. 6.124. Dreapta puterii.

Aceste elemente se pot determina foarte uşor, numai prin simpla măsurare a distanţei de la un punct al diagramei cercului la anumite drepte fixe trasate pe această diagramă.

În cele ce urmează se va examina numai problema puterii active, problema puterii reactive tratîndu-se în acelaşi mod.

a) *Puterea dată.* Fie diagrama cercului pentru un curent (fig. 6.124). Se observă că, dacă se ia tensiunea de alimentare ca origine de fază, puterea activă totală absorbită la bornele de intrare, este dată, la o anumită scară, de abscisa $\overline{MP}$ a punctului M de funcţionare considerat. Într-adevăr,

$$\overline{MP} = I_p = I \cos \varphi,$$

astfel, încît puterea activă dată circuitului este

$$P_1 = UI_p = UI \cos\varphi = U(\overline{MP}).$$

Tensiunea fiind constantă, puterea activă dată circuitului se măsoară prin distanţa de la punctul considerat la axa ordonatelor.

De asemenea, *ordonata punctului M măsoară puterea reactivă dată circuitului.* Într-adevăr,

$$\overline{MQ} = I_a = I \sin \varphi$$

şi deci,

$$Q_1 = UI\sin\varphi = U(\overline{MQ}).$$

b) *Puterea utilă.* Se numeşte putere utilă P_2, puterea activă ce se consumă în impedanţa variabilă legată la bornele de ieşire ale circuitului. Această pu-

tere este egală cu *puterea dată* din care se scad pierderile prin efect JOULE-LENZ din circuit și care pot fi exprimate prin relația

$$p = RI^2,$$

unde R este o constantă, corespunzînd rezistenței echivalente a circuitului.

Dacă x și y sînt coordonatele punctului M considerat, atunci pierderile JOULE pot fi exprimate prin relația

$$p = R(x^2 + y^2).$$

Ecuația cercului loc-geometric fiind

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \rho^2,$$

în care a, b și ρ sînt coordonatele centrului și raza, rezultă că

$$x^2 + y^2 = 2ax + 2by + (\rho^2 - a^2 - b^2)$$

și deci

$$p = 2Rax + 2Rby + R(\rho^2 - a^2 - b^2).$$

Puterea dată fiind

$$P_1 = Ux,$$

puterea utilă se poate scrie

$$P_2 = P_1 - p = (U - 2Ra)x - 2Rby - R(\rho^2 - a^2 - b^2);$$

P_2 are deci o formă liniară

$$P_2 = Ax + By + C.$$

Fie dreapta Δ_p, a cărei ecuație este

$$P_2 = 0.$$

Ordonata la origine a acestei drepte este

$$y_0 = -\frac{C}{B} = \frac{a^2 + b^2 - \rho^2}{2b},$$

iar coeficientul ei unghiular

$$\mathrm{tg}\,\theta = -\frac{A}{B} = \frac{U - 2Ra}{2Rb},$$

de unde se deduce

$$\sin\theta = -\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Distanța de la punctul M (de coordonate x și y) la dreapta

$$Ax + By + C = 0$$

este dată de relația

$$\overline{MN} = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{P_2}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Lungimea segmentului $\overline{MP'}$, paralel cu axa Ox, este

$$\overline{MP'} = \frac{\overline{MN}}{\sin\theta} = -\frac{P_2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{A},$$

de unde rezultă că

$$P_2 = -A(\overline{MP'}) = (2Ra - U)(\overline{MP'}).$$

În consecință, puterea utilă P_2 se măsoară prin segmentul de dreaptă $\overline{MP'}$, raportat la scara respectivă, cantitatea $(2Ra - U)$ fiind o constantă.

OBSERVAȚII. 1. Puterea utilă este nulă pentru $\lambda = 0$ și $\lambda = \infty$. Într-adevăr, pentru $\lambda = 0$, circuitul este în scurtcircuit și deci puterea utilă consumată în impedanța de utilizare este nulă. De asemenea cînd $\lambda = \infty$, bornele de ieșire ale circuitului sînt izolate, puterea utilă este nulă și în acest caz. În consecință, distanțele corespunzătoare punctelor de pe cerc pentru care $\lambda = 0$ și $\lambda = \infty$ sînt nule și deci dreapta Δ_p trece prin aceste puncte. Ea poate fi trasată fără calcul.

2. Dacă $\underline{U}$ nu este luat drept origine de fază, atunci toate elementele de mai sus se raportează la un nou sistem de axe, rotit față de precedentul, cu un unghi egal cu argumentul fazorului tensiune.

3. Dreapta puterii reactive se construiește în același mod.

6.6.7. APLICAȚII

6.6.7.1. **Circuite electrice serie.** Fie un circuit electric format dintr-un rezistor de rezistență R, o bobină de inductanță L și un condensator de capacitate C, legate în serie (fig. 6.125) și alimentate cu o tensiune sinusoidală

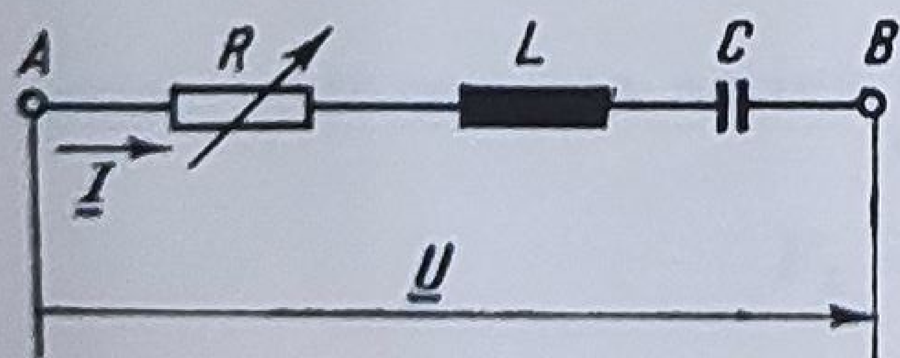


Fig. 6.125. Circuit electric serie.

$$u = U\sqrt{2}\cos\omega t.$$

Presupunînd că rezistența R este variabilă, se cere variația curentului $\underline{I}$ din circuit. Fie

$$\underline{Z} = R + jX,$$

în care s-a notat

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C};$$

rezistența R, variabilă, poate fi scrisă

$$R = \lambda R_1,$$

λ fiind o variabilă oarecare, variind între 0 şi $+\infty$ iar R_1 o valoare constantă a rezistenţei. Impedanţa circuitului se poate scrie

$$\underline{Z} = \lambda R_1 + jX.$$

Curentul $\underline{I}$ căutat este dat de relaţia

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{\lambda R_1 + jX}.$$

Este uşor de văzut că locul geometric al lui $\underline{I}$ este un cerc trecînd prin originea axelor de coordonate.

Să-i precizăm poziţia. Pentru aceasta se construieşte dreapta

$$\Delta = \lambda R_1 + j X, \qquad (6.188)$$

care se vede că este o paralelă la axa 0, +1 dusă prin vîrful vectorului jX. Într-adevăr, vectorul jX este aşezat chiar pe axa complexă, iar vectorul R_1 este aşezat pe axa reală.

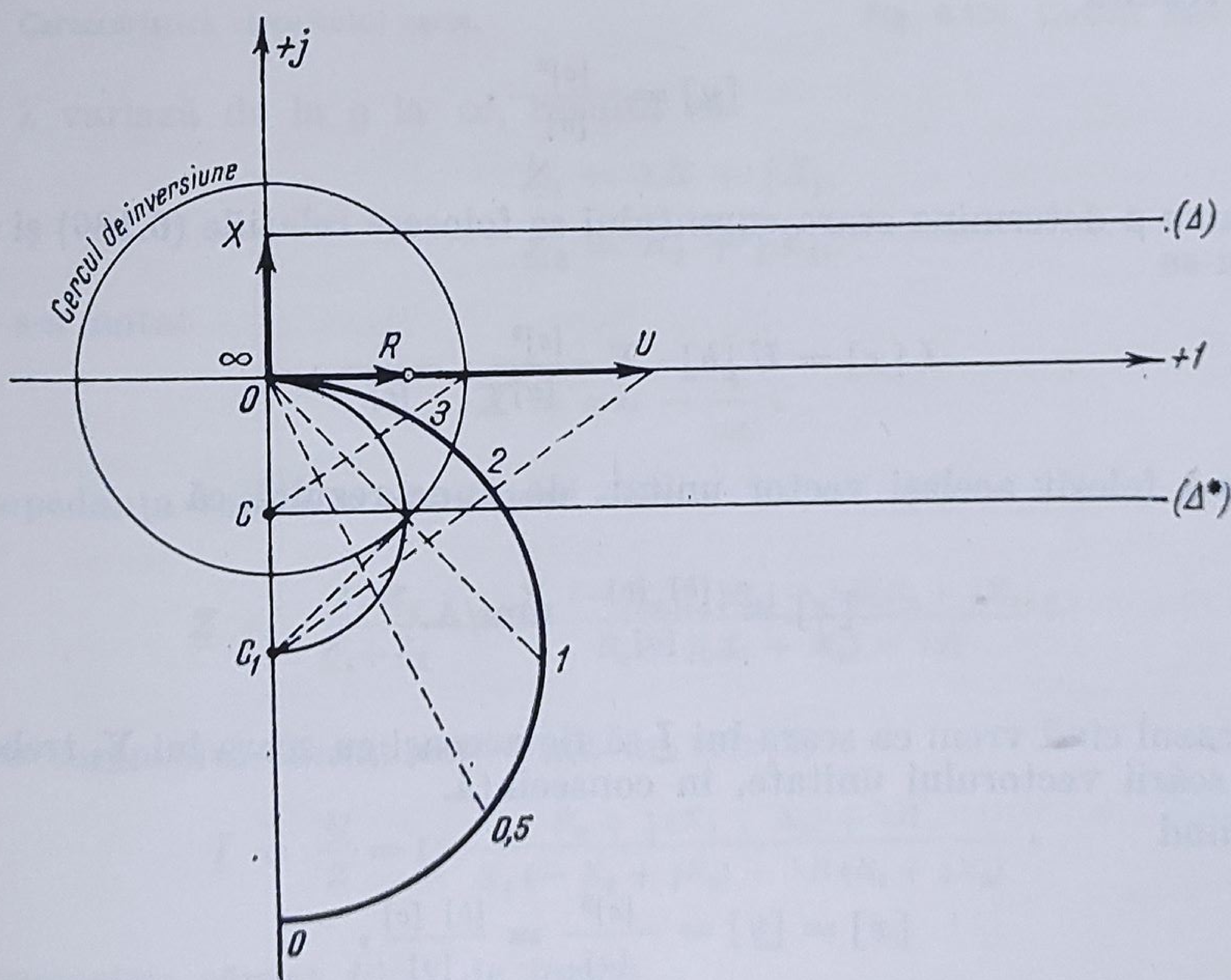


Fig. 6.126. Locul geometric al fazorului de curent într-un circuit serie.

Pentru a construi cercul invers dreptei (6.188) se procedează aşa cum s-a arătat în paragraful 6.6.3.1. Ţinînd seama că $\lambda \in [0, \infty)$, locul geometric al vectorului admitanţă este *semicercul* cu centrul în C (fig. 6.126). Pentru a găsi locul geometric al fazorului de curent va trebui să se efectueze produsul

$$\underline{I} = \underline{U}\,\underline{Y}, \qquad (6.189)$$

dar cum

$$u = U\sqrt{2}\cos\omega t$$

şi, deci,

$$\underline{U} = U\,\underline{|0},$$

rezultă că va trebui să se dilate numai raza cercului cu centrul în C. Fazorul $\underline{U}$, avînd argumentul O, fazorul produs va fi tot în direcţia vectorului $\overline{OC}$, şi produsul se efectuează pe cale grafică.

Urmează să se determine scările pentru a se putea folosi epura. Dacă se presupune că pentru construcţia epurei s-a luat:

— scara impedanţelor a mm/Ω
— scara tensiunilor b mm/V
— scara vectorului unitar c mm,

se determină scara admitanţei, aplicînd relaţia de inversiune şi se obţine

$$Y\,[y] = \frac{[c]^2}{Z\,[a]},$$

de unde rezultă

$$[y] = \frac{[c]^2}{[a]}.$$

Pentru a determina scara curentului se folosesc relaţiile (6.186) şi (6.189), obţinîndu-se

$$I\,[x] = U\,[b]\cdot Y\frac{[c]^2}{[a]}\cdot\frac{1}{[c]},$$

întrucît s-a folosit acelaşi vector unitar, de unde rezultă că

$$[x] = \frac{[b]\;[c]}{[a]}\quad \text{mm/A}.$$

În cazul cînd vrem ca scara lui $\underline{I}$ să fie aceeaşi cu scara lui $\underline{Y}$, trebuie ales modulul scării vectorului unitate, în consecinţă.

Scriind

$$[x] = [y] = \frac{[c]^2}{[a]} = \frac{[b]\;[c]}{[a]},$$

rezultă că

$$[c] = [b],$$

adică modulul scării vectorului unitate trebuie să fie egal cu modulul scării tensiunilor. Caracteristica curentului în funcţie de variabila λ se deduce din locul geometric al fazorului curent, aşa cum s-a arătat în paragraful 6.6.5.

Se obţine o curbă continuă (fig. 6.127).

6.6.7.2. Circuit electric paralel. Fie un circuit format din două impedanțe legate în paralel (fig. 6.128) dintre care una variabilă în raport cu rezistența și alimentat cu tensiunea periodică sinusoidală

$$u = U\sqrt{2}\cos \omega t.$$

Se cere variația curentului total debitat de sursă.

Presupunînd pe R_1 variabil și notînd

$$R_1 = \lambda R,$$

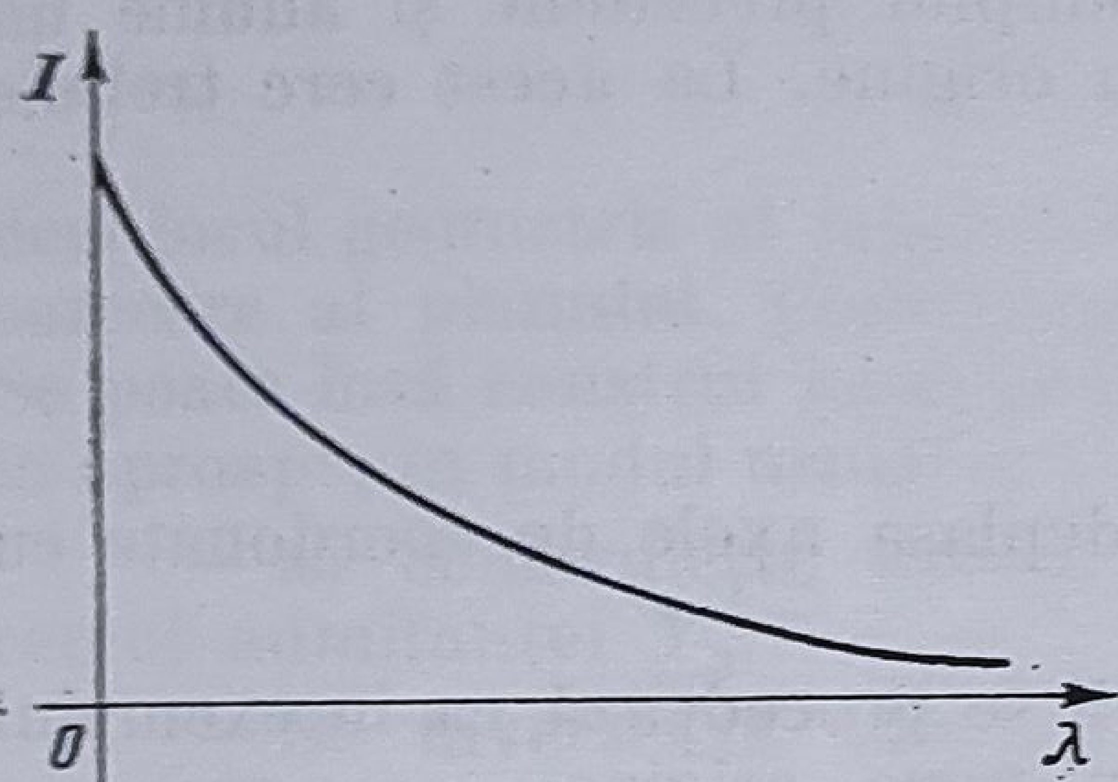


Fig. 6.127. Caracteristica circuitului serie.

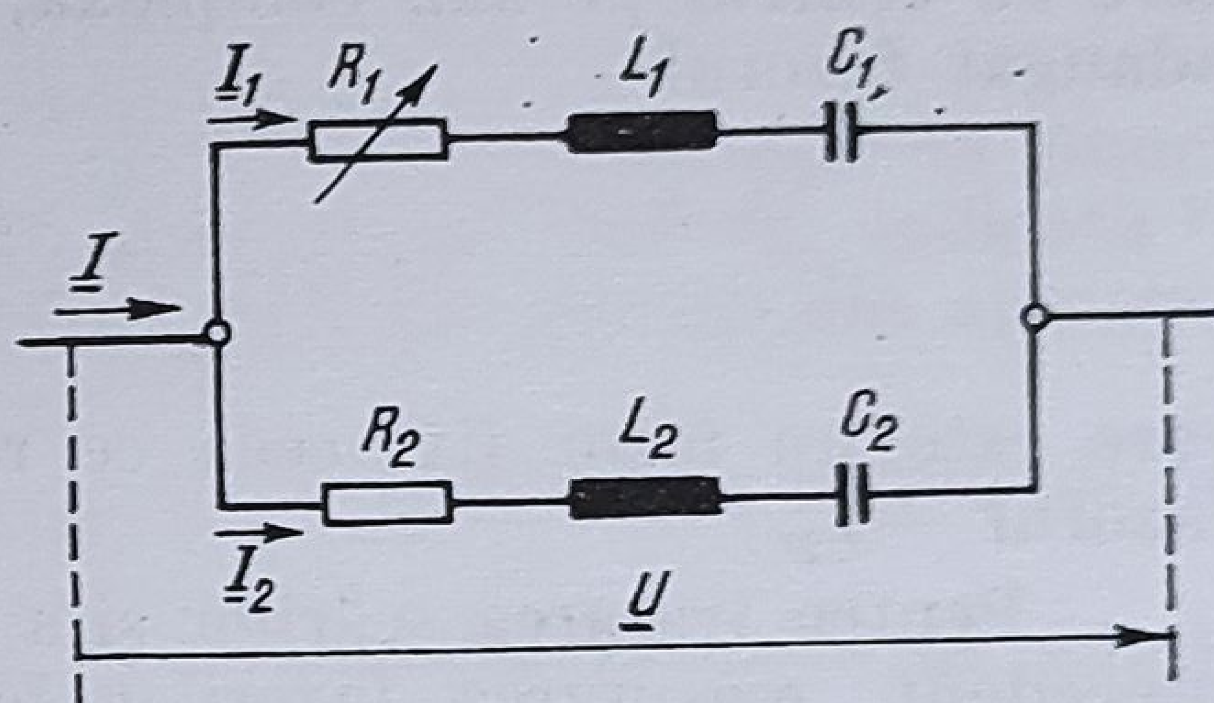


Fig. 6.128. Circuit paralel.

în care λ variază de la 0 la ∞, rezultă că

$$\underline{Z}_1 = \lambda R + jX_1,$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2,$$

în care s-a notat

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Impedanța totală a circuitului este

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1\,\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{X_1(-X_2 + jR_2) + \lambda R(R_2 + jX_2)}{R_2 + j(X_1 + X_2) + \lambda R};$$

Valoarea curentului căutat este dată de relația

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \underline{U}\,\frac{R_2 + j(X_1 + X_2) + \lambda R}{X_1(-X_2 + jR_2) + \lambda R(R_2 + jX_2)}. \tag{6.190}$$

Locul geometric căutat fiind de forma

$$\underline{I} = \underline{U}\,\frac{\underline{A} + \lambda \underline{B}}{\underline{C} + \lambda \underline{D}},$$

reprezintă un cerc oarecare în plan, a cărui construcție este cunoscută.

Se poate construi locul geometric mai ușor, dacă se scrie relația (6.190) sub forma

$$\underline{I} = \underline{U}\underline{Y} = \underline{U}\underline{Y}_1 + \underline{U}\,\underline{Y}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2},$$

de unde rezultă că locul geometric se compune dintr-un fazor constant $\frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2}$ şi din locul geometric a lui $\frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1}$.

Construcţia locului geometric rezultă acum imediat: locul geometric al fazorului

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}}{\lambda R + jX}$$

este locul geometric care a fost trasat în exemplul precedent şi anume un cerc cu centrul pe axa complexă, trecînd prin origine. La acest cerc trebuie adaugat fazorul

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2},$$

care este un fazor fix, ceea ce revine în a deplasa axele de coordonate cu fazorul $-\underline{I}_2$.

Pentru trasarea scărilor şi a caracteristicii se procedează ca în exemplul precedent, măsurarea fazorilor făcîndu-se din noua origine.

6.6.7.3. Studiul unui circuit în T. Fie un circuit în T, reprezentînd circuitul echivalent al unui cuadripol oarecare *, alimentat cu o tensiune $\underline{U}_1$ şi ale cărei borne de ieşire sînt închise pe o impedanţă oarecare variabilă $\underline{Z}_\lambda = \lambda \underline{Z}_2$ (fig. 6.129).

Fie de studiat variaţia curentului $\underline{I}_1$, absorbit de circuit cînd λ variază luînd orice valoare între $-\infty$ şi $+\infty$. Curentul $\underline{I}_1$ căutat este dat de relaţia

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 \underline{Y},$$

în care $\underline{Y}$ este admitanţa totală a circuitului. Calculul ei se face din aproape în aproape. Admitanţa echivalentă la nodurile C_1 şi C_2 este

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_4} + \frac{1}{\underline{Z}_3 + \lambda \underline{Z}_2},$$

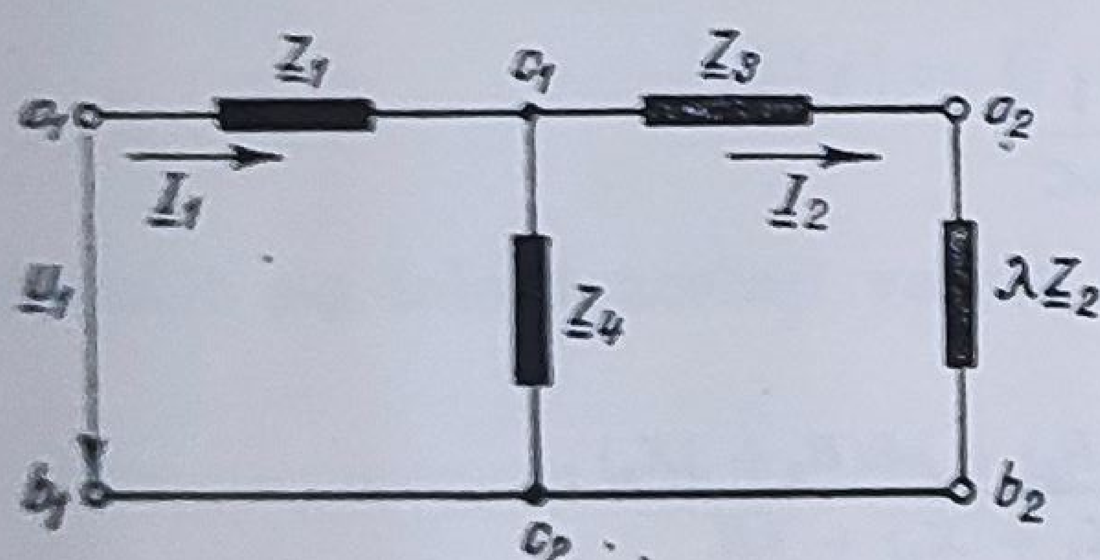


Fig. 6.129. Cuadripolul în T, de studiat.

iar impedanţa echivalentă la bornele de intrare a_1 şi b_1 este

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{1}{\underline{Y}_1},$$

astfel încît impedanţa totală a circuitului este

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\underline{Z}_4} + \cfrac{1}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2}}} \tag{6.191}$$

* Vezi 6.4.4.9.

şi deci curentul căutat, după ce am făcut toate calculele, este

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \lambda \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_4 + \underline{Z}_3 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4) + \lambda(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4) \underline{Z}_2}.$$

Se recunoaşte uşor că ecuaţia curentului este de forma

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 \frac{\underline{M} + \lambda \underline{N}}{\underline{P} + \lambda \underline{R}},$$

deci locul geometric al fazorului său este un cerc, avînd centrul într-un punct oarecare al planului. Construcţia lui se face urmîndu-se metoda indicată *. Se poate însă construi locul geometric construind expresia (6.191) din aproape în aproape, în modul următor :

— se construieşte dreapta $\underline{Z}_3 + \lambda \underline{Z}_2$ care se inversează, obţinîndu-se cercul admitanţei $\underline{Y}_3$.

— Se inversează vectorul impedanţă $\underline{Z}_4$, obţinîndu-se vectorul admitanţă $\underline{Y}_1$.

— Se adună aceste admitanţe, obţinîndu-se admitanţa $\underline{Y}_{34}$, care se inversează, obţinîndu-se impedanţa $\underline{Z}_{34}$.

— Se adună această impedanţă cu impedanţa $\underline{Z}_1$ şi se obţine impedanţa totală $\underline{Z}$, care se inversează, obţinîndu-se admitanţa totală $\underline{Y}$.

— Se înmulţeşte admitanţa $\underline{Y}$ cu fazorul $\underline{U}$ şi se obţine locul geometric căutat.

Urmînd indicaţiile de mai sus, construcţia epurei se face imediat (fig. 6.130).

Gradarea locului geometric se face urmărind pentru fiecare inversiune gradarea respectivă. Este suficient a se urmări pe epură numai punctele 0, 1 şi ∞, cu acestea obţinîndu-se la sfîrşit unitatea pentru divizare **.

În ceea ce priveşte scările, acestea se stabilesc aşa cum s-a arătat mai înainte ***. Astfel, în exemplul de faţă, se alege modulul scării de impedanţă $[Z_1]$ şi raza cercului de inversiune $[c_1]$ în raport cu care se construieşte dreapta Δ_3 şi se face inversiunea acestei drepte. Pentru admitanţa $\underline{Y}_3$ obţinută, rezultă un modul al scării dat de relaţia

$$[I_1] = \frac{[C_1]^2}{[Z_1]}.$$

Inversînd admitanţa rezultantă $\underline{Y}_{34}$, se obţine vectorul impedanţă $\underline{Z}_{34}$, a cărui scară are modulul $[Z_2]$ dat de relaţia

$$[Z_2] = \frac{[k_1]^2}{[y_1]},$$

* Vezi 6.6.3.3.
** Vezi 6.6.3.3, *b*
*** Vezi 6.6.4.

în care k_1 este raza cercului în raport cu care s-a făcut inversiunea ; ţinînd seama de valoarea lui y_1, se obţine

$$[Z_2] = \left[\frac{k_1}{C_1}\right]^2 [Z_1].$$

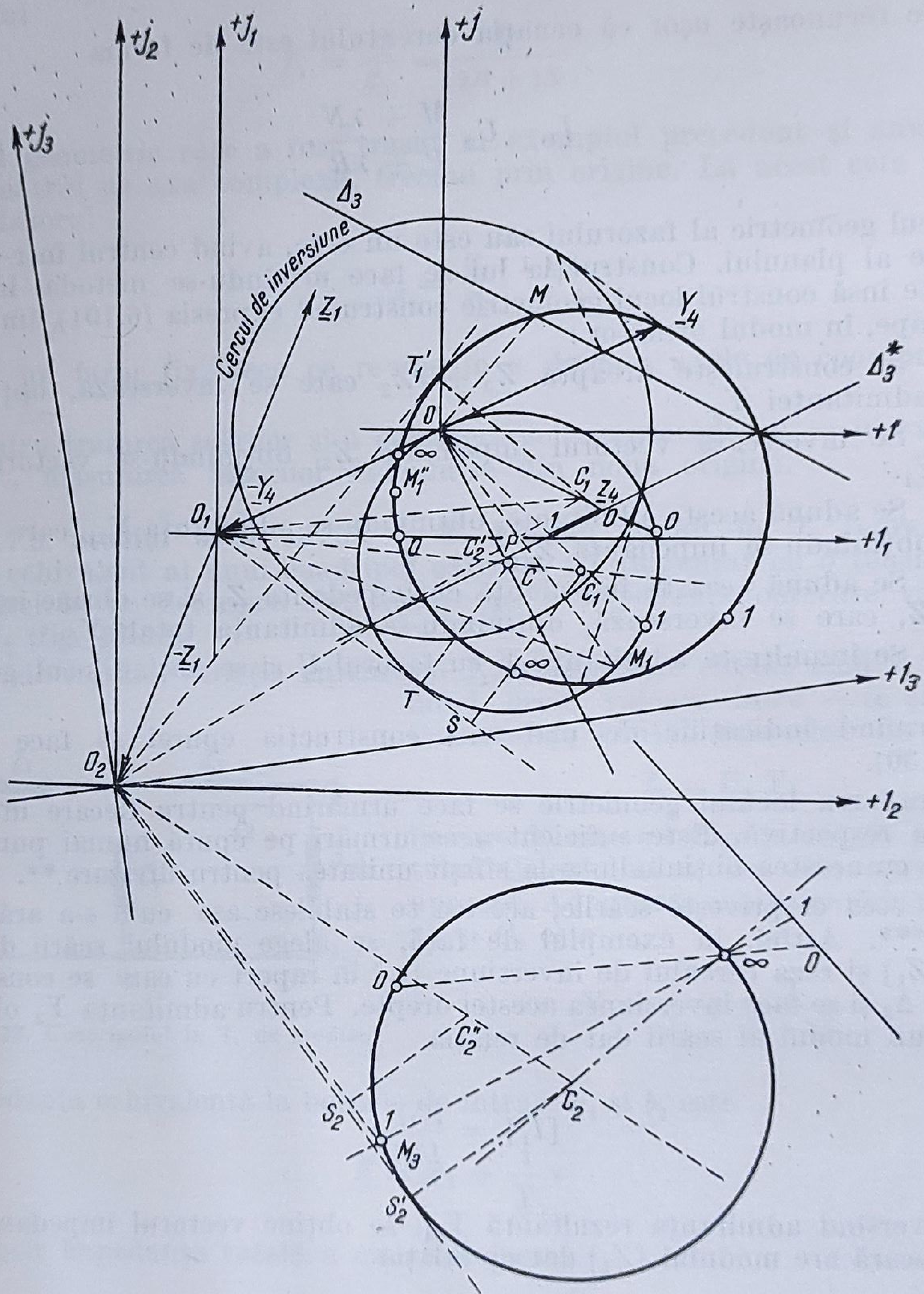


Fig. 6.130. Diagrama loc-geometric a unui cuadripol în T.

Inversiunea următoare dă modulului admitanţei $\underline{Y}$, care va fi, urmărind aceeaşi cale,

$$[y_2] = \left[\frac{k_2}{k_1}\right]^2 : \frac{[C_1]^2}{[Z_1]}$$

Pentru a obține modulul scării curentului, se fixează modulul scării tensiunii și al vectorului unitate și se aplică relația (6.186). Dacă $[v]$ este modulul scării tensiunii și $[C_2]$ cel al vectorului unitate, modulul scării curentului va fi

$$[a] = \left[\frac{k_2}{k_1}\right]^2 \cdot \frac{[C_1]^2}{[C_2]} \cdot \frac{[v]}{[Z_1]}.$$

Construcția cercului loc-geometric al fazorului $\underline{I}$ se poate face mai simplu, fie utilizînd metoda industrială *, fie utilizînd metoda inversiunii cu un singur cerc. În această metodă, cercul invers al dreptei Δ_3 va fi cercul

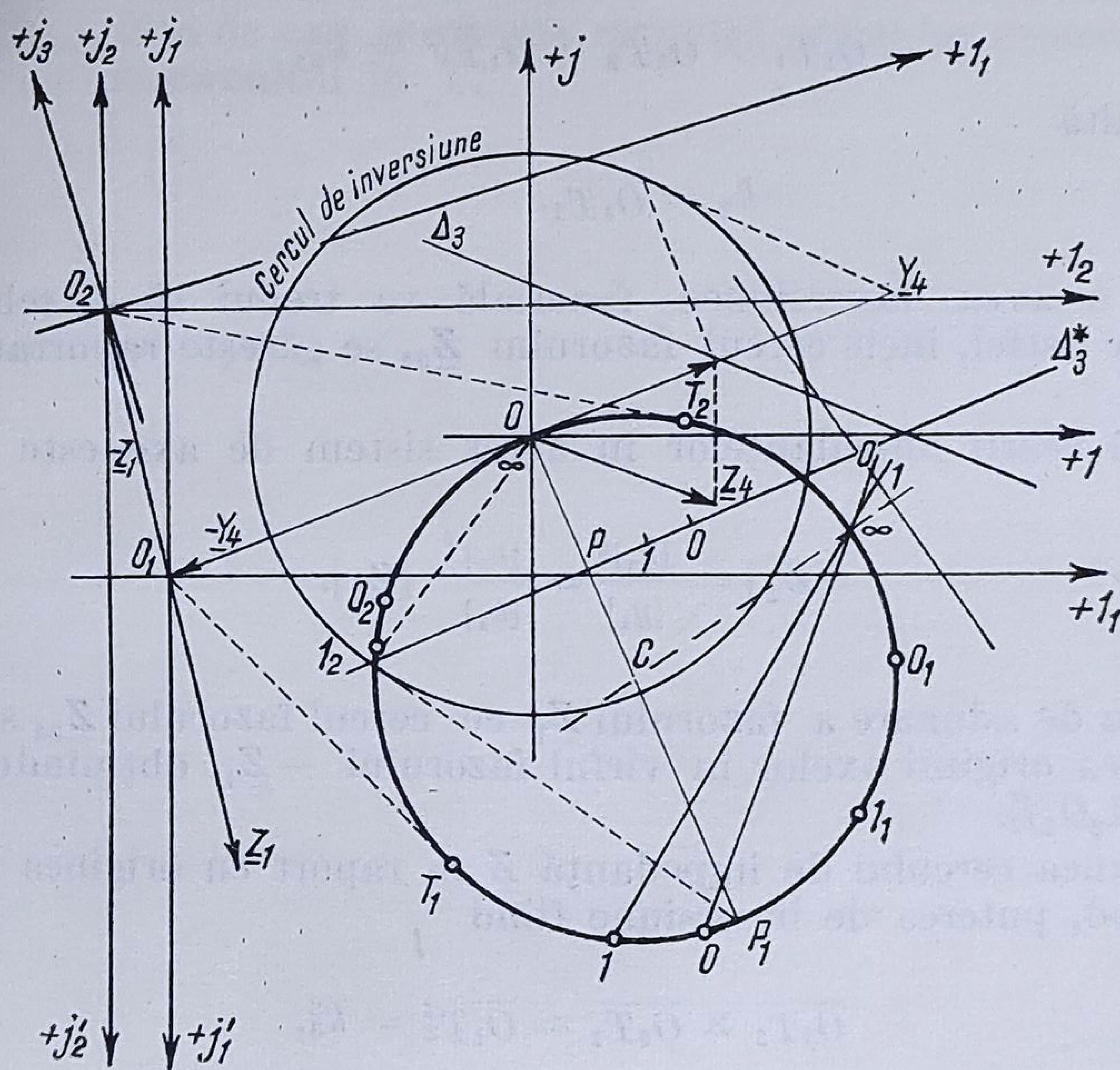


Fig. 6.131. Construcția locului geometric prin metoda inversiunii cu un singur cerc.

loc-geometric căutat, singura operație de efectuat fiind determinarea axelor finale necesare gradării cercului și găsirea modulului scării curentului. Construcția locului geometric se face în modul următor (fig. 6.131):

Se trasează dreapta Δ_3 și se inversează în raport cu cercul de inversiune; întrucît cercul obținut va reprezenta chiar locul geometric căutat, i se fixează diametrul $\overline{OP_1}$ astfel ca dimensiunile lui să fie acceptabile pe epură. Va rezulta raza cercului de inversiune care se determină cu ajutorul relației

$$\overline{OP} \times \overline{OP_1} = k_1^2,$$

OP fiind cunoscut.

* Vezi 6.6.3.3,*b*

Modulul scării admitanţei este

$$[y_1] = \frac{[k_1]^2}{[Z_1]},$$

$[Z_1]$ fiind modulul scării impedanţei, ales arbitrar.

Faţă de acelaşi cerc de inversiune se inversează fazorul $\underline{Z}_4$, obţinîndu-se vectorul $\underline{Y}_4$, care se adaugă cercului $\underline{Y}_3$, operaţie ce se realizează prin deplasarea axelor în vîrful fazorului $- Y_4$, obţinîndu-se axele $1_1 O_1 j_1$.

Se inversează acum cercul obţinut faţă de noua origine O_1; cercul trebuind să se inverseze în el însuşi, puterea de inversiune se determină prin relaţia

$$\overline{O_1T_1} \times \overline{O_1T_2} = \overline{O_1T_1}^2 = k_2^2,$$

de unde rezultă

$$k_2 = \overline{O_1T_1}.$$

Pentru a avea inversiunea fazorială va trebui să se schimbe sensul axei complexe astfel, încît cercul fazorului $\underline{Z}_{34}$ se găseşte raportat la sistemul de axe $1_1 O_1 j_1'$.

Modulul scării impedanţelor în acest sistem de axe este

$$[Z_2] = \frac{[k_2]^2}{[y_1]} = \frac{[k_2]}{[k_1]}^2 [Z_1].$$

Operaţia de adunare a fazorului $\underline{Z}_1$ cu cercul fazorului $\underline{Z}_{34}$ se efectuează prin deplasarea originii axelor în vîrful fazorului $-\underline{Z}_1$, obţinîndu-se sistemul de referinţă $1_2 O_2 j_2'$.

Inversiunea cercului de impedanţă $\underline{Z}$ în raport cu originea O_2 se obţine în acelaşi mod, puterea de inversiune fiind

$$\overline{O_2T_2} \times \overline{O_2T_2} = \overline{O_2T_2^2} = k_3^2,$$

de unde rezultă

$$k_3 = \overline{O_2T_2}.$$

Modulul scării admitanţă este

$$[y_2] = \frac{[k_3]^2}{[Z_2]} = \left[\frac{k_3}{k_2}\right]^2 \cdot \frac{[k_1]^2}{[Z_1]}.$$

Se inversează din nou axa complexă pentru a avea cercul admitanţei $\underline{Y}$ în adevărata sa poziţie, sistemul de referinţă fiind acum $1_2 O_2 j_2$.

Pentru a se obţine cercul loc-geometric al curentului I, trebuie efectuat produsul

$$\underline{I} = \underline{Y} : \underline{U} \tag{6.192}$$

Acest produs trebuie să îndeplinească condiţia ca cercul reprezentativ să rămînă acelaşi. Aceasta se obţine scriind că modulul scării curentului este acelaşi cu modulul scării admitanţei

$$[a] = \frac{[\nu] \cdot [y_2]}{[C]} = [y_2],$$

de unde rezultă

$$[\nu] = [C],$$

adică modulul vectorului unitate, corespunzător efectuării grafice a produsului (6.192), este egal cu modulul scării tensiunii.

În sfîrşit, se rotesc axele cu unghiul $-$ (arg. $\underline{U}$), obţinîndu-se sistemul de referinţă $1_3 O_2 j_3$ faţă de care se găseşte raportat cercul-loc geometric al curentului $\underline{I}$ absorbit de circuitul în T.

Capitolul VII

CIRCUITE ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV ÎN REGIM NESTAȚIONAR (TRANZITORIU)

7.1. METODA GENERALĂ DE CALCUL

7.1.1. GENERALITĂȚI

În funcționarea circuitelor electrice de curent alternativ se pun aceleași probleme ca și în cele de curent continuu în cazul cînd situația de funcționare în regim permanent este perturbată dintr-o cauză oarecare * (schimbarea valorii impedanțelor din circuit, a tensiunilor de alimentare etc.). Perturbația ce apare în funcționarea circuitului de curent alternativ constă — ca și în cazul rețelelor de curent continuu — în adaptarea acestuia la noua situație de funcționare. Această adaptare se face, în general, prin oscilații ale circuitului în jurul noului regim de funcționare; în cazul curentului alternativ pot apărea însă situații în care adaptarea se face brusc, fără apariția acestor oscilații.

Extinzînd rezultatele obținute în cazul circuitelor electrice de curent continuu, regimul tranzitoriu de funcționare a circuitelor electrice de curent alternativ poate fi considerat — în cazul circuitelor liniare — ca o suprapunere peste regimul forțat al unui regim liber. Ecuațiile de funcționare ale unui circuit în curent alternativ fiind izomorfe cu cele din curentul continuu, pentru o rețea oarecare se va obține un sistem de ecuații de tipul (3.191) sau (3.193) care se rezolvă în mod obișnuit.

În cazul curentului alternativ, sursele de tensiune sau de curent sînt funcții periodice de timp; soluțiile ce se vor obține pentru regimul forțat de funcționare vor fi de asemenea funcții periodice de timp, de aceeași formă cu sursele; soluțiile regimului liber vor fi însă funcții de timp, periodice sau nu, după natura parametrilor circuitului.

Rezultă dar, că soluțiile generale găsite în studiul regimului tranzitoriu efectuat asupra circuitelor de curent continuu vor fi valabile și pentru studiul regimului tranzitoriu în circuitele de curent alternativ.

Problemele de regim tranzitoriu ce apar în circuitele de curent alternativ sînt în general mai complicate din cauza defazajelor ce apar între diverșii curenți și tensiuni.

Studiul se poate face simplu, dacă în anumite situații bine definite se poate neglija energia magnetică față de energia electrostatică — sau invers — și deci transferul și transformarea acestor energii.

Problema se complică dacă aceasta nu este posibil.

Metodele de rezolvare sînt analoage cu cele utilizate în circuitele de curent continuu și se utilizează aceleași ecuații.

---

* Vezi 3.6.

7.2. STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU ÎN CIRCUITELE ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV ÎN CARE SE ŢINE SEAMA NUMAI DE O SINGURĂ FORMĂ DE ENERGIE

7.2.1. FORMULELE UTILIZATE

Rezolvarea acestui tip de probleme se face pornind direct de la ecuaţiile de funcţionare ale circuitului, ecuaţia (3.196)

$$Ri + L\frac{di}{dt} = e,$$

pentru circuitele în care se neglijează energia electrostatică, ecuaţia (3.202

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\, dt = e$$

pentru circuitele în care se neglijează energia magnetică.

Se pot utiliza deci direct rezultatele obţinute în cazul circuitelor de curent continuu şi anume, relaţia (3.199)

$$i = i_p + (i_0 - i_{p0})\, \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}$$

pentru circuitele formate din rezistenţe şi inductanţe şi relaţia (3.207)

$$u = u_p + (u_0 - u_{p0})\varepsilon^{-\frac{1}{RC}t}$$

pentru circuitele formate din rezistenţe şi capacităţi, din această relaţie deducîndu-se apoi relaţiile (3.208) şi (3.209) care dau curentul din circuit, respectiv sarcina electrică cu care se încarcă condensatorul.

7.2.2. CIRCUITE ELECTRICE FORMATE DINTR-UN REZISTOR LEGAT ÎN SERIE CU O BOBINĂ

7.2.2.1. **Închiderea unui circuit electric inductiv alimentat de o forţă electromotoare alternativă sinusoidală.** Fie un circuit electric inductiv, format dintr-un rezistor de rezistenţă R legat în serie cu o bobină de inductanţă L şi alimentat de o sursă de forţă electromotoare alternativă sinusoidală de frecvenţă f, a cărei expresie este

$$e = E\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi),$$

în care ψ este un parametru care va permite definirea tensiunii la timpul $t=0$, de închidere a întrerupătorului. Se cere să se determine variaţia curentului în circuit la închiderea întrerupătorului K (fig. 7.1).

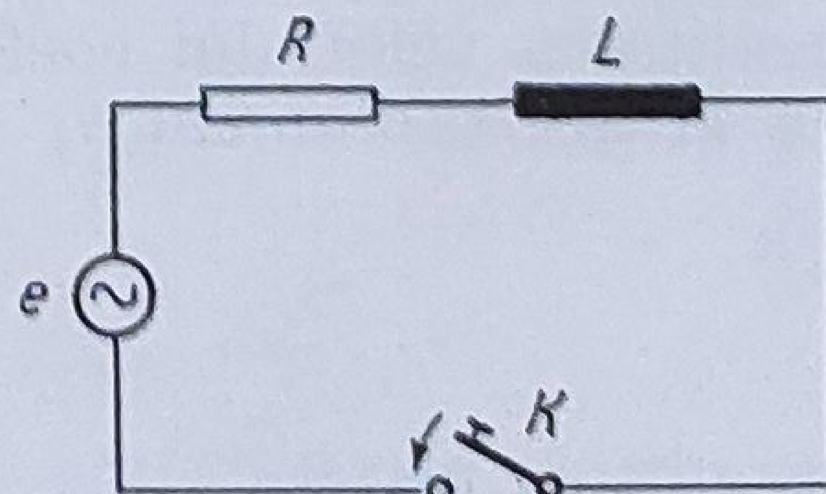


Fig. 7.1. Circuit electric serie cu R şi L alimentat de o sursă de curent alternativ.

Înainte de închiderea întrerupătorului, circuitul fiind deschis, curentul este nul; deci și în momentul închiderii întrerupătorului curentul este nul. Rezultă :

$$i_0 = 0.$$

În regim forțat, curentul este

$$i_p = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

în care

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R}$$

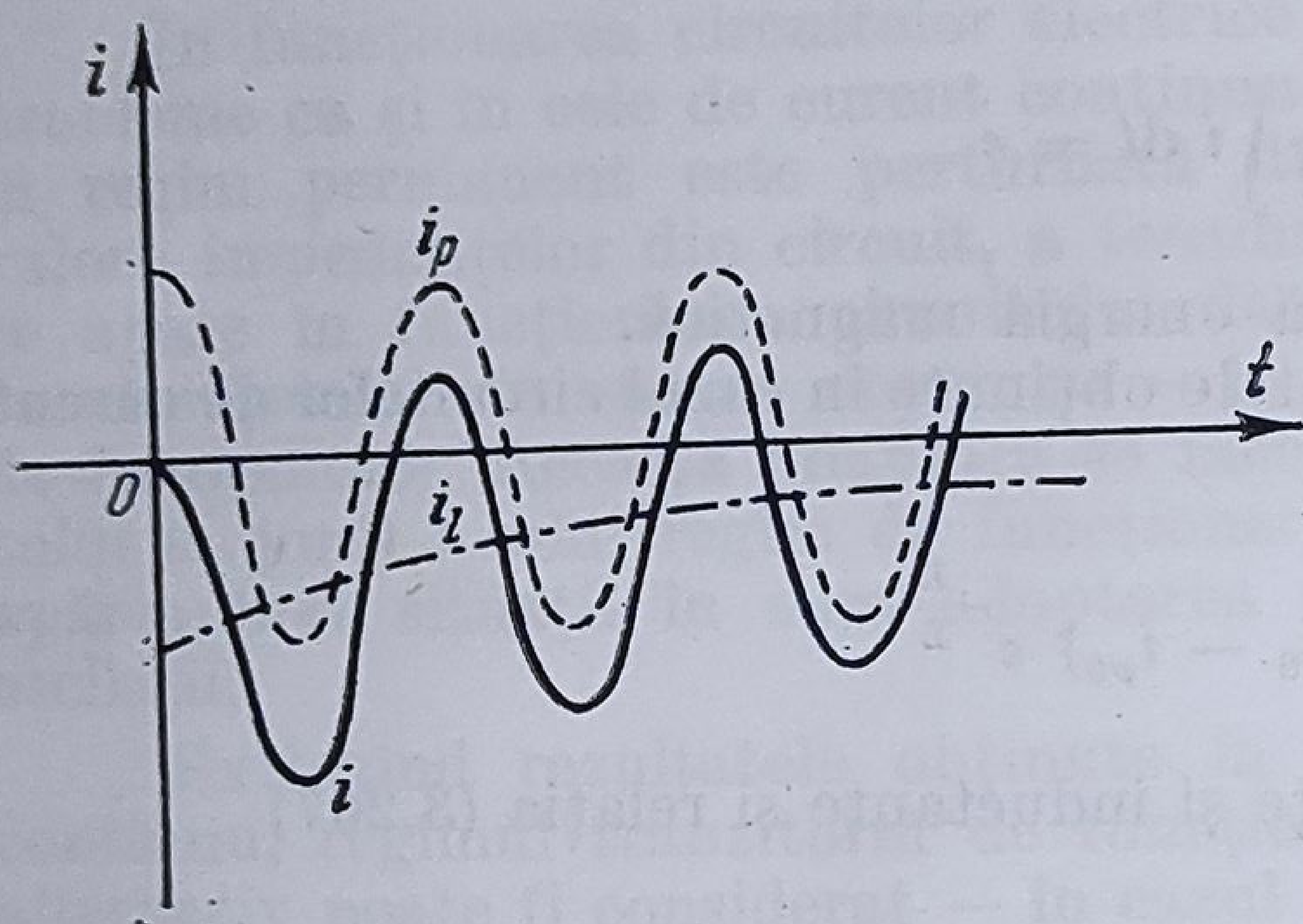


Fig. 7.2. Curba de curent la închiderea circuitului electric.

valoarea curentului permanent la timpul $t = 0_+$ va fi

$$i_{p0} = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \sin(\psi - \varphi)$$

și deci, curentul va avea expresia

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) -$$

$$-(\sin\psi - \varphi)\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (7.1)$$

Curba acestui curent este dată în diagrama din figura 7.2. După cum se vede din figură, curentul i, care rezultă din diferența ordonatelor celor două curbe de curent (liber și permanent) este maximum după prima trecere prin zero a curentului forțat i_p; acest maximum are cea mai mare valoare atunci cînd cele două curbe sînt tangente, ceea ce se exprimă scriind că în punctul de maxim coeficienții unghiulari ai celor două tangente sînt egali, adică

$$\frac{di_p}{dt} = \frac{di_l}{dt};$$

Să vedem care este valoarea parametrului ψ din expresia tensiunii pentru care se obține acest maximum maximorum. Pentru aceasta vom scrie egalitatea celor doi coeficienți unghiulari pentru timpul $t = 0$; ținînd seama că la acest moment $i_p + i_l = 0$, rezultă

$$\left(\frac{di_p}{dt}\right)_{t=0} = -\left(\frac{di_l}{dt}\right)_{t=0}.$$

Se obține astfel

$$\omega\cos(\psi - \varphi) = -\frac{R}{L}\sin(\psi - \varphi),$$

sau

$$\operatorname{tg}(\psi - \varphi) = -\operatorname{tg} \varphi.$$

Ultima relaţie este satisfăcută pentru

$$\psi = 0 \qquad \text{şi} \qquad \psi = \pi.$$

Aceste valori corespund trecerii tensiunii prin zero.
Pentru $\psi = 0$, curentul rezultant este

$$= \frac{E\sqrt{2}}{Z}\left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right].$$

Valoarea maximă a curentului apare la timpul

$$t = \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \cdot \frac{1}{\omega},$$

adică după un sfert de perioadă, şi are ca valoare

$$i_{max} = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\left[1 + \sin \varphi \varepsilon^{-\frac{R}{L\omega}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}\right].$$

Dacă circuitul are reactanţa mare şi rezistenţa lui este mică, valoarea curentului maxim poate avea aproape de două ori valoarea amplitudinii maxime a curentului permanent.

Se observă că dacă închiderea circuitului se face în momentul în care $\psi = \varphi$, atunci termenul aperiodic dispare şi regimul forţat se stabileşte imediat, fără ca circuitul să treacă printr-un regim tranzitoriu.

7.2.2.2. **Deschiderea unui circuit electric inductiv alimentat de o sursă de forţă electromotoare alternativă sinusoidală.** Fie (fig. 7.3) un circuit electric inductiv, format dintr-un rezistor de rezistenţă R legat în serie cu o bobină de inductanţă L şi alimentat de o sursă de forţă electromotoare alternativă sinusoidală de forma

$$e = E\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi),$$

la timpul $t = 0$, cînd se deschide întrerupătorul, valoarea acestei forţe electromotoare este

$$e_0 = E\sqrt{2}\cos \psi.$$

Dacă se neglijează rezistenţa R faţă de reactanţa $L\omega$, atunci curentul în inductanţă va fi

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega}\sin(\omega t + \psi),$$

iar la timpul $t = 0_-$, valoarea sa este

$$i_0 = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega}\sin \psi,$$

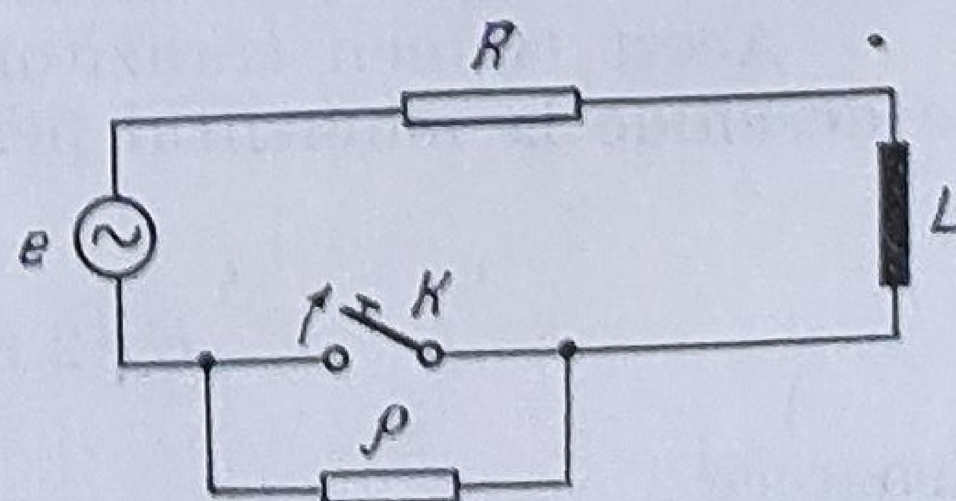


Fig. 7.3. Deschiderea unui circuit electric inductiv alimentat de o forţă electromotoare alternativă sinusoidală.

După ce s-a deschis întrerupătorul, curentul în regim forțat este

$$i_p = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\cos(\omega t + \psi - \varphi)$$

în care

$$Z = \sqrt{\rho^2 + L^2\omega^2} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{\rho}.$$

La timpul $t = 0_-$, acest curent este

$$i_{p0} = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\cos(\psi - \varphi).$$

Constanta de timp a circuitului fiind $\frac{L}{\rho}$, expresia curentului în regim tranzitoriu se obține aplicînd relația (3.199)

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\cos(\omega t + \psi - \varphi) + \sqrt{2}E\left[\frac{\sin\psi}{L\omega} - \frac{\cos(\psi - \varphi)}{Z}\right]\varepsilon^{-\frac{\rho}{L}t}.$$

Dar,

$$L\omega = \rho \operatorname{tg}\varphi \quad \text{și} \quad Z = \rho/\cos\varphi$$

și deci

$$\frac{\sin\psi}{L\omega} - \frac{\cos(\psi - \varphi)}{Z} = \frac{\sin\psi}{\rho \operatorname{tg}\varphi} - \frac{\cos(\psi - \varphi)\cos\varphi}{\rho} = \frac{1}{\rho}\sin(\psi - \varphi)\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}$$

astfel, încît expresia curentului devine

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{E\sqrt{2}}{\rho}\sin(\psi - \varphi)\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\varepsilon^{-\frac{\rho}{L}t}.$$

Tensiunea la bornele contactelor este

$$u = \rho i = \frac{E\sqrt{2}\rho}{Z}\cos(\omega t + \psi - \varphi) + E\sqrt{2}\sin(\psi - \varphi)\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\varepsilon^{-\frac{\rho}{L}t}.$$

Din această relație, se vede că termenul tranzitoriu produce o supratensiune la bornele contactelor întrerupătorului.

Acest termen tranzitoriu dispare dacă $\psi = \varphi$ adică dacă întrerupătorul se deschide la momentul pentru care tensiunea și curentul au valorile

$$E\sqrt{2}\cos\varphi \quad \text{și} \quad \frac{E\sqrt{2}}{L\omega}\sin\varphi = \frac{E}{Z}$$

deoarece

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{L\omega}{Z}.$$

Supratensiunea dispare în cazul cînd ρ este infinit mare ($\varphi = 0$), adică atunci cînd întrerupătorul se deschide în momentul în care tensiunea trece prin maximum şi curentul prin zero.

Ea este maximă pentru $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$, adică atunci cînd întrerupătorul se deschide în momentul cînd curentul are valoarea $\frac{E\sqrt{2}}{L\omega}\cos\varphi$. Amplitudinea termenului tranzitoriu de tensiune este atunci

$$E\sqrt{2}\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} = E\sqrt{2}\frac{\rho^2}{Z L\omega} = \frac{\rho}{L\omega}E\sqrt{2}$$

dacă ρ^2 este suficient de mare pentru a se putea neglija reactanţa $L^2\omega^2$ faţă de el şi pentru a se putea lua deci $Z \cong \rho$.

În practică, viteza de deschidere a întrerupătorului nu este atît de mare şi între cele două contacte ale întrerupătorului ia naştere un arc, care limitează imediat supratensiunea ce ar lua naştere; dacă deschiderea întrerupătorului nu se face într-un moment favorabil, acest arc se stinge în momentul cînd curentul trece prin zero ($\psi = 0$), termenul tranzitoriu al tensiunii avînd atunci amplitudinea, în valoare absolută,

$$E\sqrt{2}\cos^2\varphi = E\sqrt{2}\frac{\rho^2}{\rho^2 + L^2\omega^2}.$$

Această amplitudine este mai mică decît amplitudinea forţei electromotoare aplicată circuitului dacă ρ are o valoare finită, şi este egală cu aceasta dacă ρ este infinit mare.

Rezultă dar, că deschiderea unui circuit inductiv, în curent alternativ sinusoidal este mult mai uşoară decît în cazul curentului continuu.

7.2.2.3. **Curentul liber din circuit în cazul scurtcircuitării la borne a sursei de curent alternativ sinusoidal.** Fie un circuit electric inductiv format dintr-un rezistor de rezistenţă R, legat în serie cu o bobină de inductanţă L şi alimentat de o sursă cu forţa electromotoare alternativă sinusoidală de forma

$$e = E\sqrt{2}\cos\omega t.$$

Înainte de scurtcircuitarea bornelor sursei, curentul forţat care circulă în circuit este

$$i' = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\cos(\omega t - \varphi),$$

unde

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R}.$$

Dacă se scurtcircuitează brusc bornele A şi B ale sursei, curentul i din acest circuit se va anula, însă această anulare nu va fi instantanee, deoarece

energia $\frac{1}{2} LI^2$ acumulată în cîmpul magnetic al inductanţei nu poate să se disipeze instantaneu (fig. 7.4).

Curentul din circuit va corespunde ecuaţiei *

$$Ri + L\frac{di}{d} = 0,$$

a regimului liber şi expresia sa este

$$i = A\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}.$$

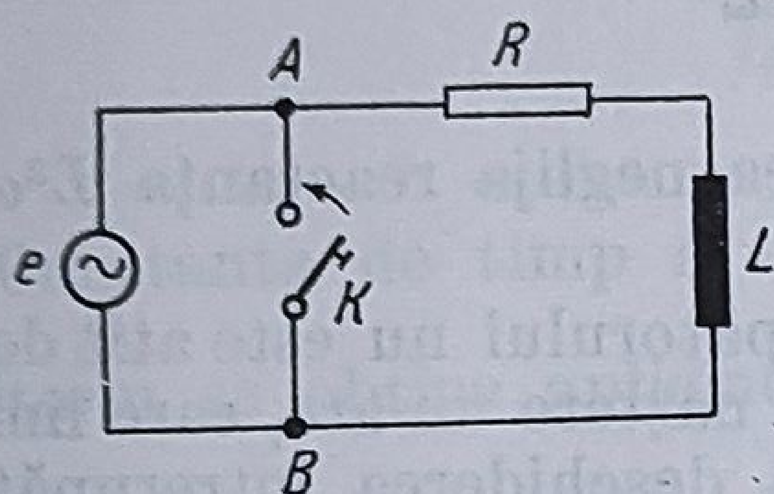


Fig. 7.4. Scurtcircuitarea sursei de curent alternativ într-un circuit electric inductiv.

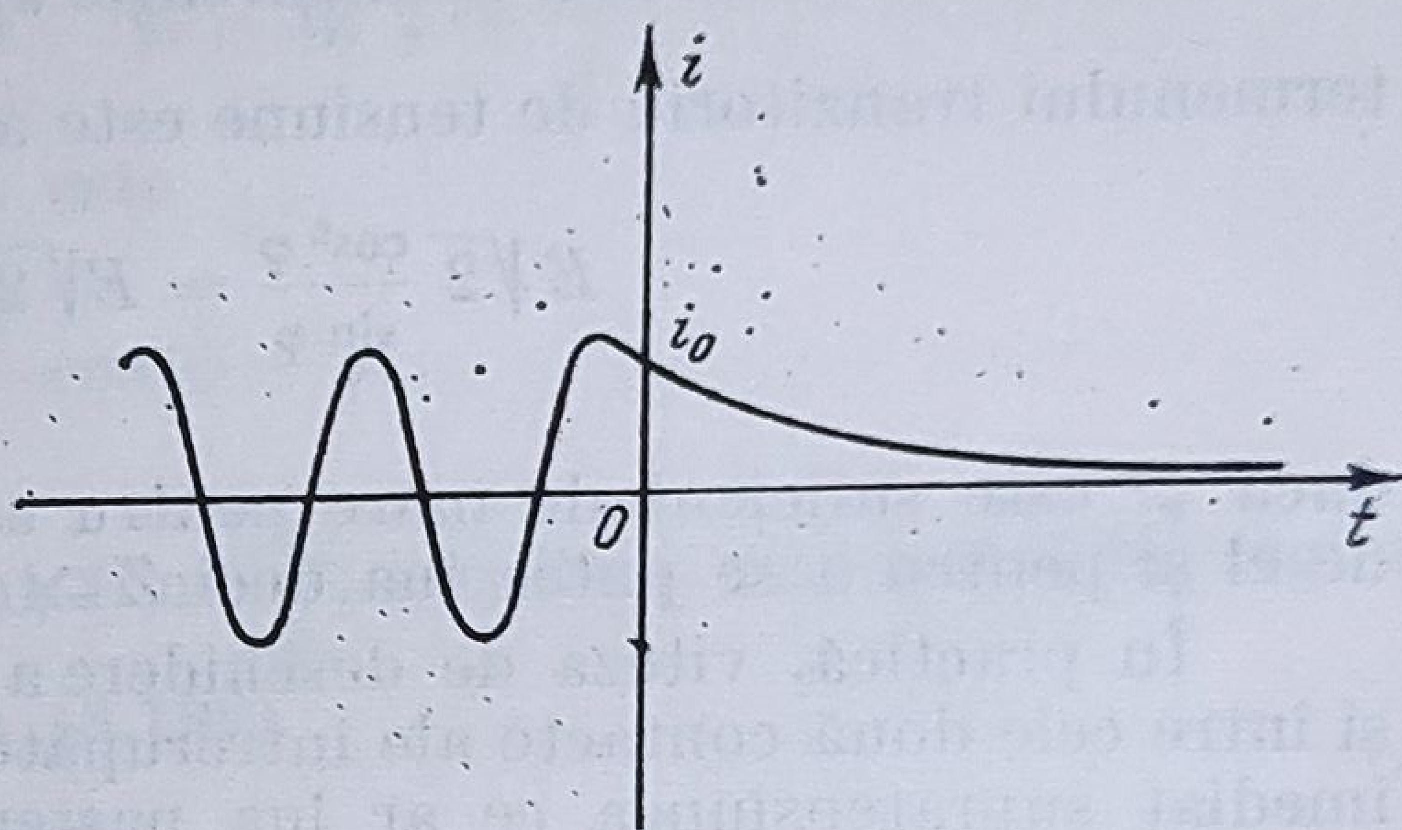


Fig. 7.5. Diagrama curentului electric în cazul scurtcircuitării sursei.

La timpul $t = 0_-$, adică înainte de a se scurtcircuita sursa, curentul are valoarea

$$i_0 = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos \varphi$$

deci $A = i_0$ şi atunci

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos \varphi \ \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}.$$

Diagrama curentului din circuit este dată în figura 7.5.

7.2.2.4. **Aplicaţie numerică.** Se dă un circuit electric inductiv format dintr-un rezistor de rezistenţă $R_1 = 356\ \Omega$ legat în serie cu o bobină de inductanţă $L = 0{,}638$ H şi alimentat de o sursă de forţă electromotoare

$$e = 3200 \cos \omega t.$$

La un moment dat rezistenţa scade brusc la $R_2 = 200\ \Omega$. Frecvenţa tensiunii alternative fiind $f = 50$ Hz, se cere să se stabilească regimul tranzitoriu al curentului şi să se traseze curba reprezentativă între limitele $t_1 = -\frac{2\pi}{\omega}$ şi $t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$.

---

* Aplicînd relaţia (3.199) problema se rezolvă imediat. Într-adevăr, vom avea

$$i_p = i_{p0} = 0;\ i_0 = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos \varphi \text{ şi deci } i = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos \varphi \ \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}$$

Curentul în regim tranzitoriu este dat de relaţia (3.199). Înainte de variaţia rezistenţei, curentul în regim forţat era

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z_1}\cos(\omega t - \varphi_1),$$

în care

$$\sqrt{2}\,E = 3200\ \mathrm{V};\quad Z_1 = \sqrt{R_1^2 + L^2\omega^2} = 400\ \Omega;$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_1 = \frac{L\omega}{R_1} = \frac{0{,}628 \times 2\pi \times 50}{356} = \frac{1}{\sqrt{3}};\quad \varphi_1 = 30°.$$

După variaţia rezistenţei şi stabilirea regimului forţat, curentul în circuit este

$$i_p = \frac{E\sqrt{2}}{Z_2}\cos(\omega t - \varphi_2)$$

în care

$$\sqrt{2}\,E = 3200\ \mathrm{V};\quad Z_2 = \sqrt{R_2^2 + L^2\omega^2} = 200\sqrt{2}\ \Omega;$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_2 = \frac{L\omega}{R_2} = \frac{0{,}628 \times 2\pi \times 50}{200} = 1;\quad \varphi_2 = 45°.$$

Se obţine astfel,

$$i_0 = \frac{E\sqrt{2}}{Z_1}\cos\varphi_1 = \frac{3200}{400}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} = 6{,}93\ \mathrm{A};$$

$$i_{p0} = \frac{E\sqrt{2}}{Z_2}\cos\varphi_2 = \frac{3200}{200}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 8\ \mathrm{A}.$$

Ecuaţia curentului în regim tranzitoriu devine

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z_2}\cos(\omega t - \varphi_2) + E\sqrt{2}\left[\frac{\cos\varphi_1}{Z_1} - \frac{\cos\varphi_2}{Z_2}\right]\varepsilon^{-\frac{R_2}{L}t},$$

sau numeric

$$i = 11{,}35\cos(\omega t - 45°) - 1{,}07\,\varepsilon^{-314\,t}.$$

Curba de variaţie a curentului se construieşte uşor.

7.2.3. CIRCUITE ELECTRICE FORMATE DINTR-UN REZISTOR LEGAT ÎN SERIE CU UN CONDENSATOR

7.2.3.1. Încărcarea unui condensator în curent alternativ sinusoidal. Fie un circuit electric format dintr-un condensator de capacitate C legat în serie cu un rezistor de rezistenţă R şi alimentat de o sursă cu forţă electromotoare alternativă sinusoidală (fig. 7.6)

$$e = E\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi).$$

Legea după care se încarcă un condensator în curent alternativ se obține cu ajutorul relației generale (3.209).

Curentul permanent este

$$i_p = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi + \varphi); \quad I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (1/C\omega)^2}} \quad \text{şi } \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\omega RC},$$

iar sarcina electrică cu care s-a încărcat condensatorul în regimul forțat este

$$q_p = \int_0^t i\,dt = \frac{I\sqrt{2}}{\omega}\sin(\omega t + \psi + \varphi) = Q\sin(\omega t + \psi + \varphi),$$

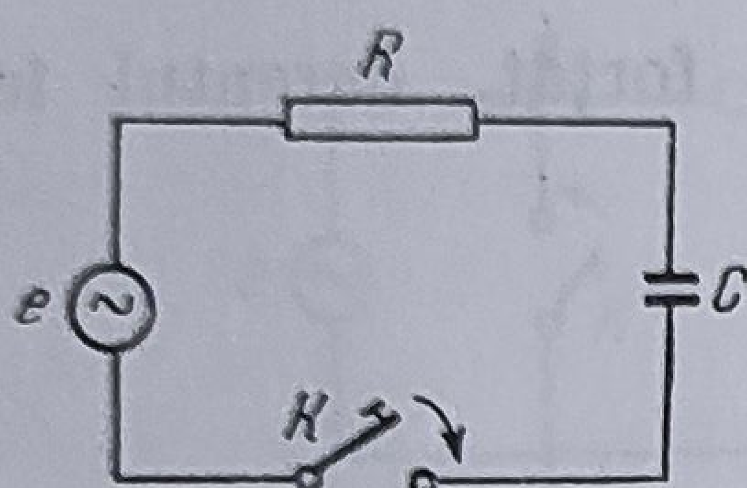


Fig. 7.6. Circuit electric serie cu R şi C, alimentat de o sursă de curent alternativ.

în care s-a notat:

$$Q = \sqrt{2}\,I/\omega.$$

La timpul $t = 0_-$

$$q_0 = 0 \text{ şi } q_{p0} = Q\sin(\psi + \varphi).$$

Deci, regimul tranzitoriu de încărcare a condensatorului este

$$q = Q\sin(\omega t + \psi + \varphi) - Q\sin(\psi + \varphi)\,\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}.$$

Curentul de încărcare va fi

$$i = \frac{dq}{dt} = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi + \varphi) + \frac{I\sqrt{2}}{RC}\sin(\psi + \varphi)\,\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}.$$

În momentul închiderii întrerupătorului, la timpul $t = 0_-$, curentul este

$$i_{(0)} = \sqrt{2}\,I\left[\cos(\psi + \varphi) + \frac{\sin(\psi + \varphi)}{RC\,\omega}\right] =$$

$$= \sqrt{2}\,I\,[\cos(\psi + \varphi) + \operatorname{tg}\varphi\sin(\psi + \varphi)] = \sqrt{2}\,I\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = \frac{E\sqrt{2}}{R}\cos\psi,$$

deoarece

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}.$$

De aici, rezultă că în momentul închiderii întrerupătorului, curentul este limitat de rezistența R din circuit și este maxim dacă închiderea se face în momentul în care $\psi = 0$. Această valoare maximă este

$$i_{(0)\,max} = \frac{E\sqrt{2}}{R}.$$

Pentru a se vedea cît de mare este acest curent în raport cu amplitudinea maximă a curentului forţat, se calculează raportul $i_{(0)max}/I$. Se găseşte

$$\frac{i_{(0)\,max}}{I\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}{R} = \frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{T}{2\pi t}\right)^2}\,.$$

Fie, de exemplu, un cablu subteran pentru care $C = 1\ \mu F$, $R = 0{,}585\ \Omega$ şi pentru $f = 50$ Hz se obţine

$$\frac{1}{\omega\, RC} = \frac{10^6}{2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}585.1} = 5440\,;$$

curentul în momentul închiderii întrerupătorului este deci de 5440 de ori mai mare decît amplitudinea maximă a curentului forţat.

Rezultă deci, că, deoarece constanta de timp a circuitului este

$$\tau = RC = 0{,}585 \times 10^{-6}\,\mathrm{s},$$

adică

$$\frac{50\,T\,\tau}{T} = 50\,\tau \cong 30 \times 10^{-6}$$

dintr-o perioadă, curentul tranzitoriu de încărcare se stinge foarte repede şi regimul forţat este atins în mai puţin de o jumătate de perioadă.

7.2.3.2. **Descărcarea unui condensator pe o rezistenţă.** Să presupunem că, la un moment dat se scurtcircuitează sursa care alimenta circuitul studiat în paragraful precedent.

Înainte de scurtcircuitarea sursei, cantitatea de electricitate ce străbătea condensatorul este dată de relaţia

$$q' = Q\sin(\omega t + \psi + \varphi)$$

în care

$$Q = I\sqrt{2}/\omega$$

În momentul scurtcircuitării sursei, la timpul $t = 0_-$, cantitatea de electricitate cu care era încărcat condensatorul este

$$q'_{t=0-} = q_0 = Q\sin(\psi + \varphi).$$

În regim forţat, după scurtcircuitarea sursei, cantitatea de electricitate din condensator este nulă, condensatorul descărcîndu-se complet; deci

$$q_p = 0\,;$$

rezultă *a fortiori* că şi

$$q_{p0} = 0.$$

Din relaţia (3.210) se obţine astfel expresia sarcinii electrice în regimul tranzitoriu de descărcare a condensatorului

$$q = Q \sin(\psi + \varphi)\, \varepsilon^{-\frac{t}{RC}}.$$

Curentul de descărcare al condensatorului este

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q}{RC} \sin(\psi + \varphi)\, \varepsilon^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{I\sqrt{2}}{RC\omega} \sin(\psi + \varphi)\varepsilon^{-\frac{t}{RC}},$$

iar tensiunea la bornele acestuia

$$u = \frac{q}{C} = \frac{Q}{C} \sin(\psi + \varphi)\varepsilon^{-\frac{t}{RC}} = \frac{I\sqrt{2}}{C\omega} \sin(\psi + \varphi)\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$$

toate aceste mărimi, q, i şi u, scad după o lege exponenţială.

7.2.3.3. Aplicaţie numerică. Se dă circuitul electric format dintr-un condensator avînd capacitatea $C = 1{,}06\ \mu F$, legat în serie cu un rezistor de rezistenţă $R_1 = 1732\ \Omega$ şi alimentat de o sursă cu tensiune alternativă cosinusoidală, avînd valoarea efectivă $E = 2$ kV. La un moment dat, rezistenţa creşte brusc la valoarea $R_2 = 3000\ \Omega$. Frecvenţa tensiunii alternative fiind $f = 50$ Hz, se cere să se stabilească regimul tranzitoriu al tensiunii la bornele condensatorului.

Tensiunea la bornele condensatorului fiind dată de relaţia

$$u = \frac{q}{C};$$

va trebui stabilită în prealabil încărcarea condensatorului în regim tranzitoriu. Aceasta este dată de relaţia (3.209). Tensiunea la bornele condensatorului se obţine împărţind această relaţie prin C.

Înainte de variaţia rezistenţei, curentul în circuit era

$$i_1 = \frac{E\sqrt{2}}{Z_1} \cos(\omega t + \varphi_1),$$

în care

$$E\sqrt{2} = 2000\sqrt{2}\ \text{V}; \quad Z_1 = \sqrt{R_1^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} = 2\cdot 10^3\sqrt{3}\ \Omega; \qquad \left(\frac{1}{C\omega} = 3\cdot 10^3\ \Omega\right);$$

$$\text{tg}\ \varphi_1 = \frac{1}{R_1 C\omega} = \sqrt{3}\ ;\ \text{rezultă}\ \varphi_1 = 60°.$$

De aici, se deduce sarcina electrică.

$$q_1 = \int_0^t i_1 \mathrm{d}t = \frac{E}{Z_1 \omega} \sin(\omega t + \varphi_1). \tag{7.2}$$

După variaţia rezistenţei şi stabilirea regimului forţat, curentul în circuit este

$$i_p = \frac{E\sqrt{2}}{Z_2} \cos(\omega t + \varphi_2),$$

în care

$$E\sqrt{2} = 2000\sqrt{2}\ \mathrm{V}; \quad Z_2 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} = 3\ 10^3\sqrt{2}\ \Omega;$$

$$\mathrm{tg}\ \varphi_2 = 1; \quad \text{rezultă } \varphi_2 = 45°,$$

de unde se deduce, ca mai sus, sarcina electrică corespunzătoare

$$q_p = \int_0^t i_p\, \mathrm{d}t = \frac{E\sqrt{2}}{Z_2 \omega} \sin(\omega t + \varphi_2). \tag{7.3}$$

La timpul $t = 0_+$, relaţiile (7.2) şi (7.3) devin

$$q_0 = \frac{E\sqrt{2}}{Z_1 \omega} \sin \varphi_1 \quad \text{şi} \quad q_{p0} = \frac{E\sqrt{2}}{Z_1 \omega} \sin \varphi_2.$$

Rezultă dar, că în regimul tranzitoriu de încărcare a condensatorului, sarcina electrică are expresia :

$$q = \frac{E\sqrt{2}}{Z_2 \omega} \sin(\omega t + \varphi_2) + \frac{E\sqrt{2}}{\omega}\left[\frac{\sin\varphi_1}{Z_1} - \frac{\sin\varphi_2}{Z_2}\right] \varepsilon^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

de unde, prin împărţire cu C, se deduce

$$u = \frac{E\sqrt{2}}{Z_2 C\omega} \sin(\omega t + \varphi_2) + \frac{E\sqrt{2}}{C\omega}\left[\frac{\sin\varphi_1}{Z_1} - \frac{\sin\varphi_2}{Z_2}\right] \varepsilon^{-\frac{t}{R_2 C}},$$

sau numeric

$$u = 2820\sqrt{2}\ \sin(\omega t + 45°) + 1008\ \varepsilon^{-314\,t}.$$

Curba de variaţie a tensiunii se construieşte uşor.

7.3. STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV ÎN CARE SE ȚINE SEAMA DE AMBELE FORME DE ENERGIE

7.3.1. CIRCUITE ELECTRICE FORMATE DINTR-UN REZISTOR, O BOBINĂ ȘI UN CONDENSATOR LEGAT ÎN SERIE

7.3.1.1. Formule utilizate. Regimul tranzitoriu fiind caracterizat în acest gen de probleme prin doi parametri, curentul din circuit și tensiunea la bornele condensatorului, pentru rezolvarea lor este necesar a porni de la două ecuații diferențiale și anume, de la ecuația (3.214)

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = e,$$

care definește curentul în circuit, și de la ecuația (3.215)

$$CL\frac{d^2u}{dt^2} + CR\frac{du}{dt} + u = e,$$

care definește tensiunea la bornele condensatorului, ambele mărimi fiind definite în funcție de forța electromotoare e aplicată circuitului. Cele două mărimi nu sînt independente una de cealaltă și sînt legate prin relația (3.204)

$$i = C\frac{du}{dt}.$$

Soluțiile generale ale acestor ecuații * — relațiile (3.222)

$$u = u_p + \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega\sqrt{LC}}\left[(u_0 - u_{p0})\,\mathrm{sh}\,(\Omega t + \alpha) + (i_0 - i_{p0})\sqrt{\frac{L}{C}}\,\mathrm{sh}\,\Omega t\right]$$

și (3.223)

$$i = i_p - \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega L}\left[(i_0 - i_{p0})\sqrt{\frac{L}{C}}\,\mathrm{sh}\,(\Omega t - \alpha) + (u_0 - u_{p0})\,\mathrm{sh}\Omega t\right]$$

pot fi utilizate în același mod și în cazul circuitelor de curent alternativ.

Concluziile privind natura regimului tranzitoriu ce apare în circuitele electrice sînt aceleași, ele referindu-se numai la regimul liber de funcționare a circuitelor.

7.3.1.2. Închiderea unui circuit electric format dintr-un condensator legat în serie cu un rezistor inductiv, pe o sursă de forță electromotoare alternativă sinusoidală. Fie circuitul electric din figura 7.7, alimentat de forța electromotoare

$$e = E\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi);$$

se presupune că acest circuit este oscilant.

* Vezi 3.6.3.

La timpul $t = 0_-$, înainte de închiderea întrerupătorului,

$$u_0 = 0 \quad \text{și} \quad i_0 = 0.$$

După închiderea întrerupătorului și stabilirea regimului forțat, curentul în circuit este

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos(\omega t + \psi - \varphi),$$

în care

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}; \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R},$$

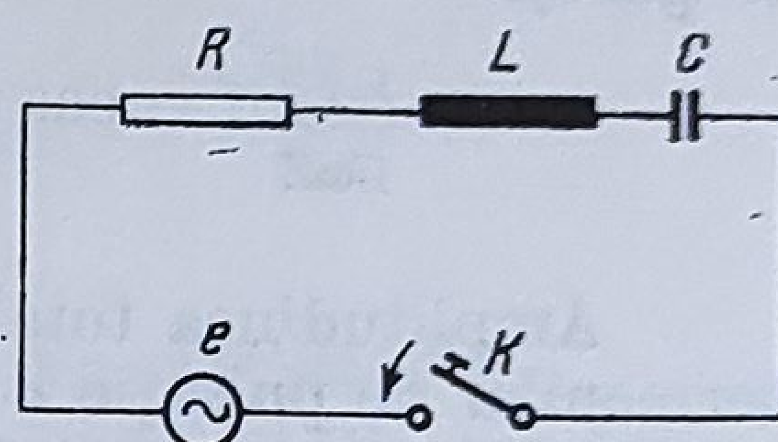


Fig. 7.7. Circuit electric cu R, L, C, alimentat de o sursă de curent alternativ.

ar tensiunea la bornele condensatorului

$$u_p = \frac{1}{C}\int_0^t i_p \,\mathrm{d}t = \frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

În consecință,

$$u_{p0} = \frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z} \sin(\psi - \varphi); \qquad i_{p0} = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos(\psi - \varphi).$$

Introducîndu-se aceste valori în relațiile (3.222) și (3.223) se găsește

$$i = \frac{\sqrt{2}\,E}{Z}\left\{\cos(\omega t + \psi - \varphi) + + \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega L}\left[\sqrt{\frac{L}{C}} \cos(\psi - \varphi) \sin(\Omega t - \alpha) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\sin(\psi - \varphi)}{C\omega} \sin \Omega t\right]\right\}. \tag{7.7}$$

$$u = \frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z}\left\{\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega\sqrt{CL}}\left[\sin(\psi - \varphi)\sin(\Omega t + \alpha) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \omega\sqrt{CL}\cos(\psi - \varphi)\sin \Omega t\right]\right\}, \tag{7.8}$$

care sînt relațiile generale ce dau curentul în circuit și tensiunea la bornele condensatorului.

Să examinăm forma curentului și a tensiunii în cîteva cazuri particulare.

a) Presupunînd că în circuit rezistența R este neglijabilă, se cere să se determine tensiunea la bornele condensatorului. În acest caz:

$$\delta = \frac{R}{2L} = 0 \qquad \Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \infty \text{ ; rezultă } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Relaţia (7.8) devine

$$u = \frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z}\left[-\cos(\omega t + \psi) + \cos\psi\cos\Omega t - \omega\sqrt{CL}\sin\psi\sin\Omega t\right].$$

Dacă se face calculabilă prin logaritmi expresia *

$$\cos\psi\cos\Omega t - \omega\sqrt{CL}\sin\psi\sin\Omega t$$

se găseşte

$$u = \frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z}\left[-\cos(\omega t + \psi) + \sqrt{1 + (\omega^2 CL - 1)\sin^2\psi}\cos(\Omega t + \chi)\right].$$

Amplitudinea totală este deci egală cu suma aritmetică a amplitudinilor termenilor de pulsaţie ω şi de pulsaţie Ω şi depinde numai de ψ, adică de faza tensiunii la momentul închiderii întrerupătorului.

În cazul cînd

$$\omega^2 LC - 1 < 0$$

rezultă

$$\frac{1}{\sqrt{CL}} = \Omega > \omega,$$

adică pulsaţia proprie a circuitului este mai mare decît pulsaţia ω a forţei electromotoare aplicate; amplitudinea maximă a tensiunii se obţine pentru $\sin\psi = 0$, adică în cazul cînd se închide circuitul în momentul în care forţa electromotoare trece prin maximum **. Amplitudinea maximă este în acest caz egală cu de două ori amplitudinea tensiunii în regim forţat.

b) Cazul în care $\Omega > \omega$ este cel mai des întîlnit în tehnică. La punerea sub tensiune a unui cablu, fenomenul acesta se produce întotdeauna, deoarece capacitatea cablului şi reactanţele de scăpări ale transformatoarelor şi generatoarelor formează un circuit oscilant.

---

* $F = \cos\psi\cos\Omega t - \omega\sqrt{CL}\sin\psi\sin\Omega t = \cos\psi(\cos\Omega t - \omega\sqrt{CL}\,\mathrm{tg}\,\psi\sin\Omega t)$.

Punînd

$$\omega\sqrt{CL}\,\mathrm{tg}\,\psi = \mathrm{tg}\,\chi,$$

se obţine succesiv

$$F = \frac{\cos\psi}{\cos\chi}(\cos\chi\cos\Omega t - \sin\chi\sin\Omega t) = \frac{\cos\psi}{\cos\chi}\cos(\Omega t + \chi);$$

dar

$$\frac{\cos\psi}{\cos\chi} = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\chi}\cos\psi = \cos\psi\sqrt{1 + \omega^2 CL\,\mathrm{tg}^2\psi} = \sqrt{\cos^2\psi + \omega^2 CL\sin^2\psi} = \sqrt{1 + (\omega^2 CL - 1)\sin^2\psi},$$

deci

$$F = \sqrt{1 + (\omega^2 CL - 1)\sin^2\psi}\cos(\Omega t + \chi).$$

** Derivînd expresia (7.8) şi făcînd $t = 0$, se obţine succesiv
$[\omega\sin(\omega t + \psi) - \Omega\sin\Omega t\cos\psi - \Omega\omega\sqrt{CL}\cos\Omega t\sin\psi]_{t=0} = \omega\sin\psi + \Omega\omega\sqrt{CL}\sin\psi = 2\omega\sin\psi = 0$, deci $\psi = 0$

Pentru ilustrarea celor de mai sus, se consideră exemplul următor:

Fie un cablu al cărui curent de încărcare este 0,2 I_n, I_n fiind curentul nominal, şi să presupunem că la funcţionarea în plină sarcină căderea de tensiune inductivă în generator şi transformator este de 25 % din tensiunea pe fază. În aceste condiţii se obţine

$$U\omega C = 0{,}2\ I \qquad \text{şi} \qquad I\omega L = 0{,}25\ U,$$

de unde, prin înmulţire, rezultă

$$CL\omega^2 = 0{,}05 \qquad \text{şi} \qquad \Omega = \frac{1}{CL} = 4{,}5\ \omega,$$

adică frecvenţa proprie a circuitului este de 4,5 ori frecvenţa tensiunii.

Dacă se presupune că pierderea de tensiune reprezintă 5 % din tensiunea circuitului, atunci

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R} = \frac{0{,}25}{0{,}05} = 5\,;\ \varphi \cong 78°45'.$$

Se presupune acum că întrerupătorul se închide la momentul

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

adică în momentul în care tensiunea la bornele condensatorului ar fi fost maximă dacă regimul forţat s-ar fi stabilit instantaneu *. În acest caz, tensiunea aplicată la bornele circuitului are amplitudinea

$$U = [E\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi)]_{t=0} = \left[E\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right]_{t=0} = E\sqrt{2}\ \sin\varphi.$$

Curbele de tensiune şi de curent ale regimului tranzitoriu se construiesc uşor pe cale grafică.

Se construieşte întîi curba,

$$u_p = \frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z}\sin(\omega t + \psi - \varphi)$$

şi se consideră ca origine a fenomenului tranzitoriu momentul cînd această curbă trece printr-un maximum (fig. 7.8).

---

* Aceasta se deduce din relaţia (7.8) în care se presupune că nu există decît termenul corespunzător regimului forţat, din care, pentru condiţiile de maximum, rezultă valoarea de mai sus.

Se construieşte apoi cel de-al doilea termen al relaţiei (7.8)

$$u_l = -\frac{E\sqrt{2}}{C\omega\, Z\, \Omega \sqrt{CL}}\, \varepsilon^{-\delta t} \sin(\Omega t + \alpha) = -A\, \varepsilon^{-\delta t} \sin(\Omega t + \alpha).$$

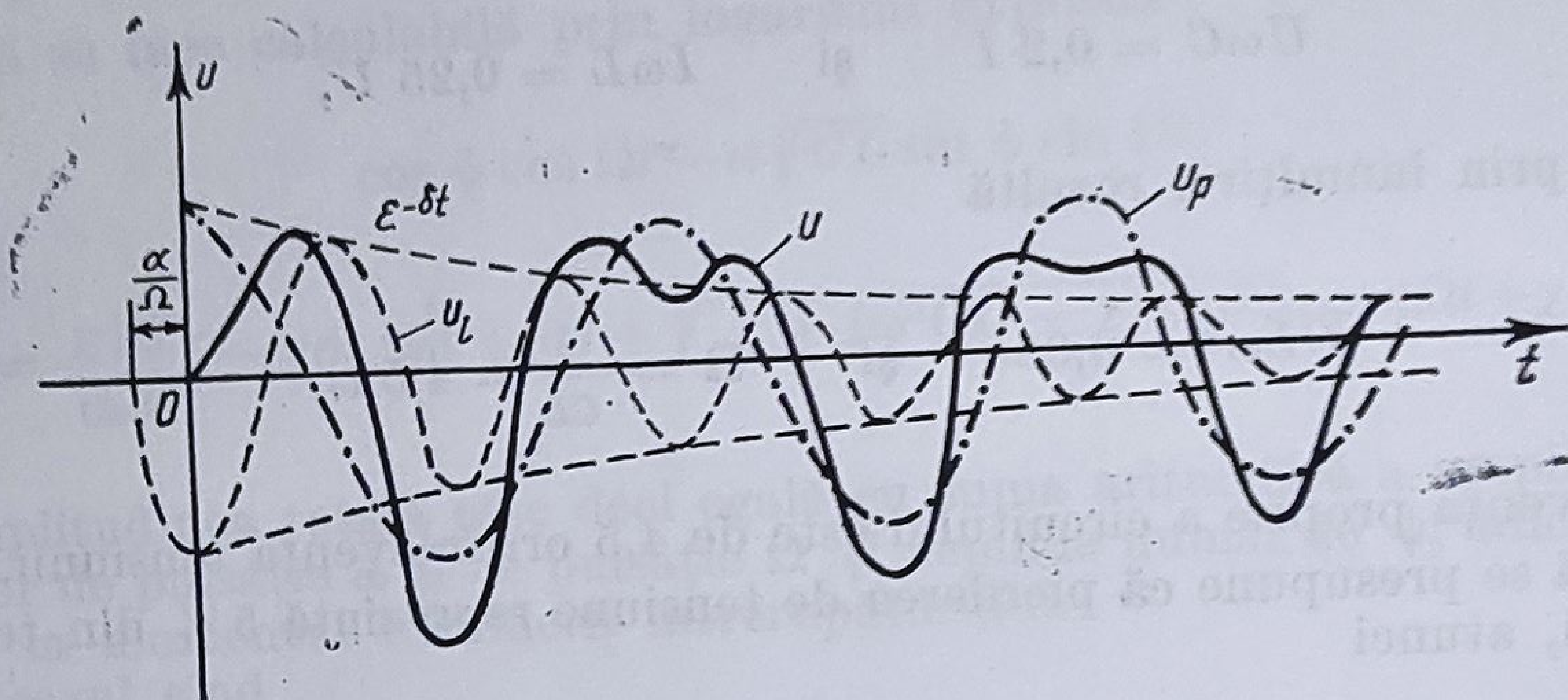


Fig. 7.8. Curba tensiunii la bornele condensatorului.

Acest termen se construieşte uşor, observînd că el trece prin zero pentru valorile

$$t_0 = \frac{k\pi}{\Omega} - \frac{\alpha}{\Omega}$$

că valorile maxime sînt pentru

$$t_M = \frac{k\pi}{\Omega}$$

şi că amplitudinile scad exponenţial.

Făcînd suma acestor curbe, se obţine curba rezultantă care poate avea o formă oarecare regimul tranzitoriu putînd crea şi un regim deformant.

c) Se examinează acum un caz în care circuitul oscilant este în rezonanţă pentru frecvenţa tensiunii alternative aplicată circuitului. În acest caz

$$CL\,\omega^2 = 1$$

şi rezultă

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R} = \frac{CL\omega^2 - 1}{RC\,\omega} = 0\text{; rezultă } \varphi = 0.$$

Admiţînd că în acest caz $\frac{R^2}{4L^2}$ este foarte mic şi că deci poate fi neglijat rezultă

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}} \cong \omega.$$

De asemenea,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Omega}{\delta} \cong \frac{\omega}{\frac{R}{2L}} = \infty; \text{ rezultă } \alpha = \frac{\pi}{2};$$

Cu aceste elemente, ecuaţia care dă expresia curentului tranzitoriu se poate scrie

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{R}\left\{\cos(\omega t + \psi) + \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\omega}\left[\omega \cos\psi \sin(\omega t - \alpha) + \frac{\sin\psi}{CL\omega}\sin\omega t\right]\right\} =$$

$$= \frac{E\sqrt{2}}{R}\cos(\omega t + \psi)\,(1 - \varepsilon^{-\delta t});$$

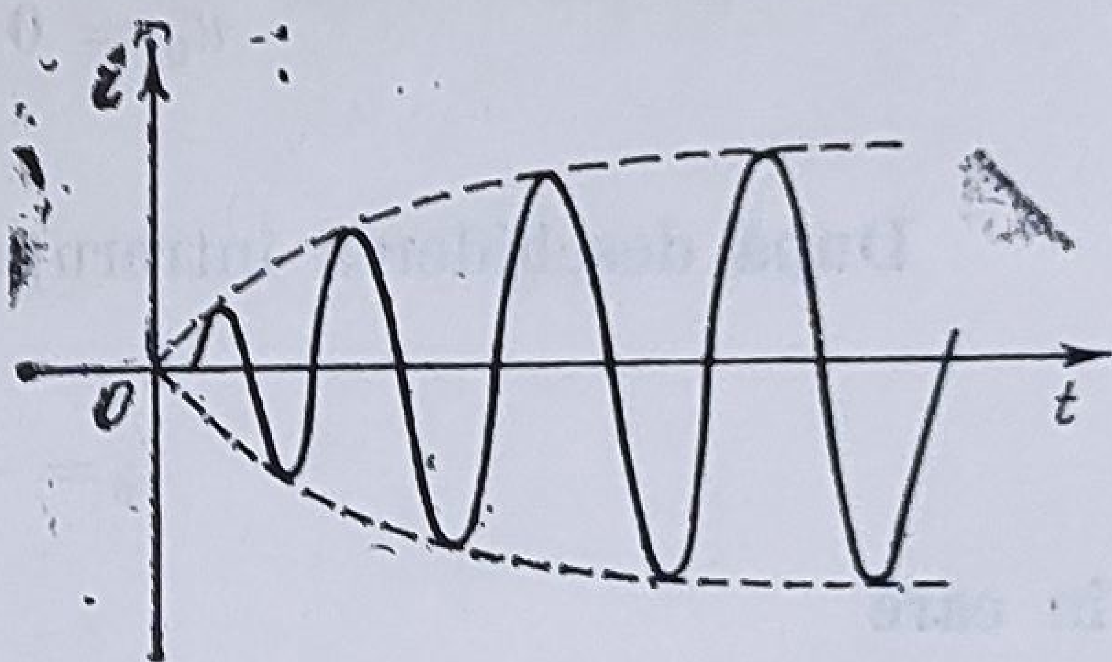


Fig. 7.9. Curba curentului, în cazul rezonanţei.

Reprezentarea grafică a acestei curbe se face imediat, ea fiind compusă din două curbe care se sumează uşor.

În figura 7.9 a fost reprezentată această curbă pentru cazul cînd $\psi = 0$, adică pentru cazul cînd închiderea întrerupătorului se face în momentul în care tensiunea trece printr-un maximum. Construcţia este mult simplificată dacă se observă că această curbă este o cosinusoidă la care amplitudinile cresc după funcţia $(1 - \varepsilon^{-\delta t})$.

7.3.1.3. **Deschiderea unui circuit electric inductiv cu un condensator la bornele întrerupătorului.** Fie un circuit electric inductiv, a cărui rezistenţă poate fi neglijată faţă de reactanţă, alimentat de o sursă cu forţa electromotoare alternativă sinusoidală

$$e = E\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi).$$

Deschizînd întrerupătorul, cele două contacte ale acestuia formează armăturile unui condensator, şuntat la bornele întrerupătorului (fig. 7.10). Să determinăm tensiunea u la bornele acestui condensator.

Pentru rezolvarea problemei, se porneşte tot de la relaţiile generale. Se observă că, deoarece rezistenţa R este neglijabilă, $\Omega'^2 < 0$ şi deci circuitul este oscilant. Pe de altă parte, luînd $R = 0$, rezultă

$$\delta = 0;\ \operatorname{tg}\alpha = \infty,\ \text{deci}\ \alpha = \frac{\pi}{2};\ \Omega = \frac{1}{\sqrt{CL}},$$

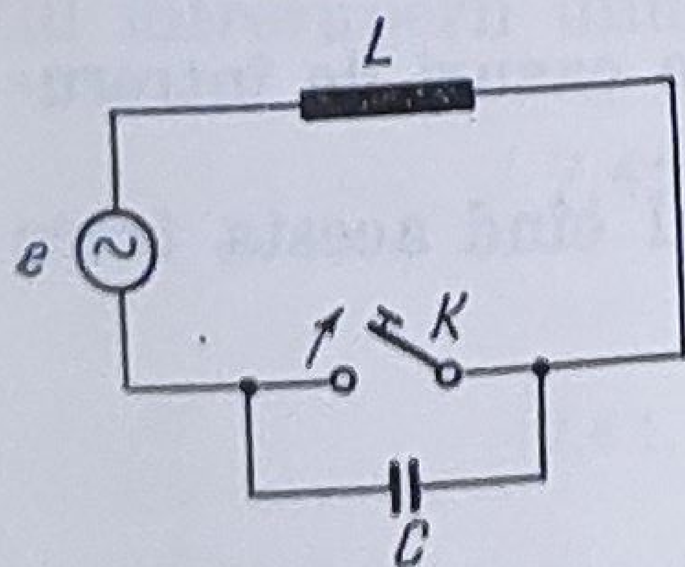


Fig. 7.10. Deschiderea unui circuit electric inductiv, la care contactele întrerupătorului formează armăturile unui condensator.

astfel, încît relaţia (3.223), corespunzătoare unui sistem oscilant, se poate scrie

$$u = u_p + (u_0 - u_{p0})\cos\Omega t + (i_0 - i_{p0})\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\Omega t. \quad (7.9)$$

Înainte de deschiderea întrerupătorului, curentul din circuit este

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega}\cos\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega}\sin(\omega t + \psi),$$

deoarece,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R} = \infty.$$

Este uşor de văzut, că la timpul $t = 0_-$, înainte de deschiderea întrerupătorului,

$$u_0 = 0 \quad \text{şi} \quad i_0 = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega}\sin\psi.$$

După deschiderea întrerupătorului şi stabilirea regimului forţat,

$$i_p = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\sin(\omega t + \psi),$$

în care

$$Z = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

şi

$$u_p = \frac{q_p}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i_p \mathrm{d}t = -\frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z}\cos(\omega t + \psi)$$

şi deci, la timpul $t = 0_+$, rezultă

$$i_{po} = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\sin\psi \quad \text{şi} \quad u_{po} = \frac{-E\sqrt{2}}{ZC\omega}\cos\psi,$$

astfel, încît relaţia (7.9) poate fi scrisă

$$u = \frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z}\left\{\left[-\cos(\omega t + \psi) + \cos\psi\cos\Omega t\right] + \frac{\sin\psi}{\omega\sqrt{CL}}\sin\Omega t.\right\} \qquad (7.10)$$

Să examinăm valoarea acestei tensiuni pentru diverse cazuri de întrerupere, corespunzătoare formei curbei de curent din circuit.

a) Dacă întreruperea curentului se face în momentul cînd acesta trece prin zero (la timpul $t = 0$ şi $\psi = 0$), relaţia (7.10) devine

$$u = \frac{E\sqrt{2}}{Z\,C\omega}(-\cos\omega t + \cos\Omega t),$$

de unde, rezultă că tensiunea la bornele condensatorului poate fi cel mult dublată din cauza regimului tranzitoriu şi aceasta deoarece în general $\Omega \gg \omega$. La această concluzie, se ajunge uşor construind cele două cosinusoide.

b) Dacă însă întreruperea curentului se face într-un moment oarecare, diferit de zero, termenul al doilea ia o valoare foarte mare, cu atît mai mare cu cît coeficientul

$$\frac{1}{\omega\sqrt{CL}} = \frac{\Omega}{\omega}$$

este mai mare, adică cu cît pulsaţia proprie a circuitului este mai mare faţă de pulsaţia forţei electromotoare aplicate.

Amplitudinea acestui termen poate fi scrisă

$$u_M = \frac{E\sqrt{2}}{Z C\omega}\frac{\sin\psi}{\omega\sqrt{CL}} = \frac{E}{ZC\omega}\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\sin\psi}{\omega L} = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega}\frac{\sin\psi}{(CL\omega^2-1)}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Dar,

$$\frac{E\sqrt{2}}{L\omega}\sin\psi = i_0$$

este valoarea curentului întrerupt, de unde

$$u_M = \frac{i_0}{CL\omega^2 - 1}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Dacă se presupune că $CL\,\omega^2$ este neglijabil faţă de unitate, atunci se poate scrie

$$u_M = -i_0\sqrt{\frac{L}{C}},$$

La această relaţie se poate ajunge şi direct, pornind de la bilanţul energiilor şi scriind că energia înmagazinată în inductanţă în momentul întreruperii, se transformă în energie electrostatică

$$\frac{1}{2}Li_0^2 = \frac{1}{2}Cu_M^2.$$

Ca o consecinţă practică a acestei teorii, construcţia întrerupătoarelor folosite în reţelele de curent alternativ este astfel făcută încît, arcul de ruptură care se produce între cele două contacte, să nu fie suflat mai înainte de a se stinge singur în momentul în care curentul trece prin zero. În acest fel, se evită să se producă la contactele întrerupătorului supratensiuni periculoase în momentul întreruperii unui scurtcircuit.

7.4. UTILIZAREA MĂRIMILOR COMPLEXE LA STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU

7.4.1. GENERALITĂŢI ŞI DEFINIŢII

Studiul unui regim tranzitoriu constă din :

1. Determinarea regimului liber al sistemului ; acest regim comportă o serie de termeni amortizaţi, periodici sau aperiodici, avînd anumiţi coeficienţi arbitrari. Problema constă în determinarea amortizării şi a frecvenţei proprii a circuitului.

2. Determinarea regimului forţat.

3. Suprapunerea acestor regimuri, determinîndu-se apoi diverşi coeficienţi prin condiţii la limită.

Aceasta este calea care a fost urmată de altfel şi în cazul problemelor ce apar în circuitele de curent continuu* cît şi în cele de curent alternativ**.

Dacă studiul regimului forţat se poate face uşor, oricît de complicat ar fi circuitul, datorită formei algebrice liniare a ecuaţiilor care se obţin, studiul regimului liber este în general mai dificil, aici apărînd ecuaţii diferenţiale de diverse ordine. S-a căutat, în consecinţă, să se găsească metode simple şi pentru studiul regimului liber al unui circuit.

Pentru studiul regimului liber mărimile variabile se pot reprezenta prin mărimi complexe, metodă care, ca şi în cazul regimului forţat, poate să conducă la soluţia problemei mult mai repede decît metoda clasică generală.

Cea mai simplă undă oscilatorie amortizată care poate lua naştere într-un circuit poate fi reprezentată prin expresia

$$y = A\sqrt{2}\,\varepsilon^{-\delta t} \sin \Omega t$$

în care δ este factorul de amortizare al undei, Ω pulsaţia sa proprie şi $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ perioada sa proprie, care se mai numeşte şi pseudoperioada, deoarece unda se deosebeşte de o undă periodică sinusoidală obişnuită.

Raportul a două amplitudini succesive de acelaşi sens ale acestei unde, diferind printr-o pseudoperioadă este constant, iar logaritmul natural al acestui raport este decrementul logaritmic al oscilaţiei şi este egal cu $\gamma = \delta T$.

Forma cea mai simplă a unui regim aperiodic amortizat este $A\varepsilon^{-\delta t}$, iar a unei unde aperiodice, care creşte de la zero spre un maximum, pentru a descreşte apoi iar către zero, este dată de expresia

$$y = A(\varepsilon^{-r_1 t} - \varepsilon^{-r_2 t})$$

cu $r_2 > r_1$. Punînd

$$r_1 + r_2 = 2\delta \text{ şi } r_2 - r_1 = 2\Omega$$

expresia de mai sus devine

$$2A\varepsilon^{-\delta t} \operatorname{sh} \Omega' t.$$

Panta la origine a unei asemenea unde este $A(r_2 - r_1)$ şi se obţine calculînd $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}$, iar fruntea sa, adică timpul care se scurge din momentul cînd apare, pînă în momentul maximului său, este dată de relaţia

$$T_1 = \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{r_2 - r_1}$$

care se obţine din ecuaţia $\frac{dy}{dt} = 0$.

* Vezi 3.6

** Vezi 7.1.1.

Curentul sau tensiunea unui circuit electric, căruia i se pot aplica legile lui OHM şi KIRCHHOFF, poate fi întotdeauna exprimat printr-un termen exponențial, sau printr-o sumă de asemenea termeni, cu exponent real sau imaginar şi deci printr-o funcţie sau o sumă de funcţii de forma

$$i = I\sqrt{2}\ \varepsilon^{-\delta t} \cos(\Omega t + \psi), \tag{7.11}$$

în care I şi ψ sînt constante care urmează a fi determinate din condiţiile de funcţionare ale circuitului.

Dacă δ şi Ω sînt amîndoi nuli, expresia (7.11) reprezintă un curent continuu $i = \sqrt{2}\cos\psi$. Dacă $\Omega = 0$ dar $\delta \neq 0$, expresia reprezintă un curent aperiodic a cărui amplitudine creşte sau descreşte, după cum δ este negativ sau pozitiv. Dacă $\Omega \neq 0$ şi $\delta = 0$, expresia reprezintă un curent permanent periodic sinusoidal. Dacă atît δ cît şi Ω sînt diferiţi de zero, curentul respectiv este un curent periodic sinusoidal amortizat*.

Funcţiei (7.11) i se poate asocia un fazor plan avînd modulul egal cu produsul dintre valoarea efectivă a funcţiei periodice sinusoidale şi factorul amortizant şi ca argument unghiul acelei funcţii, expresia acestui fazor fiind**

$$\underline{I} = I\varepsilon^{-\delta t}\ \varepsilon^{j(\Omega t + \psi)} = I\varepsilon^{\underline{p}t + j\psi}, \tag{7.12}$$

în care s-a pus

$$\underline{p} = -\delta + j\Omega, \tag{7.13}$$

δ şi Ω fiind mărimi reale.

7.4.2. METODA GENERALĂ DE CALCUL A REGIMURILOR TRANZITORII CU AJUTORUL MĂRIMILOR COMPLEXE

Rezolvarea unei probleme de regim tranzitoriu constă în a determina parametrii caracteristici ai mărimii căutate. Fie, în general,

$$y = Y\sqrt{2}\ \varepsilon^{\delta t} \cos(\Omega t + \psi), \tag{7.14}$$

expresia matematică ce defineşte mărimea căutată. Această mărime este caracterizată prin parametrii δ, Ω, Y şi ψ. Dintre aceştia, primii doi, δ şi ψ, se determină în condiţiile de funcţionare ale sistemului în regim liber; următorii doi parametri se determină în condiţiile de funcţionare limită ale regimului complet (regim liber plus regim forţat).

Calculul parametrilor se face pornind de la ecuaţia de funcţionare a sistemului scrisă în mărimi complexe generalizate. Pentru determinarea parametrilor δ şi Ω, se anulează membrul al doilea şi se înlocuieşte în ecuaţie $\underline{p}$ prin valoarea sa (7.13); se identifică apoi părţile reale şi părţile complexe, obţinîndu-se astfel un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute, suficient pentru determinarea celor doi parametri necunoscuţi. Se observă că soluţia este univoc determinată deoarece δ şi Ω sînt mărimi *reale*, conform ipotezei făcute. Problema se reduce astfel, la o problemă de algebră. Introducînd valorile obţinute în

* Vezi 4.3.6.1

** Vezi 4.2.5.

relaţia (7.14) se obţine expresia regimului liber căutat. Regimul permanent se calculează apoi prin metodele cunoscute şi se adaugă regimului liber obţinîndu-se astfel regimul tranzitoriu căutat, dar la care mai sînt de determinat ceilalţi doi parametri Y şi ψ. Pentru aceasta se scriu două condiţii de funcţionare la limită, care vor furniza astfel ecuaţiile necesare determinării acestor doi parametri.

Fie, pentru exemplificare, să rezolvăm următorul exemplu simplu : Funcţionarea unui sistem oarecare este definită de ecuaţia diferenţială

$$M \frac{dy}{dt} + Ny = f$$

şi dorim să găsim ecuaţia care caracterizează fenomenul corespunzător.

Transformînd ecuaţia diferenţială dată, se obţine

$$M\underline{p}\underline{Y} + N\underline{Y} = \underline{F}.$$

Pentru determinarea regimului liber, scriem ecuaţia fără membrul doi

$$\underline{Y}(M\underline{p} + N) = 0$$

Cum $Y \neq 0$, rezultă că $M\underline{p} + N = 0$, de unde se deduce

$$\underline{p} = \delta + j\Omega = -\frac{N}{M}.$$

Rezultă

$$\delta = -\frac{N}{M} \text{ şi } \Omega = 0$$

şi expresia (7.14) devine

$$y = Y\sqrt{2}\,\varepsilon^{-\frac{N}{M}t} \cos\psi = A\,\varepsilon^{-\frac{N}{M}t}.$$

Fie y_p soluţia corespunzătoare regimului permanent, dedusă prin mijloace obişnuite şi care depinde de forma funcţiei de constrîngere f. Regimul tranzitoriu corespunzător va fi

$$y = y_p + y_l = y_p + A\varepsilon^{-\frac{N}{M}t}.$$

Pentru a determina constanta A, să presupunem că la timpul $t = 0_-$, valoarea regimului corespunzător este y_0 iar la $t = 0_+$, aceea a regimului permanent, y_{p0}. Impunînd aceste condiţii de limită se obţine

$$y_0 = y_p + A$$

de unde rezultă

$$A = y_0 - y_{p0}.$$

Regimul tranzitoriu căutat, va fi deci,

$$y = y_p + (y_0 - y_{p0})\, \varepsilon^{-\frac{N}{M}t},$$

relaţie analoagă cu aceea determinată pe altă cale în paragraful 3.6.2.1.

Din cele ce preced rezultă că metoda mărimilor complexe generalizate determină **numai** regimul de funcţionare *liber* al sistemului; regimul permanent sau forţat de funcţionare a sistemului se determină pe căile obişnuite, specifice fiecărui sistem. Suprapunerea acestor sisteme şi impunerea condiţiilor la limită determină ceilalţi parametri ai ecuaţiei de funcţionare a sistemului.

7.4.3. FENOMENE TRANZITORII ÎN ELECTROTEHNICĂ

Pentru punerea în ecuaţie a problemelor de regim tranzitoriu în electrotehnică se foloseşte de obicei metoda directă a teoremelor lui KIRCHHOFF, obţinîndu-se astfel, direct ecuaţia diferenţială a problemei. Calea este însă mai grea şi conduce de multe ori la calcule foarte laborioase. Se ajunge mai uşor la rezultat dacă se procedează ca şi în cazul regimului forţat cînd se utilizează mărimile complexe : se întocmeşte o schemă echivalentă în care inductanţele L sînt înlocuite cu reactanţele inductive complexe generalizate $\underline{p}L$, capacităţile C prin reactanţele capacitive complexe generalizate $\frac{1}{\underline{p}C}$ şi valorile instantanee prin vectorul complex generalizat asociat. La schema astfel obţinută, se aplică toate metodele de calcul din curent continuu, obţinîndu-se un sistem de ecuaţii algebrice în $\underline{p}$ care se rezolvă în raport cu necunoscutele căutate, în general curenţii şi anume, curenţii liberi, prin fazorii lor asociaţi. Din aceste relaţii se deduc apoi parametrii valorilor instantanee ale acestor curenţi. Adăugînd regimul permanent corespunzător şi, după determinarea celorlalţi parametri, prin condiţiile la limită, se obţine regimul tranzitoriu căutat.

Ecuaţia generală a unui circuit serie, stabilită cu ajutorul teoremei a doua a lui KIRCHHOFF, este

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = u\,. \tag{7.15}$$

Înlocuind mărimile instantanee prin fazorii asociaţi, relaţia (7.15) devine

$$\left(R + L\underline{p} + \frac{1}{C\underline{p}}\right)\underline{I} = \underline{U} \tag{7.16}$$

Notînd

$$\underline{Z}(p) = R + L\underline{p} + \frac{1}{C\underline{p}} \tag{7.17}$$

impedanţa complexă generalizată a circuitului, relaţia (7.16) devine

$$\underline{Z}(p)\underline{I} = \underline{U}$$

şi reprezintă o formă generalizată a legii lui OHM.

Reluînd relația (7.17) a impedanței complexe generalizate, modulul ei este

$$Z(p) = \sqrt{\left[R + \delta L + \frac{\delta}{(\delta^2 + \Omega^2)\,C}\right]^2 + \left[\Omega L - \frac{\Omega}{(\delta^2 + \Omega^2)\,C}\right]^2},$$

iar argumentul său

$$\psi = \text{arc tg}\,\frac{\Omega\,(\delta^2 + \Omega^2)\,LC - \Omega}{(R + \delta L)\,(\delta^2 + \Omega^2)\,C + \delta}.$$

În cazul cînd circuitul nu are capacitate, expresia (7.17) a impedanței se simplifică și devine

$$\underline{Z}(p) = R + \underline{p}L$$

cu modulul

$$Z(p) = \sqrt{(R + \delta L)^2 + \Omega^2 L^2}$$

și argumentul

$$\gamma = \text{arc tg}\,\frac{\Omega L}{R + \delta L}.$$

În cazul cînd circuitul nu are inductanță, expresia impedanței (7.17) devine

$$\underline{Z}(p) = R + \frac{1}{\underline{p}C}$$

cu modulul

$$Z(p) = \sqrt{\left[R + \frac{\delta}{(\delta^2 + \Omega^2)\,C}\right]^2 + \frac{\Omega^2}{(\delta^2 + \Omega^2)\,C^2}}$$

și argumentul

$$\zeta = \text{arc tg}\,\frac{\Omega}{(\delta^2 + \Omega^2)\,RC + \delta}.$$

Se poate defini o impedanță mutuală generalizată, pornind de la ecuația

$$e = M\,\frac{di}{dt}$$

sau în mărimi complexe

$$\underline{E} = M\,\underline{p}\,\underline{I}.$$

Impedanța mutuală generalizată este $M\underline{p}$ și are modulul

$$Z_M = \sqrt{\delta^2 + \Omega^2}\;M$$

şi argumentul

$$\mu = \text{arc tg}\left(-\frac{\Omega}{\delta}\right).$$

În cazul unui circuit format dintr-un condensator de capacitate C, şuntat cu o conductanţă G şi străbătut de curentul tranzitoriu $\underline{I}$, tensiunea la bornele sale este dată de relaţia

$$\underline{Y}(p)\ \underline{U} = \underline{I}$$

în care

$$\underline{Y}(p) = G + \underline{p}C$$

este *admitanţa* generalizată a circuitului, avînd modulul

$$Y(p) = \sqrt{(G - \delta C)^2 + C^2\Omega^2}$$

şi defazajul faţă de originea de faze

$$\xi = \text{arc tg}\frac{C\Omega}{G - \delta C}.$$

7.4.4. APLICAŢII LA STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE CU CONSTANTE LOCALIZATE

7.4.4.1. **Exemplul 1.** Fie un circuit electric simplu format dintr-un rezistor de rezistenţă R, legat în serie cu o bobină de inductanţă L, căruia urmează a i se studia regimul liber. Curentul tranzitoriu care ia naştere în circuit este de forma

$$i = I\sqrt{2}\ \varepsilon^{-\delta t}\cos(\Omega t + \psi), \tag{7.11}$$

iar ecuaţia căderilor de tensiune este

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0.$$

Înlocuind în această ecuaţie pe i cu $\underline{I}$ şi $\frac{d}{dt}$ cu $\underline{p}$, se obţine

$$(L\underline{p} + R)\underline{I} = 0$$

Cum $\underline{I} \neq 0$, rezultă

$$L\underline{p} + R = 0$$

şi deci,

$$\underline{p} = -\frac{R}{L};$$

cum

$$\underline{p} = -\delta + j\Omega$$

rezultă

$$\delta = \frac{R}{L} \quad \text{şi} \quad \Omega = 0,$$

astfel, încît expresia curentului liber este

$$i_l = I\sqrt{2}\cos\psi\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} = A\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}t},$$

expresie cunoscută.

Dacă tensiunea aplicată circuitului este

$$e = E\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi),$$

curentul permanent în circuit este

$$i_p = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

în care

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R},$$

astfel că regimul tranzitoriu în circuit este

$$i = i_p + i_l = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\sin(\omega t + \psi - \varphi) + A\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}. \tag{7.18}$$

Punînd condiţia ca la timpul $t = 0_-$ curentul tranzitoriu din circuit să fie nul

$$i = 0,$$

din relaţia (7.18) se deduce imediat

$$A = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\sin(\psi - \varphi),$$

regăsindu-se astfel, pentru regimul tranzitor, relaţia 7.1.

7.4.4.2. Exemplul 2. Fie circuitul electric format dintr-un rezistor de rezistenţă R legat în serie cu o bobină de inductanţă L şi cu un condensator de capacitate C, acesta din urmă şuntat cu un rezistor de conductanţă G

(fig. 7.11). Ecuația sistemului de poate scrie imediat în mărimi complexe, aplicînd legea lui OHM generalizată. Se va găsi astfel,

$$\underline{I}(R + \underline{p}L) + \frac{\underline{I}}{G + \underline{p}C} = 0.$$

Cum $\underline{I} \neq 0$, se obține

$$(R + \underline{p}L)(G + \underline{p}C) + 1 = 0$$

sau

$$\underline{p}^2 LC + \underline{p}(RC + GL) + RG + 1 = 0. \quad (7.19)$$

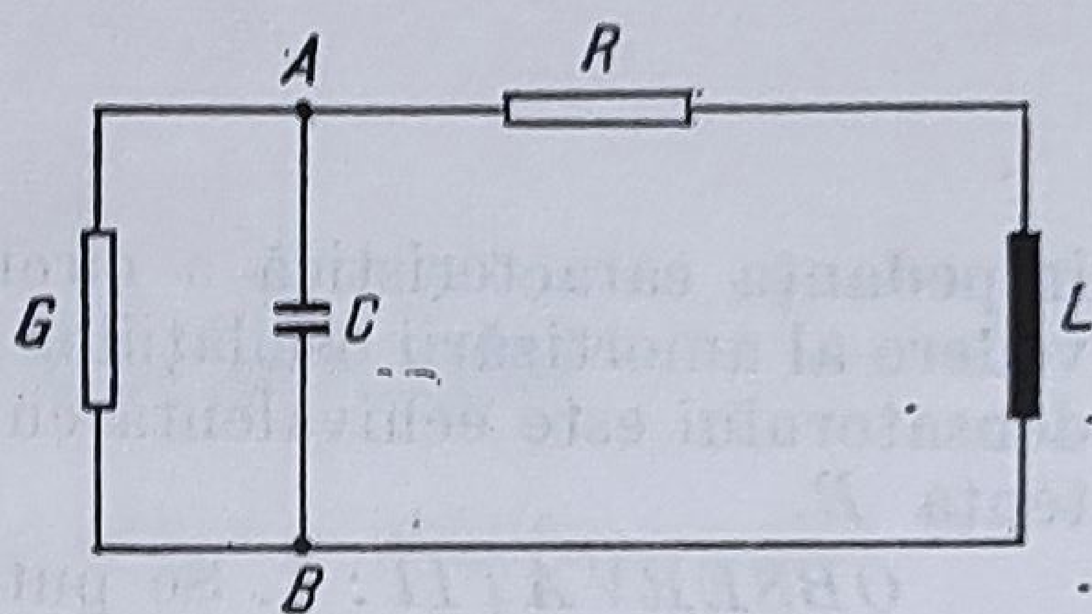


Fig. 7.11. Circuit electric complex.

Înlocuind pe $\underline{p}$ cu valoarea sa și identificînd părțile reale și părțile complexe, se obține sistemul de ecuații

$$\left.\begin{aligned} \Omega(LG + RC - 2\delta CL) &= 0 \\ LC\,\Omega^2 - LC\,\delta^2 - GR + \delta(CR + GL) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (7.20)$$

de unde se găsește factorul de amortizare

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)$$

și pulsația proprie a circuitului

$$\Omega = \sqrt{\frac{1 + GR}{CL} - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2}.$$

Pseudoperioada oscilațiilor libere este

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Dacă

$$\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2 > \frac{4}{CL},$$

atunci Ω devine imaginar și din relația (7.13) rezultă că $\underline{p}$ devine real; problema nu mai este posibilă, deoarece contrazice ipoteza și atunci se caută a doua soluție ($\Omega = 0$) și circuitul devine aperiodic.

Dacă R și G sînt foarte mici, astfel încît să se poată neglija δ^2 față de ω^2, atunci se obține

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

iar decrementul logaritmic al oscilaţiilor este

$$\gamma = \delta T = \pi \frac{RC + LG}{\sqrt{CL}} = \pi \frac{R + \frac{L}{C}}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \pi \frac{R + GZ^2}{Z}$$

în care s-a notat cu

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

impedanţa caracteristică a circuitului. Ultima relaţie arată că, din punct de vedere al amortizării oscilaţiilor libere, o conductanţă G aşezată la bornele condensatorului este echivalentă cu o rezistenţă $R' = GZ^2$ legată în serie cu rezistenţa R.

OBSERVAŢII: 1. Se puteau găsi aceste elemente şi dacă se pornea de la ecuaţia diferenţială a căderilor de tensiune în circuit, care se stabileşte după cum urmează: fie u valoarea instantanee a diferenţei de potenţial dintre punctele A şi B (fig. 7.11). Între punctele A şi B ale circuitului se pot scrie ecuaţiile:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + u = 0,$$

$$i = C\frac{du}{dt} + Gu,$$

sau, eliminînd pe i între aceste ecuaţii

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + (RC + LG)\frac{du}{dt} + (RG + 1)u = 0.$$

Înlocuind pe u cu mărimea complexă iar simbolurile de derivare prin $\underline{p}$, respectiv $\underline{p}^2$, se obţine

$$\underline{U}[\underline{p}^2LC + \underline{p}(RC + LG) + RG + 1] = 0$$

adică tocmai relaţia (7.19), deoarece $\underline{U} \neq 0$.

2. Prima ecuaţia a sistemului (7.20) poate da şi $\Omega = 0$. În acest caz

$$\delta = \frac{-1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2 - \frac{1}{LC}};$$

cum radicalul este întotdeauna mai mic decît primul termen al sumei, rezultă că este întotdeauna pozitiv şi deci pentru un acelaşi circuit se obţin două con-

stante de timp. Problema este deci nedeterminată ; nedeterminarea este numai aparentă. Într-adevăr, notînd

$$\delta_1 = \frac{-1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta + \Omega',$$

$$\delta_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta - \Omega',$$

forma curentului liber va fi

$$i_e = \varepsilon^{-\delta t}\,(C_1 \varepsilon^{\Omega' t} + C_2 \varepsilon^{-\Omega' t}),$$

unde C_1 și C_2 sînt două constante. Ținînd seama de relațiile

$$\varepsilon^{\Omega' t} = \mathrm{ch}\Omega' t + \mathrm{sh}\Omega' t \quad \text{și} \quad \varepsilon^{-\Omega' t} = \mathrm{ch}\Omega' t - \mathrm{sh}\Omega' t$$

punînd

$$\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = \mathrm{tg\,h}\psi' \quad \text{și} \quad 2\sqrt{C_1 C_2} = I'$$

și cum

$$\mathrm{ch}\,\psi' = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{tg\,h}^2\,\psi'}},$$

relația de mai sus devine

$$i_e = I'\ \varepsilon^{-\delta t}\ \mathrm{ch}(\Omega' t + \psi'), \tag{7.21}$$

o relație asemănătoare cu relația (7.11). În această relație sînt de determinat, ca și în analoaga ei, valorile lui I' și ψ' și care se determină prin condițiile la limită. Rezultă dar, că atunci cînd Ω este pur complex, sistemul considerat este aperiodic.

În concluzie, sistemul (7.12) se rezolvă întotdeauna luînd $\Omega \neq 0$ și găsind, din cele două ecuații, pe δ și pe Ω ; δ este întotdeauna real ; el poate fi pozitiv sau negativ ; Ω poate fi real sau pur complex ; dacă este real, atunci regimul liber este pseudoperiodic și expresia lui este dată de relația (7.12) ; dacă Ω este pur complex, regimul liber este aperiodic și expresia lui este dată de relația (7.21).

În ambele cazuri cei doi parametri rămași se determină prin condițiile la limită.

7.4.4.3. **Exemplul 3.** Un circuit electric format din rezistoarele de rezistențe R_1 și R_2 legate în serie este alimentat de o sursă cu tensiunea constantă U. La un moment dat, se leagă în paralel pe rezistorul de rezistență R_2, un circuit K format dintr-o bobină de inductanță L legată în serie cu un condensa-

tor neîncărcat de capacitate C (fig. 7.12). Se cere să se determine forma curentului ce se stabileşte în circuitul K. Aplicaţie numerică în ipotezele : *a)* $R_1 = R_2 = 40\ \Omega$; *b)* $R_1 = R_2 = 400\ \Omega$; în ambele cazuri $U = 600$ V, $L = 0{,}1$ H şi $C = 100\ \mu$F.

Sistemul dat fiind alimentat de o sursă de curent constantă, în circuitul K, în regim forţat curentul este nul, astfel încît problema se reduce numai la stabilirea regimului liber în acest circuit.

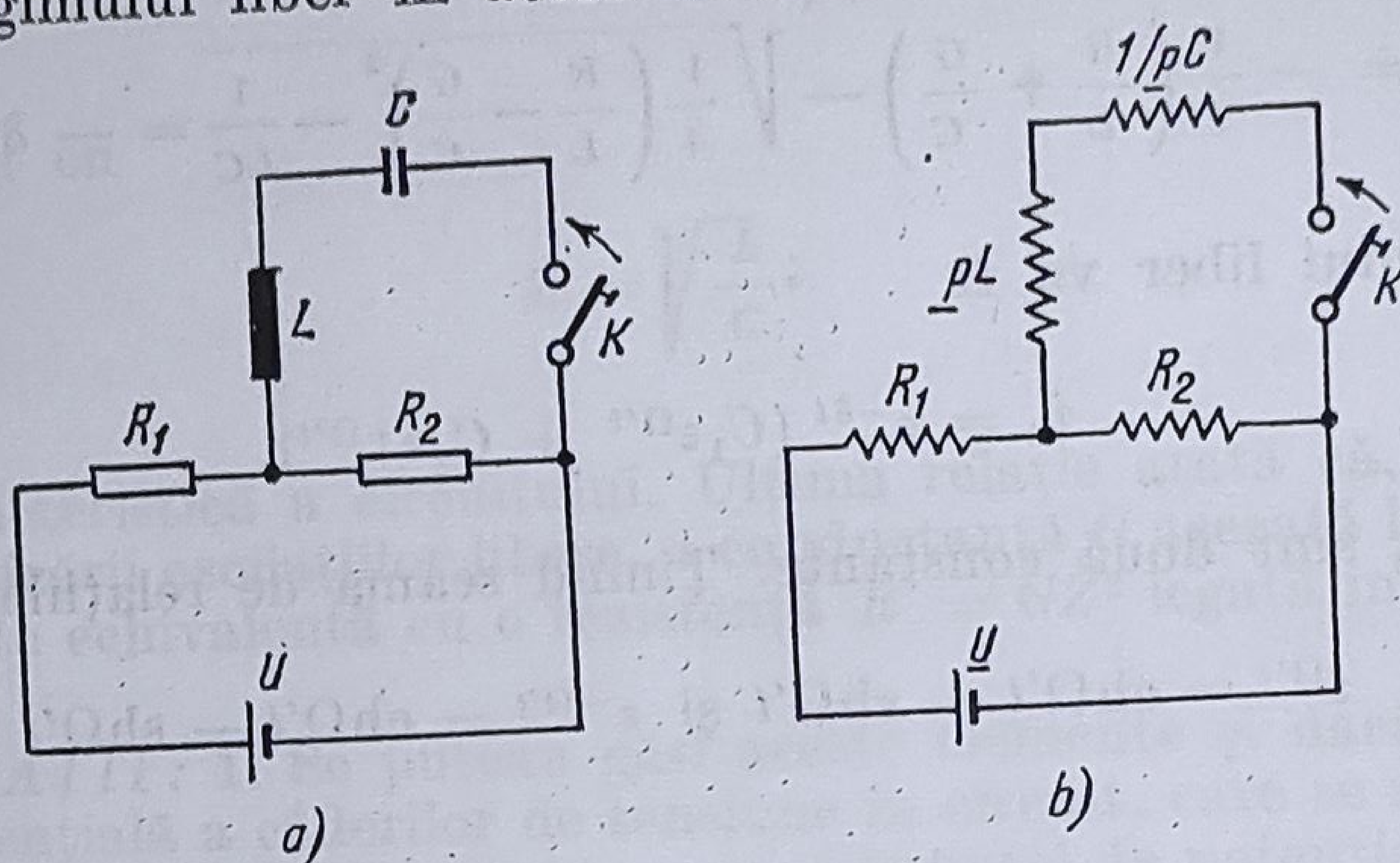


Fig. 7.12. Circuit electric ;
a) schema reală ; *b)* schema echivalentă.

Fie i_1 curentul care circulă în rezistorul de rezistenţă R_1, i_2 curentul care circulă în rezistorul de rezistenţă R_2 şi i_3 curentul care circulă în circuitul K. Aplicînd teoremele lui KIRCHHOFF, ecuaţiile circuitului sînt

$$U = R_1 i_1 + R_2 i_2, \qquad U = R_1 \underline{I}_2 + R_2 \underline{I}_2,$$

$$R_2 i_2 = L\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C}\int i_3 dt \qquad R_2 \underline{I}_2 = \underline{p}\, L \underline{I}_3 + \frac{1}{\underline{p}C}\underline{I}_3$$

$$i_1 = i_2 + i_3, \qquad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3.$$

Ţinînd seama că, în cazul regimului liber $U = 0$ şi eliminînd pe $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$ între aceste ecuaţii, se obţine

$$\underline{p}^2 L\ \underline{I}_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\, \underline{p}\, \underline{I}_3 + \frac{1}{C}\underline{I}_3 = 0.$$

Punînd pentru simplificare

$R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ şi cum $\underline{I}_3 \neq 0$ se obţine

$$CL\ \underline{p}^2 + CR\ \underline{p} + 1 = 0.$$

Înlocuind în această ecuaţie $\underline{p} = \delta + j\Omega$, dezvoltînd şi separînd părţile reale de cele complexe, se obţine sistemul de ecuaţii

$$\left.\begin{aligned} CL\,(\delta^2 - \Omega^2) + CR\ \delta + 1 &= 0 \\ 2\,CL\ \delta\Omega + CR\ \Omega &= 0, \end{aligned}\right\}$$

care rezolvat, dă

$$\delta = -\frac{R}{2L} \quad \text{şi} \quad \Omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \delta^2}.$$

Expresia curentului căutat este de forma

$$i_3 = I_3\sqrt{2}\,\varepsilon^{\delta t}\cos(\Omega t + \psi),$$

la care mai trebuie determinate I_3 şi ψ. Scriind că la $t = 0_-$, $i_3 = 0$, rezultă $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$, astfel că ecuaţia dată devine

$$i_3 = I_3\sqrt{2}\,\varepsilon^{\delta t}\sin\Omega t.$$

Punînd apoi condiţia, că în momentul închiderii întrerupătorului care leagă circuitul K, la timpul $t = 0_+$, condensatorul nu este încărcat, deci $U_c = \frac{1}{C}\int i_3\,dt = 0$, rezultă

$$(R_2 i_2)_{t=0} = \left(L\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0},$$

sau ţinînd seama de expresia curentului i_3 găsită mai sus şi de faptul că în acel moment

$$i_2 = \frac{U}{R_1 + R_2},$$

se obţine

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{L\Omega}\frac{R_2}{R_1 + R_2}U$$

şi deci expresia curentului căutat este

$$i_3 = \frac{1}{L\Omega}\frac{R_2}{R_1 + R_2}U\varepsilon^{\delta t}\sin\Omega t. \tag{7.22}$$

În cazul cînd Ω este pur complex se aplică acelaşi raţionament asupra unui curent de forma

$$i_3 = I_3'\sqrt{2}\,\varepsilon^{\delta t}\,\mathrm{ch}\,(\Omega' t + \psi').$$

Problema se simplifică însă în cazul de faţă, căci punînd

$$\Omega = j\Omega'$$

expresia (7.22) a curentului devine

$$i_3 = \frac{1}{L\Omega'}\frac{R_2}{R_1 + R_2}U\varepsilon^{\delta t}\,\mathrm{sh}\,\Omega' t$$

circuitul K fiind aperiodic.

Cunoscînd pe i_3, se deduce imediat i_1 și i_2, găsindu-se

$$i_1 = \frac{U}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R_2}{L\Omega}\,\frac{R_2}{R_1 + R_2}\,\varepsilon^{\delta t}\sin\Omega t\right) \quad \text{sau}$$

$$i_1 = \frac{U}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R_2}{L\Omega'}\,\frac{R_2}{R_1 + R_2}\,\varepsilon^{\delta t}\,\mathrm{sh}\,\Omega t\right);$$

$$i_2 = \frac{U}{R_1 + R_2}\left(1 - \frac{R_2}{L\Omega}\,\frac{R_2}{R_1 + R_2}\,\varepsilon^{\delta t}\sin\Omega t\right) \quad \text{sau}$$

$$i_2 = \frac{U}{R_1 + R_2}\left(1 - \frac{R_2}{L\Omega'}\,\frac{R_2}{R_1 + R_2}\,\varepsilon^{\delta t}\,\mathrm{sh}\,\Omega t\right).$$

Pentru datele numerice se găsește:

cazul *a*) $\delta = -100$ și $\Omega = 300$,

$$i_1 = 7{,}5\ (1 + 0{,}67\ \varepsilon^{-100t}\ \sin 300\ t)\,\mathrm{A},$$

$$i_2 = 7{,}5\ (1 - 0{,}67\ \varepsilon^{-100t}\ \sin 300\ t)\,\mathrm{A},$$

$$i_3 = 10\ \varepsilon^{-100t}\ \sin 300\ t\ \mathrm{A};$$

cazul *b*) $\delta = -1000$, $\Omega = \mathrm{j}\ 449$,

$$i_1 = 0{,}75\ (1 + 4{,}5\ \varepsilon^{-1000t}\ \mathrm{sh}\ 499\ t)\ \mathrm{A},$$

$$i_2 = 0{,}75\ (1 - 4{,}5\ \varepsilon^{-1000t}\ \mathrm{sh}\ 499\ t)\ \mathrm{A},$$

$$i_3 = 6{,}69\ \varepsilon^{-1000t}\ \mathrm{sh}\ 499\ t\ \mathrm{A}.$$

7.5. REGIMUL TRANZITORIU AL UNUI CÎMP MAGNETIC ÎNVÎRTITOR

7.5.1. SCURTCIRCUITAREA ALIMENTĂRII UNEI ARMĂTURI TRIFAZATE PRODUCÎND UN CÎMP MAGNETIC ÎNVÎRTITOR

Fie o armătură a unei mașini electrice trifazate cu $2p$ poli ale cărei înfășurări sînt alimentate cu curenții trifazați (5.38), în care s-a făcut $m' = 1$,

$$i_1 = I\ \cos\ (\omega t - \beta),$$

$$i_2 = I\ \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \beta\right),$$

$$i_3 = I\ \cos\left(\omega t + \frac{2}{3} - \beta\right).$$

Acești curenți produc în cele trei înfășurări cîmpurile de inducție magnetică (5.35) care dau în întrefier un cîmp magnetic învîrtitor (5.39)

$$b = \frac{3}{2} AI \cos (p\theta - \omega t + \beta).$$

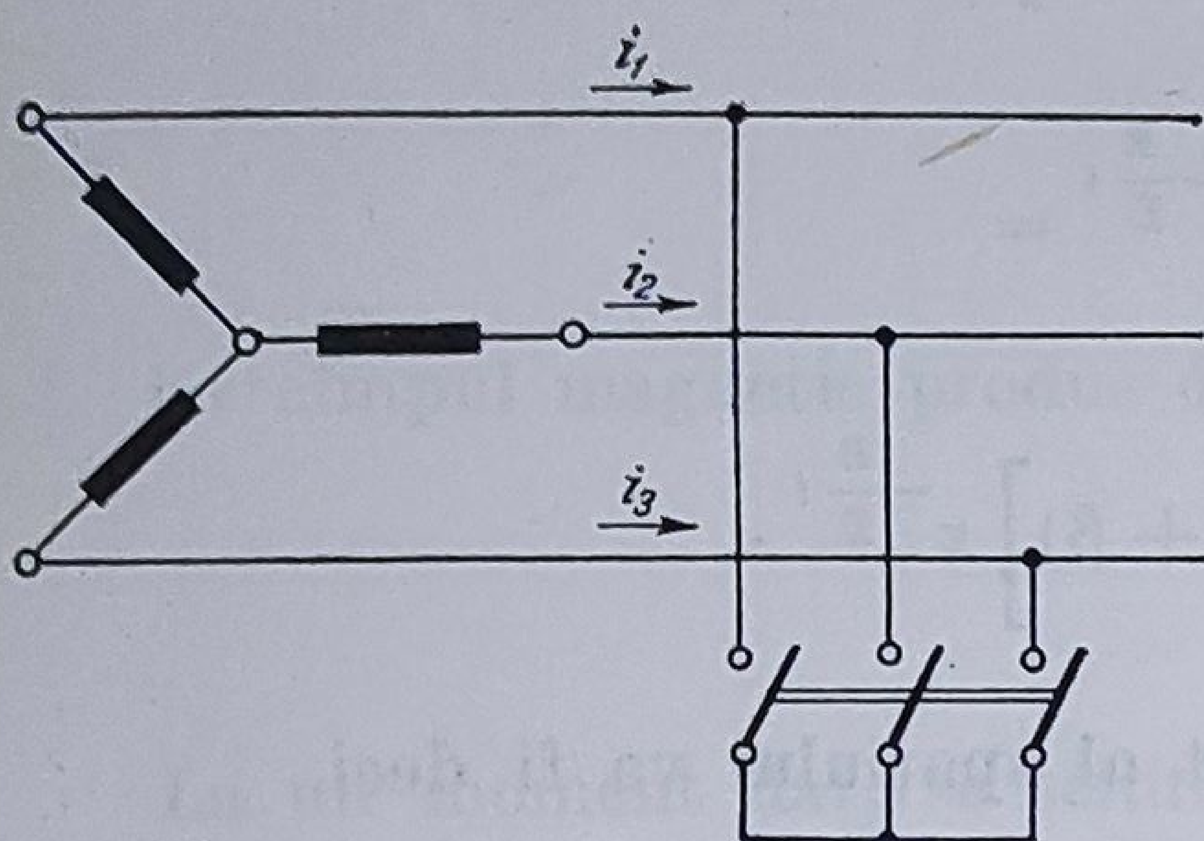


Fig. 7.13. Scurtcircuitarea înfășurărilor unei armături trifazate.

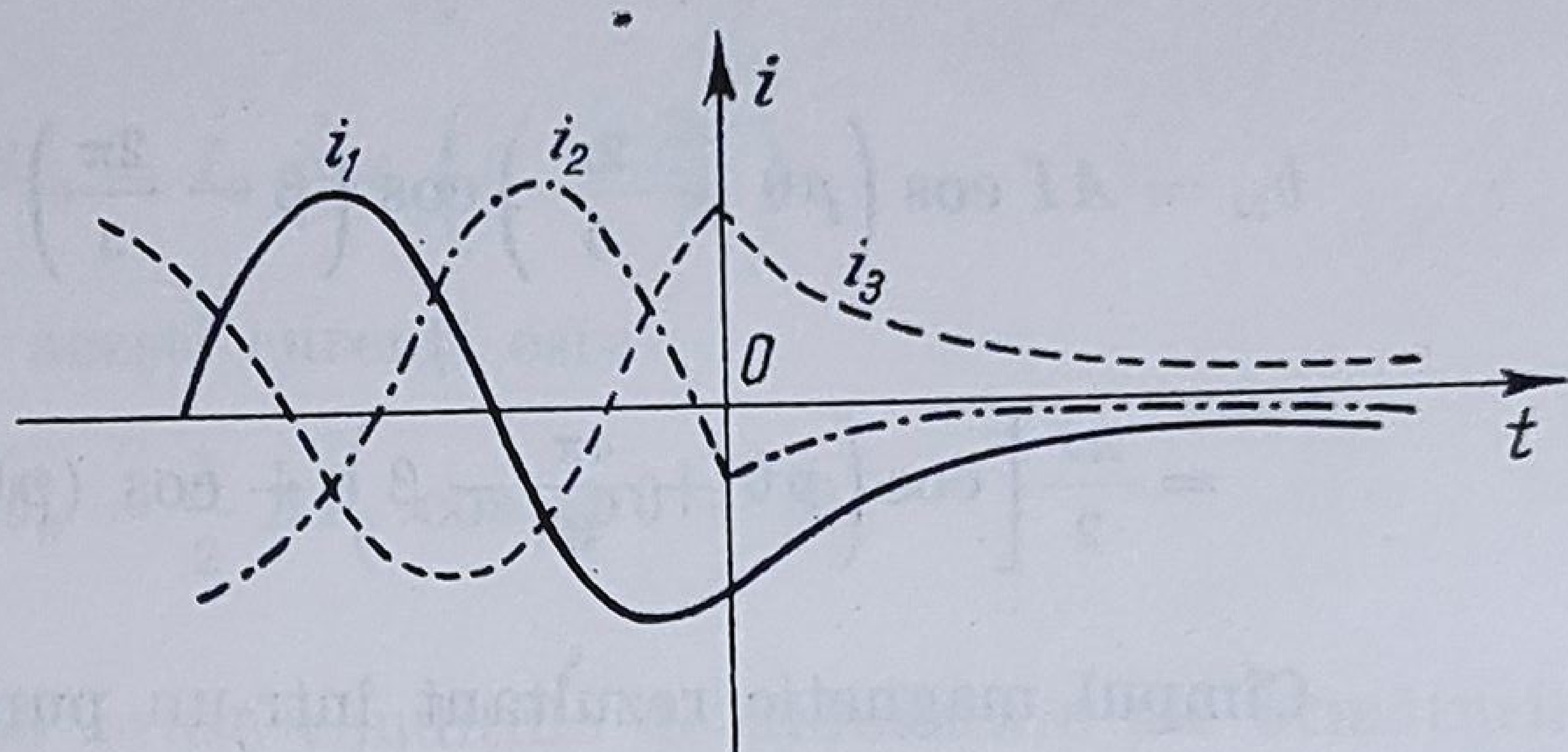


Fig. 7.14. Anularea curenților în armătura trifazată scurtcircuitată.

Să presupunem că la momentul $t = 0_+$, se închid cele trei înfășurări în scurtcircuit (fig. 7.13). În acest moment, curenții în diversele faze sînt

$$i_{01} = I \cos (-\beta), \; i_{02} = I \cos \left(-\beta - \frac{2\pi}{3}\right), \quad i_{03} = I \cos \left(-\beta + \frac{2\pi}{3}\right),$$

iar cîmpul magnetic rezultant

$$b_0 = \frac{3}{2} AI \cos (p\,\theta + \beta).$$

Dacă R este rezistența fiecărei faze și $\mathfrak{L}$ inductanța ciclică corespunzătoare, atunci cei trei curenți se vor anula după legea (fig. 7.14).

$$\left.\begin{aligned} i_{1t} &= I \cos \beta\, \varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}} t}, \\ i_{2t} &= I \cos \left(\beta + \frac{2\pi}{3}\right) \varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}} t}; \\ i_{3t} &= I \cos \left(\beta - \frac{2\pi}{3}\right) \varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}} t}. \end{aligned}\right\} \quad (7.23)$$

Cîmpurile magnetice produse de acești curenți, la o distanță θ de axa primei faze, vor fi

$$b_{1t} = AI \cos p\theta \cos\beta \; \varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}} t} = \frac{AI}{2} [\cos (p\,\theta - \beta) + \cos (p\,\theta + \beta)] \; \varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}} t},$$

$$b_{2t} = AI \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\beta + \frac{2\pi}{3}\right)\varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}}t} =$$

$$= \frac{AI}{2}\left[\cos\left(p\theta - \frac{4\pi}{3} - \beta\right) + \cos\,(p\theta + \beta)\right]\varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}}t},$$

$$b_{3t} = AI \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\beta - \frac{2\pi}{3}\right)\varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}}t} =$$

$$= \frac{AI}{2}\left[\cos\left(p\theta + \frac{4\pi}{3} - \beta\right) + \cos\,(p\theta + \beta)\right]\varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}}t}.$$

Cîmpul magnetic rezultant într-un punct al spațiului va fi deci,

$$b_t = \frac{3}{2}\,AI \cos\,(p\theta + \beta)\;\varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}}t} = +\,B_0\,\varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}}t}. \tag{7.24}$$

Rezultă deci, că în punctul

$$\theta = \frac{\beta}{p}$$

din întrefier, cîmpul magnetic este în permanență fix în spațiu. Acest cîmp se anulează după legea exponențială $\varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}}t}$. *Valoarea lui inițială este independentă de momentul în care începe regimul tranzitoriu.*

Din cele ce preced, rezultă că în cazul unei armături trifazate, alimentată de la o rețea electrică trifazată simetrică, care produce în întrefierul acestei armături un cîmp magnetic învîrtitor, dacă la un moment dat se întrerupe brusc această alimentare, atunci cîmpul magnetic învîrtitor se oprește brusc în raport cu armătura și se anulează apoi după o lege exponențială. Acestui cîmp fix tranzitoriu îi corespunde un sistem de curenți aperiodici care străbat înfășurările celor trei faze ale armăturii, a căror sumă algebrică este nulă în orice moment și a căror valoare relativă depinde de momentul în care se produce întreruperea circuitului. Aceste valori se pot deduce ușor din relația (7.23).

7.5.2. EXPRESIA GENERALĂ A REGIMULUI TRANZITORIU AL UNUI CÎMP MAGNETIC ÎNVÎRTITOR

Să reluăm expresia (5.38) a curenților trifazați, care alimentînd o armătură trifazată cu $2p$ poli, produc, într-un punct situat la o distanță θ de axa fazei 1 cîmpul învîrtitor (5.44)

$$b = \frac{3}{2}\,AI_0 \cos\,(p\theta - \omega t + \beta).$$

La timpul $t = 0_-$, curenţii în diferitele faze sînt :

$$i_{10} = I_0 \cos \beta,$$

$$i_{20} = I_0 \cos \left(\beta + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$i_{30} = I_0 \cos \left(\beta - \frac{2\pi}{3}\right),$$

iar cîmpul magnetic produs de aceşti curenţi este

$$b_0 = \frac{3}{2} A I_0 \cos (p\theta + \beta).$$

La un moment dat, se schimbă brusc condiţiile de alimentare ale armăturii (forţă electromotoare, frecvenţă etc.) în vederea modificării valorii cîmpului magnetic. Dacă noul regim constituie regimul forţat al sistemului, valoarea curenţilor permanenţi care vor produce noul cîmp magnetic învîrtitor permanent, corespunzător situaţiei finale căutate

$$b_p = \frac{3}{2} A I_p \cos [p\theta - (\omega t - \gamma)],$$

vor fi

$$i_{p1} = I_p \cos (\omega t - \gamma),$$

$$i_{p2} = I_p \cos \left(\omega t - \gamma - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$i_{p3} = I_p \cos \left(\omega t - \gamma + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Curentul nu atinge, însă, această valoare instantaneu ci trecerea de la valoarea i_0 la valoarea i_p, se face după legea (3.199)

$$i = i_p + (i_0 - i_{p0}) \varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}} t},$$

în care R este rezistenţa înfăşurării unei faze şi $\mathfrak{L}$ inductanţa sa efectivă, sau ciclică, iar i_{p0} valoarea curentului permanent i_p la timpul $t = 0_+$. În cazul considerat rezultă

$$i_{p01} = I_p \cos \gamma,$$

$$i_{p02} = I_p \cos \left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$i_{p03} = I_p \cos \left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Într-un punct N al întrefierului, situat la distanța θ de axa primei faze, cîmpurile magnetice pe care le vor produce fiecare fază se obțin introducînd în expresiile (5.35) valorile curenților dați de relațiile (3.199). Înlocuind apoi produsele respective de cosinus prin sumele corespunzătoare și adunînd, se obține expresia cîmpului rezultant

$$b = \frac{3}{2} A I_p \cos[p\theta - (\omega t - \gamma)] + \frac{3}{2} A I_0 \left[\cos(p\theta + \beta) - \frac{3}{2} A I_p \cos(p\theta + \gamma)\right] \varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}}}$$

adică

$$\overline{b} = \overline{B}_p + (\overline{B}_0 - \overline{B}_{p0})\, \varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}} t}. \tag{7.25}$$

Cîmpul magnetic astfel obținut provine deci, din suprapunerea peste cîmpul magnetic învîrtitor al noului regim, B_p, care se rotește cu viteza $\frac{\omega}{p}$, a unui *cîmp magnetic tranzitoriu*

$$\overline{B}_l = (\overline{B}_0 - \overline{B}_{p0})\, \varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}} t}$$

care, în funcție de elementele circuitului poate fi pus sub forma

$$B_l = \frac{3}{2} A I_l \cos(p\theta + \xi)\, \varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}} t}, \tag{7.26}$$

în care

$$I_l = \sqrt{I_0^2 + I_p^2 - I_0 I_p \cos(\beta - \gamma)},$$

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{I_0 \sin\beta - I_p \sin\gamma}{I_0 \cos\beta - I_p \cos\gamma}.$$

Acest cîmp magnetic tranzitoriu este maximum într-un punct al spațiului

$$\theta = -\frac{\xi}{p},$$

independent de timp. În consecință, *cîmpul magnetic tranzitoriu este un cîmp fix în raport cu armătura care îl produce.* De asemenea, se observă, că în general, amplitudinea acestui cîmp magnetic tranzitoriu este independentă de momentul în care se produce schimbarea regimului.

7.5.3. APLICAȚII

7.5.3.1. Oprirea unui cîmp magnetic învîrtitor. În cazul opririi unui cîmp magnetic învîrtitor, în regimul forțat $I_p = 0$ și deci $B_p = 0$, rezultă $B_{p0} = 0$, astfel încît relația (7.25) devine

$$b = B_0\, \varepsilon^{-\frac{R}{\mathfrak{L}} t},$$

adică se regăsește relația (7.24) stabilită direct mai înainte.

7.5.3.2. Stabilirea unui cîmp magnetic învîrtitor. În cazul stabilirii unui cîmp magnetic învîrtitor, de exemplu la pornirea unui motor electric asincron, $B_0 = 0$ şi regimul tranzitoriu este dat de ecuaţia

$$b = B_p - B_{p0}\, \varepsilon^{-\frac{R}{\mathcal{L}}t}.$$

Cîmpul magnetic permanent poate fi reprezentat printr-un vector de lungime constantă, OA, care se roteşte cu viteza de sincronism $\frac{\omega}{p}$; extremitatea lui va descrie deci un cerc. Cîmpul magnetic liber, $\overline{B}_0\, \varepsilon^{-\frac{R}{\mathcal{L}}t}$, va fi reprezentat printr-un vector fix, care, la momentul iniţial este egal şi opus vectorului $\overline{B}_p$, aceasta deoarece în acel moment cîmpul magnetic rezultant este nul. Rezultă deci $|\overline{B}_{p0}| = |\overline{B}_p|$. În timp ce vectorul $\overline{B}_p$ se roteşte şi extremitatea sa descrie un cerc, vectorul $\overline{B}_{p0}$ rămîne fix, păstrîndu-şi direcţia, amplitudinea lui scăzînd însă după o lege exponenţială. Rezultanta va fi reprezentată de un vector a cărei extremitate pleacă din centrul cercului şi descrie o curbă, la început excentrică, dar care tinde progresiv către cerc (fig. 7.15).

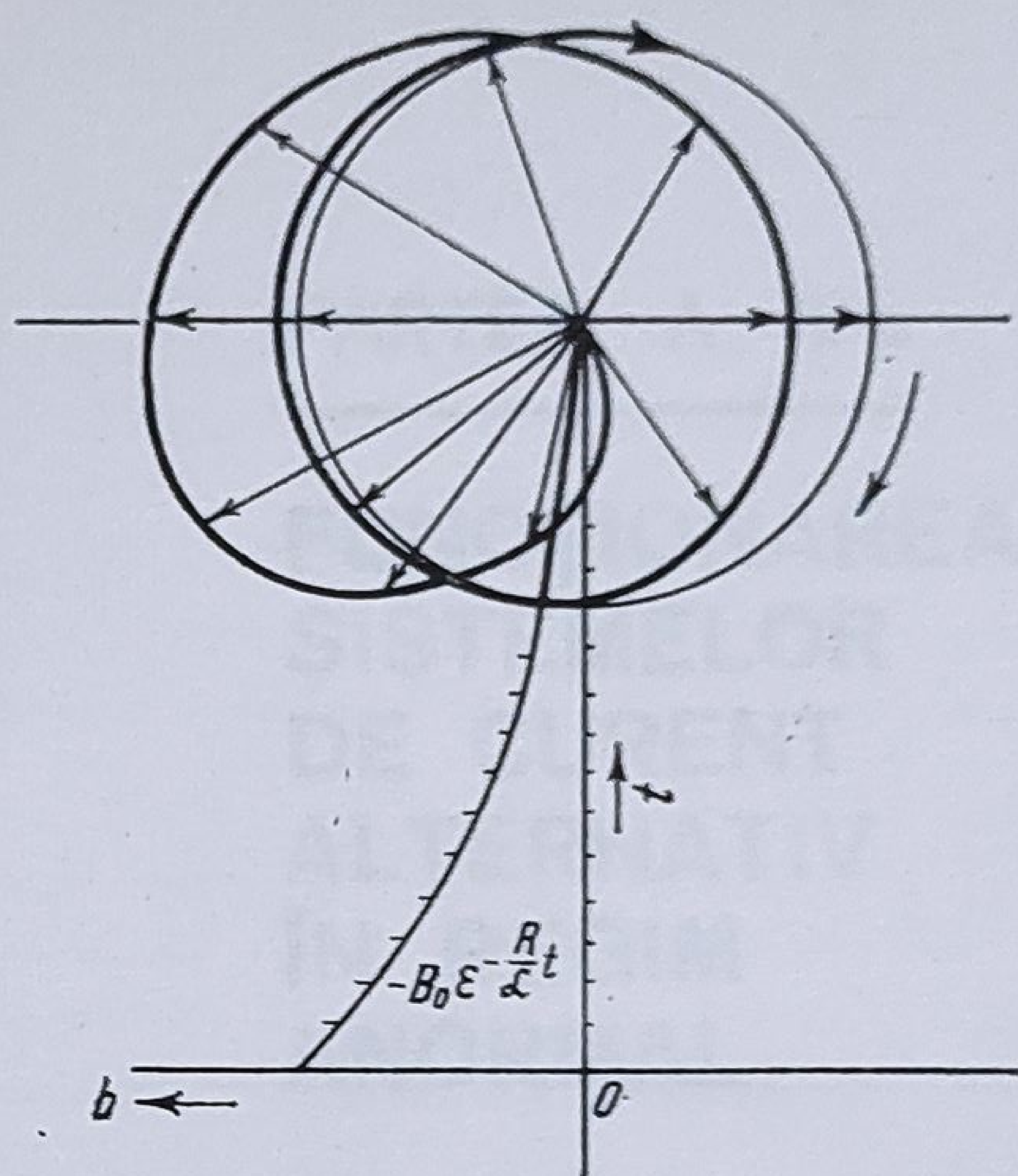


Fig. 7.15. Hodograful unui cîmp învîrtitor la pornire.

Pentru un observator care s-ar deplasa de-a lungul armăturii cu viteza $\frac{\omega}{p}$, plecînd din punctul A, cîmpul magnetic rezultant apare ca suprapunerea unui cîmp magnetic alternativ de pulsaţie ω şi cu amplitudinea scăzînd exponenţial, peste un cîmp magnetic constant de amplitudine $OA = B_p$ (fig. 7.16). În figura 7.17 este dată oscilograma pornirii unui motor electric de inducţie (motor asincron), variaţia vitezei de rotaţie a acestuia coincizînd cu variaţia vitezei cîmpului magnetic învîrtitor care se stabileşte la pornirea motorului.

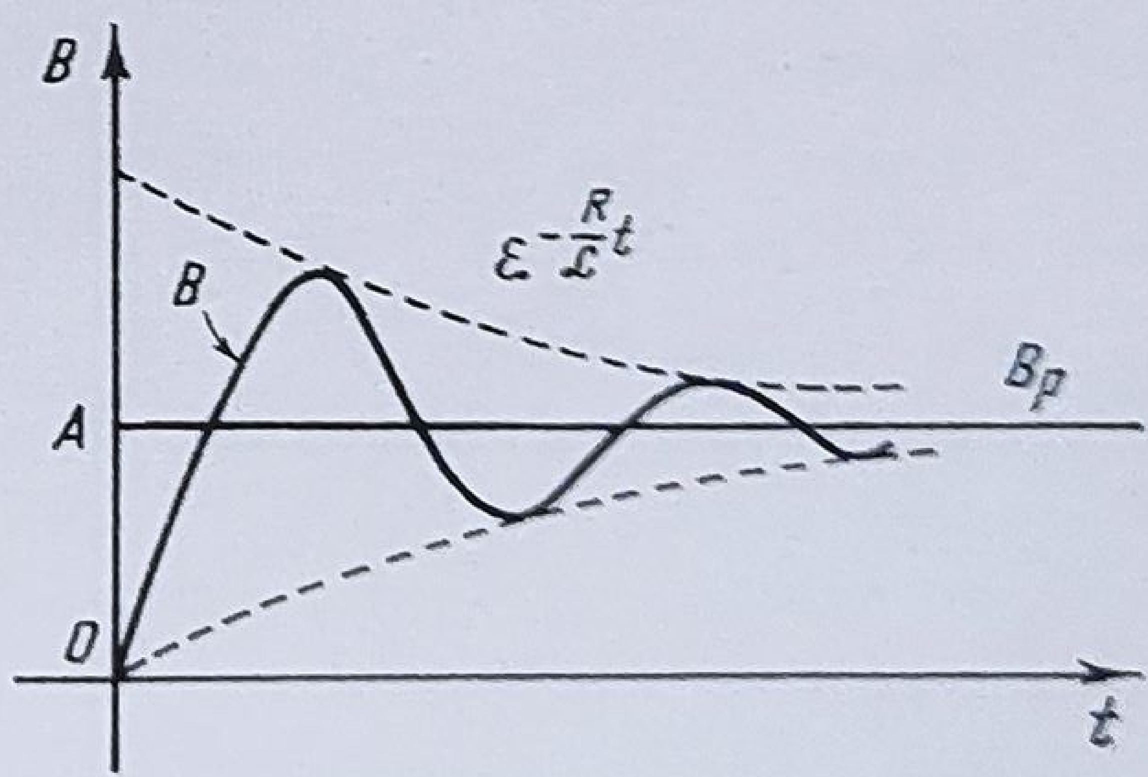


Fig. 7.16. Curba de variaţie a unui cîmp învîrtitor la pornire.

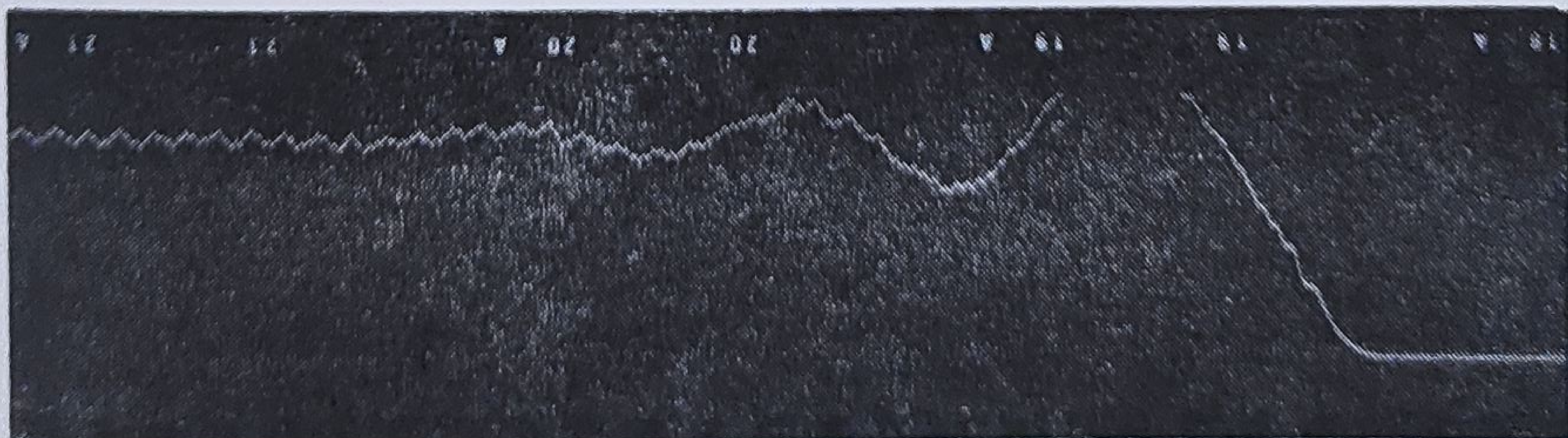


Fig. 7.17. Oscilograma vitezei unui motor electric de inducţie la pornire.

PARTEA A III-a

FUNCȚIONAREA SISTEMELOR DE CURENT ALTERNATIV ÎN REGIM ANORMAL

Capitolul VIII

CURENTUL ALTERNATIV POLIFAZAT NESIMETRIC. REGIMUL DEZECHILIBRAT

8.1. GENERALITĂŢI

Un sistem energetic polifazat se spune că este *simetric* şi *echilibrat,* atunci cînd fazele sale sînt egal şi simetric încărcate, iar sistemul tensiunilor de alimentare este simetric.

Prin încărcare egală, se înţelege încărcarea cu sarcini egale, adică cu sarcini, care reprezentate prin impedanţe, au acelaşi modul şi acelaşi argument faţă de o origine comună arbitrar aleasă.

Prin încărcare simetrică se înţelege repartizarea şi aşezarea sarcinilor în acelaşi mod pe toate fazele sistemului.

Într-un sistem echilibrat, alimentat cu un sistem de tensiuni simetrice, curenţii care iau naştere în diversele elemente,precum şi căderile de tensiune corespunzătoare, formează sisteme polifazate simetrice.

Prin sistem polifazat simetric se înţelege acel sistem la care modulele diverşilor fazori reprezentativi ai sistemului (de tensiune sau de curent) sînt egale şi aceşti fazori sînt depărtaţi unul de altul printr-un unghi egal cu $2\pi/m$, m fiind numărul de faze ale sistemului. Rezultanta unui asemenea sistem este întotdeauna nulă.

De asemenea, în sistemele echilibrate, diversele faze nu au o influenţă reciprocă una asupra celeilalte.

În cazul cînd într-un sistem energetic polifazat, cel puţin una din condiţiile de mai sus nu este îndeplinită, sistemul corespunzător devine un sistem nesimetric sau *dezechilibrat* *. Astfel, un sistem energetic, polifazat, egal şi simetric încărcat, devine un sistem dezechilibrat dacă tensiunile de alimentare sînt diferite fie ca modul, fie ca argument ; de asemenea, sistemul energetic polifazat, alimentat cu un sistem de tensiuni simetrice, este un sistem dezechilibrat dacă diversele sale faze sînt încărcate cu sarcini diferind fie ca modul, fie ca argument.

Cauzele care produc un dezechilibru într-o reţea sînt de două feluri : unele temporare, altele permanente.

Dezechilibrul temporar se datorează influenţei asupra sistemului a defectelor care pot fi de natură foarte diferită. Studiul regimurilor dezechilibrate temporar este în special important pentru teoria şi concepţia dispozitivelor de protecţie, precum şi pentru studiul stabilităţii reţelelor electrice.

---

*În literatura tehnică, se obişnuieşte a se folosi fie denumirea de sistem nesimetric, fie denumirea de sistem dezechilibrat. O hotărîre internaţională sau naţională în această chestiune nu a fost luată încă.

O rețea electrică trifazată, care normal este echilibrată și simetrică, va prezenta un dezechilibru temporar de îndată ce se va produce un defect. Aceste defecte se pot produce între două sau mai multe conductoare ale rețelei, cu sau fără punerea la pămînt a vreunuia din aceste conductoare. În general, asemenea dezechilibrări se caracterizează prin apariția în rețea a unor *curenți de succesiune inversă sau nulă* și prin perturbații în simetria tensiunilor.

Dezechilibrul temporar dispare odată cu dispariția cauzei care îl produce și este folosit în dispozitivele de protecție a rețelei tocmai împotriva defectelor care dau naștere acestui regim.

Dezechilibrul permanent se produce atunci cînd o rețea este încărcată disimetric din cauza unei repartiții defectuoase a sarcinii pe cele trei faze. În acest caz, gradul de dezechilibrare este destul de mic. Se poate întîmpla totuși ca acest dezechilibru să fie destul de important atunci cînd este necesar să se alimenteze un aparat monofazat dintr-o rețea electrică trifazată, cum ar fi, de exemplu, un cuptor electric monofazat sau aparatele de sudură electrică.

Studiul regimului dezechilibrat nu se mai poate face considerînd sistemul polifazat format dintr-un număr de sisteme monofazate egal cu numărul fazelor sistemului dat, formate fiecare în parte din cîte o fază și un conductor de întoarcere, real sau fictiv, *neutrul sistemului*, studiu ce se face de obicei pe o singură fază, faza de referință și concluziile obținute extinzîndu-se și asupra celorlalte faze, prin rotirea curentului obținut cu argumentul tensiunii corespunzătoare *.

Pentru rezolvarea sistemelor dezechilibrate se folosesc metode speciale, care pot fi împărțite în două categorii : *metode directe* și *metode prin utilizarea coordonatelor simetrice*. Aceste metode vor fi examinate în paragrafele următoare.

8.2. METODA DIRECTĂ DE CALCUL A SISTEMELOR NESIMETRICE ȘI DEZECHILIBRATE

8.2.1. REPREZENTAREA TOPOGRAFICĂ A TENSIUNILOR **

Forțele electromotoare ale unui alternator trifazat pot fi reprezentate grafic prin trei fazori concurenți, egali ca mărime și defazați succesiv unul față de altul cu un unghi egal cu $\frac{2\pi}{3}$, aceasta dacă se presupune că sistemul este echilibrat și simetric. În caz contrar, cei trei fazori concurenți pot fi oricum, atît ca defazaj, cît și ca mărime. Punctul de concurență se consideră drept potențial de origine al sistemului — potențialul de referință. El este luat, în general, egal cu zero. Această reprezentare se numește *reprezentarea topografică a tensiunilor* sau *diagrama tensiunilor* (fig. 8.1). Pe această diagramă, tensiunile între faze se măsoară prin fazorii $E_{II}E_{I}$, $E_{I}E_{III}$, $E_{III}E_{II}$.

Să presupunem că aceste trei forțe electromotoare sînt produse de trei alternatoare monofazate, ale căror rotoare sînt montate pe același ax și decalate unul față de altul cu 1/3 din perioadă. Fazele vor fi astfel fără inducție mutuală între ele și problema poate fi tratată ca problemele de curent alternativ monofazat.

---

* Vezi Capitolul V.

** Fără a micșora cu nimic generalitatea problemei, expunerea acesteia se va face pentru sistemele trifazate, ele fiind aproape unicele folosite în sistemele energetice moderne. Pentru un sistem cu *m* faze, problema se generalizează imediat, însă interesul practic este minim.

Să presupunem de asemenea că cele trei forţe electromotoare, legate în stea, alimentează un receptor trifazat montat şi el în stea. Fie $\underline{Z}_A$ impedanţa fiecărei faze a alternatorului, $\underline{Z}_L$ impedanţa fiecărei faze a liniei electrice şi $\underline{Z}_R$ impedanţa fiecărei faze a receptorului. Curentul la receptor, presupus egal încărcat, este dat de relaţia

$$\underline{I}_1 = \frac{\overline{OE_1}}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R}.$$

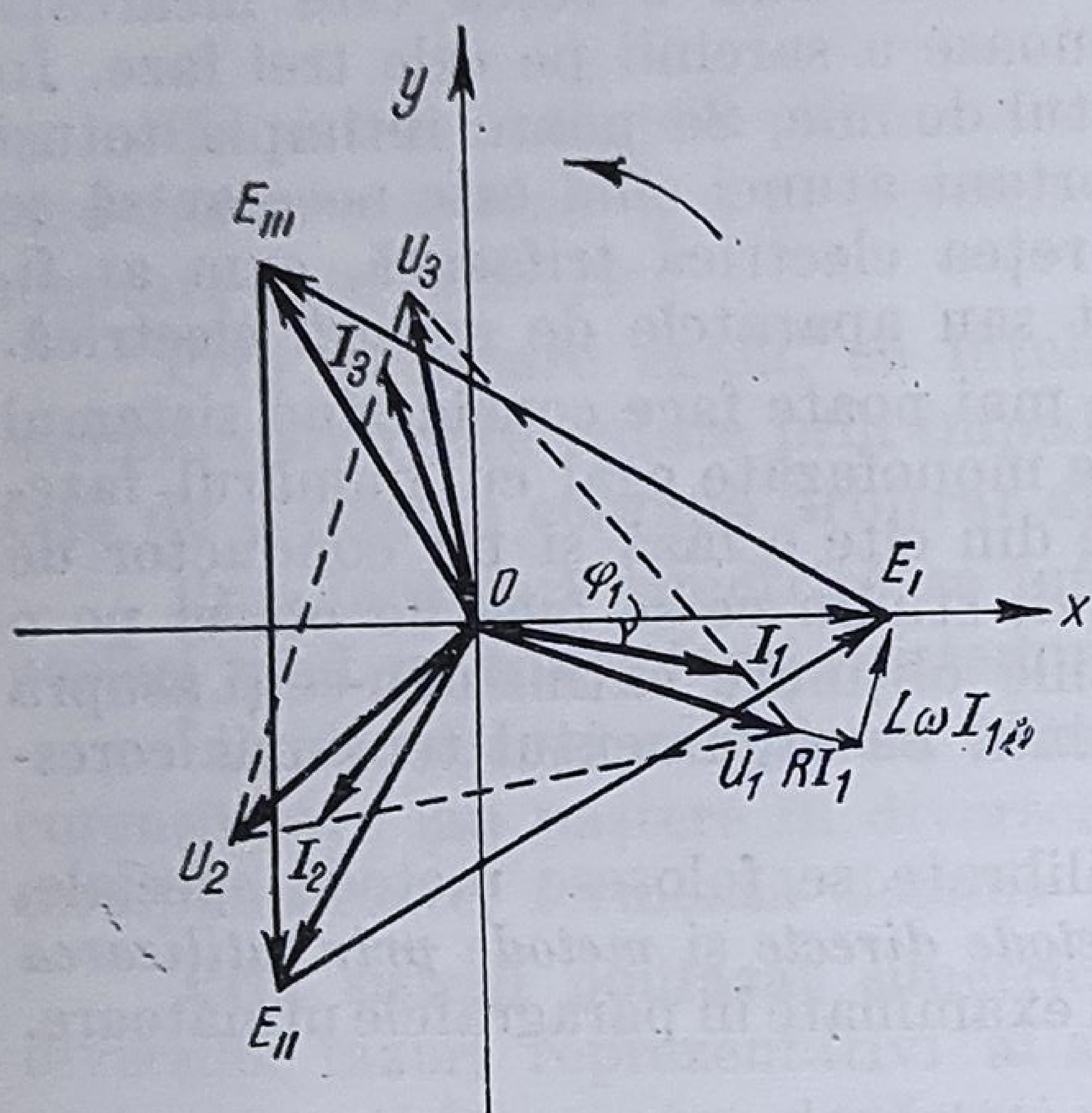


Fig. 8.1. Topograma tensiunilor unui sistem trifazat.

Curentul pe fiecare fază poate fi reprezentat în diagrama tensiunilor, prin trei fazori egali şi defazaţi faţă de fazorii reprezentativi ai forţelor electromotoare corespunzătoare, cu unghiul φ.

Cunoscînd curentul şi defazajul său faţă de forţele electromotoare ale alternatorului, precum şi impedanţele respective (ale alternatorului, liniei electrice şi ale receptorului), se poate găsi imediat tensiunea pe fază şi la bornele alternatorului. Pentru aceasta, se va scădea pe fiecare fază căderea de tensiune respectivă, obţinîndu-se iarăşi trei fazori simetrici $\overline{OU_1}$, $\overline{OU_2}$, $\overline{OU_3}$, care vor fi defazaţi faţă de fazorii care reprezintă forţa electromotoare cu unghiul θ, reprezentînd defazajul propriu al sistemului. Tensiunea la borne va forma de asemenea un triunghi echilateral, rotit faţă de triunghiul echilateral al forţelor electromotoare cu acelaşi unghi θ.

În cazul unei sarcini dezechilibrate, triunghiul tensiunilor este deformat. Fie de exemplu acelaşi sistem trifazat simetric şi echilibrat, la care se presupune că una din faze este întreruptă (fig. 8.2).

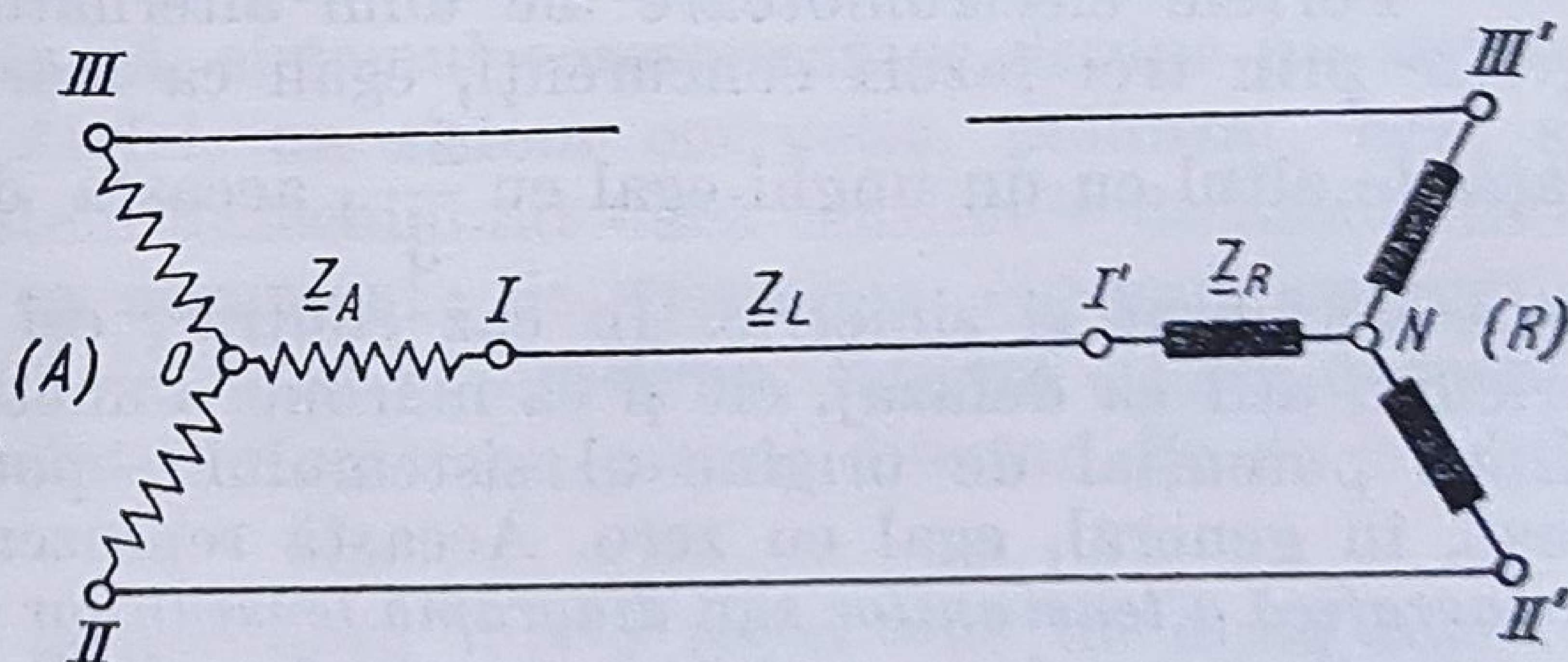


Fig. 8.2. Sistem trifazat simetric cu o fază întreruptă.

Cele două impedanţe sînt acum în serie şi sistemul sarcinii se prezintă ca şi cum ar exista o sarcină monofazată căreia i se aplică tensiunea

$$|\underline{E}_{I,II}| = |\underline{E}_I - \underline{E}_{II}| = E_I\sqrt{3}.$$

Prin urmare, curentul în circuit, deci curentul produs de alternator, va fi

$$|\underline{I}_1| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{E_I}{Z}$$

ce se deduce aplicînd a doua teoremă a lui KIRCHHOFF circuitului I, I', N, II', II, O, I.

Forța electromotoare $E_{I.II}$ între fazele alternatorului se repartizează în două părți egale pe cele două impedanțe identice ale sarcinii; fie $E_{NI} = E_{NII}$ aceste forțe electromotoare. Din diagrama tensiunilor se vede imediat, că între punctul neutru al alternatorului și punctul neutru al sarcinii, există o diferență de potențial $\underline{U}_{ON}$ iar tensiunea dintre faza întreruptă și punctul neutru al sarcinii este $\underline{E}_{IIIN'}$, și este mai mare decît tensiunea corespunzătoare pe faza alternatorului. Diagrama completă a tensiunilor se construiește acum ușor.

Dacă $\underline{I}_1$ și $\underline{I}_2$ sînt cei doi curenți produși de alternator, conform primei teoreme a lui Kirchhoff, aceștia sînt egali și de sens contrar și sînt defazați cu unghiul φ față de forța electromotoare $E_{I.II}$ care i-a produs. Scăzînd căderile de tensiune corespunzătoare din forța electromotoare aplicată, se găsește tensiunea la bornele alternatorului, precum și tensiunile pe fază în acest caz (fig. 8.3). Triunghiul tensiunilor la borne, în acest caz, nu mai este echilateral.

Ceea ce s-a spus pentru cazul cînd una din faze este complet întreruptă, se poate spune și pentru cazul general cînd cele trei faze sînt inegal încărcate. În acest caz, triunghiul tensiunilor la borne va fi oarecare.

Diagrama tensiunilor poate fi construită și experimental, măsurîndu-se diversele tensiuni între faze și față de punctul neutru și construindu-se fazorii respectivi.

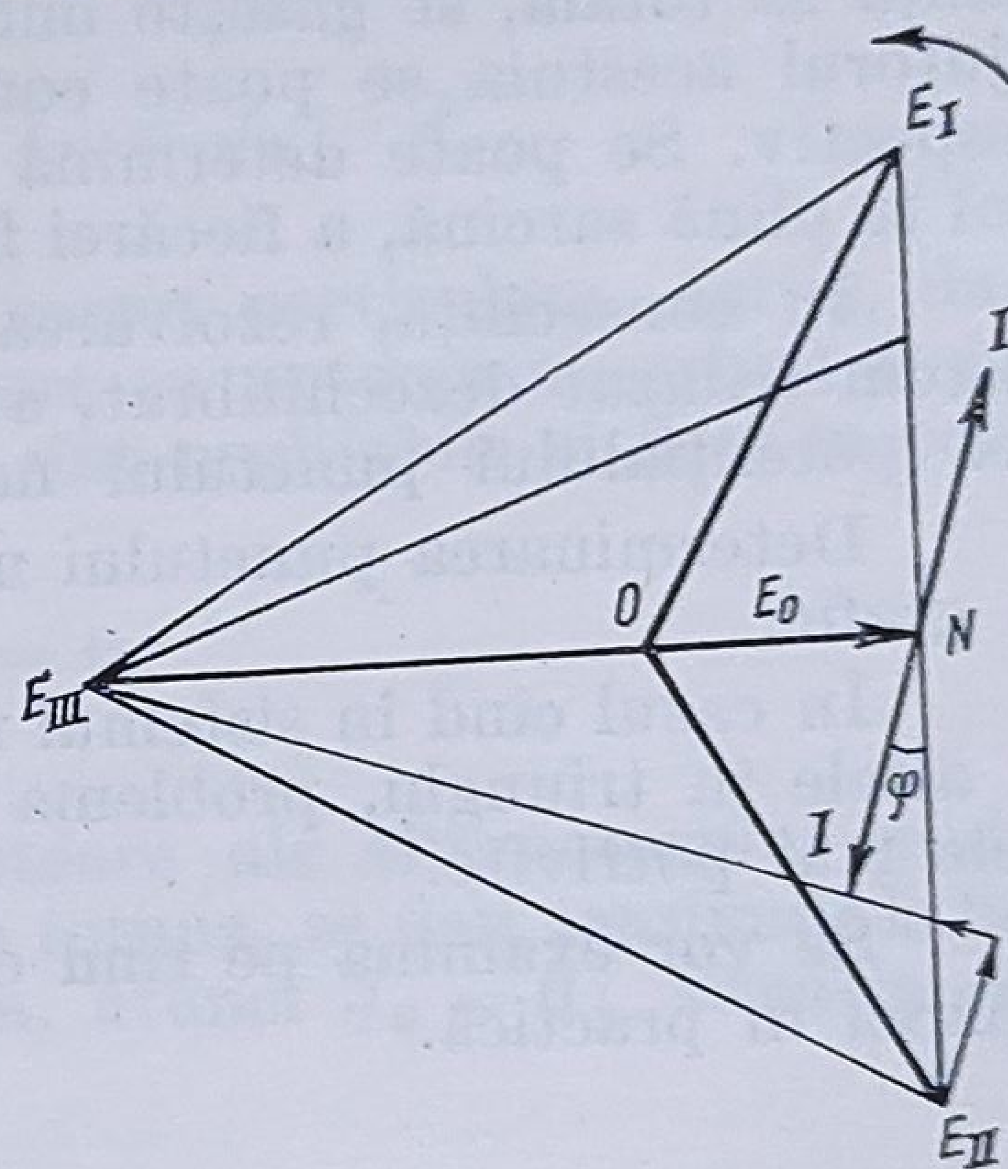


Fig. 8.3. Topograma tensiunilor sistemului trifazat cu fază întreruptă.

8.2.2. CALCULUL CURENȚILOR LA O ÎNCĂRCARE NESIMETRICĂ ȘI DEZECHILIBRATĂ

8.2.2.1. **Generalități.** Problema generală care trebuie să fie rezolvată în sistemele energetice trifazate este următoarea : fiind date forțele electromotoare induse în fazele alternatorului și impedanțele pe fază ale generatorului, liniei electrice și sarcinii, se cere să se determine curenții pe fază.

Problema se rezolvă diferit, după cum sistemul energetic trifazat are fazele, atît ale generatorului cît și ale receptorului legate în triunghi sau stea, sau unele în triunghi și celelalte în stea.

Pentru determinarea curenților se aplică metodele de calcul cele mai potrivite problemei respective, sistemul trifazat fiind tratat ca un circuit oarecare.

Astfel, în cazul cînd fazele sistemului trifazat sînt legate în triunghi atît la sursă cît și la receptor, determinarea curenților în diversele elemente ale circuitului se face prin metoda obișnuită a buclelor *.

În cazul cînd fazele sistemului trifazat sînt legate în stea atît la sursă cît și la receptor, determinarea curenților în diversele elemente ale circuitului se poate face aplicînd direct fie metoda buclelor, fie metoda perechilor de noduri **.

---

* Vezi 4.2.5.
** Vezi 4.2.7.

Se admite că potenţialul punctului neutru al generatorului este egal cu zero. În aceste condiţii, la mersul în gol, potenţialul la bornele fiecărei faze este egal cu forţa electromotoare indusă în fază, care are un anumit modul şi un anumit argument.

Dacă se presupune acum că se cunoaşte potenţialul punctului neutru al sarcinii, rezultă că se va cunoaşte şi diferenţa de potenţial la bornele fiecărei faze. Într-adevăr, acestea sînt egale cu diferenţa între tensiunea pe fază la bornele generatorului la mersul în gol şi tensiunea punctului neutru al sarcinii.

Cunoscînd diferenţa de potenţial la bornele fiecărei faze precum şi impedanţa sa totală, se găseşte imediat curentul căutat, în mărime şi în fază; cu ajutorul acestuia se poate construi în orice punct al sistemului, potenţialul respectiv. Se poate determina astfel şi căderea de tensiune, de la mersul în gol la plină sarcină, a fiecărei faze.

În consecinţă, rezolvarea problemei generale a unei distribuţii, într-un sistem trifazat dezechilibrat, avînd fazele legate în stea, constă în determinarea potenţialului punctului neutru al sarcinii.

Determinarea punctului neutru al sarcinii se poate face atît analitic, cît şi grafic.

În cazul cînd în sistemul trifazat o parte din elemente sînt legate în stea şi altele în triunghi, problema se rezolvă prin aplicarea metodelor de calcul cele mai potrivite.

Se vor examina pe rînd cazurile cele mai frecvente de probleme ce pot apărea în practică.

8.2.2.2. **Calculul sistemelor trifazate dezechilibrate avînd generatorul şi receptorul cu fazele conectate în triunghi.** Să considerăm cazul cel mai general cînd generatorul este nesimetric, avînd forţele electromotoare pe cele trei faze inegale, şi dezechilibrat, avînd impedanţele pe fază inegale; presupunem de asemenea că linia electrică trifazată este nesimetrică şi sarcina este dezechilibrată (fig. 8.4).

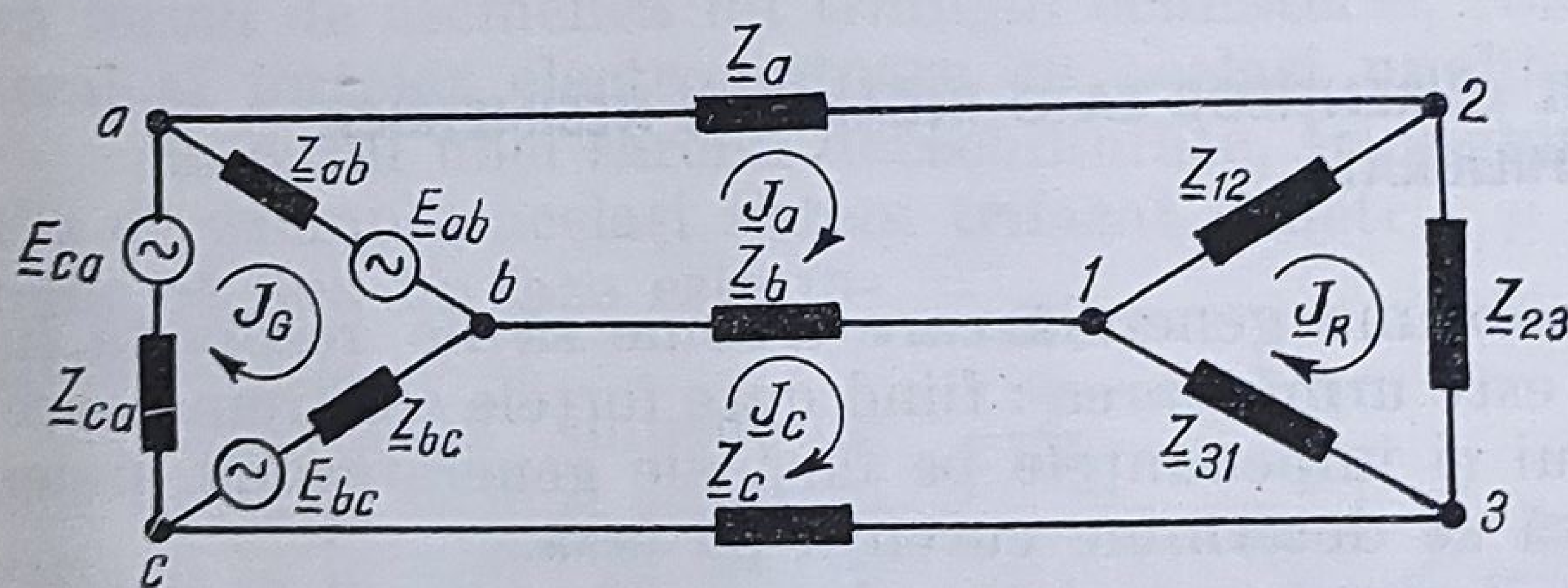


Fig. 8.4. Sistem trifazat complet cu conectare în triunghi.

Aplicînd metoda buclelor, vor fi de determinat patru curenţi daţi de ecuaţiile

$$\begin{aligned}
&(\underline{Z}_{ab}+\underline{Z}_{bc}+\underline{Z}_{ca})\underline{J}_G - \underline{Z}_{ab}\underline{J}_a - \underline{Z}_{bc}\underline{J}_c = \underline{E}_{ab}+\underline{E}_{bc}+\underline{E}_{ca}\\
&-\underline{Z}_{ab}\underline{J}_G+(\underline{Z}_a+\underline{Z}_b+\underline{Z}_{ab}+\underline{Z}_{12})\underline{J}_a - \underline{Z}_b\underline{J}_c - \underline{Z}_{12}\underline{J}_R = -\underline{E}_{ab}\\
&-\underline{Z}_{bc}\underline{J}_G - \underline{Z}_b\underline{J}_a+(\underline{Z}_b+\underline{Z}_c+\underline{Z}_{bc}+\underline{Z}_{31})\underline{J}_c - \underline{Z}_{31}\underline{J}_R = -\underline{E}_{bc}\\
&-\underline{Z}_{12}\underline{J}_a - \underline{Z}_{31}\underline{J}_c+(\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{31})\underline{J}_R = 0,
\end{aligned} \tag{8.1}$$

cu care se determină apoi curenţii necunoscuţi din sistemul trifazat. Se vor găsi astfel:

— curenţii din bobinajele generatorului

$$\underline{I}_{ab} = \underline{J}_G - \underline{J}_a ; \quad \underline{I}_{bc} = \underline{J}_G - \underline{J}_c ; \quad \underline{I}_{ca} = \underline{J}_G ;$$

— curenţii din linia electrică

$$\underline{I}_b = -\underline{J}_a + \underline{J}_c ; \quad \underline{I}_a = \underline{J}_a ; \quad \underline{I}_c = -\underline{J}_c ;$$

— curenţii din receptor

$$\underline{I}_{12} = \underline{J}_R - \underline{J}_a ; \quad \underline{I}_{23} = \underline{J}_R ; \quad \underline{I}_{31} = \underline{J}_R - \underline{J}_c .$$

Ecuaţiile (8.1) se simplifică în anumite cazuri particulare. Astfel, dacă puterea generatorului este foarte mare în raport cu puterea absorbită de sarcină, atunci căderile de tensiune în generator sînt neglijabile şi deci se poate lua

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = 0$$

şi deci $\underline{J}_G = 0$.

Dacă în loc să se dea forţele electromotoare ale alternatorului se dau tensiunile la bornele acestuia, sau, ceea ce este totuna, se dau tensiunile la bornele reţelei într-un punct oarecare al acesteia, atunci $\underline{J}_G = 0$; situaţia este analogă cu aceea din cazul precedent.

8.2.2.3. **Calculul sistemelor trifazate dezechilibrate avînd generatorul şi receptorul conectate în stea.** Fie sistemul trifazat reprezentat în figura 8.5, presupus complet dezechilibrat şi ca tensiuni şi ca impedanţe. Între punctul neutru O al alternatorului şi punctul neutru N al sarcinii există o diferenţă

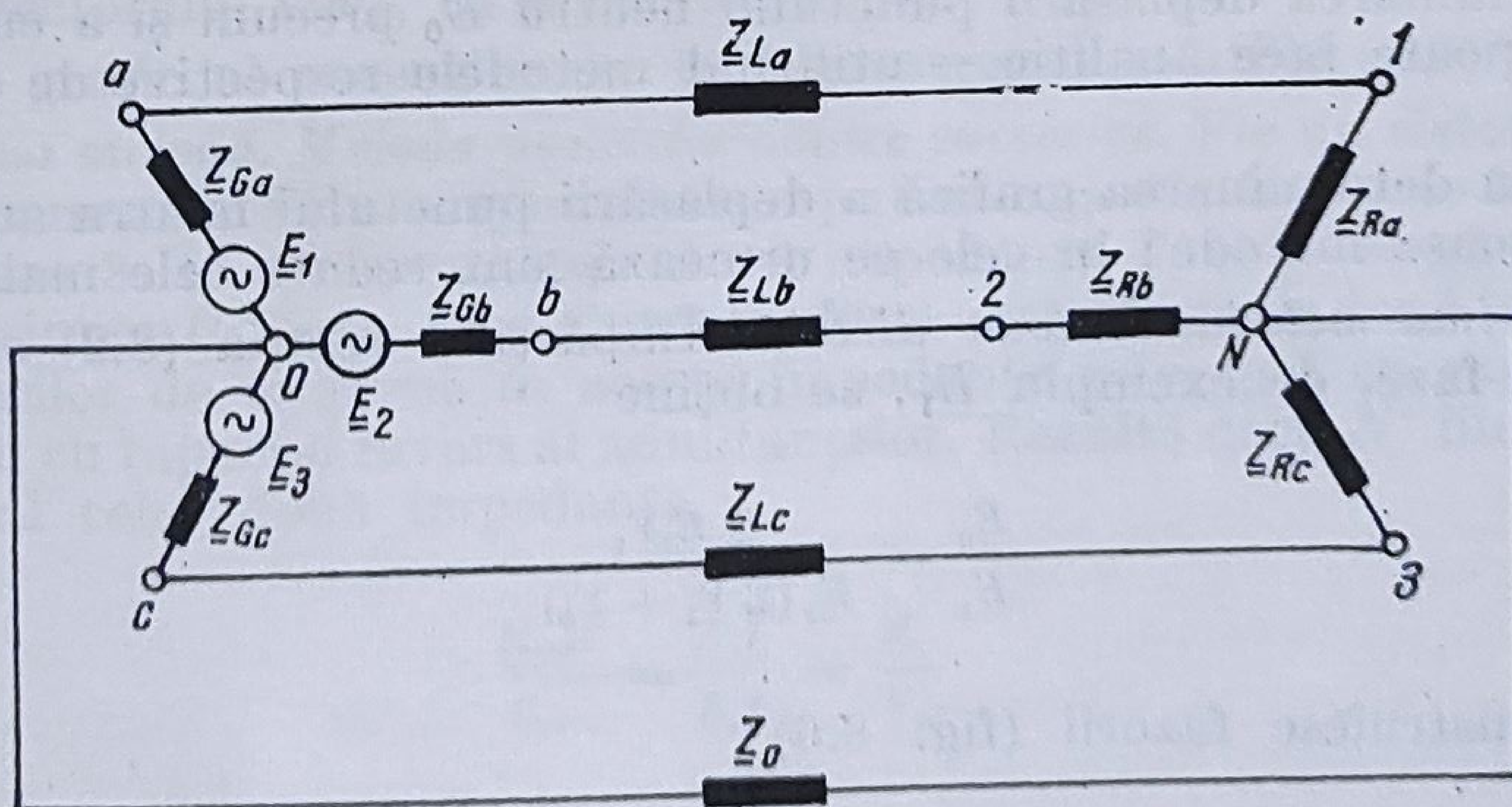


Fig. 8.5. Sistem trifazat complet cu conectare în stea.

de potenţial E_0; în cazul cînd aceste două puncte neutre sînt legate printr-un conductor, prin acesta va curge un curent şi căderea de tensiune în conductorul respectiv va fi egală tocmai cu această diferenţă de potenţial. Pe de altă parte,

cunoscînd această diferenţă de potenţial, se poate determina tensiunea la bornele sarcinii pe fiecare fază şi deci se pot determina curenţii căutaţi.

Fie $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ şi $\underline{Z}_3$ impedanţa totală a fiecărei faze, de la punctul neutru al generatorului la punctul neutru al receptorului, adică

$$\underline{Z} = Z_G + Z_L + Z_R$$

şi $\underline{Z}_0$ impedanţa conductorului neutru.

Pentru a găsi valoarea diferenţei de potenţial între cele două puncte, neutre, numită *deplasarea punctului neutru* al sarcinii faţă de punctul neutru al alternatorului, se aplică metoda perechilor de noduri. Se găseşte

$$\underline{E}_0(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0) = \underline{E}_1\underline{Y}_1 + \underline{E}_2\underline{Y}_2 + \underline{E}_3\underline{Y}_3,$$

de unde rezultă

$$\underline{E}_0 = \frac{\underline{E}_1\underline{Y}_1 + \underline{E}_2\underline{Y}_2 + \underline{E}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0}, \tag{8.2}$$

$\underline{Y}_i$ fiind admitanţele totale ale diverselor faze şi ale conductorului neutru.

Cunoscînd deplasarea punctului neutru al sarcinii faţă de punctul neutru al alternatorului, diverşii curenţi pe fază se determină cu ajutorul relaţiilor evidente

$$\underline{I}_k = (\underline{E}_k - \underline{E}_0)\,\underline{Y}_k \quad (k = 1,2,3), \tag{8.3}$$

iar curentul circulînd prin conductorul neutru cu relaţia

$$\underline{I}_0 = -\underline{E}_0\underline{Y}_0.$$

Determinarea deplasării punctului neutru E_0 precum şi a curenţilor respectivi se poate face analitic — utilizînd metodele respective de calcul — sau grafic.

Pentru determinarea grafică a deplasării punctului neutru au fost elaborate numeroase metode; în cele ce urmează sînt redate cele mai utilizate.

a) Prima metodă. Metoda directă. Împărţind relaţia (8.2) cu tensiunea pe una din faze, de exemplu $\underline{E}_1$, se obţine

$$\frac{\underline{E}_0}{\underline{E}_1} = \frac{\Sigma\,\underline{E}_1\underline{Y}_1}{\underline{E}_1(\Sigma\,\underline{Y}_1 + \underline{Y}_0)}. \tag{8.4}$$

Se construiesc fazorii (fig. 8.6)

$$\overline{OA} = \underline{E}_1\underline{Y}_1;\quad \overline{OB} = \underline{E}_2\underline{Y}_2;\quad \overline{OC} = \underline{E}_3\underline{Y}_3$$

şi se deduce fazorul

$$\overline{OD} = \Sigma\,\underline{E}_1\underline{Y}_1.$$

Se construiesc apoi fazorii

$$\overline{OA} = \underline{E}_1\underline{Y}_1, \quad \overline{OB}' = \underline{E}_1\underline{Y}_2, \quad \overline{OC}' = \underline{E}_1\underline{Y}_3, \quad \overline{OD}' = \underline{E}_1\underline{Y}_0$$

şi se deduce fazorul

$$\overline{OF} = \underline{E}_1(\Sigma\, \underline{Y}_1 + \underline{Y}_0).$$

Relaţia (8.3) se poate scrie

$$\frac{\underline{E}_0}{\underline{E}_1} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OF}},$$

ceea ce arată că triunghiul OE_1F este asemenea cu triunghiul OE_0D. Se poate determina acum în direcţie şi mărime fazorul $\underline{E}_0$. Pentru aceasta, se construieşte pe vectorul $\overline{OD}$, în punctul O, un unghi egal cu unghiul E_1OF şi în punctul D un unghi egal cu unghiul E_1FO. Punctul de intersecţie E_0 al acestor două direcţii dă vîrful fazorului $\underline{E}_0$, care se obţine astfel în mărime şi în direcţie. Aceasta este evident, triunghiurile OE_0D şi OE_1F fiind asemenea, avînd unghiurile egale.

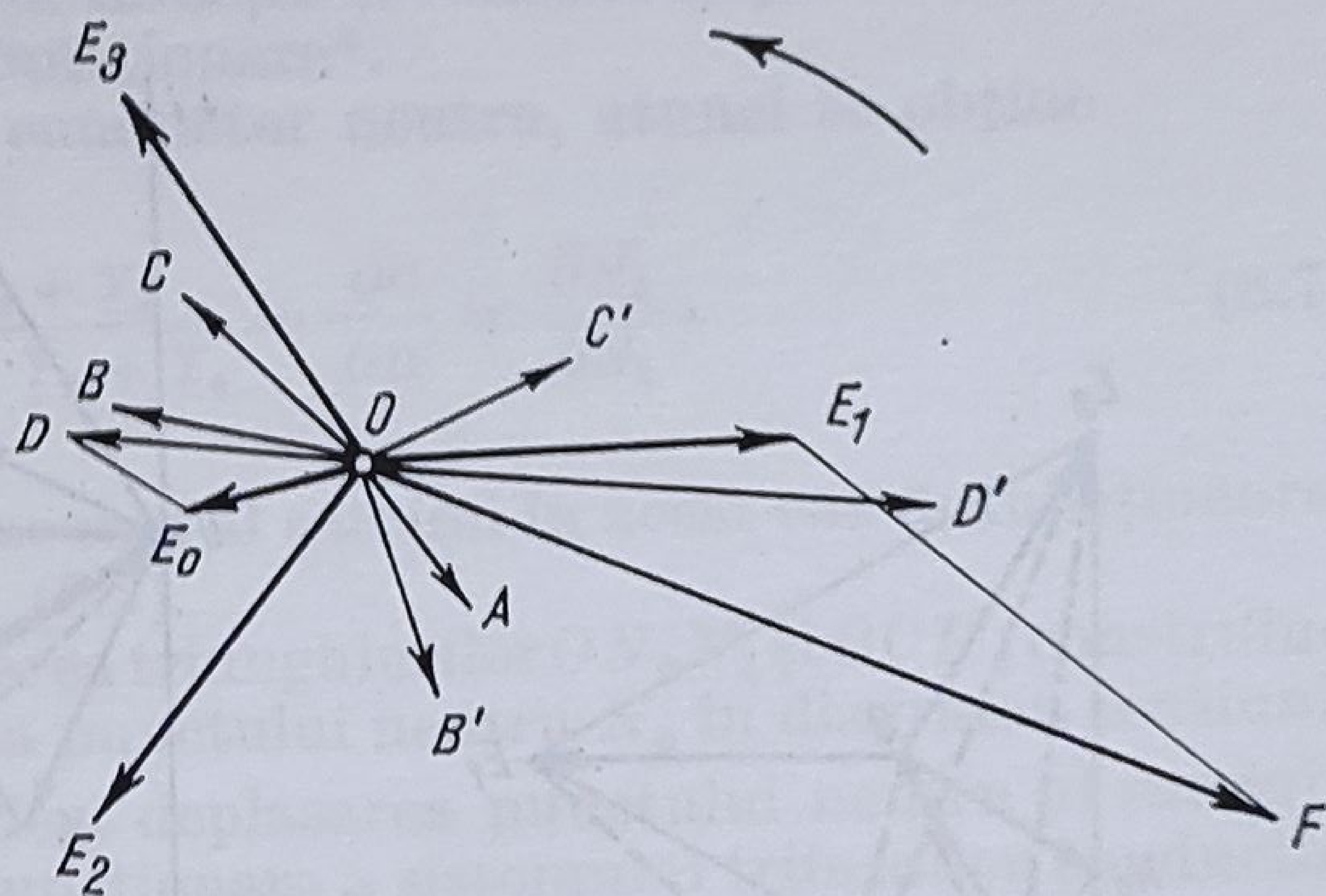


Fig. 8.6. Construirea grafică a fazorului $\underline{E}_0$ prin metoda directă.

Problema admite două soluţii din care numai una este valabilă şi anume, aceea în care sensul de rotire al fazorilor este acelaşi. Spre exemplu, în figura 8.6, dacă în triunghiul OE_1F vectorul $\overline{OF}$ este în urma vectorului $\overline{OE}_1$, atunci în triunghiul asemenea OE_0D vectorul $\overline{OD}$, ca şi omologul său $\overline{OF}$, trebuie să fie în urma vectorului $\overline{OE}_0$, ca şi omologul său $\overline{OE}_1$.

Calculul grafic al curenţilor se face construind relaţiile (8.3).

b) A doua metodă. Metoda punctelor neutre succesive. Fie un sistem trifazat fără conductor neutru. Se presupune la început că una din faze este întreruptă, de exemplu faza 3. În acest caz, cele două impedanţe $\underline{Z}_1$ şi $\underline{Z}_2$ se găsesc legate în serie cu tensiunea $\underline{U}_{12}$ între faze. Curentul fiind acelaşi în cele două impedanţe, raportul căderilor de tensiune în aceste impedanţe este egal cu raportul impedanţelor sau cu raportul invers al admitanţelor. Rezultă deci, N' fiind punctul de legătură al celor două impedanţe,

$$\frac{\underline{E}_{2N'}}{\underline{E}_{N'1}} = \frac{\underline{Z}_2\underline{I}}{\underline{Z}_1\underline{I}} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2}$$

unde $\underline{E}_{2N}$, reprezintă căderea de tensiune în impedanţa $\underline{Z}_2$ şi $\underline{E}_{N'1}$ aceea în impedanţa $\underline{Z}_1$.

Aplicînd acestei relaţii o proprietate a proporţiilor, rezultă

$$\frac{\underline{E}_{2N'}}{\underline{E}_{2N'} + \underline{E}_{N'1}} = \frac{\underline{E}_{2N'}}{\underline{E}_{12}} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}, \tag{8.5}$$

căci, în virtutea celei de a II-a teoreme a lui KIRCHHOFF,

$$\underline{E}_{2N'} + \underline{E}_{N'1} = \underline{E}_{12}$$

Relația (8.5) arată că triunghiul $E_1N'E_2$, format din fazorii reprezentînd căderile de tensiune în cele două impedanțe și de tensiunea la bornele lor, este asemenea cu triunghiul OAB format din admitanțele corespunzătoare și

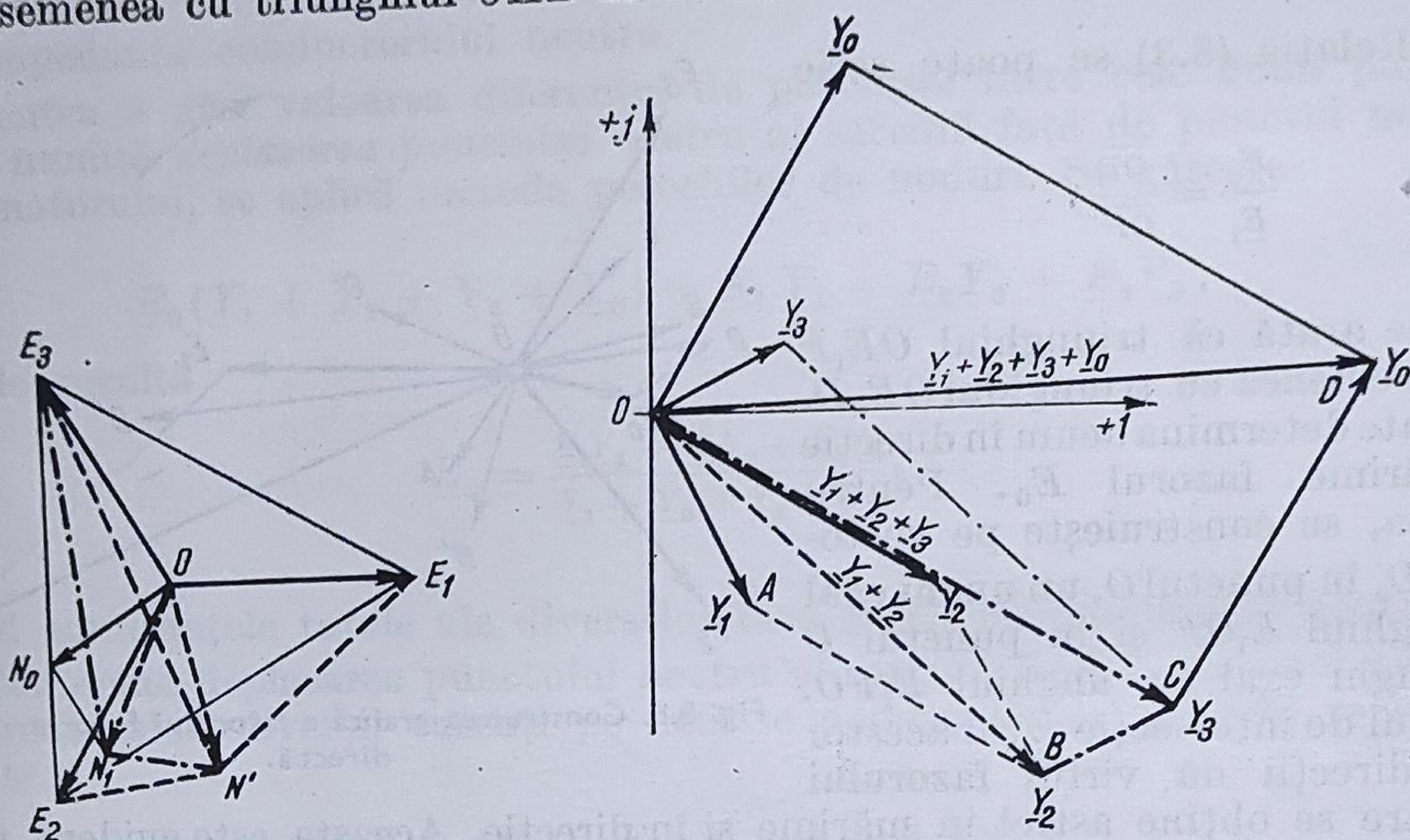


Fig. 8.7. Construirea grafică a fazorului $\underline{E}_0$ prin metoda punctelor neutre succesive.

suma lor (fig. 8.7). Construind deci triunghiul $E_1N'E_2$ în diagrama tensiunilor se găsește poziția punctului N' și deci fazorul $\overline{ON'} = \underline{E}_{N'}$, care reprezintă deplasarea punctului neutru al sarcinii față de punctul neutru al sursei în această situație de funcționare a sistemului*.

Valoarea acestei tensiuni se obține din relația (8.2) în care se face $\underline{Y}_0 = 0$ și $\underline{Y}_3 = 0$ se găsește

$$\underline{E}_{N'} = \frac{\underline{E}_1\underline{Y}_1 + \underline{E}_2\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}.$$

Diferența de potențial între punctul neutru N' al sarcinii și faza întreruptă este

$$\overline{N'E}_2 = \underline{E}_3 - \underline{E}_{N'} = \underline{E}_3 - \frac{\underline{E}_1\underline{Y}_1 + \underline{E}_2\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{\underline{E}_3(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) - (\underline{E}_1\underline{Y}_1 + \underline{E}_2\underline{Y}_2)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}. \quad (8.6)$$

Să presupunem acum că faza 3 nu este întreruptă ; în acest caz deplasarea punctului neutru al sarcinii este dată de relația (8.2) în care $\underline{Y}_0 = 0$ și diferența de potențial între punctul neutru al sarcinii și această fază 3 este :

$$\overline{N_1E}_3 = \underline{E}_3 - \underline{E}_{N1} = \underline{E}_3 - \frac{\underline{E}_1\underline{Y}_1 + \underline{E}_2\underline{Y}_2 + \underline{E}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{\underline{E}_3(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) - (\underline{E}_1\underline{Y}_1 + \underline{E}_2\underline{Y}_2)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

* Construcția se face luînd $\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ în direcția $\underline{E}_2\,\underline{E}_1$.

Împărţind această relaţie prin relaţia (8.6) se obţine

$$\frac{\underline{E}_3 - \underline{E}_{N_1}}{\underline{E}_3 - \underline{E}_{N'}} = \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{OB}{OC} = \frac{\overline{N_1 E_3}}{\overline{N' E_3}}$$

care arată că triunghiul E_3N_1N' este asemenea cu triunghiul OBC. Construind această relaţie se găseşte poziţia punctului neutru N_1 în diagrama tensiunilor şi fazorul $\overline{ON_1} = \underline{E}_{N1}$ va reprezenta în direcţie şi mărime deplasarea punctului neutru al sarcinii în acest caz de funcţionare*.

Dacă sistemul trifazat are un conductor neutru, atunci se obţine

$$\frac{\underline{E}_{N_0}}{\underline{E}_{N_1}} = \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0} = \frac{OC}{OD} = \frac{\overline{ON_0}}{\overline{ON_1}}, \tag{8.7}$$

unde $\underline{E}_{N_0}$ este deplasarea punctului neutru al sarcinii în acest caz de funcţionare, valoarea lui fiind dată de relaţia (8.2).

În acest caz, vom avea asemănarea triunghiurilor ON_0N_1 şi OCD; construind deci relaţia (8.7) se determină poziţia punctului neutru N_0 în diagrama tensiunilor. Fazorul $\overline{ON}_0 = \underline{E}_0$ reprezintă deci deplasarea punctului neutru al sarcinii, în direcţie şi mărime, în situaţia de funcţionare a sistemului trifazat cu conductor neutru.

OBSERVAŢIE: Construcţia diverşilor fazori (sume, fazori omologi) trebuie să se facă ţinîndu-se seama de ordinea indicată în formule şi de succesiunea lor în diagramă. Nerespectarea acestor reguli conduce la rezultate eronate. Astfel, de exemplu, construcţia relaţiei (8.5) trebuie făcută în acelaşi sens cu triunghiul OAB, luînd fazorul $\overline{E_2E_1}$ omolog fazorului $\overline{OB}$, iar relaţia (8.7) în acelaşi sens cu triunghiul OBC, luînd fazorul $\overline{E_3N'}$ omolog cu fazorul $\overline{OC}$ etc.

c) *A treia metodă grafică. Metoda centrului de greutate* (KENNELLY). Fără a se dăuna cu nimic generalităţii problemei, fie un sistem trifazat oarecare, fără conductor neutru.

Se construieşte diagrama fazorială a celor trei forţe electromotoare (fig. 8.8); ele vor fi reprezentate prin fazorii $\overline{OE}_{10}$, $\overline{OE}_{20}$ şi $\overline{OE}_{30}$.

Punctele E_{10}, E_{20} şi E_{30} dau tensiunea la bornele generatorului la mersul în gol.

Fie G_1, B_1, G_2, B_2 şi G_3, B_3 conductanţele şi susceptanţele totale ale fiecărei faze, cuprinzînd deci conductanţele şi susceptanţele generatorului, liniei şi sarcinii. Se construiesc la extremităţile fazorilor, reprezentînd tensiunile pe cele trei faze, drepte a căror direcţii au argumente egale cu argumentele impedanţelor corespunzătoare fiecărei faze şi pe aceste drepte se ia modulul admitanţelor respective, care se descompun în cele două componente ale lor, G şi B (fig. 8.8). În triunghiul admitanţei, unghiul dintre ipotenuza Y şi susceptanţa B reprezintă defazajul dintre curent şi tensiune pe faza respectivă. Într-adevăr, acest defazaj este definit prin relaţia (4.63), circuitul fiecărei faze fiind un circuit serie; se poate scrie deci,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{G}{B}.$$

* Construcţia se face luînd suma $\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$ în direcţia $\overline{E_3N}$.

Să presupunem acum, problema rezolvată (fig. 8.8), fie deci N punctul neutru al sarcinii, căutat. Tensiunile pe fază vor fi reprezentate, în acest caz, prin fazorii $\overline{NE}_{10}$, $\overline{NE}_{20}$ și NE_{30}; curenții respectivi vor fi defazați față de tensiunile corespunzătoare cu unghiurile φ_k ($k = 1, 2, 3$).

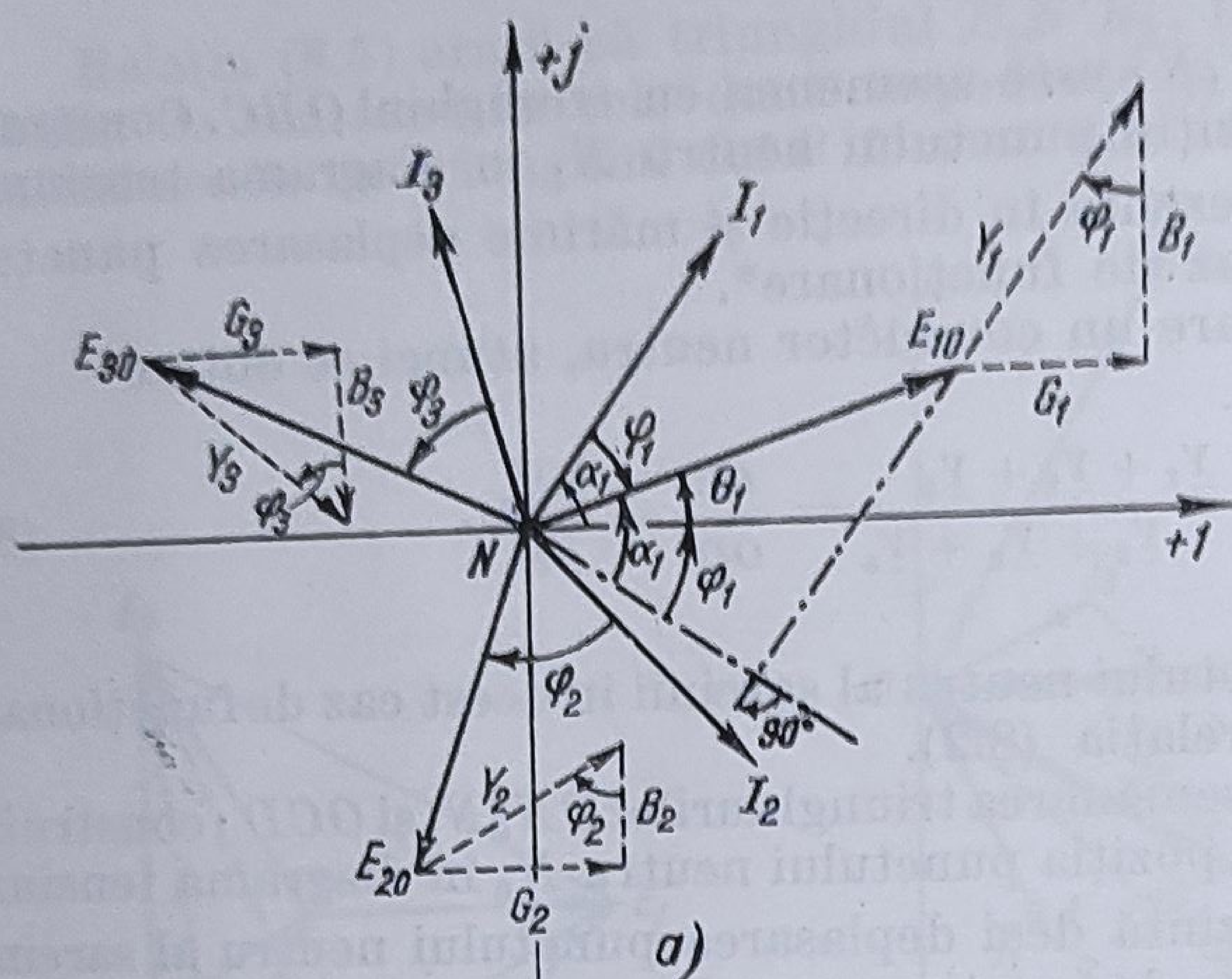
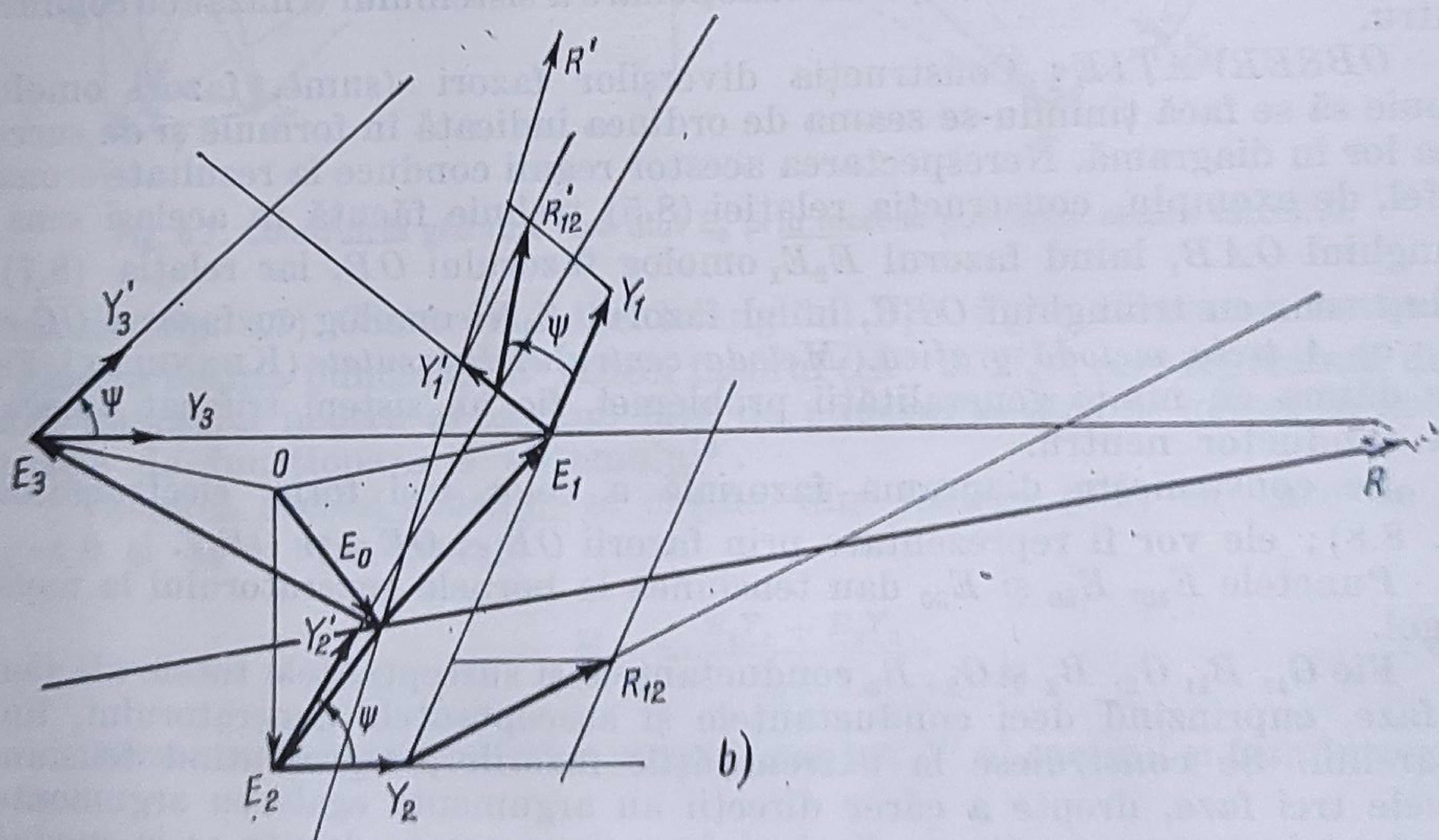


Fig. 8.8. Construirea grafică a fazorului $\underline{E}_0$ prin metoda centrului de greutate.

a) Diagrama fazorială a tensiunilor, admitanțelor și curenților; b) Construirea grafică a fazorului $\underline{E}_0$.



Sistemul dat fiind presupus fără conductor neutru, în conformitate cu teorema I a lui KIRCHHOFF, în punctul neutru al sarcinilor, suma curenților de pe cele trei faze este nulă.

Să examinăm, de exemplu, situația de pe faza 1. Tensiunea acestei faze este $\underline{E}_1$, iar curentul corespunzător $\underline{I}_1$ este defazat cu unghiul φ_1 față de tensiune. Valoarea instantanee a acestui curent este

$$i_1 = \sqrt{2}\ I_1 \cos \alpha_1 = \sqrt{2}\ Y_1 E_1 \cos \alpha_1, \tag{8.8}$$

Y_1 fiind modulul admitanței fazei respective.

Ducînd normala din N pe Y_1, aceasta va face cu fazorul $\overline{NE}_{10}$, același unghi α_1. Într-adevăr, este ușor de văzut pe figura 8.8,*a* că*

$$\sphericalangle\ (\overline{NE}_{10}, \overline{NA}) = \varphi_1 + \theta_1 = \alpha_1.$$

Distanța $\overline{NA}$, de la punctul N la direcția pe care a fost construită admitanța Y_1 (direcția impedanței Z_1) va fi deci $\overline{NE}_{10} \cos \alpha_1$. Dacă am asemui vectorul Y_1, avînd modulul egal cu *modulul admitanței* fazei respective și argumentul egal cu *argumentul impedanței* aceleași faze, cu o forță, atunci momentul acestei forțe în raport cu punctul N, cu aproximația factorului constant $\sqrt{2}$, este dat chiar de expresia (8.8) a valorii instantanee i a curentului $\underline{I}_1$.

Condiția ca suma curenților în punctul N să fie în orice moment nulă poate fi enunțată astfel: *Suma momentelor forțelor* $\underline{Y}$ *în raport cu punctul* N *trebuie să fie nulă.* Această condiție este satisfăcută dacă punctul N se găsește pe rezultanta forțelor $\underline{Y}$.

Dacă se presupune că sistemul $OE_{10}E_{20}E_{30}$ este un sistem rigid, nedeformabil, atunci rotind forțele Y, toate cu același unghi și în același sens și rezultanta lor se va roti cu același unghi. Punctul de rotire al rezultantei este punctul neutru căutat, deoarece pentru acest punct suma momentelor va fi nulă.

De aici rezultă următoarea metodă grafică de determinare a punctului neutru al sistemului (fig. 8.8,*b*).

Se construiesc cele trei forțe electromotoare ale sursei, corespunzătoare mersului în gol. În vîrfurile acestora se construiesc, pe *direcții avînd argumente egale cu cele ale impedanțelor*, admitanțele totale ale circuitului, corespunzătoare fiecărei faze. Considerîndu-se aceste admitanțe ca niște forțe, se face rezultanta lor. Se rotesc apoi admitanțele, toate în același sens și cu același unghi ψ și se face din nou rezultanta. Punctul de întîlnire a celor două rezultate dă punctul neutru N căutat.

Unind punctul N cu cele trei vîrfuri ale fazorilor de tensiune la mersul în gol, se găsesc tensiunile pe cele trei faze, în mărime și în direcție și se pot calcula astfel curenții căutați.

8.2.2.4. **Calculul curenților într-un sistem trifazat în cazul cînd se cunosc tensiunile de linie la bornele receptoarelor legate în stea.** În practică nu se cunosc forțele electromotoare ale generatorului care alimentează rețeaua trifazată, ci numai tensiunile de linie la bornele receptorului.

Cele trei tensiuni între faze formează un triunghi oarecare. Suma lor este întotdeauna nulă.

Pentru a putea determina curenții absorbiți de cele trei impedanțe care reprezintă sarcina receptorului, este necesar să se cunoască tensiunea pe fază la bornele fiecărei impedanțe.

Pentru a determina aceste tensiuni, să presupunem mai întîi că cele trei sarcini sînt egale. Fie $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$ și $\underline{V}_3$ cele trei tensiuni pe fază la bornele sarcinii; în acest caz suma curenților în punctul neutru al sarcinii este nulă, adică

$$\frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}} + \frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}} + \frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}} = 0$$

---

* Demonstrația este aceeași și dacă curentul $\underline{I}_1$ ar fi defazat în urma tensiunii $\overline{NE}_{10}$. În acest caz am avea:

$$\sphericalangle\ (\overline{NE}_{10}, \overline{NA}) = \varphi_1 - \theta_1 = \alpha_1$$

de unde rezultă

$$\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 = 0$$

ceea ce înseamnă că, în acest caz, punctul neutru al sarcinilor se găsește în centrul de greutate al triunghiului tensiunilor între faze (fig. 8.9). Se obține astfel,

$$\underline{V}_1 = \underline{U}_3 + \underline{V}_2 \text{ și } \underline{V}_1 = -\underline{U}_2 + \underline{V}_3$$

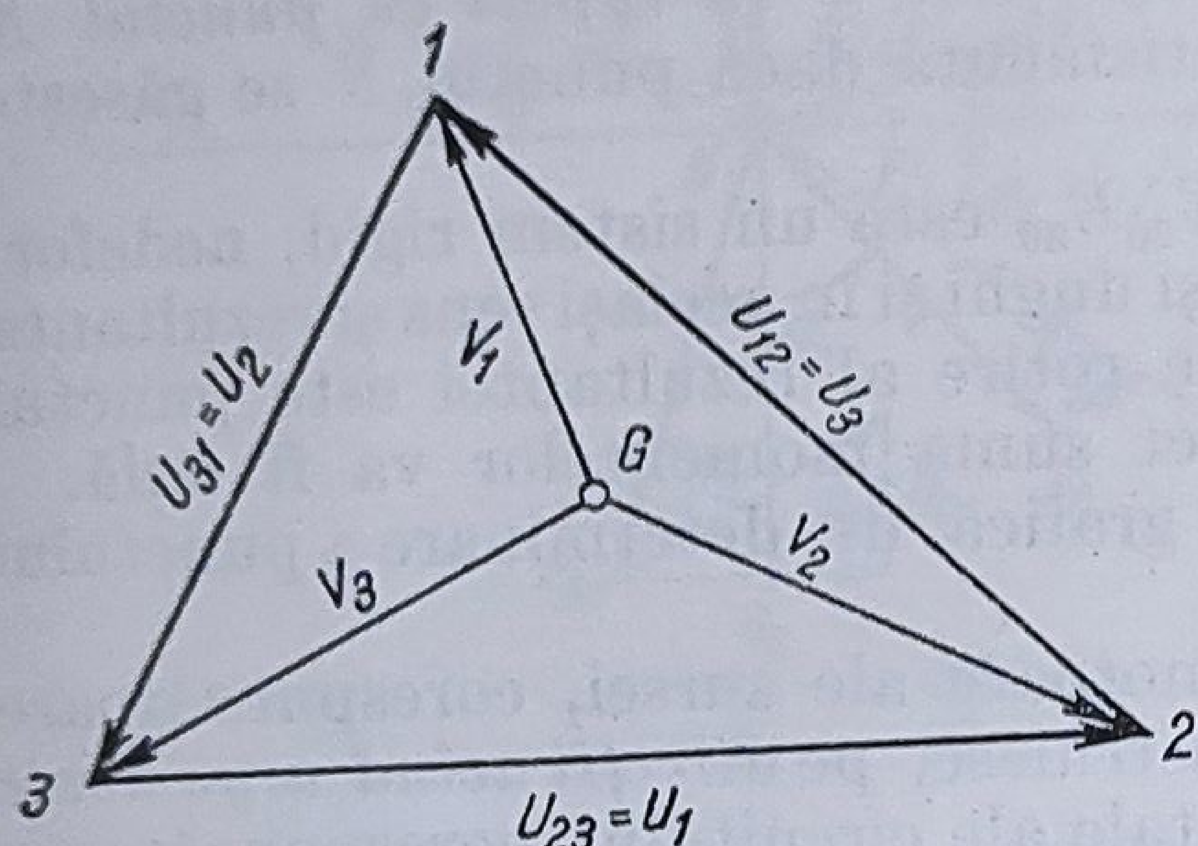


Fig. 8.9. Diagrama tensiunilor în cazul unei sarcini trifazate simetrice.

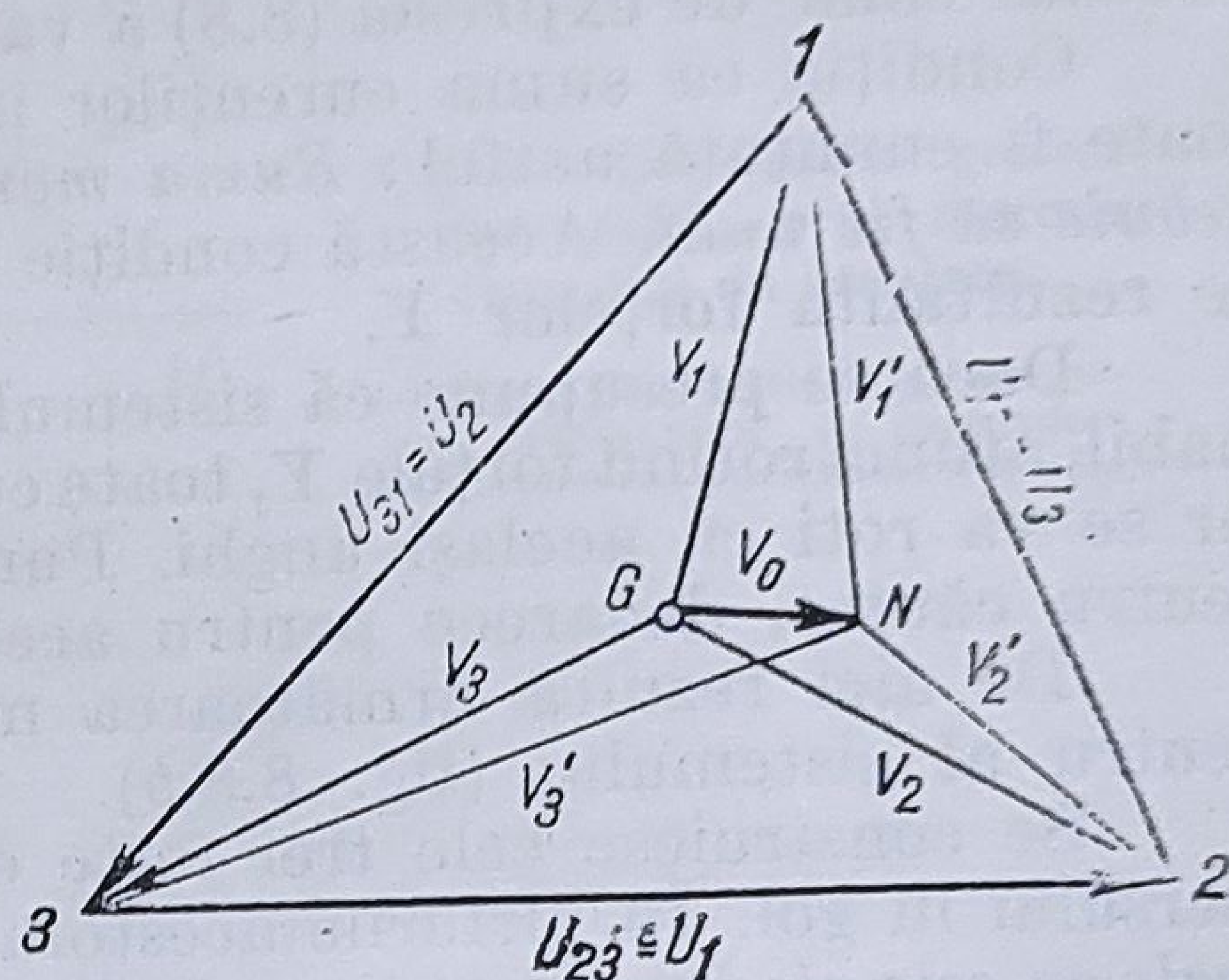


Fig. 8.10. Diagrama tensiunilor în cazul unei sarcini trifazate nesimetrice.

de unde rezultă

$$\underline{V}_1 = \frac{1}{3}(\underline{U}_3 - \underline{U}_2).$$

Analog se găsește

$$\underline{V}_2 = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 - \underline{U}_3);$$

$$\underline{V}_3 = \frac{1}{3}(\underline{U}_2 - \underline{U}_1).$$

Se presupune acum că cele trei sarcini nu mai sînt egale. În acest caz punctul neutru N al sarcinii nu mai coincide cu centrul de greutate al triunghiului tensiunilor între faze și va fi într-un punct oarecare din planul acestui triunghi. Rezultă dar, că între punctul neutru N al sarcinii simetrice și dezechilibrate și punctul neutru G al unei sarcini simetrice și echilibrate există o anumită diferență de potențial $\underline{V}_0 = \overline{GN}$. Fie $\underline{V}_1'$, $\underline{V}_2'$, $\underline{V}_3'$ tensiunile pe fază necunoscute ale sistemului cu încărcare nesimetrică și dezechilibrată și $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$ tensiunile pe fază existente în cazul unei încărcări simetrice și echilibrate. Din figura 8.10 rezultă:

$$\underline{V}_1' = \underline{V}_1 - \underline{V}_0;\ \underline{V}_2' = \underline{V}_2 - \underline{V}_0;\ \underline{V}_3' = \underline{V}_3 - \underline{V}_0.$$

Dacă se înmulţeşte fiecare din aceste tensiuni cu admitanţa respectivă $\underline{Y}$, se obţin cei trei curenţi din fazele respective:

$$\underline{I}_1 = \underline{V}_1' \underline{Y}_1 = (\underline{V}_1 - \underline{V}_0)\ \underline{Y}_1;$$

$$\underline{I}_2 = \underline{V}_2' \underline{Y}_2 = (\underline{V}_2 - \underline{V}_0)\ \underline{Y}_2;$$

$$\underline{I}_3 = \underline{V}_3' \underline{Y}_3 = (\underline{V}_3 - \underline{V}_0)\ \underline{Y}_3. \tag{8.9}$$

Adunînd aceste trei ecuaţii şi ţinînd seama că $\Sigma\ \underline{I} = 0$, se obţine

$$\underline{V}_0\ (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) = \underline{V}_1\underline{Y}_1 + \underline{V}_2\underline{Y}_2 + \underline{V}_3\underline{Y}_3$$

de unde, rezultă

$$\underline{V}_0 = \frac{\underline{V}_1\underline{Y}_1 + \underline{V}_2\underline{Y}_2 + \underline{V}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}.$$

Înlocuind această valoare în ecuaţiile (8.9), se găsesc curenţii căutaţi. Calculul se poate face fie analitic, fie grafic, aşa cum s-a arătat mai înainte.

8.2.2.6. **Exemplu de aplicaţie a metodei.** O linie electrică trifazată, simetrică şi echilibrată, are capacitatea între fiecare fază şi pămînt egală cu 3,18 μ F. La un moment dat, faza 3 se pune la pămînt printr-o rezistenţă de 1000Ω. Ştiind că tensiunea fiecărei faze faţă de pămînt, la funcţionarea normală, este de 17,3 kV, 50 Hz, se cere:

— tensiunea fiecărei faze faţă de pămînt, după punerea fazei 3 la pămînt;

— curentul ce se scurge prin rezistenţa de punere la pămînt;

— inductanţa pe care trebuie să o aibă o bobină de stingere, astfel încît curentul de punere la pămînt să fie egal cu zero.

Admitanţele sistemului sînt

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \mathrm{j}C\omega \quad \text{şi} \quad \underline{Y}_3 = G + \mathrm{j}C\,\omega$$

în care $G = 1/R$. Calculînd deplasarea punctului neutru, ţinînd seama că $\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 = 0$, se găseşte:

$$\underline{V}_0 = \frac{\Sigma \underline{Y}_1\underline{V}_1}{\Sigma \underline{Y}_1} = \frac{G}{G + \mathrm{j}\,3C\omega}\ \underline{V}_3 = 3{,}64 + \mathrm{j}4{,}1\ \text{kV};$$

tensiunea fiecărei faze, după punerea la pămînt a fazei 3, este:

$$\underline{V}_1' = \underline{V}_1 - \underline{V}_0 = \quad 13{,}66 - \mathrm{j}4{,}1 = 14{,}3\ \underline{|343°18'}\ \text{kV}$$

$$\underline{V}_2' = \underline{V}_2 - \underline{V}_0 = -12{,}3 - \mathrm{j}19{,}1 = 22{,}7\ \underline{|237°10'}\ \text{kV},$$

$$\underline{V}_3' = \underline{V}_3 - \underline{V}_0 = \quad 12{,}3 + \mathrm{j}10{,}9 = 16{,}4\ \underline{|138°28'}\ \text{kV}.$$

Curentul în rezistenţa de punere la pămînt este:

$$\underline{I}_g = G\underline{V}_3' = \frac{j\,3\,C\omega\,G}{G + j\,3C\omega}\underline{V}_3 = -\,12{,}3 + j\,10{,}9 = 16{,}4\,|\underline{138^0 28'}\;\text{A}.$$

Bobina de stingere echivalează cu un conductor neutru de admitanţă $\underline{Y}_0 = -\,j/L\,\omega$. În acest caz,

$$\underline{V}_0'' = \frac{\Sigma\,\underline{Y}_1\underline{V}_1}{\underline{Y}_0 + \Sigma\underline{Y}_1} = \frac{G}{G + j\left(3C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)}\underline{V}_3$$

şi deci,

$$\underline{V}_3'' = \underline{V}_3 - \underline{V}_0'' = \frac{j\left(3\,C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)}{G + j\left(3C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)}\underline{V}_3.$$

Cum $\underline{I}_g = G\,\underline{V}_3''$, pentru ca $\underline{I}_g = 0$, rezultă că

$$3\,C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0$$

de unde se deduce valoarea inductanţei bobinei de stingere:

$$L = \frac{1}{3C\omega^2} = 1{,}06\;\text{H}.$$

8.3. SISTEME POLIFAZATE DEZECHILIBRATE. CALCULUL CU AJUTORUL TEORIEI COORDONATELOR SIMETRICE

8.3.1. GENERALITĂŢI

Într-un sistem polifazat dezechilibrat, curenţii, tensiunile, impedanţele, admitanţele etc. fiecărei faze pot fi reprezentate prin fazori. Totalitatea fazorilor reprezentînd mărimile de aceeaşi natură ale diferitelor faze formează un sistem de fazori nesimetrici.

Astfel, într-un circuit polifazat dezechilibrat cu q faze, curenţii din diferitele faze nu vor avea aceeaşi intensitate şi unghiul de defazaj între ei va fi diferit de $2\pi/q$; fazorii reprezentativi ai acestor curenţi vor forma un sistem de fazori nesimetric.

Pentru a se putea utiliza în sistemele polifazate dezechilibrate simetria care conduce la efectuarea studiului acestora numai pe o singură fază, luată ca fază de referinţă, extinzîndu-se apoi rezultatele la celelalte faze, s-a creat teoria *coordonatelor simetrice*. Conform acestei teorii, un sistem polifazat dezechilibrat poate fi considerat ca rezultanta suprapunerii unor sisteme polifazate simetrice sau echilibrate. De aici, rezultă că orice sistem de fazori polifazat

nesimetric poate fi descompus într-un număr oarecare de sisteme de fazori polifazați, simetrice. Această descompunere trebuie înțeleasă în sensul, că fiecare din fazorii sistemului nesimetric dat este rezultanta fazorilor de același indice, ai sistemelor simetrice componente.

Sistemele de fazori simetrice, în care se poate descompune un sistem nesimetric dat, sînt *coordonatele simetrice* ale acestui sistem.

Fazorii de același indice ai sistemelor simetrice, în care se descompune fazorul principal corespunzător al sistemului nesimetric dat, sînt *componentele simetrice* ale acestui fazor. Componentele simetrice sînt fazorii care formează coordonatele simetrice ale unui sistem nesimetric dat.

Fără a diminua generalitatea problemei, se va trata în cele ce urmează numai sistemul trifazat. Generalizarea nu prezintă nici o dificultate și pentru documentare îndrumăm cititorul către lucrările originale respective*.

8.3.2. DESCOMPUNEREA ÎN COORDONATE SIMETRICE A UNUI SISTEM TRIFAZAT OARECARE. (TEOREMA LUI STOKVIS-FORTESCUE)

Un sistem trifazat de fazori oarecare poate fi descompus în trei sisteme trifazate, dintre care două sisteme simetrice de succesiune diferită, unul direct și altul invers și unul homopolar.

Această descompunere trebuie să fie înțeleasă în sensul că un fazor oarecare $\underline{V}_n$ al sistemului dat este rezultanta fazorilor de indice n ai sistemelor simetrice componente.

Fie

$$\mathrm{S}\ (\underline{V}) = (\underline{V}_1,\ \underline{V}_2,\ \underline{V}_3)$$

sistemul de fazori dat. Dacă se notează cu $\underline{V}_d$ primul fazor (fazorul principal) al sistemului direct S_d, cu $\underline{V}_i$ primul fazor (fazorul principal) al sistemului invers S_i și cu $\underline{V}_h$ fazorii sistemului homopolar, atunci

$$S_d\ (\underline{V}_d) = (\underline{V}_d,\ \mathrm{a}^2\underline{V}_d,\ \mathrm{a}\underline{V}_d)$$

$$S_i\ (\underline{V}_i) = (\underline{V}_i,\ \mathrm{a}\underline{V}_i,\ \mathrm{a}^2\underline{V}_i)$$

$$S_h\ (\underline{V}_h) = (\underline{V}_h,\ \underline{V}_h,\ \underline{V}_h)$$

și, în virtutea teoremei de mai sus, trebuie ca

$$S = S_h + S_d + S_i$$

și pentru fiecare fazor în parte

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= \underline{V}_h + \underline{V}_d + \underline{V}_i \\ \underline{V}_2 &= \underline{V}_h + \mathrm{a}^2\underline{V}_d + \mathrm{a}\underline{V}_i \\ \underline{V}_3 &= \underline{V}_h + \mathrm{a}\underline{V}_d + \mathrm{a}^2\underline{V}_i \end{aligned} \tag{8.10}$$

a fiind operatorul de rotație cu 120°.

* Vezi [140, 256].

Sistemele de fazori S_h, S_d și S_i se numesc *coordonatele simetrice* ale sistemului S dat, iar fazorii $\underline{V}_h$, $\underline{V}_d$ și $\underline{V}_i$, care formează aceste sisteme, se numesc *componentele simetrice* ale fazorilor dați.

Pentru a demonstra teorema lui STOKVIS-FORTESCUE este suficient a observa că sistemul de ecuații (8.10) este un sistem de ecuații liniare care conține trei ecuații cu trei necunoscute, ale cărui soluții sînt unice și bine definite.

Pentru a obține componenta $\underline{V}_h$, se adună cele trei ecuații. Ținînd seama de relație

$$1 + a + a^2 = 0$$

se obține

$$\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 = 3\ \underline{V}_h,$$

de unde rezultă

$$\underline{V}_h = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3). \tag{8.11}$$

Pentru a se obține componenta directă $\underline{V}_d$, se înmulțește a doua ecuație a sistemului (8.10) cu a și a treia ecuație cu a^2 și se adună. Se găsește

$$\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3 = 3\ \underline{V}_d$$

și rezultă

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3). \tag{8.12}$$

În sfîrșit, pentru a se obține componenta inversă $\underline{V}_i$, se înmulțește a doua ecuație a sistemului (8.12) cu a^2 și a treia ecuație cu a și se adună. Se găsește

$$\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2 + a\underline{V}_3 = 3\ \underline{V}_i$$

de unde rezultă

$$\underline{V}_i = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2 + a\underline{V}_3). \tag{8.13}$$

Sistemul de ecuații (8.10) fiind liniar și neputînd da decît o singură valoare pentru fazorii $\underline{V}_h$, $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$, rădăcinile acestui sistem, rezultă că *descompunerea unui sistem de fazori trifazat oarecare în coordonatele sale simetrice nu poate fi făcută decît într-un singur mod.*

OBSERVAȚII: 1. În această descompunere se poate întîmpla ca una din componentele simetrice să fie nulă, ceea ce înseamnă că numărul de componente simetrice poate să fie inferior numărului de fazori al sistemului. În particular, componenta homopolară poate fi nulă, ceea ce se întîmplă atunci cînd rezultanta sistemului de fazori dat este nulă, după cum se poate vedea ușor din relația (8.11). Aceasta corespunde situației cînd sistemul polifazat nu are conductor neutru.

Un sistem de fazori la care componenta homopolară este nulă se numeşte un *sistem pur*, spre deosebire de sistemul de fazori la care această componentă nu este nulă şi care se numeşte *impur*.

2. Se poate întîmpla de asemenea ca unul din fazorii sistemului de fazori nesimetric dat să fie nul. Rezultă că numărul componentelor simetrice poate fi superior numărului de fazori daţi.

8.3.3. REALITATEA FIZICĂ A COMPONENTELOR SIMETRICE ALE UNUI SISTEM TRIFAZAT OARECARE

În cazul cînd un sistem polifazat oarecare reprezintă un sistem de curenţi sau tensiuni, descompunerea în componentele simetrice *nu este numai un artificiu de calcul, ci corespunde unei realităţi fizice bine definite.* Componentele simetrice ale unui sistem dezechilibrat de curent sau de tensiune pot fi măsurate direct şi independent unele de altele; fiecare din ele se comportă în mod diferit decît celelalte în raport cu constituţia reţelei electrice şi în raport cu natura aparatelor care intră în consideraţie; de exemplu, componenta directă este aceea care produce în armăturile motoarelor cîmpuri învîrtitoare în sensul direct şi deci cuplul util; componenta inversă produce numai cîmpuri care dau naştere la cupluri de frînare; în sfîrşit, componenta homopolară este aceea care intervine în toate cazurile de interferenţă între liniile de transmitere a energiei electrice şi cele de telecomunicaţii. Componentelor simetrice de acelaşi fel de curent şi de tensiune le corespund componente simetrice de putere, care sînt direct măsurabile şi care se manifestă în moduri diferite. În particular, *componenta directă de putere* îşi are sursa chiar în alternatorul sincron sau asincron, pe cînd *componentele inversă* şi *homopolară* sînt produse la locul de dezechilibru şi se îndreaptă către elementele echilibrate ale reţelei, fie că sînt generatoare, fie că sînt receptoare de putere normală.

8.3.4. TEOREME PRIVIND COORDONATELE SIMETRICE

8.3.4.1. **Sisteme de fazori cu vîrfuri comune.** În problemele ce apar în sistemele trifazate, sînt numeroase cazurile cînd sistemele de fazori reprezentativi au vîrfuri comune, originile putînd fi oarecare. Astfel, tensiunea la bornele generatorului şi tensiunea la bornele receptorului, alimentată de acest generator, pot fi reprezentate prin sisteme avînd aceleaşi vîrfuri. Componentele simetrice ale acestor sisteme de fazori se bucură de anumite proprietăţi foarte utile în rezolvarea problemelor corespunzătoare. Una dintre aceste proprietăţi este redată în următoarea

Teoremă: *Două sisteme de fazori trifazaţi oarecare, care au vîrfuri comune şi origini diferite, au aceleaşi componente directă şi inversă iar componentele homopolare diferă prin vectorul care uneşte cele două origini.*

Fie sistemele de fazori (fig. 8.11)

$$S_0\ (\underline{V}) = (\underline{V}_1,\ \underline{V}_2,\ \underline{V}_3)$$

$$S_0\ (\underline{V}') = (\underline{V}'_1,\ \underline{V}'_2,\ \underline{V}'_3)$$

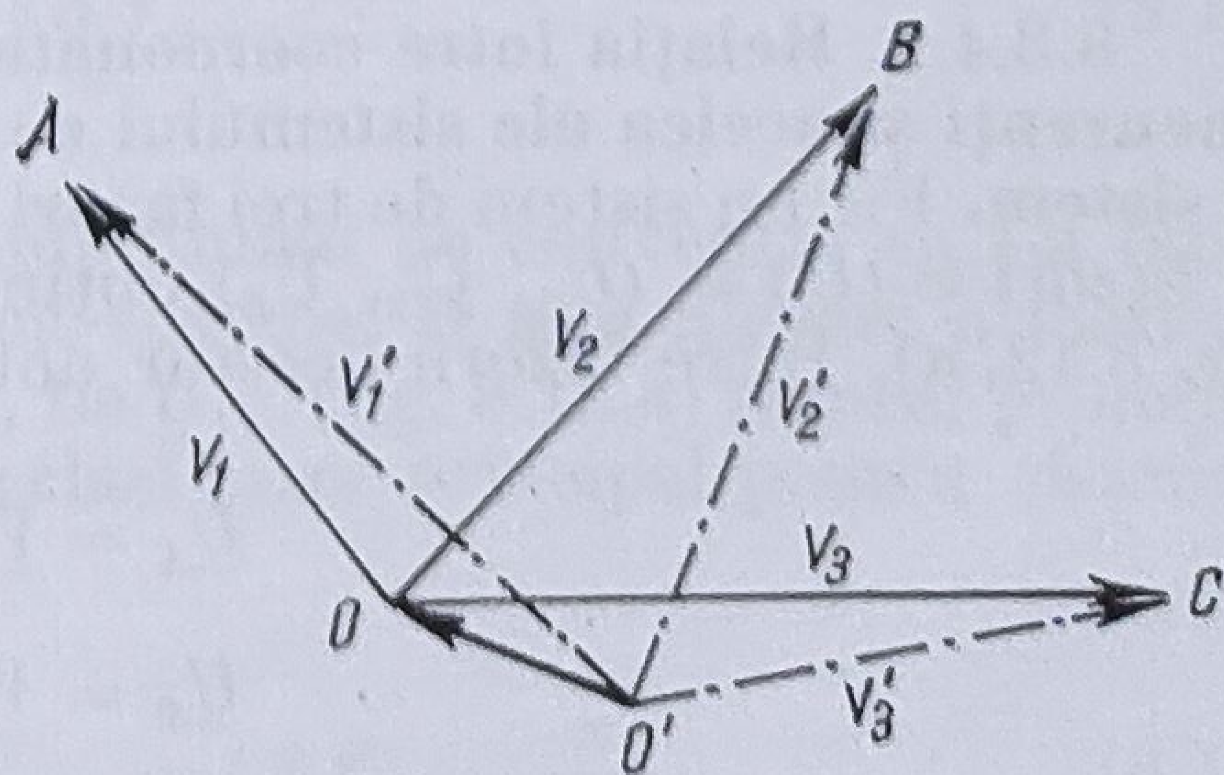


Fig. 8.11. Sisteme de fazori cu aceleaşi vîrfuri.

Componentele simetrice ale acestor sisteme sînt:

$$\underline{V}_h = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3); \qquad \underline{V}'_h = \frac{1}{3}(\underline{V}'_1 + \underline{V}'_2 + \underline{V}'_3);$$

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3); \quad \text{şi} \quad \underline{V}'_d = \frac{1}{3}(\underline{V}'_1 + a\underline{V}'_2 + a^2\underline{V}'_3);$$

$$\underline{V}_i = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2 + a\underline{V}_3), \qquad \underline{V}'_i = \frac{1}{3}(\underline{V}'_1 + a^2\underline{V}'_2 + a\underline{V}'_3).$$

Din figura 8.11 rezultă:

$$\underline{V}'_1 = \underline{V}_1 + \overline{OO'}, \ \underline{V}'_2 = \underline{V}_2 + \overline{OO'} \ \text{şi} \ \underline{V}'_3 = \underline{V}_3 + \overline{OO'}$$

şi deci

$$\underline{V}'_d = \frac{1}{3}[\underline{V}_1 + \overline{OO'} + a(\underline{V}_2 + \overline{OO'}) + a^2(\underline{V}_3 + \overline{OO'})] =$$

$$= \frac{1}{3}[(\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3) + \frac{1}{3}(1 + a + a^2)\ \overline{OO'}] = \underline{V}_d,$$

$$\underline{V}'_i = \frac{1}{3}[\underline{V}_1 + \overline{OO'} + a^2(\underline{V}_2 + \overline{OO'}) + a(\underline{V}_3 + \overline{OO'})] =$$

$$= \frac{1}{3}[(\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2 + a\underline{V}_3) + \frac{1}{3}(1 + a^2 + a)\ \overline{OO'}] = \underline{V}_i,$$

$$\underline{V}'_h = \frac{1}{3}[\underline{V}_1 + \overline{OO'} + \underline{V}_2 + \overline{OO'} + \underline{V}_3 + \overline{OO'}] =$$

$$= \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3) + \overline{OO'} = \underline{V}_h + \overline{OO'},$$

ceea ce demonstrează teorema enunţată.

8.3.4.2. **Relaţia între coordonatele simetrice ale unui sistem de trei fazori concurenţi şi acelea ale sistemului de fazori care leagă vîrfurile fazorilor primului sistem.** Fie un sistem de trei fazori concurenţi $S(\underline{V}) = (\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3)$ şi sistemul de fazori $S(\underline{U}) = (\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3)$ obţinut prin legarea vîrfurilor primului sistem (fig. 8.12, *a*). Între fazorii acestor două sisteme se pot scrie relaţiile:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{V}_2 - \underline{V}_3, \\ \underline{U}_2 &= \underline{V}_3 - \underline{V}_1, \\ \underline{U}_3 &= \underline{V}_1 - \underline{V}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (8.14)$$

Componentele simetrice, directă și inversă, ale sistemului $S(\underline{U})$ sînt :

$$\underline{U}_d = \frac{\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + a^2\underline{U}_3}{3} \; ; \quad \underline{U}_i = \frac{\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 + a\underline{U}_3}{3} \, ,$$

sau ținînd seama de relațiile (8.14), se obține

$$\underline{U}_d = \frac{\underline{V}_2 + a\underline{V}_3 + a^2\underline{V}_1}{3} - \frac{\underline{V}_3 + a\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2}{3} = \underline{V}_{d2} - \underline{V}_{d3} \, .$$

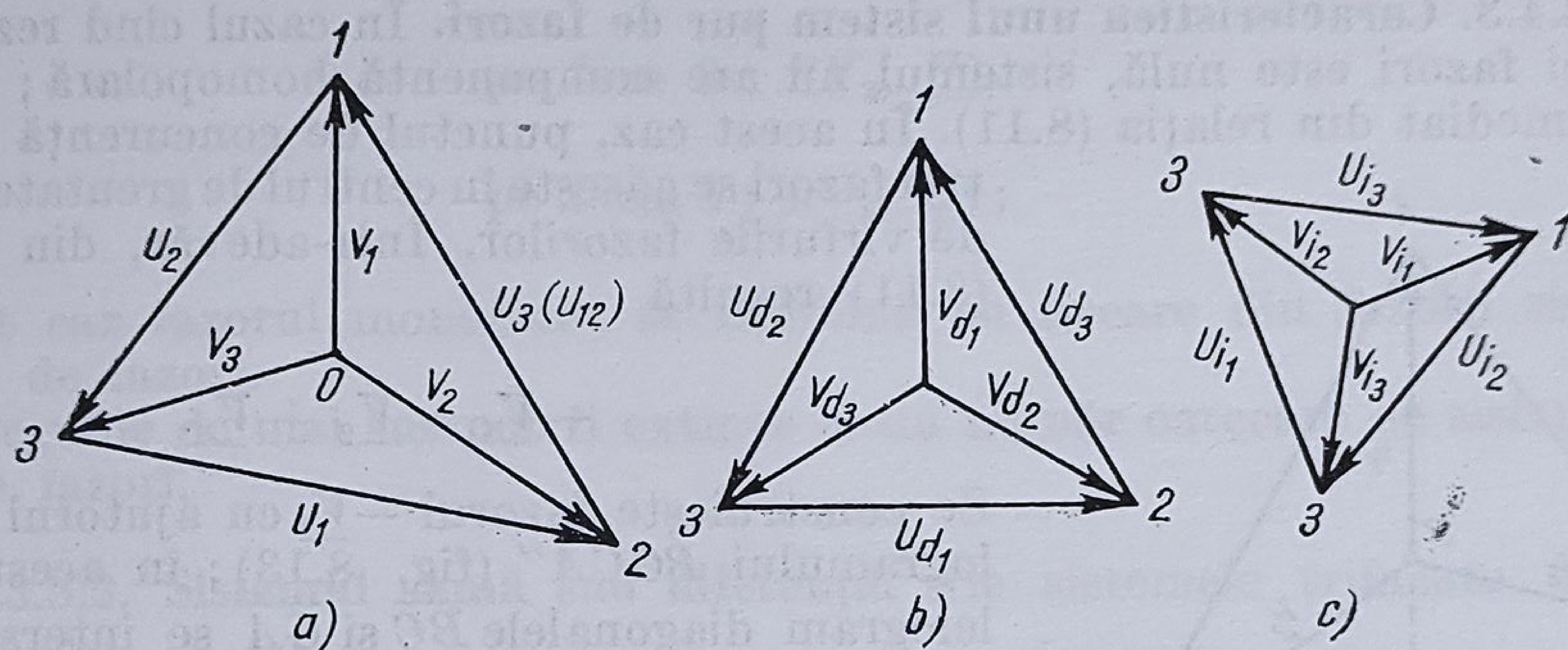


Fig. 8.12. Sisteme de fazori stea și triunghi.

Cum însă

$$\underline{V}_{d2} = a^2\underline{V}_{d1} \quad \text{și} \quad \underline{V}_{d3} = a\underline{V}_{d1} \, ,$$

rezultă (fig. 8.12,*b*)

$$\underline{U}_d = (a^2 - a)\,\underline{V}_d = \sqrt{3}\,\underline{V}_d \left|\underline{\,-\frac{\pi}{2}\,}\right. . \tag{8.15}$$

Analog se găsește pentru componenta inversă :

$$\underline{U}_i = \frac{\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3 + a\underline{V}_1}{3} - \frac{\underline{V}_3 + a^2\underline{V}_1 + a\underline{V}_2}{3} = \underline{V}_{i2} - \underline{V}_{i3} =$$

$$= (a - a^2)\,\underline{V}_i = \sqrt{3}\,\underline{V}_i \left|\underline{\,\frac{\pi}{2}\,}\right. . \tag{8.16}$$

Forma relațiilor (8.15) și (8.16) depinde numai de convenția ce s-a făcut în alegerea fazorilor principali ai celor două sisteme. O altă alegere a acestora conduce la alte expresii. Astfel, de exemplu, fie $\underline{U}_{12}$ (fig. 8.12,*a*) fazorul principal al sistemului triunghi. Dacă se păstrează același fazor principal pentru sistemul stea, se găsește în acest caz :

$$\underline{U}'_{d12} = \sqrt{3}\,\underline{V}_d \left|\underline{\,\frac{\pi}{6}\,}\right. ; \qquad \underline{U}'_{i12} = \sqrt{3}\,\underline{V}_i \left|\underline{\,-\frac{\pi}{6}\,}\right. . \tag{8.17}$$

Relațiile (8.15) și (8.16) au însă mai multă utilizare practică decît relațiile (8.17), fiind mai simple.

În ceea ce privește componenta homopolară, valoarea acesteia este

$$\underline{U}_h = \frac{\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3}{3} = \frac{\underline{V}_2 - \underline{V}_3 + \underline{V}_3 - \underline{V}_1 + \underline{V}_1 - \underline{V}_2}{3} = 0,$$

ceea ce era de așteptat, sistemul de fazori unind vîrfurile unui sistem de fazori stelat oarecare, fiind un sistem pur.

8.3.4.3. **Caracteristica unui sistem pur de fazori.** În cazul cînd rezultanta celor trei fazori este nulă, sistemul nu are componentă homopolară; aceasta rezultă imediat din relația (8.11). În acest caz, punctul de concurență al celor trei fazori se găsește în centrul de greutate format de vîrfurile fazorilor. Într-adevăr, din relația (8.11) rezultă

$$-\underline{V}_1 = \underline{V}_2 + \underline{V}_3.$$

Se construiește fazorul $-\underline{V}_1$ cu ajutorul paralelogramului $BGCA''$ (fig. 8.13); în acest paralelogram diagonalele $\overline{BC}$ și $\overline{GA}$ se intersectează în părți egale. Rezultă că $\overline{BA'} = \overline{A'C}$ și deci $\overline{AA'}$ este mediană în triunghiul ABC. La fel se demonstrează și pentru ceilalți fazori; rezultă deci că punctul G, punctul de concurență al acestor fazori, este centrul de greutate al triunghiului construit pe vîrfurile lor.

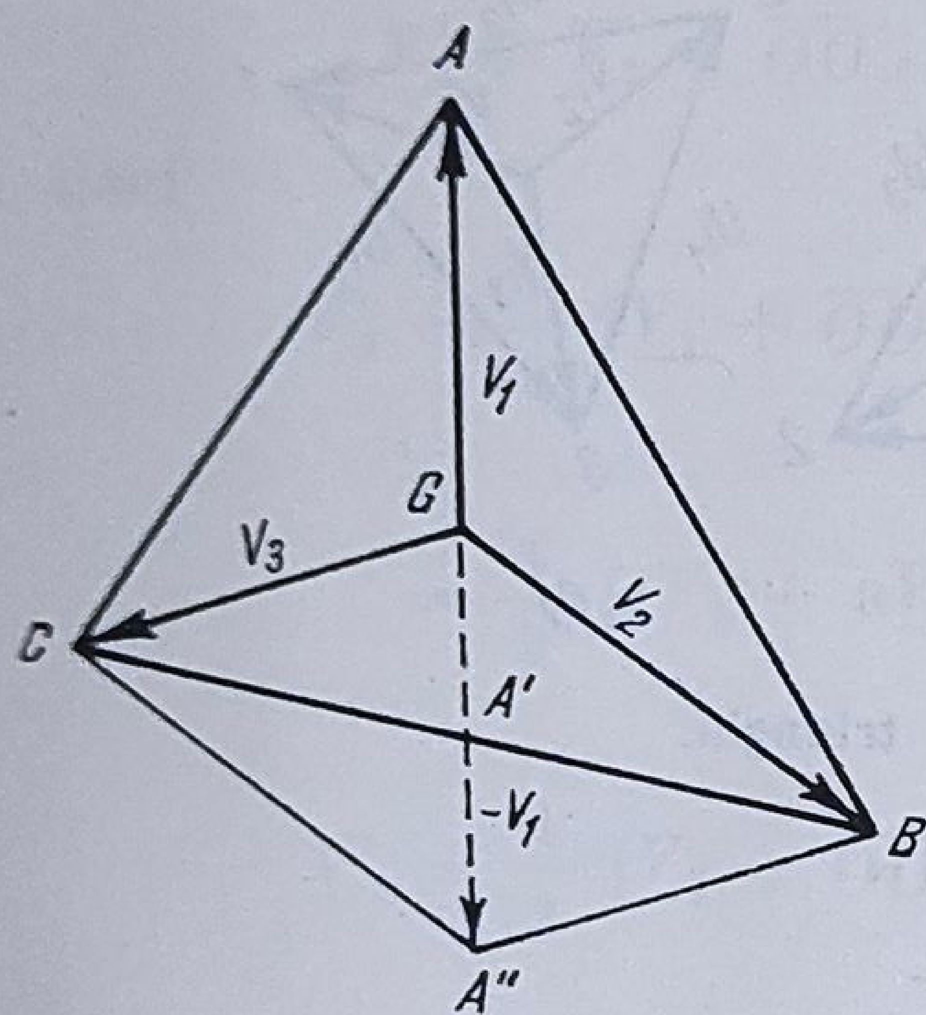


Fig. 8.13. Sistem de fazori pur.

8.3.5. OPERAȚII CU SISTEME TRIFAZATE DE FAZORI

8.3.5.1. **Reguli fundamentale.** Sistemele trifazate de fazori fiind formate din fazori liberi, care pot fi deplasați oricum în plan, cu aceste sisteme se pot defini o serie de operații matematice. O operație matematică constă din formarea unei funcții a mărimilor cu care se operează.

Pentru operațiile cu sisteme trifazate de fazori se stabilesc următoarele reguli fundamentale:

Regula I: Orice operație matematică între două sisteme de fazori trifazați $S_1(\underline{V})$ și $S_2(\underline{V}')$ conduce la formarea unei funcții

$$f\,[S_1(\underline{V}),\ S_2(\underline{V}')],$$

care, la rîndul ei, formează un sistem trifazat de fazori, avînd fazorii componenți

pe faza 1: $f(\underline{V}_1, \underline{V}'_1)$,

pe faza 2: $f(\underline{V}_2, \underline{V}'_2)$,

pe faza 3: $f(\underline{V}_3, \underline{V}'_3)$.

Cu alte cuvinte, operaţia trebuie efectuată pe fiecare fază în parte, prin combinarea fazorilor de acelaşi indice.

Regula II: Orice operaţie matematică efectuată între un sistem trifazat de fazori $S(\underline{V})$ şi un fazor simplu $\underline{U}$ conduce la formarea unei funcţii

$$f[S(\underline{V}), \underline{U}]$$

care este un sistem trifazat de fazori avînd fazorii componenţi:

$$\text{pe faza } 1: f(\underline{V}_1, \underline{U}),$$

$$\text{pe faza } 2: f(\underline{V}_2, \underline{U}),$$

$$\text{pe faza } 3: f(\underline{V}_3, \underline{U});$$

în acest caz fazorul monofazat se combină cu fiecare din fazorii sistemului trifazat de fazori.

Regulile de mai sus pot fi extinse la un număr oarecare de sisteme trifazate de fazori.

8.3.5.2. **Sistemul sumă sau diferenţă.** Fie sistemele trifazate de fazori

$$S(\underline{V}) = (\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3) \quad \text{şi} \quad S(\underline{V}') = (\underline{V}_1', \underline{V}_2', \underline{V}_3')$$

Sistemul sumă sau diferenţă este sistemul trifazat ai cărui fazori sînt formaţi din suma geometrică a fazorilor de acelaşi indice în sistemele date.

Rezultă deci

$$S(\underline{V}) \pm S(\underline{V}') = S(\underline{V}_s) = S(\underline{V} + \underline{V}') = [(\underline{V}_1 \pm \underline{V}_1'), (\underline{V}_2 \pm \underline{V}_2'), (\underline{V}_3 \pm \underline{V}_3')].$$

Definiţia aceasta poate fi extinsă la oricîte sisteme.

Este uşor de văzut că dacă sistemele de fazori sînt simetrice şi de acelaşi ordin, sistemul de fazori rezultant este simetric şi de acelaşi ordin.

Dacă sistemele de fazori sînt simetrice dar de ordine diferite, sistemul de fazori rezultant este nesimetric. De asemenea, dacă sistemele de fazori sînt nesimetrice, sistemul de fazori rezultant este de asemenea nesimetric.

În cazul unui sistem de fazori nesimetric, componenta simetrică de un ordin oarecare a sistemului sumă este egal cu suma componentelor simetrice de acelaşi ordin a sistemelor date.

Fie, de exemplu, sistemele de fazori considerate mai sus. Descompunînd atît sistemele date cît şi sistemul sumă în componente simetrice, se obţin pentru componenta directă

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3); \; \underline{V}_d' = \frac{1}{3}(\underline{V}_1' + a\underline{V}_2' + a^2\underline{V}_3');$$

$$\underline{V}_{sd} = \frac{1}{3}[(\underline{V}_1 + \underline{V}_1') + a(\underline{V}_2 + \underline{V}_2') + a^2(\underline{V}_3 + \underline{V}_3')].$$

Se vede imediat că ultima expresie este suma primelor două.

La fel se demonstrează această proprietate şi pentru componenta inversă şi cea homopolară.

8.3.5.3. **Sistemul produs simbolic.** Sistemul *produs simbolic* este sistemul ai cărui fazori sînt formaţi pe fiecare fază din produsul a celor doi fazori de acelaşi indice ai sistemelor de fazori date.

Fie

$$\left.\begin{aligned} S(\underline{V}) &= (\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3), \\ S(\underline{V}') &= (\underline{V}_1', \underline{V}_2', \underline{V}_3'), \end{aligned}\right\} \tag{8.18}$$

două sisteme trifazate de fazori. Conform definiţiei de mai sus, sistemul produs simbolic va fi sistemul

$$S(\underline{V} \cdot \underline{V}') = S(\underline{V}) \cdot S(\underline{V}') = [(\underline{V}_1 \cdot \underline{V}_1'), (\underline{V}_2 \cdot \underline{V}_2'), (\underline{V}_3 \cdot \underline{V}_3')].$$

Este evident, că dacă cele două sisteme al căror produs simbolic se face nu sînt simetrice şi sistemul produs este un sistem nesimetric.

Dacă cele două sisteme sînt simetrice, sistemul produs este şi el simetric iar ordinul său este egal cu suma algebrică a ordinelor celor două sisteme simetrice.

Astfel, în cazul componentelor simetrice, se obţine:

deînmulţitul		înmulţitorul		produsul	
direct	(1)	direct	(1)	invers	(2)
invers	(2)	invers	(2)	direct	(2 + 2 = 4=3+1)
homopolar	(0)	homopolar	(0)	homopolar	(0 + 0 = 0)
direct	(1)	invers	(2)	homopolar	(1 + 2 = 3)
invers	(2)	direct	(1)	homopolar	(2 + 1 = 3)
direct	(1)	homopolar	(0)	direct	(1 + 0)
invers	(2)	homopolar	(0)	invers	(2 + 0)

Aceste rezultate se exprimă simbolic prin relaţiile

$$S_d(\underline{V}) \cdot S_d(\underline{V}') = S_i(\underline{V}\,\underline{V}'),$$

$$S_i(\underline{V}) \cdot S_i(\underline{V}') = S_d(\underline{V}\,\underline{V}'),$$

$$S_h(\underline{V}) \cdot S_h(\underline{V}') = S_h(\underline{V}\,\underline{V}')$$

etc.

În cazul cînd cele două sisteme de fazori $S(\underline{V})$ şi $S(\underline{V}')$ nu sînt simetrice şi dacă $S_d(\underline{V})$, $S_i(\underline{V})$, $S_h(\underline{V})$ sînt coordonatele simetrice ale primului sistem, iar $S_d(\underline{V}')$, $S_i(\underline{V}')$ şi $S_h(\underline{V}')$ coordonatele simetrice ale celui de-al doilea sistem, atunci coordonatele simetrice ale sistemului produs simbolic vor fi, ţinînd seama de cele arătate mai sus

$$\begin{aligned} S_h(\underline{V}\,\underline{V}') &= S_h(\underline{V}) \cdot S_h(\underline{V}') + S_d(\underline{V}) \cdot S_i(\underline{V}') + S_i(\underline{V}) \cdot S_d(\underline{V}') \\ S_d(\underline{V}\,\underline{V}') &= S_d(\underline{V}) \cdot S_h(\underline{V}') + S_i(\underline{V}) \cdot S_i(\underline{V}') + S_h(\underline{V}) \cdot S_d(\underline{V}') \\ S_i(\underline{V}\,\underline{V}') &= S_i(\underline{V}) \cdot S_h(\underline{V}') + S_h(\underline{V}) \cdot S_i(\underline{V}') + S_d(\underline{V}) \cdot S_d(\underline{V}') \end{aligned} \tag{8.19}$$

Într-adevăr, fie să demonstrăm prima relație de mai sus. Să considerăm sistemele (8.18) și sistemele corespunzătoare de coordonate simetrice

$$S_h(\underline{V}) = (\underline{V}_h,\ \underline{V}_h,\ \underline{V}_h), \qquad S_h(\underline{V}') = (\underline{V}'_h,\ \underline{V}'_h,\ \underline{V}'_h);$$

$$S_d(\underline{V}) = (\underline{V}_d,\ a^2\underline{V}_d,\ a\underline{V}_d); \text{ și } S_d(\underline{V}') = (\underline{V}'_d, a^2\underline{V}'_d, a\underline{V}'_d);$$

$$S_i(\underline{V}) = (\underline{V}_i,\ a\underline{V}_i,\ a^2\underline{V}_i); \qquad S_i(\underline{V}') = (\underline{V}'_i,\ a\underline{V}'_i,\ a^2\underline{V}'_i).$$

Aplicind regula de definiție a produsului, se obține

$$S_h(\underline{V})\, S_h(\underline{V}') = [(\underline{V}_h\underline{V}'_h),\ (\underline{V}_h\underline{V}'_h),\ (\underline{V}_h\underline{V}'_h)];$$

$$S_d(\underline{V})\, S_i(\underline{V}') = [(\underline{V}_d\underline{V}'_i), (a^2\underline{V}_d\, a\underline{V}'_i), (a\underline{V}_d\, a^2\underline{V}'_i)] = [(\underline{V}_d\underline{V}'_i), (\underline{V}_d\underline{V}'_i), (\underline{V}_d\underline{V}'_i)];$$

$$S_i(\underline{V})\, S_d(\underline{V}') = [(\underline{V}_i\underline{V}'_d), (a\underline{V}_i\, a^2\underline{V}'_d), (a^2\underline{V}_i\, a\underline{V}'_d)] = [(\underline{V}_i\underline{V}'_d), (\underline{V}_i\underline{V}'_d), (\underline{V}_i\underline{V}'_d)].$$

Rezultă

$$S_h(\underline{V})\, S_h(\underline{V}') + S_d(\underline{V})\, S_i(\underline{V}') + S_i(\underline{V})\, S_d(\underline{V}') = [(\underline{V}_h\underline{V}'_h + \underline{V}_d\underline{V}'_i + \underline{V}_i\underline{V}'_d), (\underline{V}_h\underline{V}'_h +$$

$$+ \underline{V}_d\, \underline{V}_i + \underline{V}_i\underline{V}'_d), (\underline{V}_h\underline{V}'_h + \underline{V}_d\underline{V}'_i + \underline{V}_i\underline{V}'_d)] = S_h(\underline{V}\,\underline{V}')$$

căci,

$$\underline{V}_h\underline{V}'_h = \frac{1}{9}(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3)(\underline{V}'_1 + \underline{V}'_2 + \underline{V}'_3) = \frac{1}{9}[(\underline{V}_1\underline{V}'_1 + \underline{V}_2\underline{V}'_2 + \underline{V}_3\underline{V}'_3 +$$

$$+ \underline{V}_1(\underline{V}'_2 + \underline{V}'_3) + \underline{V}_2(\underline{V}'_1 + \underline{V}'_3) + \underline{V}_3(\underline{V}'_1 + \underline{V}'_2)]$$

$$\underline{V}_d\underline{V}'_i = \frac{1}{9}(\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3)(\underline{V}'_1 + a^2\underline{V}'_2 + a\underline{V}'_3) = \frac{1}{9}[\underline{V}_1\underline{V}'_1 + \underline{V}_2\underline{V}'_2 + \underline{V}_3\underline{V}'_3 +$$

$$+ \underline{V}_1(a^2\underline{V}'_2 + a\underline{V}'_3) + \underline{V}_2(a\underline{V}'_1 + a^2\underline{V}'_3) + \underline{V}_3(a^2\underline{V}'_1 + a\underline{V}'_2)]$$

$$\underline{V}_i\underline{V}'_d = \frac{1}{9}(\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2 + a\underline{V}_3)(\underline{V}'_1 + a\underline{V}'_2 + a^2\underline{V}'_3) = \frac{1}{9}[\underline{V}_1\underline{V}'_1 + \underline{V}_2\underline{V}'_2 + \underline{V}_3\underline{V}'_3 +$$

$$+ \underline{V}_1(a\underline{V}'_2 + a^2\underline{V}'_3) + \underline{V}_2(a^2\underline{V}'_1 + a\underline{V}'_3) + \underline{V}_3(a\underline{V}'_1 + a^2\underline{V}'_2)]$$

și deci

$$\underline{V}_h\underline{V}'_h + \underline{V}_d\underline{V}'_i + \underline{V}_i\underline{V}'_d = \frac{1}{3}(\underline{V}_1\underline{V}'_1 + \underline{V}_2\underline{V}'_2 + \underline{V}_3\underline{V}'_3) = (\underline{V}\,\underline{V}')_h$$

În același mod se demonstrează și celelalte două relații din (8.19).

Rezultă de asemenea, că între componentele simetrice ale sistemului există relațiile :

$$\left.\begin{aligned} (\underline{V}\,\underline{V}')_h &= \underline{V}_h\underline{V}'_h + \underline{V}_d\underline{V}'_i + \underline{V}_i\underline{V}'_d, \\ (\underline{V}\,\underline{V}')_d &= \underline{V}_d\underline{V}'_h + \underline{V}_i\underline{V}'_i + \underline{V}_h\underline{V}'_d, \\ (\underline{V}\,\underline{V}')_i &= \underline{V}_i\underline{V}'_h + \underline{V}_h\underline{V}'_i + \underline{V}_d\underline{V}'_d. \end{aligned}\right\} \tag{8.20}$$

8.3.5.4. **Sistemul cît simbolic sau sistemul raport.** Sistemul *cît simbolic* este sistemul ai cărui fazori sînt cîtul fazorilor de acelaşi indice, ai sistemelor de fazori date.

Fie

$$\mathrm{S}(\underline{V}) = (\underline{V}_1,\ \underline{V}_2,\ \underline{V}_3)\ ;\ \mathrm{S}(\underline{V}') = (\underline{V}'_1,\ \underline{V}'_2,\ \underline{V}'_3),$$

cele două sisteme date. Conform definiției rezultă

$$\frac{\mathrm{S}(\underline{V})}{\mathrm{S}(\underline{V}')} = \mathrm{S}\left(\frac{\underline{V}}{\underline{V}'}\right) = \left[\left(\frac{\underline{V}_1}{\underline{V}'_1}\right),\ \left(\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}'_2}\right),\ \left(\frac{\underline{V}_3}{\underline{V}'_3}\right)\right]. \tag{8.21}$$

Ordinul sistemului cît este egal cu diferența dintre ordinele celor două sisteme al căror cît se face.

Cazul cel mai important este acela în care cele două sisteme sînt de acelaşi ordin ; în acest caz sistemul cît este homopolar.

Pentru a stabili relația care există între componentele simetrice ale sistemelor de fazori date şi ale sistemului cît, se porneşte de la relația (8.21) care se poate scrie

$$\mathrm{S}(\underline{V}) = \mathrm{S}(\underline{V}')\,\mathrm{S}\left(\frac{\underline{V}}{\underline{V}'}\right)$$

sau

$$\mathrm{S}(\underline{V}) = \mathrm{S}(\underline{V}')\,\mathrm{S}(\underline{V}'') \tag{8.22}$$

în care s-a pus

$$\underline{V}'' = (\underline{V}/\underline{V}').$$

Relația (8.22) arată că o împărțire simbolică se poate înlocui printr-o înmulțire simbolică, alegînd judicios sistemele de fazori.

Fie $\underline{V}$ şi $\underline{V}'$ fazorii dați şi $\underline{V}''$ fazorul cît căutat ; ținînd seama de relațiile (8.20) şi (8.22) se poate scrie

$$\underline{V}_h = \underline{V}''_d\,\underline{V}'_i + \underline{V}''_i\,\underline{V}'_d + \underline{V}''_h\,\underline{V}'_h\ ;$$

$$\underline{V}_d = \underline{V}''_d\,\underline{V}'_h + \underline{V}''_i\,\underline{V}'_i + \underline{V}''_h\,\underline{V}'_d\ ;$$

$$\underline{V}_i = \underline{V}''_d\,\underline{V}'_d + \underline{V}''_i\,\underline{V}'_h + \underline{V}''_h\,\underline{V}'_i.$$

Rezolvînd acest sistem în raport cu $\underline{V}_d''$, $\underline{V}_i''$ şi $\underline{V}_h''$ se obţine

$$\underline{V}_d'' = \frac{\underline{\Delta}_d}{\underline{\Delta}}, \quad \underline{V}_i'' = \frac{\underline{\Delta}_i}{\underline{\Delta}}, \quad \underline{V}_h'' = \frac{\underline{\Delta}_h}{\underline{\Delta}},$$

în care

$$\underline{\Delta} = \begin{vmatrix} \underline{V}_i' & \underline{V}_d' & \underline{V}_h' \\ \underline{V}_h' & \underline{V}_i' & \underline{V}_d' \\ \underline{V}_d' & \underline{V}_h' & \underline{V}_i' \end{vmatrix}; \quad \underline{\Delta}_i \begin{vmatrix} \underline{V}_i' & \underline{V}_h & \underline{V}_h' \\ \underline{V}_h' & \underline{V}_d & \underline{V}_d' \\ \underline{V}_d' & \underline{V}_i & \underline{V}_i' \end{vmatrix};$$

$$\underline{\Delta}_d = \begin{vmatrix} \underline{V}_h & \underline{V}_d' & \underline{V}_h' \\ \underline{V}_d & \underline{V}_i' & \underline{V}_d' \\ \underline{V}_i & \underline{V}_h' & \underline{V}_i' \end{vmatrix}; \quad \underline{\Delta}_h \begin{vmatrix} \underline{V}_i' & \underline{V}_d' & \underline{V}_h \\ \underline{V}_h' & \underline{V}_i' & \underline{V}_d \\ \underline{V}_d' & \underline{V}_h' & \underline{V}_i \end{vmatrix}.$$

8.3.5.5. **Sistem de fazori conjugaţi.** Dacă se descompun două sisteme de fazori nesimetrice conjugate în componentele lor simetrice, fiecărui sistem simetric din primul sistem îi corespunde un sistem simetric conjugat din al doilea sistem. Dacă ordinul primului sistem simetric este m, ordinul sistemului conjugat este $-m$. Această din urmă relaţie rezultă din aceea, că la sistemele conjugate, măsura unghiurilor se face în sens invers.

În cazul sistemelor trifazate, sistemul conjugat al sistemului direct este sistemul invers şi reciproc.

8.3.6. DETERMINAREA COMPONENTELOR SIMETRICE ALE UNUI SISTEM TRIFAZAT DE FAZORI DAT

8.3.6.1. **Metoda analitică.** Pentru calculul analitic se folosesc relaţiile (8.11), (8.12) şi (8.13), ţinîndu-se seama că

$$a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\,\underline{\left|\frac{2\pi}{3}\right.}; \quad a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\,\underline{\left|-\frac{2\pi}{3}\right.}.$$

Fie, de exemplu, sistemul trifazat de curenţi

$$\underline{I}_1 = 8 - j\,6\ \text{A}; \quad \underline{I}_2 = -13 - j\,10\ \text{A}; \quad \underline{I}_3 = 2 + j\,10\ \text{A}.$$

Componentele simetrice ale acestui sistem sînt

$$\underline{I}_h = \frac{1}{3}[(8 - j6) + (-13 - j10) + (2 + j10)] = -1 - j\,2\ \text{A};$$

$$\underline{I}_d = \frac{1}{3}\left[(8 - j\,6) + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-13 - j\,10) + \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2 + j10)\right] =$$
$$= 10{,}27 - j\,6{,}33\ \text{A};$$

$$\underline{I}_i = \frac{1}{3}\left[(8 - j\,6) + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-13 - j\,10) + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2 + j10)\right] =$$
$$= -1{,}27 + j\,2{,}33\ \text{A}.$$

Ca verificare, se calculează fazorii iniţiali cu ajutorul ecuaţiilor (8.10). Astfel, pentru primul fazor, se găseşte

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i = (-1 - j2) + (10{,}27 - j6{,}33) + (-1{,}27 + j2{,}33) = 8 - j6A.$$

8.3.6.2. **Metode grafice.** 1. *Metoda directă.* Determinarea grafică se face construindu-se aceleaşi relaţii (fig. 8.14). Astfel, pentru a se găsi componenta homopolară, se face rezultanta celor trei fazori şi se ia 1/3 din ea. Se găseşte astfel componenta simetrică respectivă, în direcţie şi mărime.

Pentru a găsi componenta directă, se construieşte la vîrful fazorului $\underline{V}_1$, fazorul $\underline{V}_2$ rotit *înainte* cu 120°; la vîrful acestui fazor, astfel rotit, se construieşte fazorul $\underline{V}_3$ rotit *în urmă* cu 120°. Unind originea cu vîrful acestui fazor, astfel rotit, se obţine fazorul $\underline{V}_d$ în direcţie; pentru a-i obţine şi mărimea, trebuie împărţit prin 3.

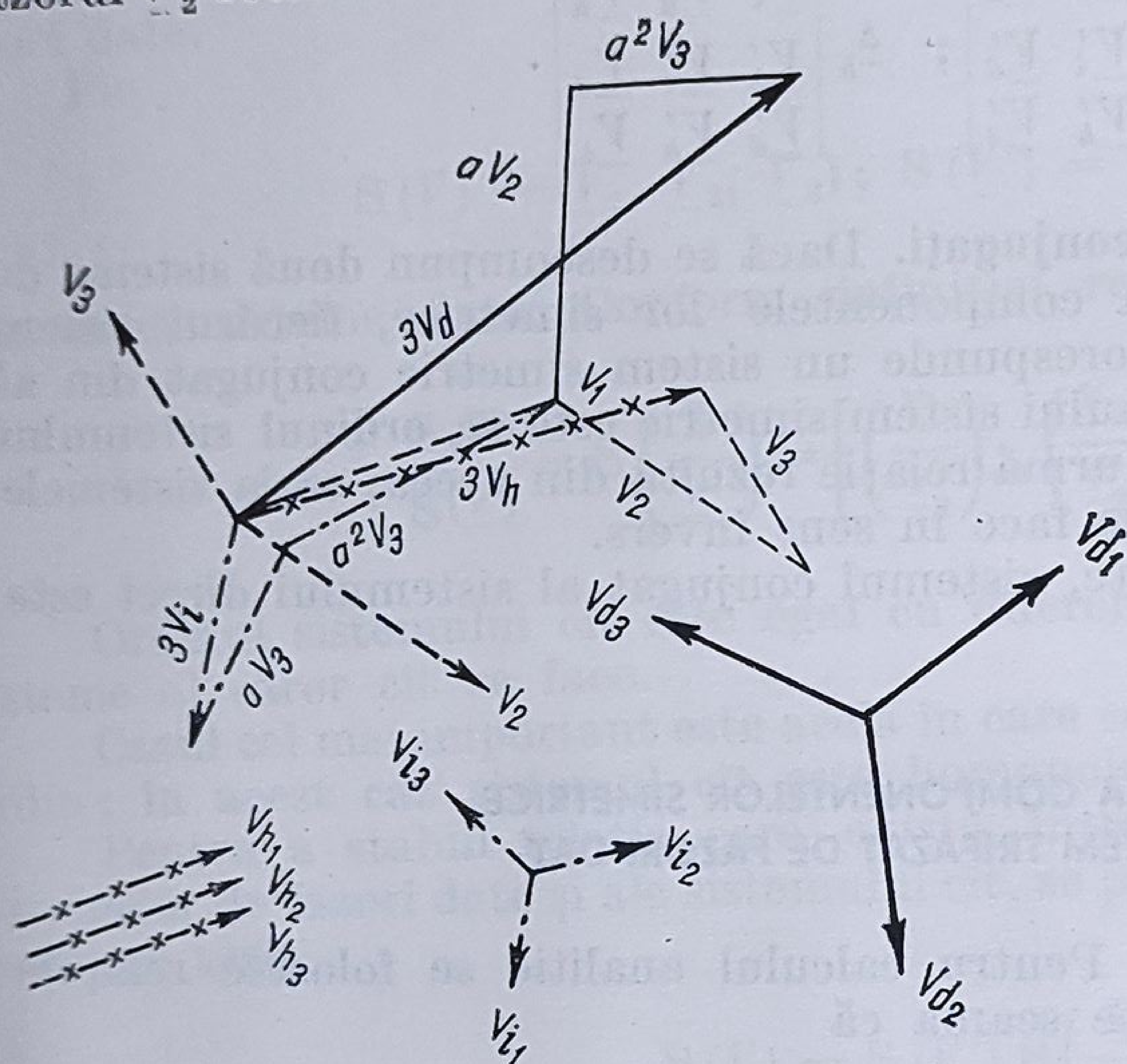


Fig. 8.14. Metoda directă de găsire a componentelor simetrice.

Pentru a se obţine componenta inversă, se construieşte la vîrful fazorului $\underline{V}_1$ fazorul $\underline{V}_2$ rotit *în urmă* cu 120°; la vîrful acestui fazor, astfel rotit, se construieşte fazorul $\underline{V}_3$ rotit *înainte* cu 120°. Unind originea cu vîrful acestui fazor, astfel rotit, se obţine fazorul $\underline{V}_i$ în direcţie; pentru a-i obţine şi mărimea, trebuie împărţit prin 3.

2. *Metoda triunghiurilor echilaterale.* Se unesc vîrfurile celor trei fazori, obţinîndu-se triunghiul ABC, căruia i se construieşte centrul de greutate G (fig. 8.15). Pe latura CB se construieşte *în urmă* triunghiul echilateral $BB''C$ căruia i se determină de asemenea centrul de greutate O_d, şi *înainte* triunghiul echilateral $BC''C$, căruia i se determină centrul de greutate O_i. Unind O_d cu G, O_i cu G şi O cu G se obţine:

$$\overline{O_d G} = \underline{V}_d; \quad \overline{O_i G} = \underline{V}_i;$$

$$\overline{OG} = \underline{V}_h.$$

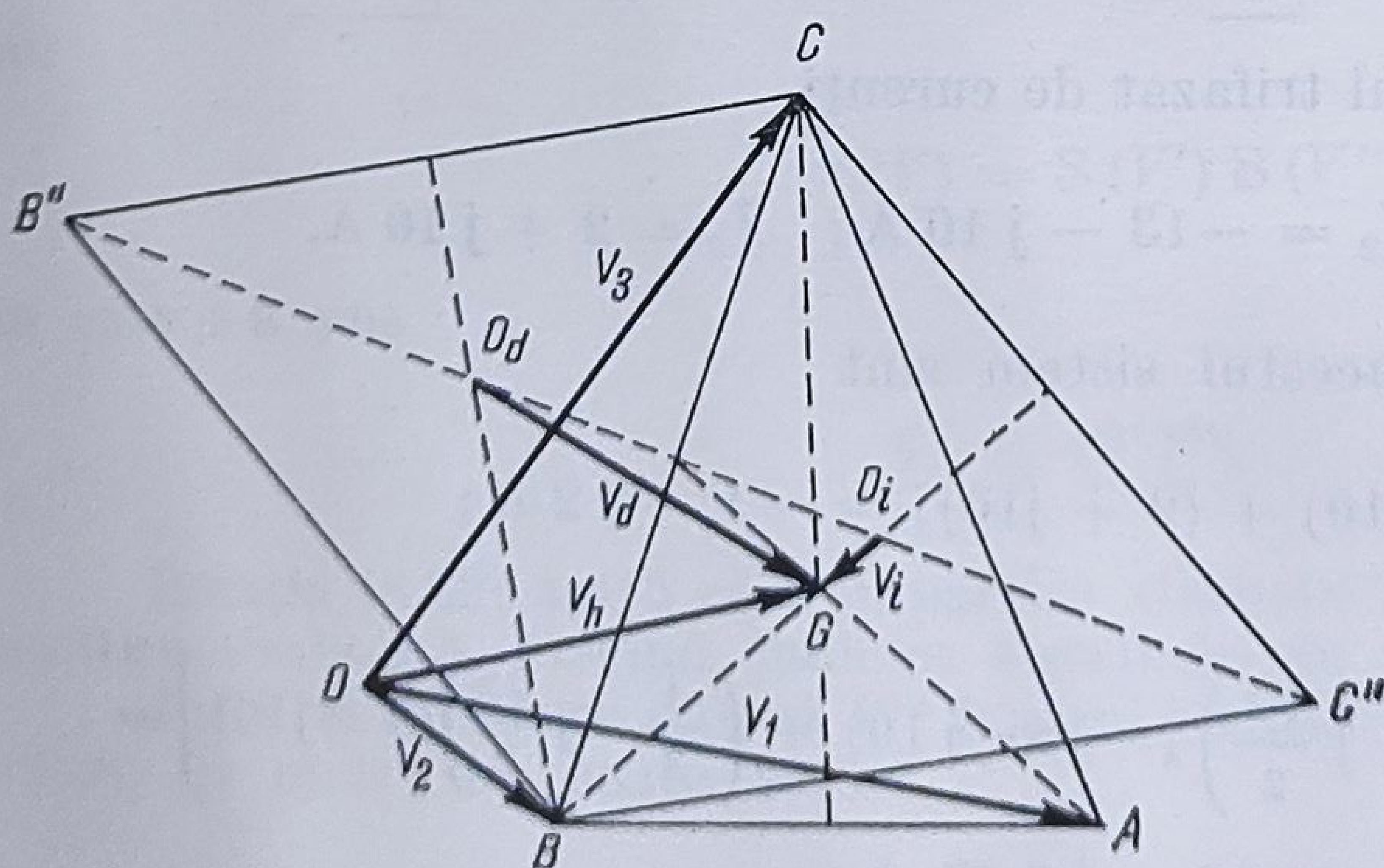


Fig. 8.15. Metoda triunghiurilor echilaterale pentru determinarea componentelor simetrice.

Justificarea acestei construcţii este următoarea. Fie

$$S_0(\underline{V}) = (\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3)$$

sistemul de fazori dat, cu originea în punctul O și cu vîrfurile în punctele A, B, C.

Fie un al doilea sistem de fazori

$$S_c(\underline{V}') = (\underline{V}_1', \underline{V}_2', \underline{V}_3'),$$

avînd vîrfurile comune cu ale precedentului, însă cu originea în vîrful C al fazorului $\underline{V}_3$ (fig. 8.16). În virtutea teoremei demonstrate *

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \mathrm{a}\,\overline{OB} + \mathrm{a}^2\overline{OC}) = \frac{1}{3}(\overline{CA} + \mathrm{a}\overline{CB}),$$

$$\underline{V}_i = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \mathrm{a}^2\overline{OB} + \mathrm{a}\overline{OC}) = \frac{1}{3}(\overline{CA} + \mathrm{a}^2\overline{CB}).$$

Pentru a determina componentele simetrice căutate, se construiesc aceste relații. Astfel, pentru a se determina fazorul $\underline{V}_d$, se așază fazorul $\overline{CB}$ în vîrful fazorului $\overline{CA}$ și se rotește înainte cu 120°. Unind $\underline{C}$ cu $\underline{B}_1'$ se obține fazorul $3\,\underline{V}_d$.

Se poate proceda și astfel: se rotește fazorul $\overline{CB}$ înainte cu 120° în jurul vîrfului $\underline{C}$, apoi se construiește în punctul B' astfel obținut, fazorul $\overline{CA}$. Suma acestor doi fazori este tot $3\,\underline{V}_d$.

Luînd simetricul lui B' față de vîrful C, se obține punctul B''. Punctele C, B'' și B sînt vîrfurile unui triunghi echilateral, ceea ce se poate arăta ușor. Fie O_d centrul de greutate al acestui triunghi. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC format de vîrfurile vectorilor dați, atunci

$$\overline{O_d G} = \underline{V}_d$$

în direcție și mărime. Într-adevăr, M fiind mijlocul laturii CB, triunghiurile AMB'' și GMO_d sînt asemenea, avînd unghiurile la vîrf comune și laturile adiacente proporționale prin construcție (construcția centrelor de greutate). Rezultă

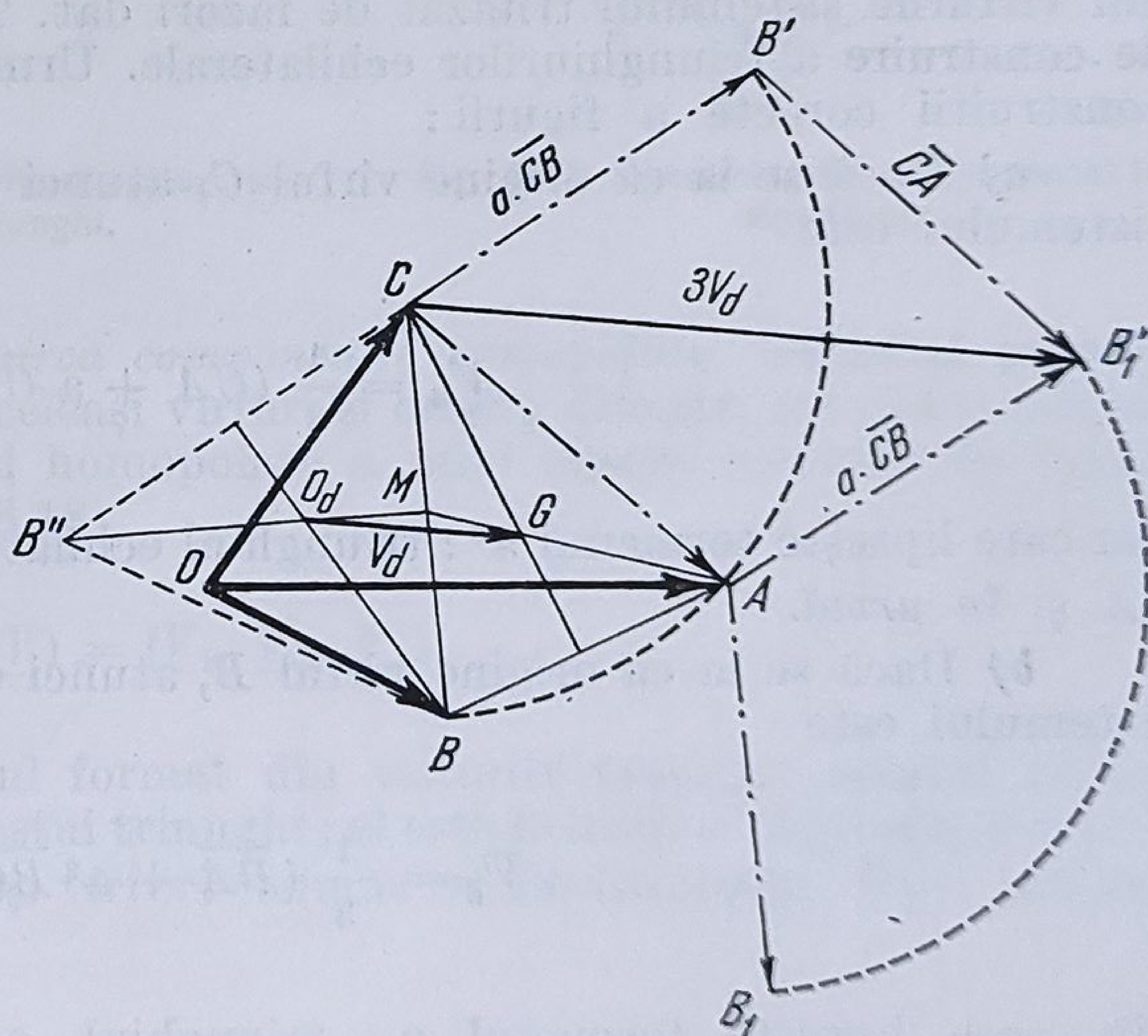


Fig. 8.16. Justificarea metodei triunghiurilor echilaterale.

$$\frac{\overline{MO_d}}{\overline{MB''}} = \frac{\overline{MG}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{O_d G}}{\overline{B''A}};$$

cum și

$$\overline{MO}_d = \frac{1}{3}\overline{MB''} \quad \text{și} \quad \overline{MG} = \frac{1}{3}\overline{MA},$$

---

* Vezi 8.3.4.1.

rezultă

$$\overline{O_d G} = \frac{1}{3}\overline{B''A} = \frac{1}{3}\overline{CB_1'} = \underline{V}_d$$

deoarece $\overline{B''A}$, $\overline{CB_1'}$ sînt egale şi paralele, ca segmente cuprinse între două segmente paralele şi egale.

La fel se demonstrează, că

$$\overline{O_i G} = \underline{V}_i .$$

Componenta homopolară este dată de relaţia

$$\overline{OG} = \underline{V}_h ,$$

întrucît sistemul de fazori (G, ABC) este un sistem pur.

OBSERVAŢIE: Construcţia poate fi făcută luîndu-se ca origine, oricare din vîrfurile sistemului trifazat de fazori dat. Trebuie observat numai, sensul de construire a triunghiurilor echilaterale. Următoarea regulă dă posibilitatea construirii corecte a figurii:

a) Dacă se ia ca origine vîrful C, atunci expresia componentei directe a sistemului este

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3}(\overline{CA} + \mathrm{a}\,\overline{CB})$$

din care lipseşte termenul a^2: triunghiul echilateral se construieşte pe vectorul $\overline{CA}$ şi *în urmă*.

b) Dacă se ia ca origine vîrful B, atunci expresia componentei directe a sistemului este

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3}(\overline{BA} + \mathrm{a}^2\,\overline{BC}) ,$$

din care lipseşte termenul a: triunghiul echilateral se construieşte pe vectorul $\overline{BC}$ şi *înainte*.

c) Dacă se ia ca origine vîrful A, atunci expresia componentei directe a sistemului este

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3}(\mathrm{a}\,\overline{AB} + \mathrm{a}^2\,\overline{AC}) = \frac{1}{3}\mathrm{a}(\overline{AB} + \mathrm{a}\,\overline{AC}) ,$$

din care lipseşte, la expresia din paranteză, termenul a^2: triunghiul echilateral se construieşte pe vectorul $\overline{AC}$ şi *în urmă*, apoi întreaga figură se roteşte cu a.

Se recomandă a se folosi în special primele două construcţii.

3. *Metodă pentru sistemele de fazori în triunghi.* În cazul sistemelor de fazori în triunghi, componentele simetrice, directă şi inversă, se determină simplu, printr-o construcţie grafică, aplicîndu-se relaţiile (8.12) şi (8.13). Fie

triunghiul ABC al sistemului de tensiuni $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ (fig. 8.17). Pentru a construi componenta directă, se rotește fazorul $\underline{U}_2$ în jurul vîrfului C cu 120° *înainte* și fazorul $\underline{U}_3$ în jurul vîrfului B cu 120° *în urmă*. Unind extremitățile libere ale fazorilor $\underline{U}_2$ și $\underline{U}_3$ astfel rotiți se obține în direcție fazorul $3\,\underline{U}_d$, de unde se deduce componenta directă $\underline{U}_d$ căutată.

În mod analog se găsește și componenta inversă $\underline{U}_i$, rotindu-se fazorii respectivi în sens invers.

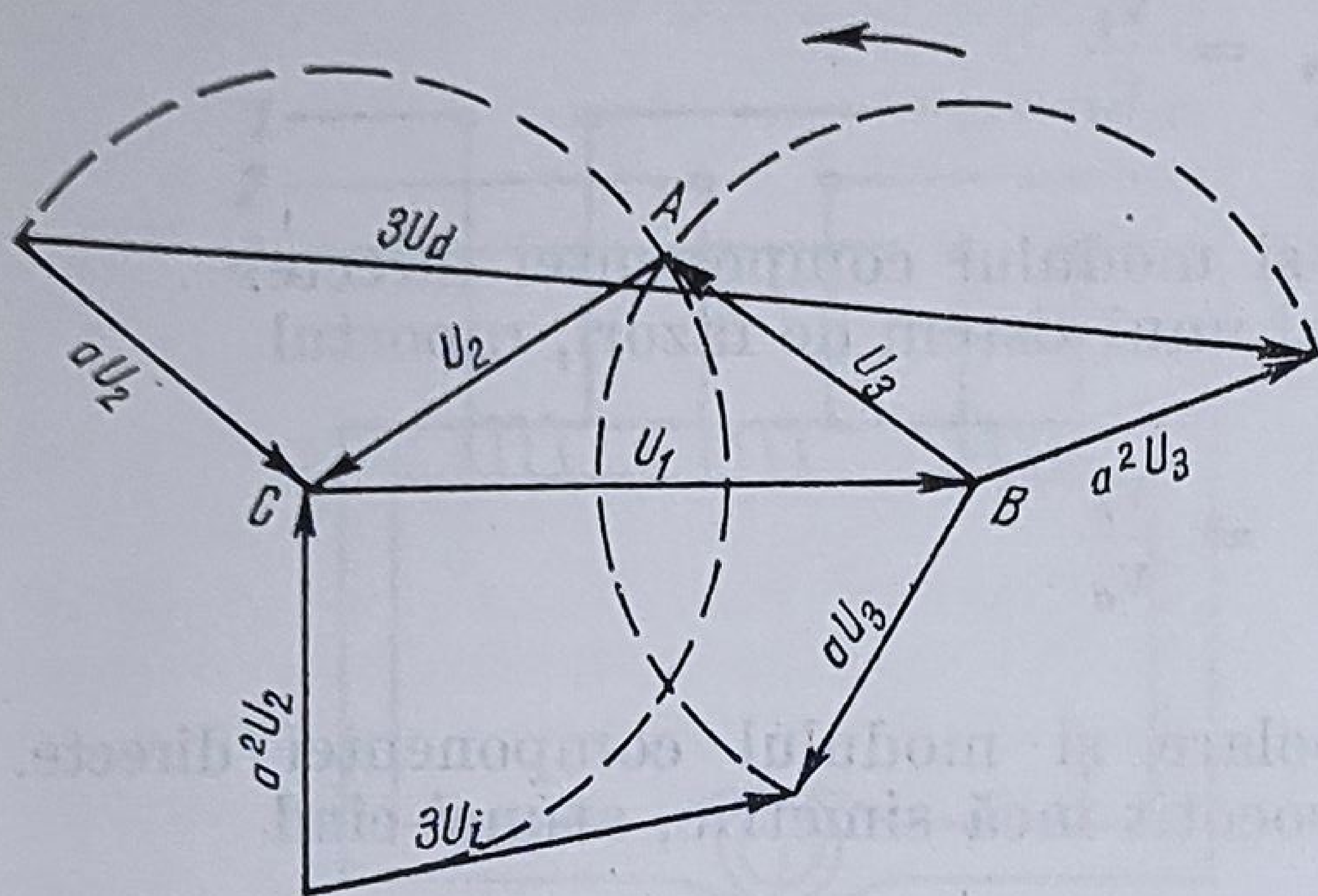


Fig. 8.17. Metoda de determinare a componentelor simetrice pentru sisteme în triunghi.

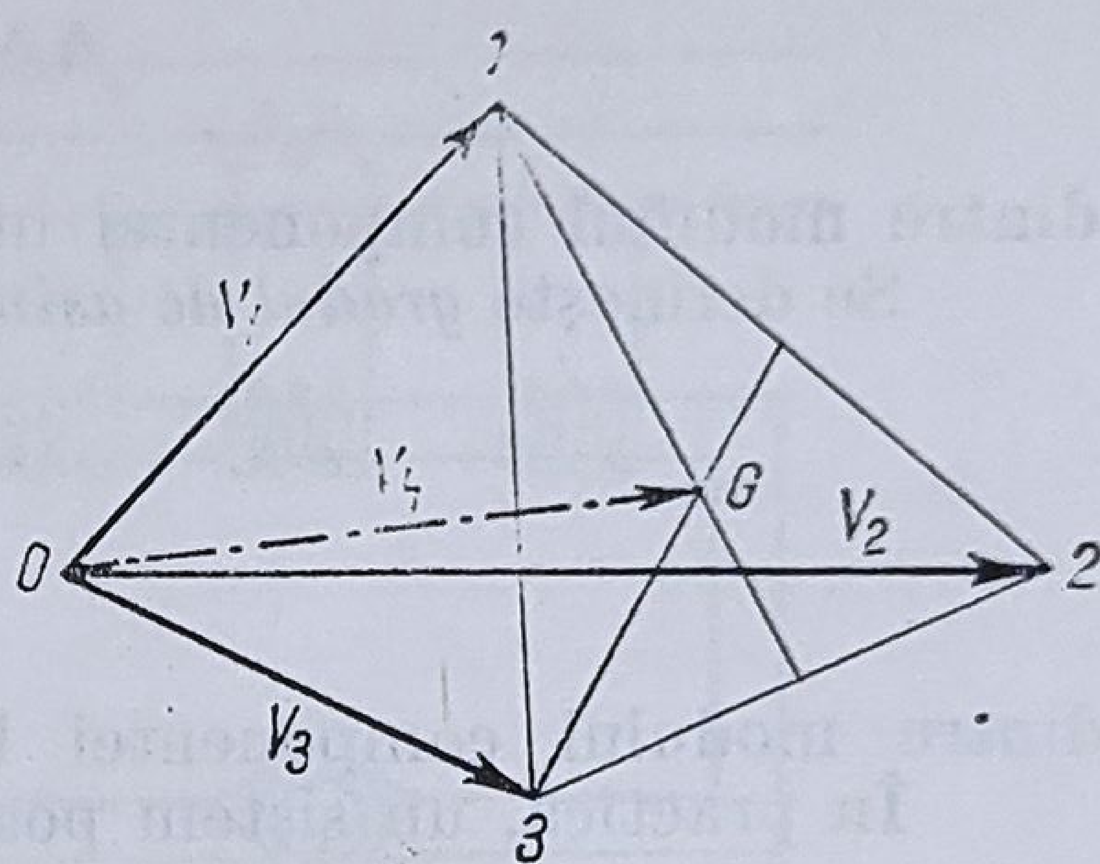


Fig. 8.18. Determinarea componentei homopolare.

4. *Metodă pentru construirea componentei homopolare.* Utilizînd proprietatea sistemelor de fazori cu aceleași vîrfuri și origini diferite, rezultă o metodă de determinare a componentei homopolare a unui sistem oarecare de fazori. Fie sistemul de fazori (fig. 8.18)

$$S(\underline{V}) = (\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3).$$

Se construiește triunghiul format din vîrfurile fazorilor acestui sistem. Fie G centrul de greutate al acestui triunghi; el este în același timp originea unui sistem pur, $S(\underline{V}')$, avînd aceleași vîrfuri comune cu ale sistemului $S(\underline{V})$. Din cele ce preced rezultă

$$\underline{V}_h = OG + \underline{V}'_h$$

Dar sistemul $S(\underline{V}')$ fiind pur, $\underline{V}'_h = 0$ și deci,

$$\underline{V}_h = \overline{OG}.$$

Metoda este deci următoarea: Se construiește centrul de greutate al triunghiului format de vîrfurile fazorilor sistemului dat. Componenta homopolară este dată în direcție și în mărime de vectorul $\overline{OG}$.

OBSERVAȚIE: Există și alte metode grafice de descompunere a unui sistem de vectori în componentele sale simetrice; aceste metode se bazează fie direct pe relațiile de definiție ale componentelor simetrice, fie pe unele proprietăți ale sistemelor trifazate.

8.3.7. GRADUL DE DEZECHILIBRARE AL UNUI SISTEM TRIFAZAT DE FAZORI

Gradul de dezechilibrare al unui sistem de fazori se definește cu ajutorul raportului dintre diversele componente simetrice ale sistemului.

Se definește *gradul de disimetrie* al unui sistem de fazori, raportul

$$\varepsilon_i = \frac{V_i}{V_d}$$

dintre modulul componentei inverse și modulul componentei directe.

Se definește *gradul de asimetrie* al unui sistem de fazori, raportul

$$\varepsilon_h = \frac{V_h}{V_d}$$

dintre modulul componentei homopolare și modulul componentei directe.

În practică, un sistem poate fi socotit încă simetric, atunci cînd

$$\varepsilon_i \leqslant 5\% \quad \text{și} \quad \varepsilon_h \leqslant 5\%.$$

8.3.8. MĂSURAREA COMPONENTELOR SIMETRICE

8.3.8.1 Măsurarea componentei homopolare de curent și de tensiune. Componenta homopolară a unui sistem trifazat oarecare este dată de relația (8.11)

$$\underline{V}_h = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3).$$

Deci, pentru a măsura componenta homopolară de curent sau de tensiune a unui sistem trifazat oarecare, trebuie făcută suma acestor curenți sau tensiuni. Aceasta se poate face prin mai multe metode :

a) Legînd în paralel bobinajele secundare a trei transformatoare de curent (fig. 8.19) se obține suma celor trei curenți, deci triplul componentei homopolare de curent.

b) De asemenea, se poate obține această componentă alimentînd direct (fig. 8.20, *a*), sau prin intermediul unor transformatoare de măsură (fig. 8.20, *b*), un aparat de inducție.

c) În cazul unui transformator sau al unui alternator cu conexiunea în stea, se poate măsura componenta homopolară montînd un ampermetru direct (fig. 8.21, *a*), sau prin intermediul unui transformator (fig. 8.21, *b*), între neutrul mașinii și pămînt.

d) Pentru măsurarea componentei homopolare de tensiune se utilizează montaje constituite pe aceleași principii (fig. 8.22, *a*, *b*, *c*).

Aparatajul necesar pentru măsurarea componentelor homopolare de curent și de tensiune este format din transformatoare de măsură, de curent sau de tensiune și din ampermetre sau voltmetre de curent alternativ etalonate direct în mărimea de măsurat.

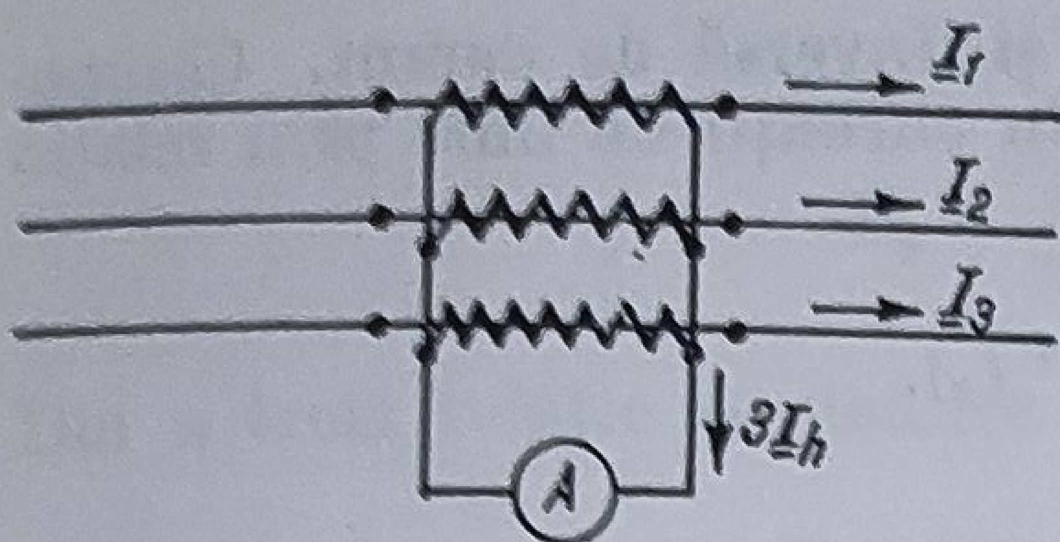
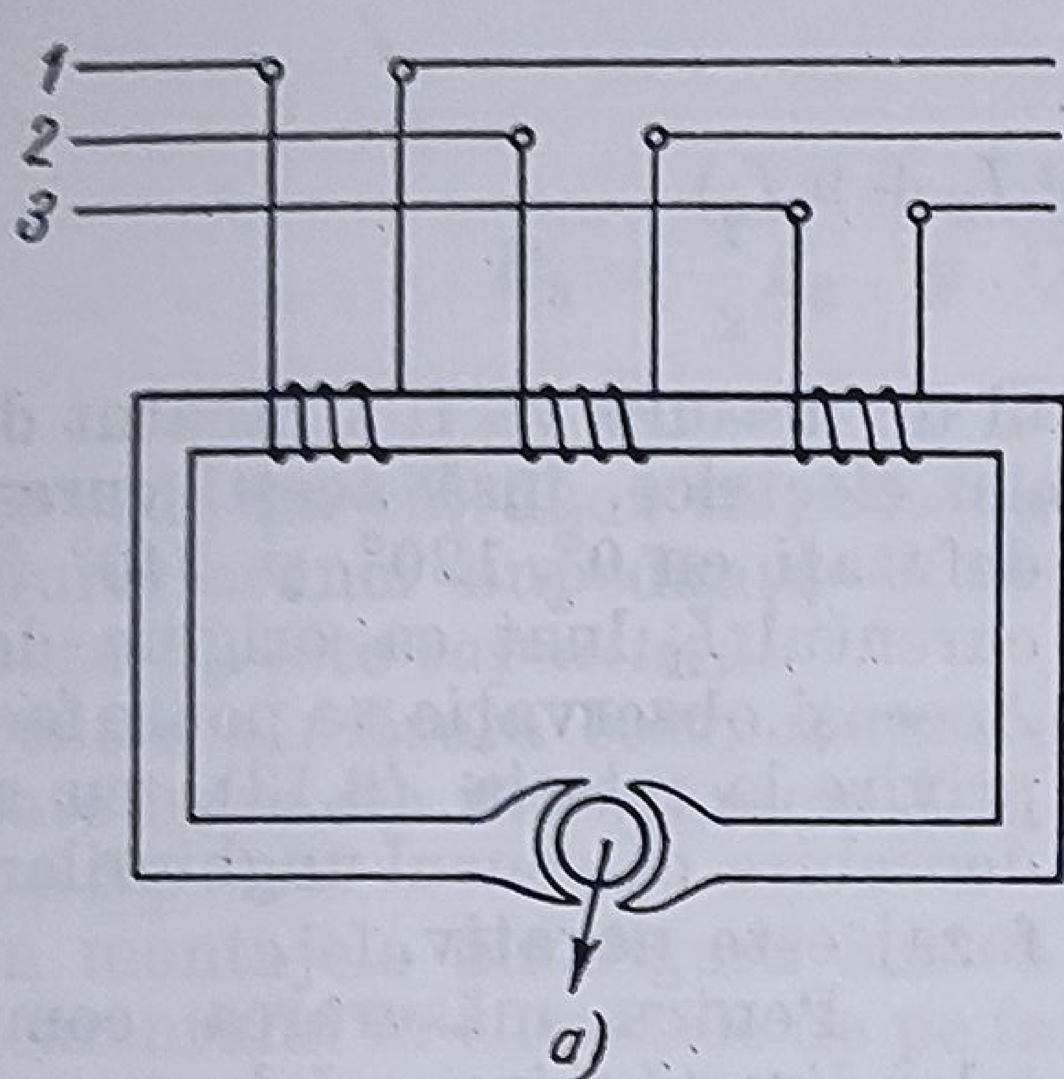


Fig. 8.19. Măsurarea componentei homopolare de curent.



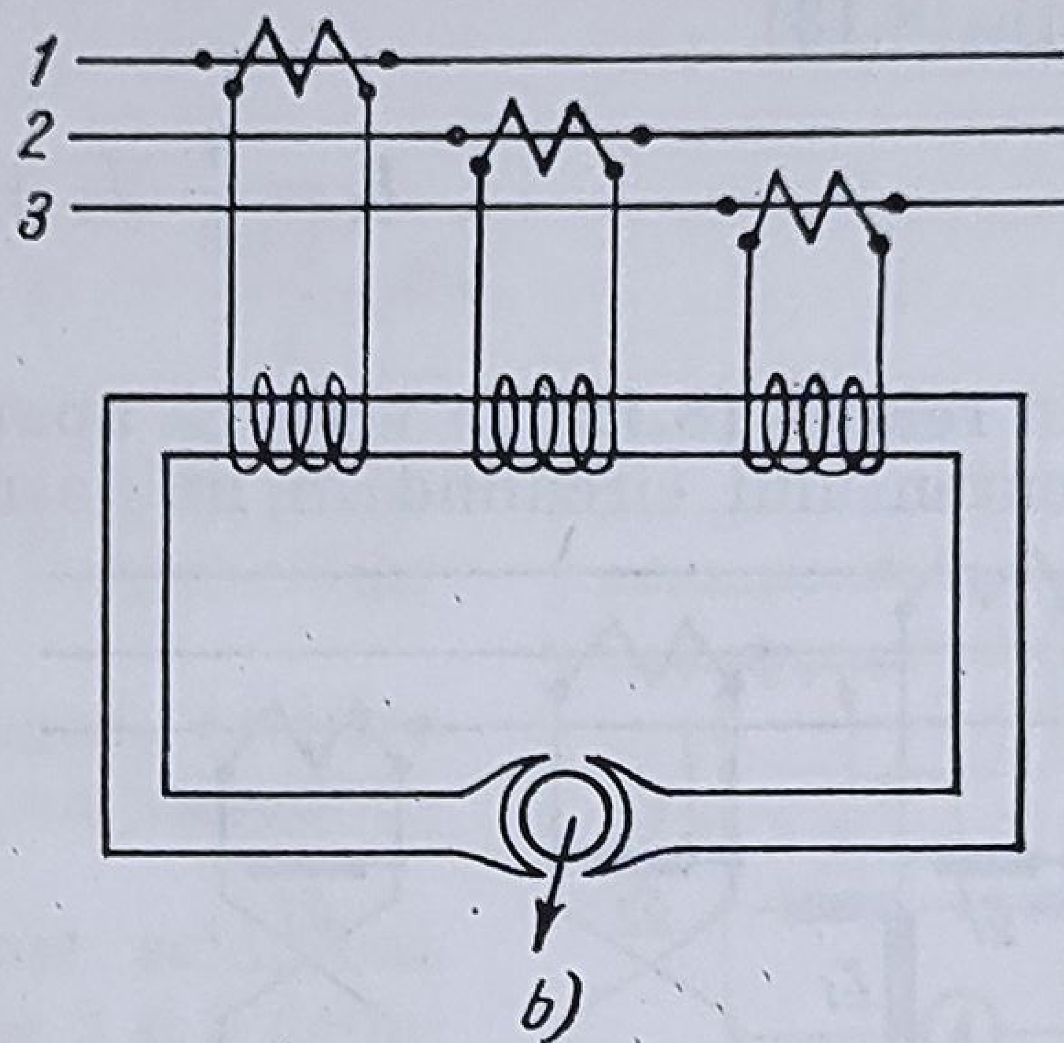
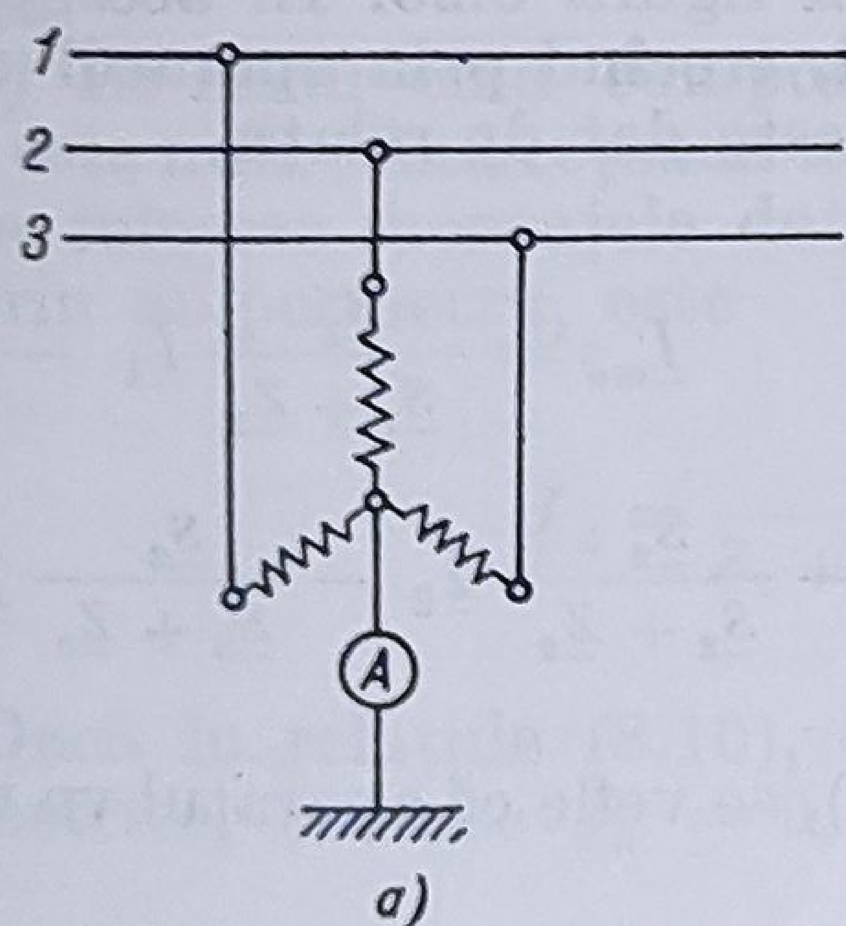


Fig. 8.20. Măsurarea componentei homopolare de curent cu ajutorul aparatelor de inducție.



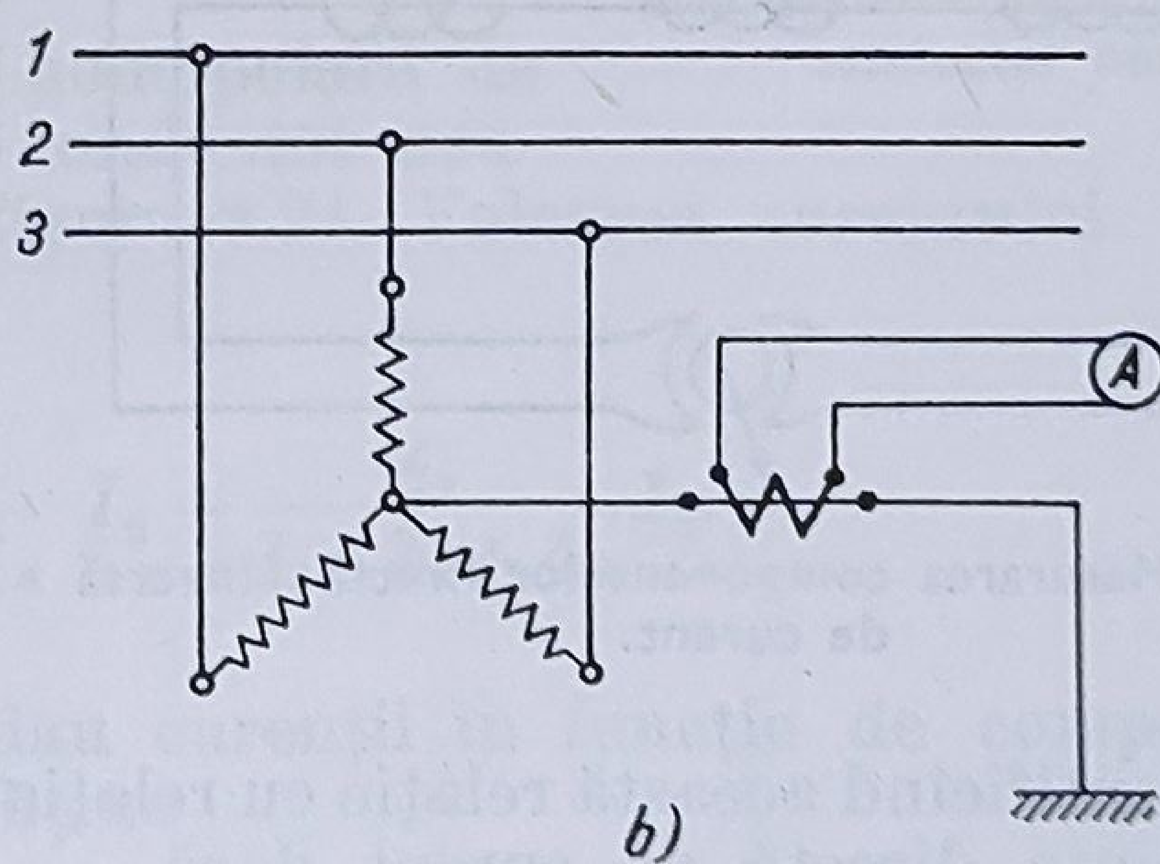
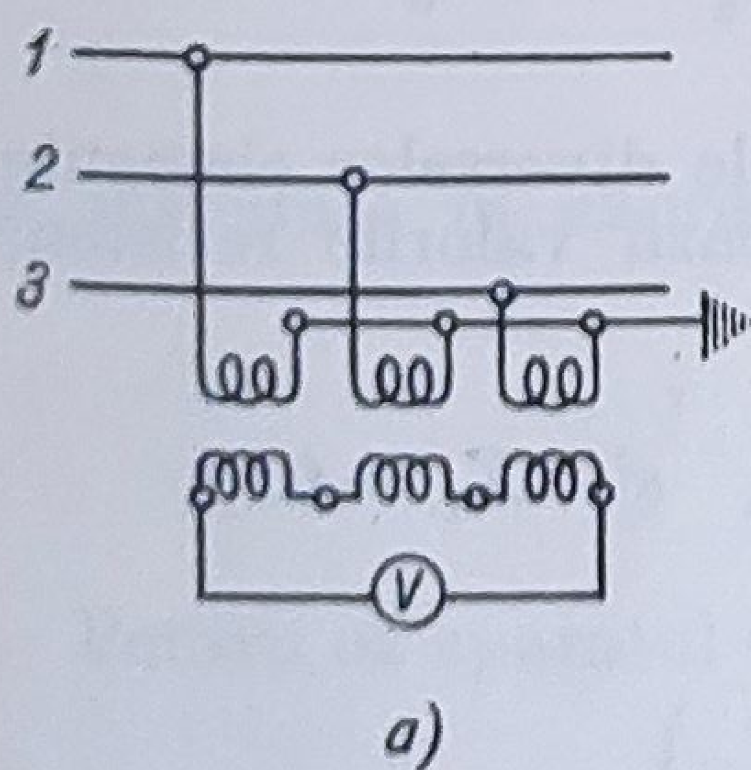
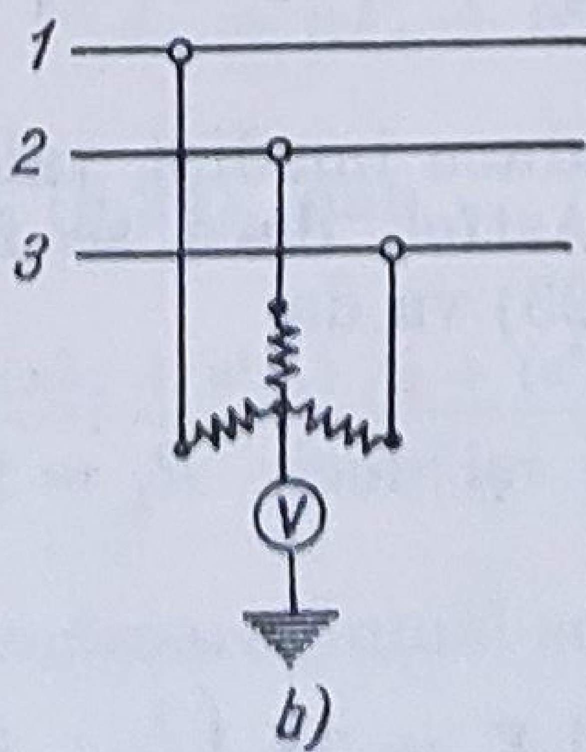


Fig. 8.21. Măsurarea componentei homopolare pe neutrul unui alternator sau transformator.





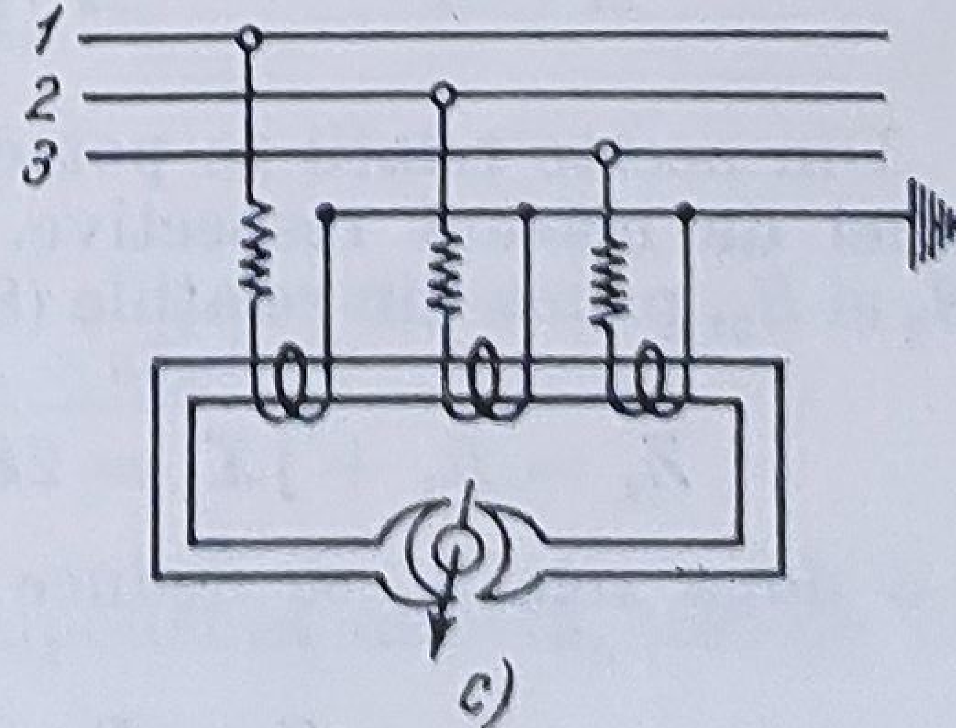


Fig. 8.22. Măsurarea componentei homopolare de tensiune.

8.3.8.2. **Măsurarea componentelor directă și inversă de curent.** Componenta directă de curent poate fi determinată din curenții de linie prin relația (8.12)

$$\underline{I}_d = \frac{1}{3}(\underline{I}_1 + a\,\underline{I}_2 + a^2\,\underline{I}_3).$$

De asemenea, componenta inversă poate fi determinată în același mod prin relația (8.13)

$$\underline{I}_i = \frac{1}{3}(\underline{I}_1 + a^2\,\underline{I}_2 + a\,\underline{I}_3).$$

Din relația (8.12) se vede că aparatul de măsură va fi străbătut de totalitatea curentului circulînd în liniile rețelei electrice, însă acești curenți sînt defazați cu 0°, 120° și 240° față de curentul $\underline{I}_1$ luat ca origine de fază. Aceeași observație se poate face și cu privire la relația (8.13), cu singura deosebire că sensul unghiurilor de defazaj este negativ.

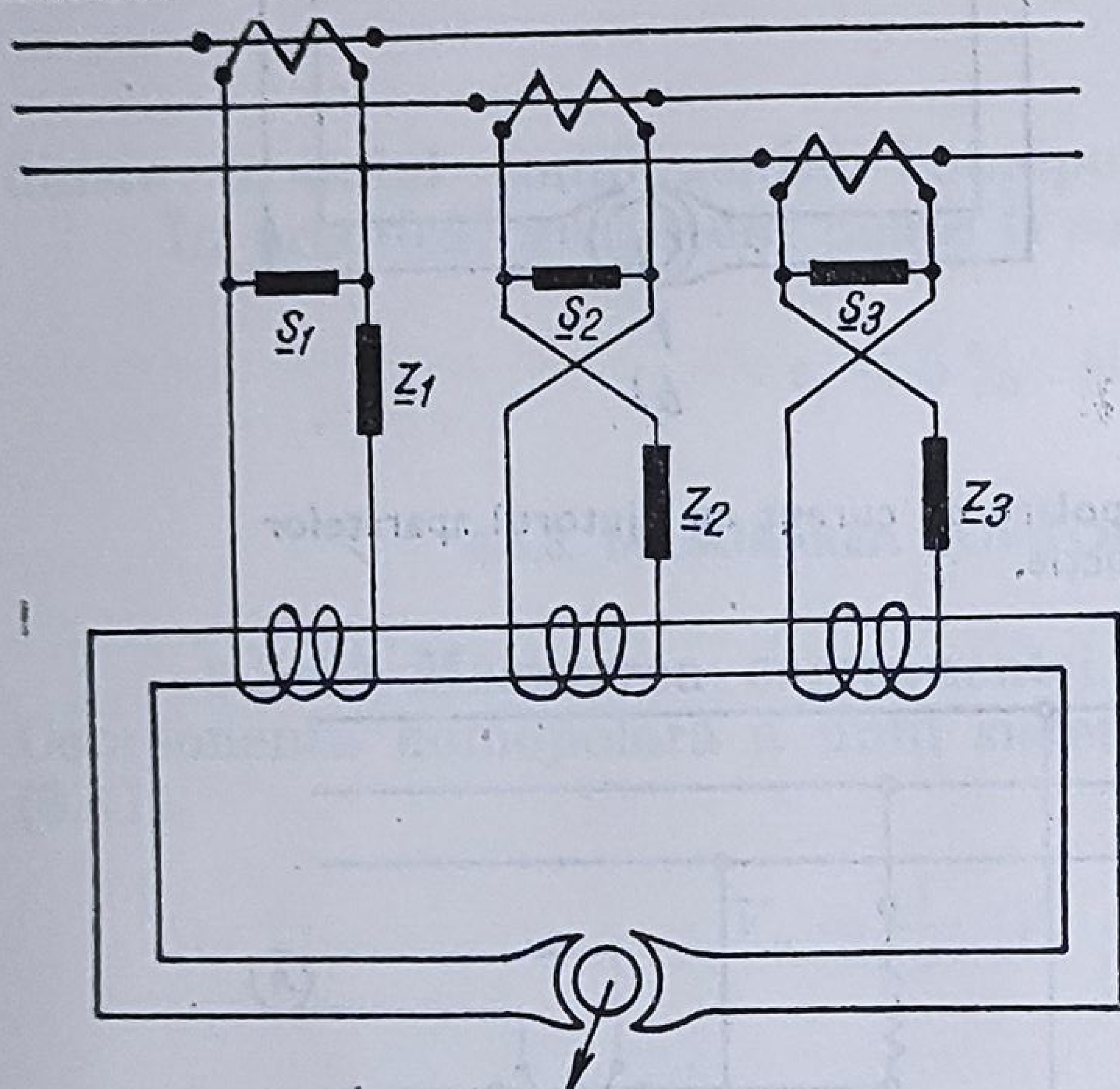


Fig. 8.23. Măsurarea componentelor directă și inversă de curent.

Pentru măsurarea componentelor directă și inversă de curent există mai multe montaje.

a) Un astfel de montaj este cel din figura 8.23. În acest caz curentul, trecînd prin aparatul de măsură, este dat de relația

$$\underline{I}_{md} = \frac{\underline{S}_1}{\underline{S}_1 + \underline{Z}_1}\underline{I}_1 - \frac{\underline{S}_2}{\underline{S}_2 + \underline{Z}_2}\underline{I}_2 - \frac{\underline{S}_3}{\underline{S}_3 + \underline{Z}_3}\underline{I}_3.$$

Identificînd această relație cu relația (8.12), se vede că aparatul va măsura componenta directă de curent dacă

$$\frac{\underline{S}_1}{\underline{S}_1 + \underline{Z}_1} = \frac{1}{3};\ \frac{\underline{S}_2}{\underline{S}_2 + \underline{Z}_2} = -\frac{1}{3}a;\ \frac{\underline{S}_3}{\underline{S}_3 + \underline{Z}_3} = -\frac{1}{3}a^2. \qquad (8.32)$$

Din aceste relații se pot deduce imediat valorile diverselor elemente ale schemei de măsură respective. Astfel, dacă se fixează valorile rezistențelor S_1, S_2 și S_3, prima din relațiile (8.23) va da

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}X_1 = 2S_1 \quad \text{și deci} \quad R_1 = 2S_1 \quad \text{și} \quad X_1 = 0.$$

Din a doua relație, se deduce

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j}\,X_2 = 3S_2\left(\frac{1}{6} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

şi deci

$$R_2 = \frac{1}{2} S_2 \quad \text{şi} \quad X_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} S_2.$$

Din a treia relaţie se deduce

$$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_3 = 3S_3\left(\frac{1}{6} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

şi deci

$$R_3 = \frac{1}{2} S_3 \quad \text{şi} \quad X_3 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} S_3.$$

Se vede dar că, dacă impedanţele $\underline{S}$ sînt rezistenţe pure, atunci impedanţa $\underline{Z}_2$ este *inductivă* iar impedanţa $\underline{Z}_3$ este *capacitivă*.

Pentru a măsura componenta inversă, trebuie schimbate între ele impedanţele $\underline{S}_2$ şi $\underline{Z}_2$ cu impedanţele $\underline{S}_3$ şi $\underline{Z}_3$.

În montajele din figura 8.23 a fost schimbat sensul curentului în circuitele de pe fazele 2 şi 3 deoarece, în caz contrar, s-ar fi obţinut pentru $\underline{Z}_2$ şi $\underline{Z}_3$ argumente mai mari de 90°, ceea ce ar fi condus la valori negative pentru rezistenţe — lucru nerealizabil în practică.

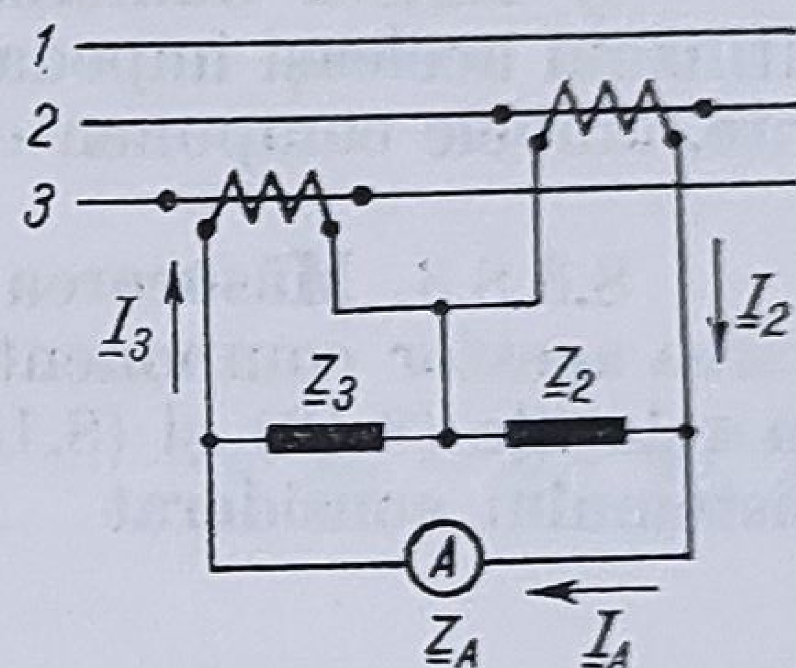


Fig. 8.24. Măsurarea componentelor directă şi inversă de curent într-o reţea trifazată fără conductor neutru.

b) În cazul cînd componenta homopolară de curent este nulă (cînd reţeaua nu are conductor neutru), se folosesc montajele date în figura 8.24. Valoarea curentului $\underline{I}_A$, trecînd prin ampermetru, este

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_A} \underline{I}_2 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_A} \underline{I}_3. \tag{8.24}$$

Dacă în relaţiile (8.10), care dau curenţii în funcţie de componentele lor simetrice, se face $\underline{I}_h = 0$, se obţine

$$\underline{I}_2 = a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i$$

$$\underline{I}_3 = a\underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i$$

care, introduse în expresia (8.24), dau

$$\underline{I}_A = \frac{(a\underline{Z}_3 + a^2\underline{Z}_2)\,\underline{I}_d + (a^2\underline{Z}_3 + a\underline{Z}_2)\underline{I}_i}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_A},$$

Pentru ca aparatul să măsoare numai componenta directă, trebuie ca

$$a^2 \underline{Z}_3 + a\underline{Z}_2 = 0,$$

de unde

$$\underline{Z}_3 = -\frac{1}{a}\,\underline{Z}_2 = -\,a^2\,\underline{Z}_2 = \underline{Z}_2\,|\underline{60^\circ}\,. \tag{8.25}$$

Pentru ca aparatul să măsoare numai componenta inversă, trebuie ca

$$a\,\underline{Z}_3 + a^2\,\underline{Z}_2 = 0,$$

de unde

$$\underline{Z}_2 = -\,a^2\,\underline{Z}_3 = \underline{Z}_3\,|\underline{60^\circ}. \tag{8.26}$$

Relațiile (8.25) și (8.26) dau posibilitatea determinării impedanțelor necesare obținerii uneia sau celeilalte componente simetrice. Practic, se iau pentru impedanțele $\underline{Z}_2$ din (8.25) și $\underline{Z}_3$ din (8.26) rezistențe neinductive.

c) Există numeroase alte montaje, printre care unele care permit, ca utilizînd aceleași impedanțe, să se obțină simultan, la aparate de măsură diferite, ambele componente simetrice de curent *.

8.3.8.3. **Măsurarea componentelor directă și inversă de tensiune.** Măsurarea acestor componente se face în mod analog ca și pentru curent, pornind de la relațiile (8.12) și (8.13) care determină mărimea lor în funcție de tensiunile sistemului considerat

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3)$$

și

$$\underline{V}_i = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2 + a\underline{V}_3).$$

Din aceste relații se vede că aparatul de măsură va fi traversat de curenți proporționali cu cele trei tensiuni, însă defazați cu 0°, 120° și 240°, sensul acestor unghiuri fiind considerat pozitiv sau negativ, după componenta simetrică ce urmează a fi determinată.

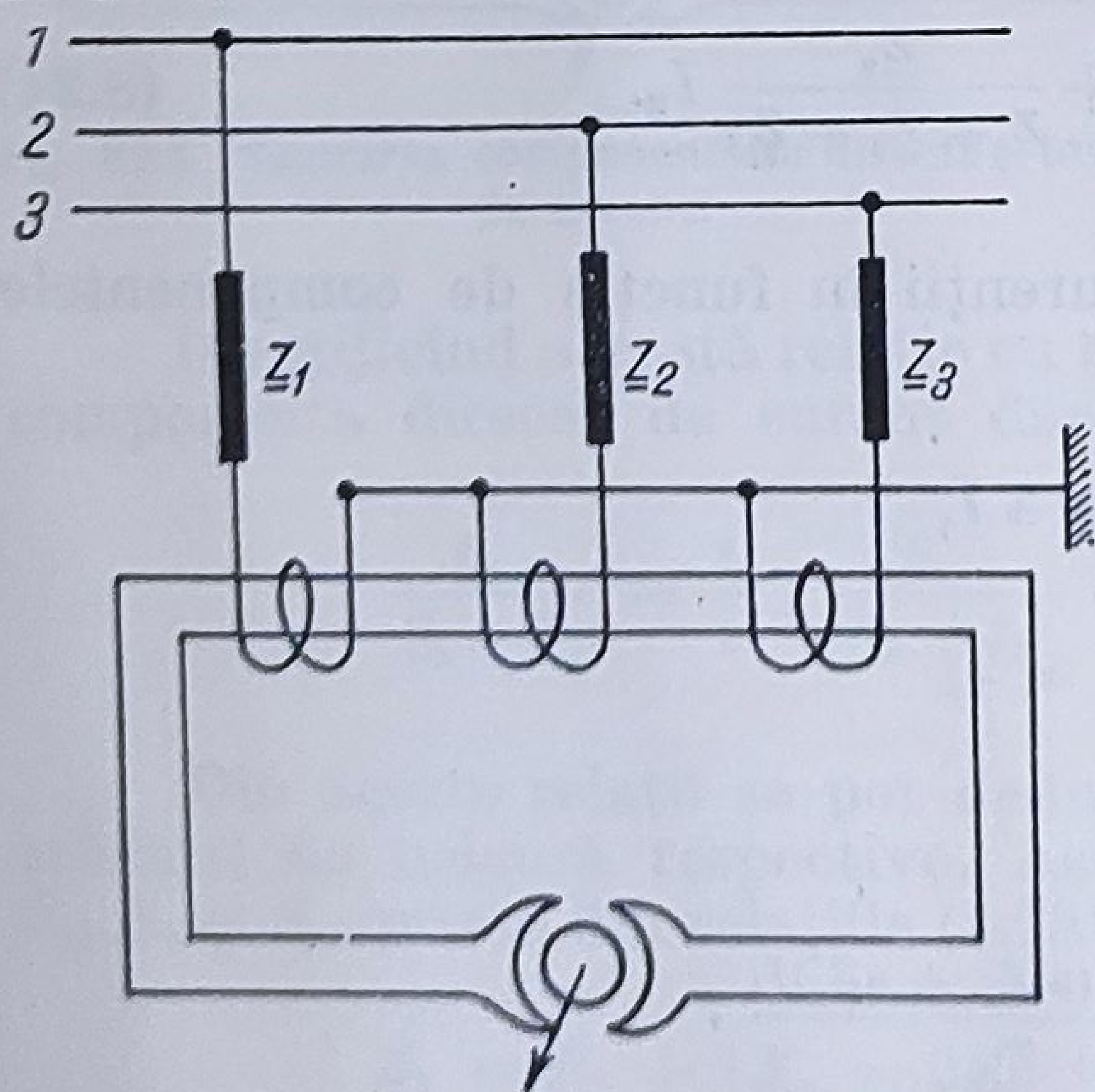


Fig. 8.25. Măsurarea componentelor directă și inversă de tensiune.

Există mai multe montaje pentru măsurarea componentelor simetrice de tensiune.

a) Astfel, în figura 8.25 se folosește un aparat de inducție pentru măsurarea acestor componente. Curentul, străbătînd aparatul de măsură, este proporțional cu

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}_1} - \frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}_2} - \frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}_3}\,. \tag{8.27}$$

Între mărimile diverselor impedanțe ale acestor montaje trebuie să existe următoarele relații :

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_1\,|\underline{60^\circ}\,; \quad \underline{Z}_3 = \underline{Z}_1\,|\underline{-\,60^\circ}\,;$$

* Vezi [140, 256]

în cazul componentelor directe, şi

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_1 \,\underline{|-60^\circ} \; ; \; \underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 \,\underline{|60^\circ} \; ;$$

în cazul componentelor inverse.

Într-adevăr, componenta directă a tensiunii este dată de relaţia (8.12); curentul care străbate aparatul este proporţional cu această tensiune. Se poate scrie deci,

$$\underline{I}_A = k\,\underline{V}_d = \frac{k}{3}(\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3). \tag{8.28}$$

Identificînd relaţiile (8.27) şi (8.28), care trebuie să reprezinte acelaşi curent, se obţine

$$\frac{k}{3}\underline{V}_1 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}_1} \quad \text{de unde rezultă} \quad \underline{Z}_1 = \frac{3}{k};$$

$$a\frac{k}{3}\underline{V}_2 = -\frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}_2} \quad - \quad \underline{Z}_2 = -\frac{1}{a}\,\frac{3}{k} = -a^2\,\underline{Z}_1 = \underline{Z}_1\,\underline{|60^\circ};$$

$$a^2\frac{k}{3}\underline{V}_3 = \frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}_3} \quad - \quad \underline{Z}_3 = -\frac{1}{a^2}\,\frac{3}{k} = -a\,\underline{Z}_1 = \underline{Z}_1\,\underline{|-60^\circ}.$$

În mod practic se alege pentru $\underline{Z}_1$ o rezistenţă pură.

b) În cazul cînd reţeaua nu are fir neutru, se pot folosi montaje analoage cu acelea folosite în cazul determinării componentelor simetrice de curent. În figura 8.26 este redat un montaj care dă simultan ambele componente.

Aplicînd teorema a II-a a lui KIRCHHOFF circuitului $T_1 Z_1' \cdot V_d Z_2' T_2$ (T_1 şi T_2 fiind cele două transformatoare de măsură), se obţine:

$$\underline{U}_{23} = \underline{Z}_2'\,\underline{I}_2' + \underline{Z}_v'\,\underline{I}_v',$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{Z}_1'\,\underline{I}_1' + \underline{Z}_v'\,\underline{I}_v',$$

$$\underline{I}_v = \underline{I}_1' + \underline{I}_2',$$

$$\underline{U}_v' = \underline{Z}_v'\,\underline{I}_v'.$$

Eliminînd curenţii $\underline{I}_v'$, $\underline{I}_1'$, $\underline{I}_2'$ dintre aceste relaţii, rezultă

$$\underline{U}_v' = \frac{\underline{Z}_v'(\underline{Z}_1'\,\underline{U}_{23} + \underline{Z}_2'\,\underline{U}_{31})}{\underline{Z}_1'\,\underline{Z}_2' + (\underline{Z}_1' + \underline{Z}_2')\,\underline{Z}_v'}.$$

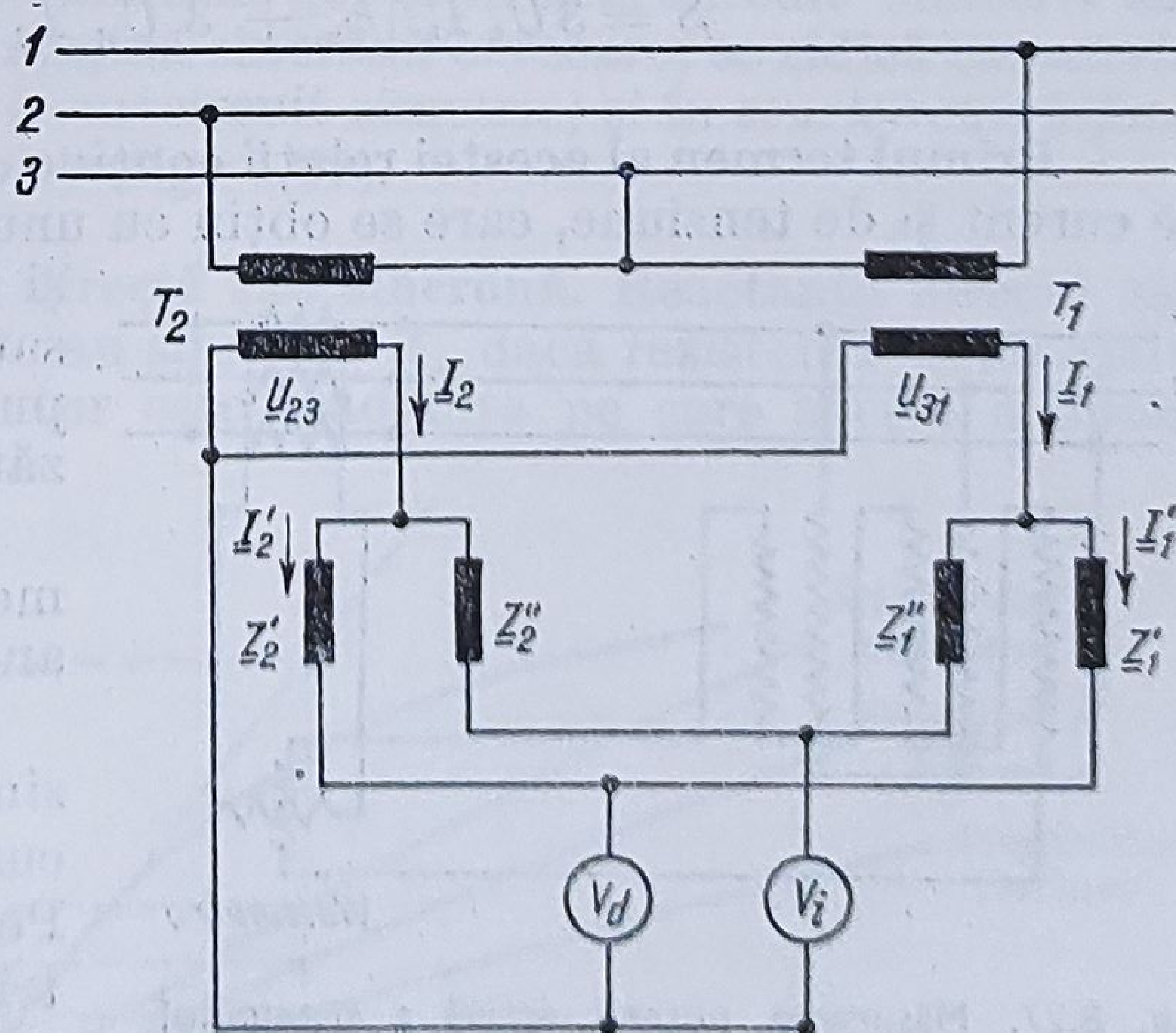


Fig. 8.26. Măsurarea simultană a componentelor directă şi inversă de tensiune, într-o reţea trifazată fără conductor neutru.

Înlocuind pe $\underline{U}_{23}$ şi pe $\underline{U}_{31}$ în funcţie de componentele lor simetrice, se găseşte

$$\underline{U}'_v = \frac{\underline{Z}'_v\,[(a^2\underline{Z}'_1 + a\,\underline{Z}'_2)\,\underline{V}_d + (a\,\underline{Z}'_1 + a^2\,\underline{Z}'_2)\underline{V}_1}{\underline{Z}'_1 \cdot \underline{Z}'_2 + (\underline{Z}'_1 + \underline{Z}'_2)\,\underline{Z}'_v}\,.$$

Pentru ca $\underline{V}'_v$ să fie proporţional cu $\underline{V}_d$ trebuie ca

$$a\,\underline{Z}'_1 + a^2\,\underline{Z}'_2 = 0,$$

de unde rezultă

$$\underline{Z}'_2 = -\,a^2\,\underline{Z}'_1.$$

În mod analog se găseşte şi pentru al doilea circuit de măsură

$$\underline{Z}''_1 = -\,a^2\,\underline{Z}''_2\,.$$

În general se ia

$$\underline{Z}'_1 = \underline{Z}''_2 = R$$

şi rezultă

$$\underline{Z}'_2 = \underline{Z}''_1 = R\,\underline{|\,60°}\,.$$

8.3.8.4. **Măsurarea puterii active şi reactive corespunzînd componentelor simetrice.** Puterea aparentă într-un sistem trifazat poate fi exprimată prin relaţia*

$$\underline{S} = P + j\,Q = 3\underline{S}_h + 3\underline{S}_d + 3\underline{S}_i.$$

Această relaţie poate fi pusă sub forma

$$\underline{S} = 3U_h I_h \,\underline{|\varphi_h} + 3\,U_d\,I_d\,\underline{|\varphi_d} + 3U_i\,I_i\,\underline{|\varphi_i}\,.$$

Primul termen al acestei relaţii conţine componentele simetrice homopolare de curent şi de tensiune, care se obţin cu unul din montajele indicate (fig. 8.20 şi 8.22). Aplicîndu-le unui wattmetru sau unui varmetru, se poate măsura puterea activă sau reactivă corespunzătoare termenului $\underline{S}_h$ (fig. 8.27).

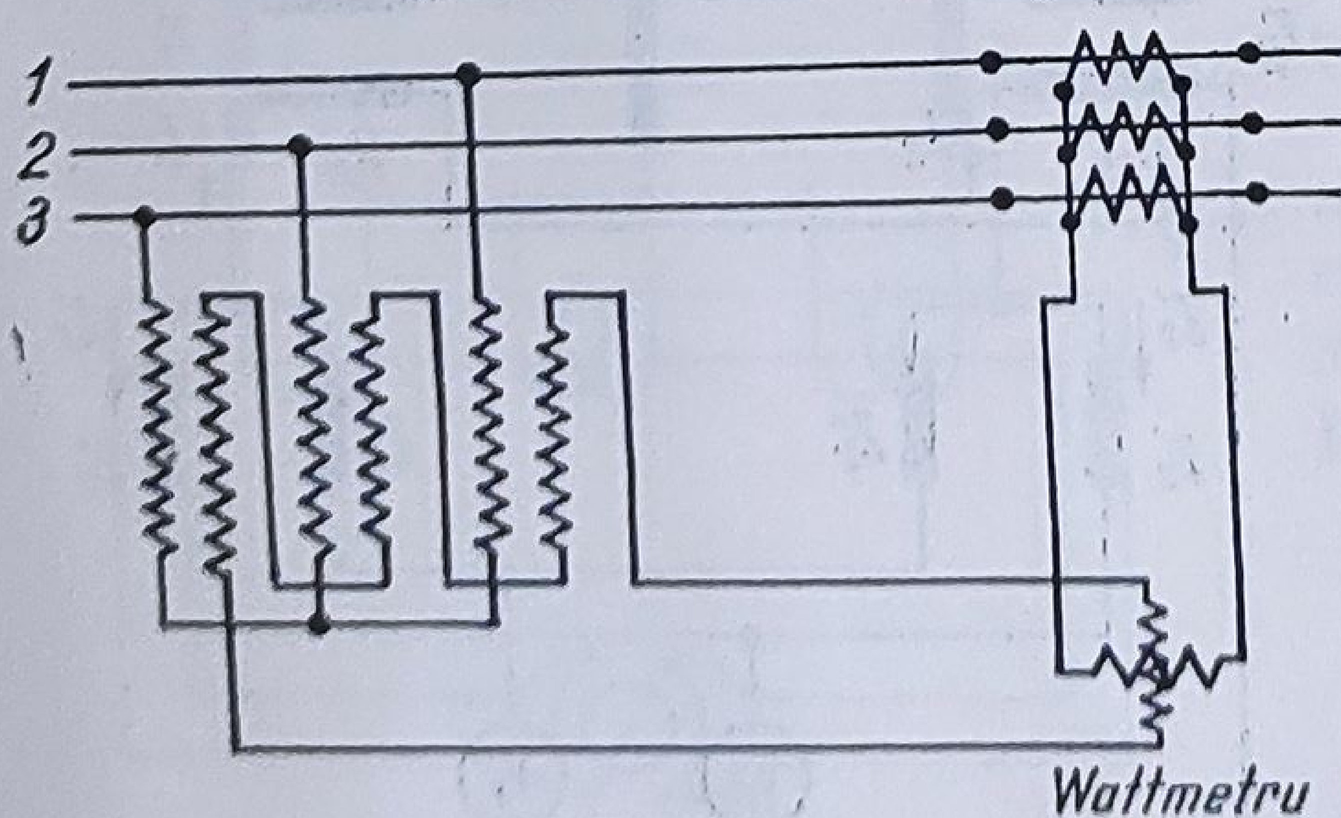


Fig. 8.27. Măsurarea puterii activă a sistemului homopolar.

Puterile corespunzătoare termenilor $\underline{S}_d$ şi $\underline{S}_i$ se măsoară în mod analog.

În general, suma celor trei tensiuni $\underline{U}_{10}$, $\underline{U}_{20}$ şi $\underline{U}_{30}$ şi a celor trei curenţi $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ şi $\underline{I}_3$ nu este nulă. Pentru a obţine componentele simetrice ale acestora, trebuie să se aplice relaţiile (8.12) şi (8.13).

---

* Vezi 8.4.3.1.

Pentru a simplifica operaţiile şi pentru a reduce numărul de fazori necesari pentru determinarea acestor componente la doi, este mai comod să se utilizeze diferenţa fazorilor tensiune

$$\underline{U}_{10} - \underline{U}_{20} = \underline{U}_{12}, \quad \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30} = \underline{U}_{23}, \quad \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10} = \underline{U}_{31}$$

şi diferenţa fazorilor curent

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2, \ \underline{I}_2 - \underline{I}_3, \ \underline{I}_3 - \underline{I}_1$$

în locul fazorilor înşişi. Suma acestor fazori fiind evident nulă, componenta simetrică va fi perfect determinată numai de unul dintre aceşti fazori.

Ţinînd seama de montajele date în figurile 8.24 şi 8.26 (din care se foloseşte numai o parte), se obţine schema de montaj din figura 8.28 cu ajutorul căreia se poate determina puterea activă sau reactivă din termenii $\underline{S}_d$ şi $\underline{S}_i$, după ordinea în care sînt legate impedanţele $\underline{Z}_2$ şi $\underline{Z}_3$.

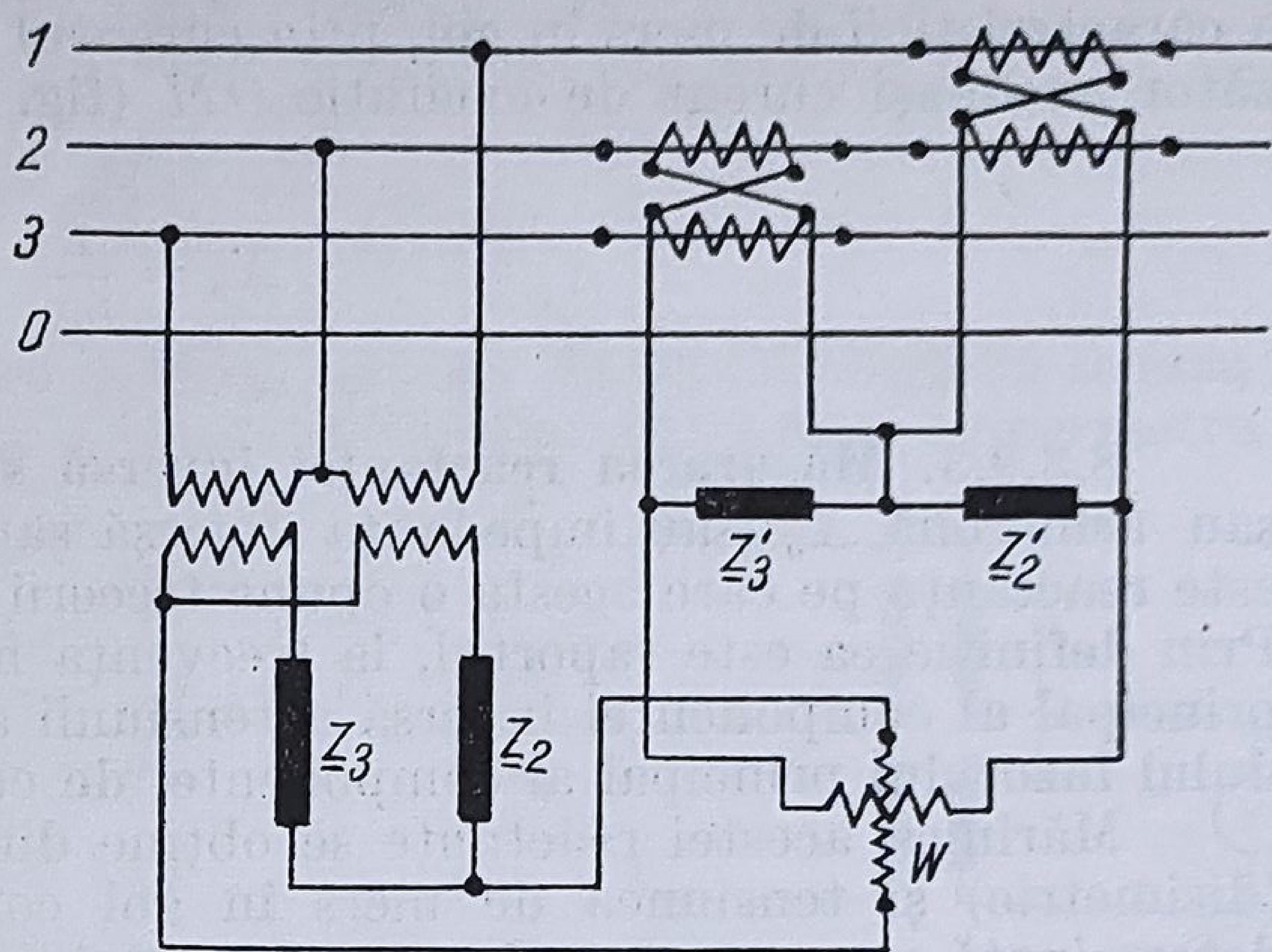


Fig. 8.28. Măsurarea puterii active a sistemului direct sau invers.

8.3.9. MĂSURAREA REACTANŢELOR DIRECTĂ, INVERSĂ ŞI HOMOPOLARĂ A UNEI MAŞINI SINCRONE

8.3.9.1. **Generalităţi.** În calculele curenţilor de scurtcircuit din reţelele electrice, este necesar să se cunoască diversele reactanţe ale maşinilor rotative din reţea, în special ale maşinilor sincrone. Determinarea acestor reactanţe se face cu ajutorul caracteristicilor de mers în gol şi în scurtcircuit simetric sau disimetric. În acest scop, pentru o maşină sincronă oarecare, se ridică *caracteristicile de mers în scurtcircuit trifazat* (scurtcircuit simetric) şi *în scurtcircuit bifazat* şi *monofazat* (scurtcircuit disimetric) (fig. 8.29).

8.3.9.2. **Măsurarea reactanţei directă sau sincronă.** Reactanţa directă sau sincronă X_s (sau impedanţa directă sau sincronă $\underline{Z}_s$ dacă rezistenţa bobinajului nu este neglijabilă) a unui alternator este reactanţa pe care acesta o opune

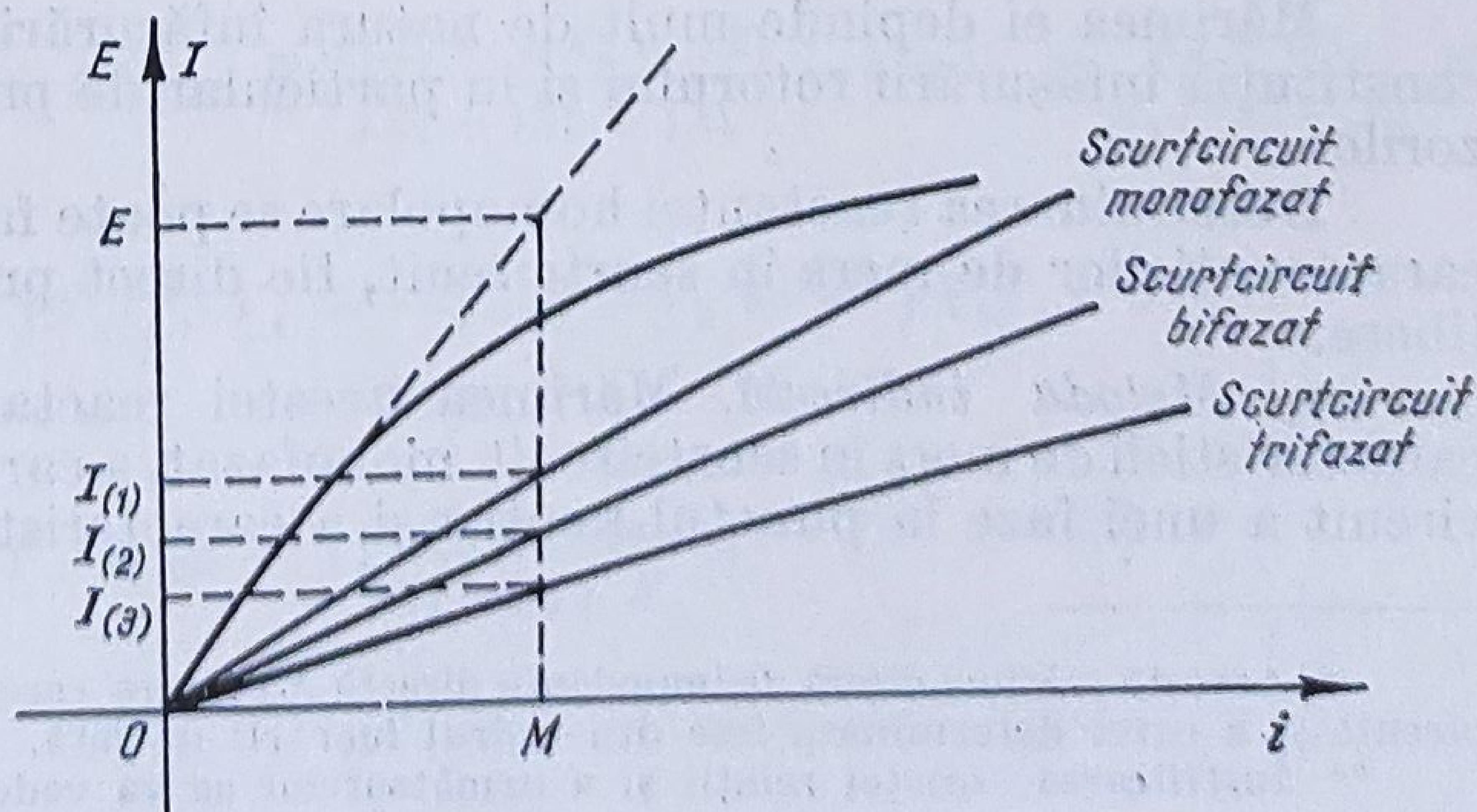


Fig. 8.29. Caracteristicile de scurtcircuit ale unui alternator.

trecerii componentei *directe* a curenţilor. Prin definiţie ea este raportul, la frecvenţa normală, dintre modulul forţei electromotoare a alternatorului pe fază la borne şi modulul curentului de scurtcircuit simetric produs la bornele sale, la funcţionarea în regim permanent de scurtcircuit*. Mărimea acestei reactanţe se obţine făcînd cîtul dintre tensiunea pe fază, determinată pe porţiunea dreaptă a caracteristicii de mers în gol, prin curentul de scurtcircuit simetric corespunzător aceluiaşi curent de excitaţie OM (fig. 8.29). Se obţine**

$$X_s = \frac{E}{I_{(3)}} \tag{8.29}$$

8.3.9.3. **Măsurarea reactanţei inversă sau asincronă.** Reactanţa inversă sau asincronă X_a (sau impedanţa inversă sau asincronă $\underline{Z}_a$) a unui alternator este reactanţa pe care acesta o opune trecerii componentei *inverse* a curenţilor. Prin definiţie ea este raportul, la frecvenţa normală, dintre modulul fazorului principal al componentei inversă a tensiunii aplicată la bornele maşinii şi modulul fazorului principal al componentei de curent produs în indus.

Mărimea acestei reactanţe se obţine din curentul de scurtcircuit bifazat (disimetric) şi tensiunea de mers în gol corespunzătoare aceleiaşi excitaţii, determinată pe porţiunea dreaptă a caracteristicii de mers în gol, cu ajutorul relaţiei

$$I_{(2)} = \frac{E\sqrt{3}}{X_s + X_a}. \tag{8.30}$$

Din această relaţie, ţinînd seama de relaţia (8.29), se obţine

$$X_a = E\left(\frac{\sqrt{3}}{I_{(2)}} - \frac{1}{I_{(3)}}\right).$$

8.3.9.4. **Măsurarea reactanţei homopolară.** Reactanţa homopolară sau de nul X_0 (sau impedanţa homopolară sau de nul $\underline{Z}_0$) a unui alternator este reactanţa pe care acesta o opune trecerii componentei homopolare a curenţilor. Reactanţa homopolară a unei maşini sincrone şi, în general, a unui sistem de înfăşurări aşezate simetric într-o armătură şi destinate a produce un cîmp învîrtitor, este o mărime foarte mică în raport cu reactanţa directă şi chiar cu aceea inversă.

Mărimea ei depinde mult de natura înfăşurării; ea este independentă de constituţia înfăşurării rotorului şi în particular de prezenţa sau de lipsa amortizorilor.

Determinarea reactanţei homopolare se poate face fie indirect, prin metoda caracteristicilor de mers în scurtcircuit, fie direct prin metoda tensiunii fazelor libere.

a) Metoda indirectă. Mărimea acestei reactanţe se obţine cu ajutorul caracteristicii de mers în scurtcircuit monofazat, a caracteristicii de mers în scurtcircuit a unei faze la punctul neutru şi a caracteristicii de mers în gol. Pentru

---

* Această mărime diferă de impedanţa directă X'_d, care corespunde curentului iniţial de scurtcircuit şi a cărei determinare iese din cadrul lucrării de faţă.

** Justificarea acestei relaţii şi a următoarelor se va vedea în 8.4.5.6.

un anumit curent de excitație se determină valorile curenților de scurtcircuit corespunzători și tensiunea de mers în gol pe porțiunea dreaptă a caracteristicii. Utilizînd relația*

$$I_{(1)} = \frac{3E}{X_s + X_a + X_0} \tag{8.31}$$

și relația (8.30), rezultă

$$X_0 = E\left(\frac{3}{I_{(1)}} - \frac{\sqrt{3}}{I_{(2)}}\right).$$

b) Metoda directă. Se realizează montajul din figura 8.30 legîndu-se faza 1 în scurtcircuit cu neutrul mașinii sincrone prin intermediul unui ampermetru; între bornele 2, 3 și neutrul mașinii sincrone se leagă două transformatoare de tensiune, avînd secundarele legate în serie cu un voltmetru.

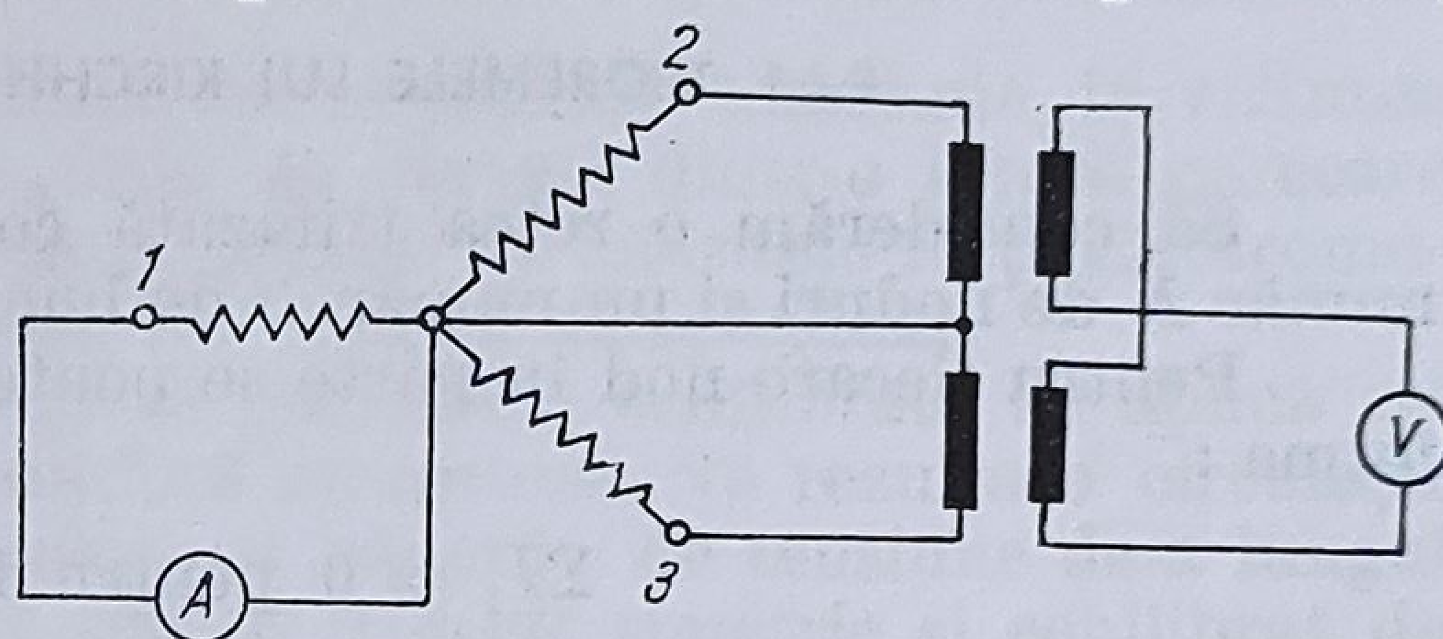


Fig. 8.30. Măsurarea reactanței homopolare.

Dacă $\underline{I}_{(1)}$ este curentul măsurat de ampermetru, $\underline{V}_1$ și $\underline{V}_2$ sînt respectiv tensiunile măsurate pe fazele 2 și 3, reactanța homopolară este dată de relația

$$X_0 = \frac{V_2 + V_3}{\underline{I}_{(1)}}. \tag{8.32}$$

Într-adevăr, curentul $\underline{I}_{(1)}$ este dat de relația (8.31). Pe de altă parte, în cazul unui scurtcircuit al unei faze față de neutru, componentele simetrice ale curentului sînt*

$$\underline{I}_d = \underline{I}_i = \underline{I}_h = \frac{\underline{E}}{jX_s + jX_a + jX_0}.$$

Scriind tensiunile de pe fazele 2 și 3 în funcție de componentele simetrice, se găsește succesiv

$$\underline{V}_2 = \underline{V}_h + a^2\underline{V}_d + a\underline{V}_i = a^2\underline{E} - (a^2jX_s\underline{I}_d + ajX_a\underline{I}_i + jX_0\underline{I}_h) = a^2\underline{E} -$$

$$- \underline{I}_d(a^2jX_s + ajX_a + jX_0) = a^2\underline{E} - \underline{E}\,\frac{a^2jX_s + ajX_a + jX_0}{jX_s + jX_a + jX_0} = a(a-1)\,\frac{X_a - aX_0}{X_0 + X_s + X_a}\,\underline{E},$$

deoarece**

$$\underline{V}_d = \underline{E} - jX_s\underline{I}_d, \ \underline{V}_i = -jX_0\underline{I}_i, \ \underline{V}_h = -jX_0\underline{I}_h.$$

Analog, se găsește

$$\underline{V}_3 = (a-1)\,\frac{X_0 - aX_a}{X_0 + X_s + X_a}\,\underline{E}$$

* Vezi 8.4.5.4.
** Vezi relațiile (8.44).

Făcînd suma şi ţinînd seama de modul de legare al transformatoarelor de tensiune, rezultă :

$$\underline{V}_2 + \underline{V}_3 = \frac{(a-1)(a^2-1)\, jX_0\underline{E}}{jX_0 + jX_s + jX_a} = \frac{3\, X_0\underline{E}}{X_0 + X_s + X_a}$$

de unde, împărţind prin curentul $\underline{I}_{(1)}$, dat de relaţia (8.31), se obţine tocmai expresia (8.32).

8.4. CALCULUL SISTEMELOR DEZECHILIBRATE PRIN UTILIZAREA COORDONATELOR SIMETRICE

8.4.1. TEOREMELE LUI KIRCHHOFF ÎN REGIMUL DEZECHILIBRAT

Să considerăm o reţea trifazată complexă, care are pe fiecare fază un număr N de noduri şi un număr B de bucle distincte (fig. 8.31).

Pentru fiecare nod în parte se poate aplica teorema I a lui KIRCHHOFF sub forma :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\underline{I}_1 &= 0 \text{ pentru faza } 1, \\ \Sigma\underline{I}_2 &= 0 \text{ pentru faza } 2, \\ \Sigma\underline{I}_3 &= 0 \text{ pentru faza } 3. \end{aligned}\right\} \qquad (8.33)$$

Aceşti curenţi făcînd parte dintr-un sistem trifazat pot fi descompuşi în componentele simetrice corespunzătoare, utilizînd în acest scop relaţiile (8.11), (8.12) şi (8.13). Vom avea, deci, pentru toţi curenţii care intră într-un nod

$$\Sigma\underline{I}_h = \Sigma\frac{1}{3}(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = \frac{1}{3}(\Sigma\underline{I}_1 + \Sigma\underline{I}_2 + \Sigma\underline{I}_3),$$

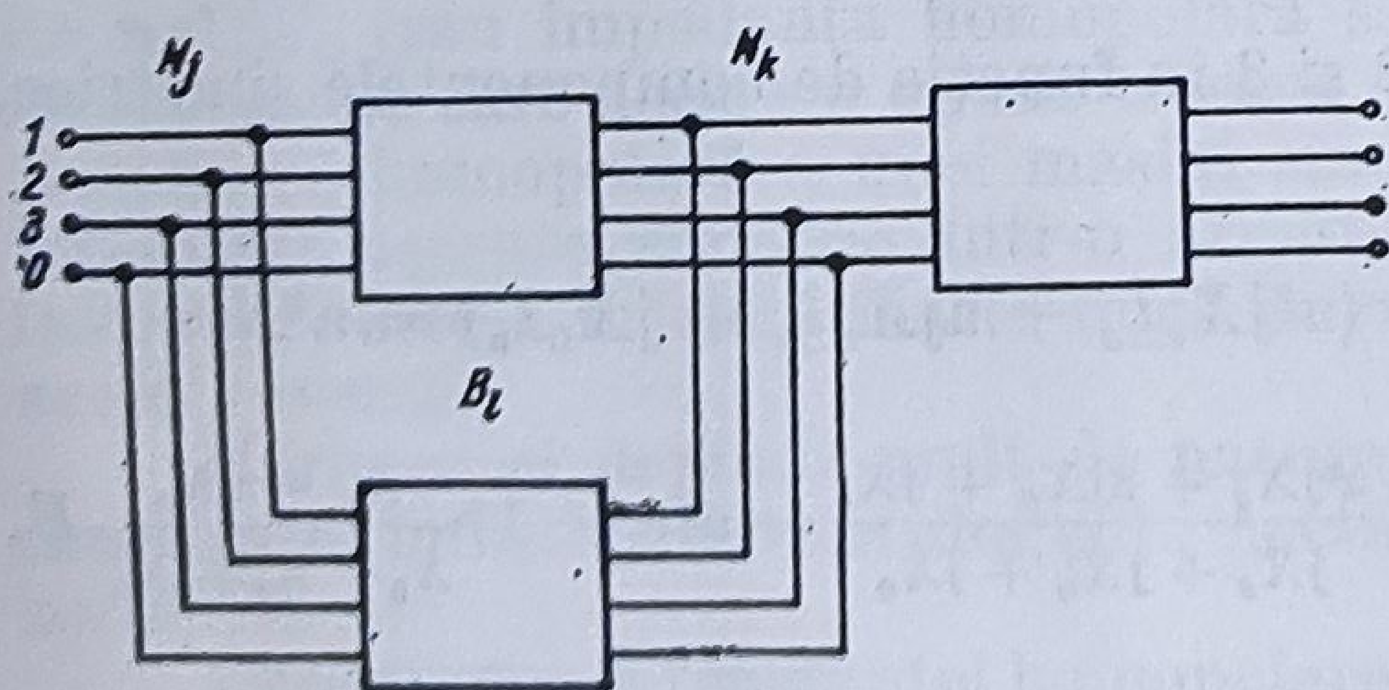


Fig. 8.31. Reţea trifazată complexă.

sau, ţinînd seama de relaţiile (8.33), rezultă

$$\Sigma\underline{I}_h = 0.$$

De asemenea, pentru componenta directă

$$\Sigma\underline{I}_d = \Sigma\frac{1}{3}(\underline{I}_1 + a\underline{I}_2 + a^2\underline{I}_3) =$$

$$= \frac{1}{3}(\Sigma\underline{I}_1 + a\Sigma\underline{I}_2 + a^2\Sigma\underline{I}_3)$$

şi deci,

$$\Sigma\underline{I}_d = 0.$$

În acelaşi mod se arată şi că

$$\Sigma\underline{I}_i = 0.$$

Rezultă dar, că teorema I a lui KIRCHHOFF se aplică întocmai şi în componente simetrice fiecărui nod al reţelei.

O demonstraţie analoagă, aplicată buclelor din reţeaua trifazată, ne va conduce şi la valabilitatea teoremei a II-a a lui KIRCHHOFF în componente simetrice sub forma

$$\Sigma \underline{U}_h = 0, \ \Sigma \underline{U}_d = 0 \ \text{şi} \ \Sigma \underline{U}_i = 0,$$

care se aplică pentru orice buclă a reţelei trifazate.

8.4.2. IMPEDANŢELE UNEI REŢELE TRIFAZATE ÎN REGIMUL DE COORDONATE SIMETRICE

Într-o reţea electrică formată numai din impedanţe constante, în virtutea principiului suprapunerii efectelor, regimul de curenţi dintr-o latură oarecare poate fi socotit ca suma diferiţilor curenţi produşi de diferitele forţe electromotoare aplicate sistemului şi considerate ca lucrînd independent.

Dacă la bornele unei reţele electrice geometric echilibrate se aplică un sistem de forţe electromotoare de o anumită succesiune, va rezulta o circulaţie de curenţi polifazaţi de aceeaşi succesiune şi căderile de tensiune de-a lungul reţelei vor constitui, de asemenea, un sistem trifazat simetric şi echilibrat de aceeaşi succesiune.

Astfel, într-un sistem trifazat geometric echilibrat, componentele simetrice directe, inverse şi homopolare constituie sisteme *independente*: fiecăreia din acestea, în mod independent, li se pot aplica teoremele lui KIRCHHOFF, considerîndu-se pentru fiecare în parte numai circuitul simplu format dintr-o fază şi conductorul neutru.

Se numeşte *impedanţa directă a reţelei*, impedanţa efectivă pe fază opusă trecerii curenţilor sistemului *direct*.

În acelaşi mod se defineşte *impedanţa inversă* şi *impedanţa homopolară*.

Rezultă dar, că între diversele elemente ale unui circuit electric în raport cu componentele simetrice corespunzătoare se pot scrie relaţiile

$$\left.\begin{aligned} \underline{E}_h &= \underline{V}_h + \underline{Z}_h \underline{I}_h, \\ \underline{E}_d &= \underline{V}_d + \underline{Z}_d \underline{I}_d, \\ \underline{E}_i &= \underline{V}_i + \underline{Z}_i \underline{I}_i, \end{aligned}\right\} \tag{8.34}$$

în care $\underline{E}$ este forţa electromotoare aplicată circuitului, $\underline{Z}$ impedanţa lui, $\underline{I}$ curentul ce străbate această impedanţă şi $\underline{V}$ căderea de tensiune într-o porţiune din circuit, sau tensiunea la bornele acestui circuit, corespunzătoare secvenţei respective.

Dacă sistemul are conductor neutru, atunci în ecuaţia referitoare la componenta homopolară trebuie adăugată căderea de tensiune $\underline{V}_N$ în acest conductor; prima ecuaţie (8.34) trebuie scrisă în acest caz

$$\underline{E}_h = \underline{V}_h + \underline{Z}_h \underline{I}_h + \underline{V}_N.$$

În ceea ce priveşte impedanţele $\underline{Z}_h$, $\underline{Z}_d$ şi $\underline{Z}_i$, se observă următoarele:

a) Toate elementele care nu comportă părţi rotative şi ale căror faze sînt geometric echilibrate prezintă trecerii curentului o impedanţă, care nu depinde

de succesiunea fazelor tensiunilor aplicate la borne ; pentru toate aceste elemente (transformatoare, linii, circuite receptoare pasive etc.) impedanța directă $\underline{Z}_d$ este identică cu impedanța inversă $\underline{Z}_i$.

b) Mașinile rotative prezintă trecerii curenților din sistemul direct o impedanță, care în general, diferă de impedanța ce intervine în sistemul invers.

c) La calculul puterii de rupere a întreruptoarelor nu se ține seama de reactanța capacitivă a rețelei, și în consecință, impedanța homopolară nu are o valoare finită decît dacă punctul neutru este accesibil și legat la pămînt sau dacă sistemul are un conductor neutru ; în caz contrar, impedanța homopolară are o valoare infinită pentru curenții care constituie sistemul homopolar.

d) Conductorul neutru fiind străbătut de toți curenții care formează sistemul homopolar (trei în cazul sistemului trifazat), dacă se ține seama de căderea de tensiune care se produce în acest conductor, impedanța sa poate fi înlocuită cu *n* impedanțe legate în serie și egale cu impedanța proprie a acestui conductor, *n* fiind numărul de faze al sistemului.

e) Totalitatea circuitelor receptoare *pasive* (iluminat, încălzit etc.), absorbind în mod normal o putere $\underline{S}$ la tensiunea pe fază $\underline{V}$, cu un factor de putere $\cos\varphi$, poate fi asimilată cu o impedanță egală cu*

$$\underline{Z}_d = \frac{3V^2}{S}(\cos\varphi + j\sin\varphi).$$

Să considerăm acum cazul general al unei rețele electrice constituită din impedanțe disimetrice.

Fie un receptor trifazat, ale cărui circuite pe fază au respectiv impedanțele $\underline{Z}_{11}$, $\underline{Z}_{22}$, $\underline{Z}_{33}$, cuplate într-un mod oarecare cu fazele vecine ; fie $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ curenții circulînd în cele trei circuite și $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$ tensiunile la bornele fiecăreia. Între aceste mărimi se pot scrie relațiile

$$\underline{V}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 + \underline{Z}_{13}\underline{I}_3,$$

$$\underline{V}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 + \underline{Z}_{23}\underline{I}_3,$$

$$\underline{V}_3 = \underline{Z}_{31}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{32}\underline{I}_2 + \underline{Z}_{33}\underline{I}_3.$$

Dacă se înlocuiesc $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$ și $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ prin componentele lor simetrice se obține, după ce s-au făcut toate calculele

$$3\underline{V}_h = \underline{I}_h[(\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{33}) + 2(\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31} + \underline{Z}_{12})] + \underline{I}_d\,[(\underline{Z}_{11} + a^2\underline{Z}_{22} + a\underline{Z}_{33}) -$$
$$-(\underline{Z}_{23} + a^2\underline{Z}_{31} + a\underline{Z}_{12})] + \underline{I}_i[(\underline{Z}_{11} + a\underline{Z}_{22} + a^2\underline{Z}_{33}) - (\underline{Z}_{23} + a\underline{Z}_{31} + a^2\underline{Z}_{12})];$$

---

* Această relație se deduce ușor. Într-adevăr, din

$$\underline{S} = S(\cos\varphi + j\sin\varphi) = 3\,\underline{V}\,\underline{I}^*.$$

Cum $\underline{Z}_d \cdot \underline{I} = \underline{V}$, rezultă

$$\underline{Z}_d = \frac{3\,V^2}{S(\cos\varphi + j\sin\varphi)} = \frac{3V^2}{S}(\cos\varphi - j\sin\varphi)$$

de unde se obține relația dată.

$$3\underline{V}_d = \underline{I}_h [(\underline{Z}_{11} + a\underline{Z}_{12} + a^2\underline{Z}_{33}) - (\underline{Z}_{23} + a\underline{Z}_{31} + a^2\underline{Z}_{12}) + \underline{I}_d[(\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{33}) -$$

$$- (\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31} + \underline{Z}_{12})] + \underline{I}_i [(\underline{Z}_{11} + a^2\underline{Z}_{22} + a\underline{Z}_{33}) + 2(\underline{Z}_{23} + a^2\underline{Z}_{31} + a\underline{Z}_{12})];$$

$$3\underline{V}_i = \underline{I}_h[(\underline{Z}_{11} + a^2\underline{Z}_{22} + a\underline{Z}_{33}) - (\underline{Z}_{23} + a^2\underline{Z}_{31} + a\underline{Z}_{12})] + \underline{I}_d[(\underline{Z}_{11} + a\underline{Z}_{22} + a^2\underline{Z}_{33}) +$$

$$+ 2(\underline{Z}_{23} + a\underline{Z}_{31} + a^2\underline{Z}_{12})] + \underline{I}_i [(\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{33}) - (\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31} + \underline{Z}_{12})].$$

Notînd

$$\underline{\xi}_h = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{33}), \qquad \underline{\mu}_h = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31} + \underline{Z}_{12}),$$

$$\underline{\xi}_d = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{11} + a\underline{Z}_{22} + a^2\underline{Z}_{33}), \quad \text{şi} \quad \underline{\mu}_d = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{23} + a\underline{Z}_{31} + a^2\underline{Z}_{12}),$$

$$\underline{\xi}_i = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{11} + a^2\underline{Z}_{22} + a\underline{Z}_{33}), \qquad \underline{\mu}_i = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{23} + a^2\underline{Z}_{31} + a\underline{Z}_{12});$$

aceste expresii definesc *componentele simetrice de calcul* ale impedanţelor şi impedanţelor mutuale. Introducîndu-le în relaţiile de mai sus se obţine

$$\begin{aligned}
\underline{V}_h &= (\underline{\xi}_h + 2\underline{\mu}_h)\underline{I}_h + (\underline{\xi}_i - \underline{\mu}_i)\underline{I}_d + (\underline{\xi}_d - \underline{\mu}_d)\underline{I}_i \\
\underline{V}_d &= (\underline{\xi}_d - \underline{\mu}_d)\underline{I}_h + (\underline{\xi}_h - \underline{\mu}_h)\underline{I}_d + (\underline{\xi}_i + 2\underline{\mu}_i)\underline{I}_i, \\
\underline{V}_i &= (\underline{\xi}_i - \underline{\mu}_i)\underline{I}_h + (\underline{\xi}_d + 2\underline{\mu}_d)\underline{I}_d + (\underline{\xi}_h - \underline{\mu}_h)\underline{I}_i.
\end{aligned} \tag{8.35}$$

În acest caz deci, componentele simetrice, directe sau inverse, de curent şi de tensiune, nu mai constituie sisteme independente.

Dacă sistemul este de constituţie simetrică, adică dacă

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{33} \text{ şi } \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31}$$

atunci,

$$\underline{\xi}_d = \underline{\xi}_i = \underline{\mu}_d = \underline{\mu}_i = 0$$

şi sistemul (8.35) devine

$$\begin{aligned}
\underline{V}_h &= (\underline{\xi}_h + 2\underline{\mu}_h)\underline{I}_h, \\
\underline{V}_d &= (\underline{\xi}_h - \underline{\mu}_h)\underline{I}_d, \\
\underline{V}_i &= (\underline{\xi}_h - \underline{\mu}_h)\underline{I}_i.
\end{aligned} \tag{8.36}$$

18 – c. 229

În cazul cînd curenţii din reţea sînt echilibraţi, $I_h = I_i = 0$, atunci şi tensiunile la bornele circuitului sînt echilibrate, deoarece din relaţiile (8.36) rezultă şi $V_h = V_i = 0$.

Fie un circuit constituit din trei admitanţe proprii oarecare $\underline{Y}_{11}, \underline{Y}_{22}, \underline{Y}_{33}$, cuplate între ele prin admitanţele mutuale $\underline{Y}_{12}, \underline{Y}_{23}, \underline{Y}_{31}$; între curenţii reali I_1, I_2, I_3, care străbat circuitul şi tensiunile $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ se pot scrie relaţiile

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{12}(\underline{V}_1 - \underline{V}_2) + \underline{Y}_{13}(\underline{V}_1 - \underline{V}_3),$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{22}\underline{V}_2 + \underline{Y}_{12}(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + \underline{Y}_{23}(\underline{V}_2 - \underline{V}_3),$$

$$\underline{I}_3 = \underline{Y}_{33}\underline{Y}_3 + \underline{V}_{13}(\underline{V}_3 - \underline{V}_1) + \underline{Y}_{23}(\underline{V}_3 - \underline{V}_2).$$

Înlocuind curenţii şi tensiunile prin componentele lor simetrice, făcînd calculul şi definind *admitanţele de calcul* proprii şi mutuale prin expresiile

$$\zeta_h = \frac{1}{3}(\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{33}), \qquad \underline{\nu}_h = \frac{1}{3}(\underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{13} + \underline{Y}_{12}),$$

$$\zeta_d = \frac{1}{3}(\underline{Y}_{11} + a\underline{Y}_{22} + a^2\underline{Y}_{33}), \quad \text{şi} \quad \underline{\nu}_d = \frac{1}{3}(\underline{Y}_{23} + a\underline{Y}_{13} + a^2\underline{Y}_{12}),$$

$$\zeta_i = \frac{1}{3}(\underline{Y}_{11} + a^2\underline{Y}_{22} + a\underline{Y}_{33}), \qquad \underline{\nu}_i = \frac{1}{3}(\underline{Y}_{23} + a^2\underline{Y}_{13} + a\underline{Y}_{12})$$

se găsesc, între componentele simetrice de tensiune şi curent, relaţiile

$$\underline{I}_h = \zeta_h\underline{V}_h + \zeta_i\underline{V}_d + \zeta_d\underline{V}_i,$$

$$\underline{I}_d = \zeta_d\underline{V}_h + (\zeta_h + 3\underline{\nu}_h)\underline{V}_d + (\zeta_i - 3\underline{\nu}_i)\underline{V}_i,$$

$$\underline{I}_i = \zeta_i\underline{V}_h + (\zeta_d - 3\underline{\nu}_d)\underline{V}_d + (\zeta_h + 3\underline{\nu}_h)\underline{V}_i.$$

8.4.3. EXPRESIA PUTERII ÎN REGIMUL DEZECHILIBRAT

8.4.3.1. Puterea aparentă. În calculul cu mărimi complexe, puterea aparentă se obţine cu ajutorul relaţiei

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = P + jQ.$$

În sistemul trifazat, va exista pentru fiecare fază o expresie analoagă, iar puterea aparentă a sistemului complet va fi egală cu suma puterilor aparente ale fiecărei faze în parte. Rezultă dar,

$$\underline{S} = \underline{U}_1\,\underline{I}_1^* + \underline{U}_2\,\underline{I}_2^* + \underline{U}_3\,\underline{I}_3^* = (P_1 + P_2 + P_3) + j\,(Q_1 + Q_2 + Q_3). \quad (8.37$$

Scriind fazorii de tensiune şi de curent, în funcţie de coordonatele lor simetrice, se obţine :

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_h + \underline{U}_d + \underline{U}_i,$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_h + a^2\underline{U}_d + a\underline{U}_i,$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_h + a\underline{U}_d + a^2\underline{U}_i,$$

pentru tensiuni şi

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i ,$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_h + a^2\underline{I}_d + a\underline{I}_i ,$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_h + a\underline{I}_d + a^2\underline{I}_i ,$$

pentru curenţi.

Valoarea conjugată a lui a este a^2 şi valoarea conjugată a lui a^2 este a ; în consecinţă, valorile conjugate ale vectorilor $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ vor fi :

$$\underline{I}_1^* = \underline{I}_h^* + \underline{I}_d^* + \underline{I}_i^* ,$$

$$\underline{I}_2^* = \underline{I}_h^* + a\underline{I}_d^* + a^2\underline{I}_i^* ,$$

$$\underline{I}_3^* = \underline{I}_h^* + a^2\underline{I}_d^* + a\underline{I}_i^* .$$

Introducînd aceste valori în relaţia (8.37) de mai sus şi efectuînd calculul, se găseşte

— pentru faza 1 :

$$\underline{U}_1 \underline{I}_1^* = \underline{U}_h \underline{I}_h^* + \underline{U}_d \underline{I}_d^* + \underline{U}_i \underline{I}_i^* + \underline{U}_h (\underline{I}_d^* + \underline{I}_i^*) + \underline{U}_d (\underline{I}_h^* + \underline{I}_i^*) + \underline{U}_i (\underline{I}_h^* + \underline{I}_i^*);$$

— pentru faza 2 :

$$\underline{U}_2 \underline{I}_2^* = \underline{U}_h \underline{I}_h^* + \underline{U}_d \underline{I}_d^* + \underline{U}_i \underline{I}_i^* + \underline{U}_h(a\underline{I}_d^* + a^2 \underline{I}_i^*) + \underline{U}_d (a^2 \underline{I}_h^* + a \underline{I}_i^*) + \underline{U}_i (a\underline{I}_h^* + a^2\underline{I}_d^*);$$

— pentru faza 3 :

$$\underline{U}_3\underline{I}_3^* = \underline{U}_h \underline{I}_h^* + \underline{U}_d \underline{I}_d^* + \underline{U}_i \underline{I}_i^* + \underline{U}_h (a^2\underline{I}_d^* + a\underline{I}_i^*) + \underline{U}_d(a \underline{I}_h^* + a^2\underline{I}_i^*) + \underline{U}_i (a^2\underline{I}_h + a\underline{I}_d).$$

Adunînd aceste expresii, membru cu membru, se obţine

$$S = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^* = 3\underline{U}_h \underline{I}_h^* + 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* + 3\underline{U}_i \underline{I}_i^* , \qquad (8.38)$$

ceilalţi termeni dispărînd ca fiind factori comuni pe lîngă suma

$$1 + a + a^2 = 0.$$

Punînd în evidenţă puterile active şi reactive, se obţine

$$\underline{S} = P + jQ = 3U_h I_h \cos\varphi_h + 3U_d I_d \cos\varphi_d + 3U_i I_i \cos\varphi_i +$$
$$+ j(3U_h I_h \sin\varphi_h + 3U_d I_d \sin\varphi_d + 3U_i I_i \sin\varphi_i),$$

în care φ este defazajul dintre tensiune şi curent pentru fiecare componentă simetrică. Rezultă dar, că în cazul unui sistem dezechilibrat, puterile activă şi reactivă sînt date de relaţiile

$$P = 3U_h I_h \cos\varphi_h + 3U_d I_d \cos\varphi_d + 3U_i I_i \cos\varphi_i$$

şi

$$Q = 3U_h I_h \sin\varphi_h + 3U_d I_d \sin\varphi_d + 3U_i I_i \sin\varphi_i .$$

8.4.3.2. **Puterea fluctuantă.** Într-un sistem trifazat puterea fluctuantă este dată de relaţia, scrisă în mărimi complexe,

$$\underline{P}_f = \underline{U}_1\underline{I}_1 + \underline{U}_2\underline{I}_2 + \underline{U}_3\underline{I}_3, \tag{8.39}$$

în care cei trei termeni ai sumei reprezintă puterea fluctuantă de pe fazele respective.

Scriind relaţia (8.39) în funcţie de componentele simetrice şi făcînd calculele se obţine

— pentru faza 1

$$\underline{U}_1\underline{I}_1 = \underline{U}_h\underline{I}_h + \underline{U}_d\underline{I}_d + \underline{U}_i\underline{I}_i + \underline{U}_h(\underline{I}_d + \underline{I}_i) + \underline{U}_d(\underline{I}_h + \underline{I}_i) + \underline{U}_i(\underline{I}_h + \underline{I}_d);$$

— pentru faza 2

$$\underline{U}_2\underline{I}_2 = \underline{U}_h\underline{I}_h + \mathrm{a}\underline{U}_d\underline{I}_d + \mathrm{a}^2\underline{U}_i\underline{I}_i + \underline{U}_h(\mathrm{a}^2\underline{I}_d + \mathrm{a}\underline{I}_i) + \mathrm{a}^2\underline{U}_d(\underline{I}_h + \mathrm{a}\underline{I}_i) +$$
$$+ \mathrm{a}\,\underline{U}_i(\underline{I}_h + \mathrm{a}^2\underline{I}_d);$$

— pentru faza 3

$$\underline{U}_3\underline{I}_3 = \underline{U}_h\underline{I}_h + \mathrm{a}^2\underline{U}_d\underline{I}_d + \mathrm{a}\underline{U}_i\underline{I}_i + \underline{U}_h(\mathrm{a}\underline{I}_d + \mathrm{a}^2\underline{I}_i) + \mathrm{a}\underline{U}_d(\underline{I}_h + \mathrm{a}^2\underline{I}_i) +$$
$$+ \mathrm{a}^2\underline{U}_i(\underline{I}_h + \mathrm{a}\underline{I}_d).$$

Adunînd aceste expresii membru cu membru se obţine

$$\underline{P}_f = \underline{U}_1\underline{I}_1 + \underline{U}_2\underline{I}_2 + \underline{U}_3\underline{I}_3 = 3\underline{U}_h\underline{I}_h + 3\underline{U}_d\underline{I}_i + 3\underline{U}_i\underline{I}_d,$$

ceilalţi termeni dispărînd ca fiind factori comuni pe lîngă suma

$$1 + \mathrm{a} + \mathrm{a}^2 = 0.$$

8.4.4.1. **Problema generală.** Fie un sistem energetic trifazat, pe care îl presupunem reprezentat printr-un circuit echivalent trifazat (fig. 8.32) format dintr-un generator avînd forțele electromotoare pe faze $\underline{E}_1$, $\underline{E}_2$, $\underline{E}_3$ și impedanțele proprii, exprimate în coordonate simetrice, $\underline{Z}_s$, $\underline{Z}_a$, $\underline{Z}_0$, și dintr-un receptor avînd impedanțele pe fază $\underline{Z}_{R1}$, $\underline{Z}_{R2}$, $\underline{Z}_{R3}$ și tensiunile la borne, de asemenea pe fază, $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$; linia de legătură are impedanțele pe fază $\underline{Z}_{L1}$, $\underline{Z}_{L2}$, $\underline{Z}_{L3}$, iar conductorul neutru impedanța $\underline{Z}_N$.

Se presupune că între diversele faze nu există impedanțe mutuale, acesta fiind cazul cel mai răspîndit în practică*.

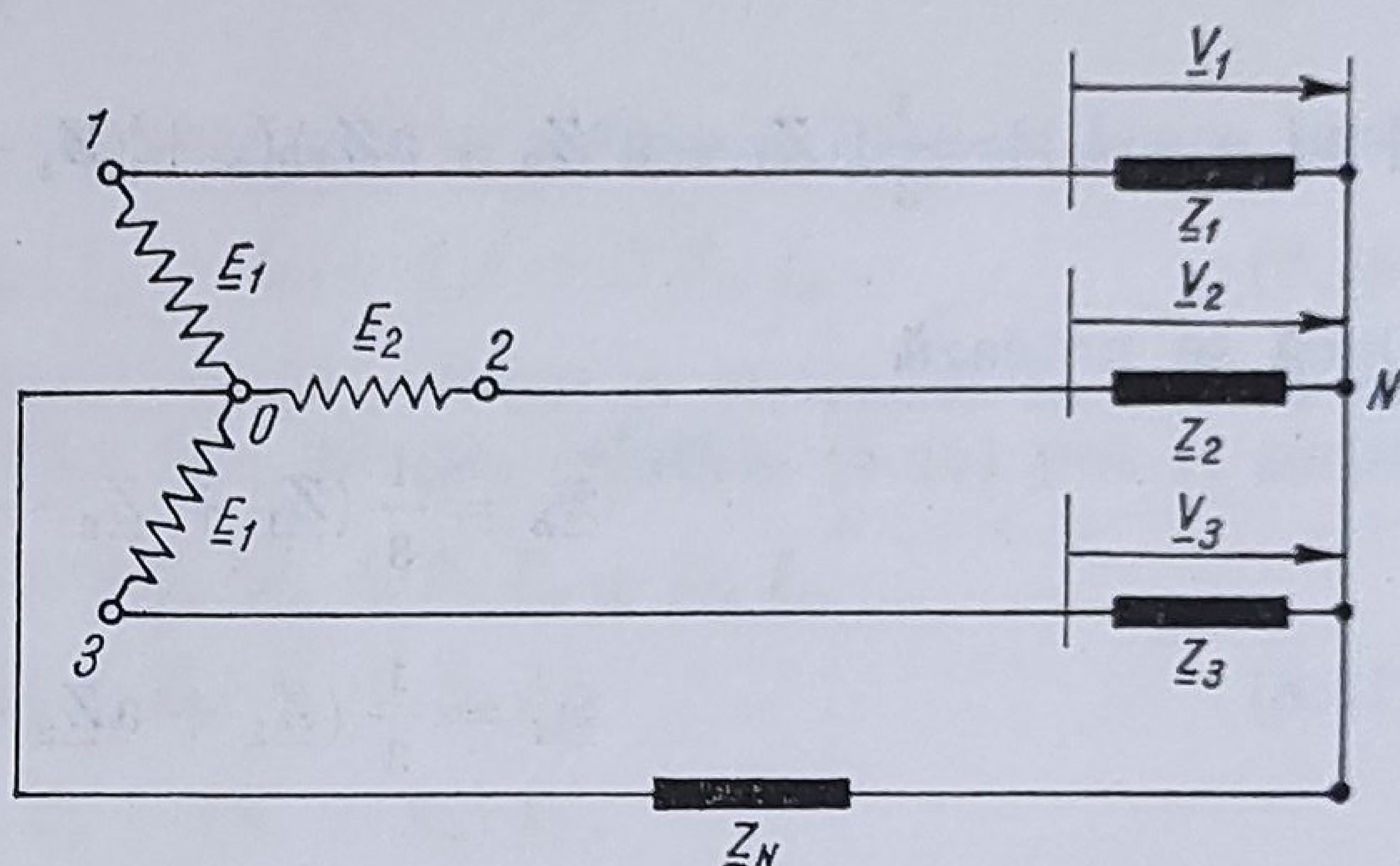


Fig. 8.32. Circuitul echivalent al unui sistem energetic trifazat.

Fie $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ curenții care circulă prin diversele faze.

Problema de rezolvat constă în determinarea curenților din rețea și a tensiunilor la bornele receptorului.

Rezolvarea acestei probleme se face foarte comod cu ajutorul coordonatelor simetrice. Pentru aceasta este necesar să se găsească o serie de relații de legătură între diversele mărimi.

Fie $\underline{I}_h$, $\underline{I}_d$, $\underline{I}_i$ componentele simetrice ale curenților și

$\underline{V}_h$, $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$ componentele simetrice ale tensiunilor la bornele receptorului.

Dacă înglobăm impedanța liniei în impedanța receptorului scriind

$$\underline{Z} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_R,$$

aplicînd legea lui OHM fiecărui circuit în parte, se obține:

$$\left.\begin{aligned}\underline{V}_1 &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 = \underline{Z}_1(\underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i),\\ \underline{V}_2 &= \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 = \underline{Z}_2(\underline{I}_h + a^2\underline{I}_d + a\underline{I}_i),\\ \underline{V}_3 &= \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3 = \underline{Z}_3(\underline{I}_h + a\,\underline{I}_d + a^2\underline{I}_i).\end{aligned}\right\} \quad (8.40)$$

Calculînd componentele simetrice ale tensiunii pe fază și ținînd seama de relațiile (8.40) se obține:

$$\underline{V}_h = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3) = \frac{1}{3}\,[\underline{Z}_1(\underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i) + \underline{Z}_2(\underline{I}_h + a^2\underline{I}_d + a\underline{I}_i) + \underline{Z}_3(\underline{I}_h + a\underline{I}_d +$$

$$+ a^2\underline{I}_i)] = \frac{1}{3}\,[(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\underline{I}_h + (\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3)\underline{I}_d + (\underline{Z}_1 + a\,\underline{Z}_2 + a^2\,\underline{Z}_3)\,\underline{I}_i]$$

* În cazul cînd impedanțele mutuale nu pot fi neglijate față de impendanțele proprii ale diverselor faze, pentru calculul circuitelor trifazate se utilizează relațiile (8.35) stabilite în paragraful 8.4.2.

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3) = \frac{1}{3}[\underline{Z}_1(\underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i) + a\underline{Z}_2(\underline{I}_h + a^2\underline{I}_d + a\underline{I}_i) + a^2\underline{Z}_3(\underline{I}_h + a\underline{I}_d + a^2\underline{I}_i)] = \frac{1}{3}[(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3)\underline{I}_h + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\underline{I}_d + (\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3)\underline{I}_i] \qquad (8.41)$$

$$\underline{V}_i = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2 + a\underline{V}_3) = \frac{1}{3}[\underline{Z}_1(\underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i) + a^2\underline{Z}_2(\underline{I}_h + a^2\underline{I}_d + a\underline{I}_i) + a\underline{Z}_3(\underline{I}_h + a\underline{I}_d + a^2\underline{I}_i)] = \frac{1}{3}[(\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3)\underline{I}_h + [(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3)\underline{I}_d + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\underline{I}_i]$$

Dacă se notează

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Z}_h &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3), \\ \mathfrak{Z}_d &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3), \\ \mathfrak{Z}_i &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3), \end{aligned}\right\} \qquad (8.42)$$

atunci relațiile (8.41) devin *

$$\left.\begin{aligned} \underline{V}_h &= \mathfrak{Z}_h \underline{I}_h + \mathfrak{Z}_i \underline{I}_d + \mathfrak{Z}_d \underline{I}_i, \\ \underline{V}_d &= \mathfrak{Z}_d \underline{I}_h + \mathfrak{Z}_h \underline{I}_d + \mathfrak{Z}_i \underline{I}_i, \\ \underline{V}_i &= \mathfrak{Z}_i \underline{I}_h + \mathfrak{Z}_d \underline{I}_d + \mathfrak{Z}_h \underline{I}_i. \end{aligned}\right\} \qquad (8.43)$$

Relațiile (8.42) se numesc *impedanțele de calcul* ale sistemului trifazat dat **.

Curenții $\underline{I}_h$, $\underline{I}_d$ și $\underline{I}_i$ străbătînd și bobinajele generatorului, vor produce căderi de tensiune în acestea; componentele simetrice ale tensiunilor la bornele generatorului vor fi

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_h &= \underline{E}_h - \underline{Z}_0 \underline{I}_h, \\ \underline{U}_d &= \underline{E}_d - \underline{Z}_s \underline{I}_d, \\ \underline{U}_i &= \underline{E}_i - \underline{Z}_a \underline{I}_i, \end{aligned}\right\} \qquad (8.44)$$

---

* Aceste ecuații se puteau obține direct din ecuațiile (8.35) în care se face, conform ipotezei adoptate, $\mu_h = \mu_d = \mu_i = 0$.

** Ele sînt identice cu impedanțele ξ_h, ξ_d și ξ_i stabilite în paragraful 8.4.2. Li s-a dat acest nume, deoarece ele nu corespund nici unei realități fizice. Într-adevăr un vector impedanță nu poate fi reprezentat decît în semiplanul pozitiv (cadranele I și IV); sistemele de impedanțe de calcul însă, din cauza operatorului a care intră în structura lor, pot ocupa orice poziție în plan. Această descompunere este deci numai formală, foarte comodă pentru calcule.

$\underline{E}_h$, $\underline{E}_d$ şi $\underline{E}_i$ fiind componentele simetrice ale forţelor electromotoare ale generatorului.

Sistemele de tensiuni $S(\underline{U})$ de la bornele generatorului şi $S(\underline{V})$ de la bornele receptorului formează două sisteme de fazori care au aceleaşi vîrfuri şi origini diferite. Se poate scrie deci

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_h &= \underline{V}_h + \underline{V}_N\,, \\ \underline{U}_d &= \underline{V}_d\,, \\ \underline{U}_i &= \underline{V}_i\,, \end{aligned}\right\} \tag{8.45}$$

unde $\underline{V}_N$ este căderea de tensiune în conductorul neutru şi care se poate scrie

$$\underline{V}_N = \underline{Z}_N \underline{I}_N = \underline{Z}_N (\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = 3\,\underline{Z}_N \underline{I}_h\,. \tag{8.46}$$

Ţinînd seama de relaţiile (8.43), (8.44), (8.46) şi ordonînd în raport cu componentele simetrice ale curenţilor din circuit, relaţiile (8.45) pot fi scrise

$$\begin{aligned} \underline{E}_h &= (\underline{\mathcal{Z}}_h + \underline{Z}_0 + 3\,\underline{Z}_N)\,\underline{I}_h + \underline{\mathcal{Z}}_i\,\underline{I}_d + \underline{\mathcal{Z}}_d\,\underline{I}_i, \\ \underline{E}_d &= \underline{\mathcal{Z}}_d\,\underline{I}_h + (\underline{\mathcal{Z}}_h + \underline{Z}_s)\,\underline{I}_d + \underline{\mathcal{Z}}_i\,\underline{I}_i, \\ \underline{E}_i &= \underline{\mathcal{Z}}_i\,\underline{I}_h + \underline{\mathcal{Z}}_d\,\underline{I}_d + (\underline{\mathcal{Z}}_h + \underline{Z}_a)\,\underline{I}_i\,. \end{aligned} \tag{8.47}$$

Sistemul de ecuaţii (8.47) este sistemul de ecuaţii cel mai general ce se poate scrie între componentele simetrice ale unei reţele electrice trifazate serie. El corespunde unui generator de *putere finită**.

Sistemul de ecuaţii (8.47) permite găsirea componentelor simetrice ale curenţilor din reţea şi apoi, cu ajutorul relaţiilor (8.43), se pot găsi componentele simetrice ale tensiunilor la bornele receptorului.

Folosind relaţiile (8.10) se vor găsi, în sfîrşit, valorile reale ale curenţilor care circulă în reţea şi în consecinţă, ale tensiunilor în orice punct al reţelei.

OBSERVAŢIE: Relaţiile (8.43) se pot scrie fără nici o dificultate folosind regula produsului simbolic, între două sisteme trifazate simetrice**.

8.4.4.2. **Cazuri particulare.** Particularizînd ecuaţiile (8.47) se poate rezolva orice problemă ce apare în practică, după cum urmează :

1. Reţea electrică trifazată, cu conductor neutru, alimentată de o sursă de putere infinită. În acest caz

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_s = \underline{Z}_a = 0$$

şi ecuaţiile (8.47) devin

$$\begin{aligned} \underline{E}_h &= (\underline{\mathcal{Z}}_h + 3\,\underline{Z}_N)\,\underline{I}_h + \underline{\mathcal{Z}}_i\,\underline{I}_d + \underline{\mathcal{Z}}_d\,\underline{I}_i = \underline{V}_h + \underline{V}_N, \\ \underline{E}_d &= \underline{Z}_d\,\underline{I}_h + \underline{\mathcal{Z}}_h\,\underline{I}_d + \underline{\mathcal{Z}}\,\underline{I}_i = \underline{V}_d, \\ \underline{E}_i &= \underline{\mathcal{Z}}_i\,\underline{I}_h + \underline{\mathcal{Z}}_d\,\underline{I}_d + \underline{\mathcal{Z}}_h\,\underline{I}_i = \underline{V}_i. \end{aligned}$$

* S-a dat această denumire deoarece curenţii ce străbat bobinajele sale influenţează tensiuna la borne, spre deosebire de generatorul de *putere infinită*, cînd această influenţă este nulă. În practică, primul caz corespunde situaţiei cînd puterea generatorului este de acelaşi ordin de mărime cu puterea receptorului şi al doilea caz, cînd puterea generatorului este foarte mare faţă de aceea a receptorului.

** Vezi 8.3.5.3

2. **Reţea electrică trifazată, fără conductor neutru, cu sursă de putere infinită.** În acest caz

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_s = \underline{Z}_a = 0,\ \underline{Z}_N = \infty \text{ şi } \underline{I}_h = 0.$$

Ecuaţiile (8.47) devin

$$\begin{aligned} \underline{E}_h &= \underline{\mathfrak{Z}}_i \underline{I}_d + \underline{\mathfrak{Z}}_d \underline{I}_i = \underline{V}_h, \\ \underline{E}_d &= \underline{\mathfrak{Z}}_h \underline{I}_d + \underline{\mathfrak{Z}}_i \underline{I}_i = \underline{V}_d, \\ \underline{E}_i &= \underline{\mathfrak{Z}}_d \underline{I}_d + \underline{\mathfrak{Z}}_h \underline{I}_i = \underline{V}_i. \end{aligned} \tag{8.48}$$

Din acest sistem de ecuaţii, ultimele două servesc pentru determinarea celor două componente simetrice ale curentului, iar prima, pentru determinarea componentei homopolare a tensiunii, în ipoteza că nu se cunoaşte componenta homopolară a forţei electromotoare a generatorului.

3. **Reţea electrică trifazată, fără conductor neutru, cu sursă de putere finită.** În acest caz

$$\underline{Z}_n = \infty \text{ şi } \underline{I}_h = 0$$

şi ultimele două ecuaţii ale sistemului (8.48) se vor scrie

$$\begin{aligned} \underline{E}_d &= (\underline{\mathfrak{Z}}_h + \underline{Z}_s)\, \underline{I}_d + \underline{\mathfrak{Z}}_i \underline{I}_i = \underline{V}_d, \\ \underline{E}_i &= \underline{\mathfrak{Z}}_d \underline{I}_d + (\underline{\mathfrak{Z}}_h + \underline{Z}_a)\underline{I}_i = \underline{V}_i. \end{aligned} \tag{8.49}$$

4. Dacă generatorul care alimentează reţeaua este simetric şi echilibrat, aşa cum este în gen ral cazul în practică, atunci

$$\underline{E}_h = \underline{E}_i = 0 \text{ şi } \underline{E}_d = \underline{E}.$$

5. Dacă la un sistem trifazat, fără conductor neutru, se cunosc numai tensiunile de linie $\underline{U}_1'$, $\underline{U}_2'$ $\underline{U}_3'$ la receptor şi deci şi componentele lor simetrice $\underline{U}_d'$ şi $\underline{U}_i'$, utilizînd relaţiile (8.15) şi (8.16) se găseşte

$$\underline{V}_d = \mathrm{j}\frac{\underline{U}_d'}{\sqrt{3}} \text{ şi } \underline{V}_i = -\mathrm{j}\frac{\underline{U}_i'}{\sqrt{3}}$$

şi deci, pentru rezolvarea problemei, pot fi utilizate ecuaţiile (4.48).

8.4.4.3. Exemplu de aplicaţie a metodei. Pentru ilustrarea metodei de mai sus, să studiem următoarea problemă:

Un cuptor electric trifazat este alimentat de un transformator de 3500 kVA, 2200/200 V, 50 Hz, cu conectarea în stea pe înaltă tensiune şi în triunghi pe joasa tensiune. La un moment dat, caracteristicile cuptorului pot fi înlocuite cu trei rezistenţe legate în stea, de 0,010 Ω, 0,010 Ω şi 0,001 Ω, respectiv

pe fazele R, S şi T. Dacă reactanţa transformatorului este de 30 %, care este intensitatea curentului în cei trei electrozi, neglijîndu-se rezistenţele transformatorului şi impedanţele conductoarelor? Care este supraîncărcarea transformatorului?

Reactanţa transformatorului fiind dată în procente, valoarea ei se calculează cu ajutorul relaţiei*

$$X = \frac{\varepsilon}{100} \cdot \frac{U^2}{S} = \frac{30}{100} \cdot \frac{200^2}{3500 \cdot 10^3} = 3{,}43 \times 10^{-3}\Omega.$$

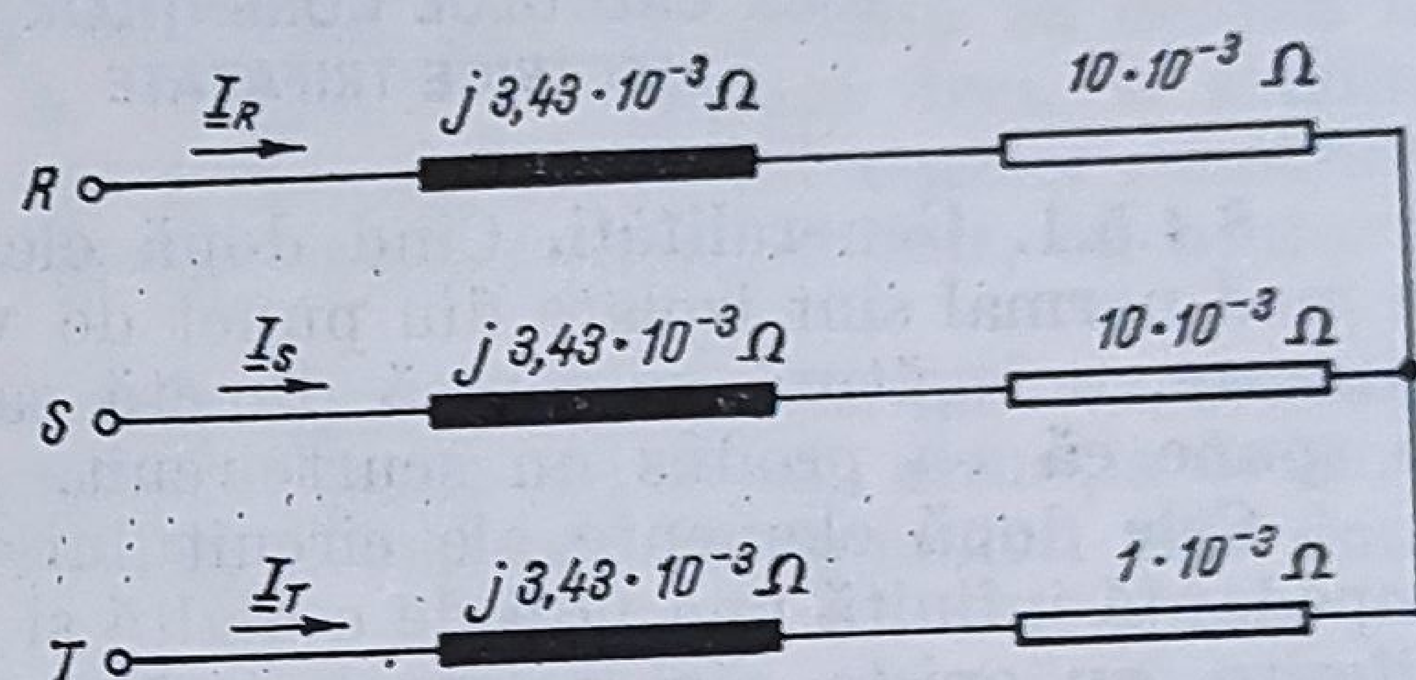
Circuitul electric echivalent al problemei devine cel din figura 8.33.

Calculînd impedanţele de calcul corespunzătoare rezistenţelor utilizării, se găseşte:

$$\underline{Z}_h = 7 \cdot 10^{-3}\Omega;$$

$$\underline{Z}_d = (1{,}5 + \mathrm{j}\,2{,}6)10^{-3}\,\Omega;$$

$$\underline{Z}_i = (1{,}5 - \mathrm{j}\,2{,}6)10^{-3}\Omega.$$



Fiig. 8.33. Circuitul echivalent al grupului transformator-cuptor.

Pentru găsirea componentelor simetrice ale curentului se aplică ecuaţiile (8.49) ţinînd seama că pentru transformator

$$\underline{Z}_d = \underline{Z}_i = \mathrm{j}X = \mathrm{j}\ 3{,}43\ .\ 10^{-3}\Omega.$$

Sistemul tensiunilor de alimentare fiind simetric şi echilibrat, rezultă

$$\underline{V}_d = \mathrm{j}\frac{U_d'}{\sqrt{3}} = \mathrm{j}\frac{200}{\sqrt{3}} = \mathrm{j}\,115{,}5\ V; \quad \underline{V}_i = 0$$

astfel, încît cu datele particulare ale problemei, sistemul de ecuaţii (8.49) devine

$$\begin{cases} \mathrm{j}\ 115{,}5 = (7 + \mathrm{j}\ 3{,}43)\ 10^{-3}\ \underline{I}_d + (1{,}5 - \mathrm{j}\ 2{,}6)\ 10^{-3}\ \underline{I}_i \\ 0 = (1{,}5 + \mathrm{j}\ 2{,}6)\ 10^{-3}\ \underline{I}_d + (7 + \mathrm{j}\ 3{,}43)\ 10^{-3}\ \underline{I}_i, \end{cases}$$

care rezolvat dă

$$\underline{I}_d = 8{,}94 + \mathrm{j}\ 12{,}50\ \mathrm{kA};\ \underline{I}_i = 5{,}42 - \mathrm{j}\ 3{,}07\ \mathrm{kA}.$$

Curenţii căutaţi în cele trei faze vor fi

$$\underline{I}_R = \underline{I}_d + \underline{I}_i = 14{,}36 + \mathrm{j}\ 9{,}43\ \mathrm{kA},$$

$$\underline{I}_S = a^2\underline{I}_d + a\ \underline{I}_i = 6{,}30 - \mathrm{j}\ 7{,}76\ \mathrm{kA},$$

$$\underline{I}_T = a\ \underline{I}_d + a^2\,\underline{I}_i = -20{,}66 - \mathrm{j}\ 1{,}67\ \mathrm{kA}.$$

* Vezi 6.3.4.

Puterea absorbită de cuptor în momentul considerat se calculează cu relaţia

$$P = R_R\ |\underline{I}_R|^2 + R_S\ |\underline{I}_S|^2 + R_T\ |\underline{I}_T|^2 = 4390\ \text{kW},$$

ceea ce corespunde unei supraîncărcări de

$$\frac{4390 - 3500}{3500} \times 100 = 25{,}43\ \%.$$

8.4.5. CALCULUL CURENŢILOR DE SCURTCIRCUIT ÎN REŢELELE ELECTRICE TRIFAZATE

8.4.5.1. **Generalităţi.** Cînd două elemente ale unui circuit electric, care în mod normal sînt izolate din punct de vedere electric, capătă, dintr-o cauză oarecare, o legătură galvanică directă sau prin intermediul unei impedanţe, se spune că s-a produs un scurtcircuit.

Cele două elemente ale circuitului prezentau, înainte de scurtcircuit, o impedanţă infinită una faţă de cealaltă şi deci, deşi ele se găseau la potenţiale diferite, nu exista nici o circulaţie de curent; în momentul scurtcircuitului această impedanţă devine finită sau chiar se anulează; va rezulta astfel o circulaţie de curent a cărui intensitate poate fi, teoretic, oricît de mare. Practic ea este limitată la anumite valori de către constantele circuitului.

Intensitatea acestui curent, care se numeşte *curentul de scurtcircuit*, este în general mai mare decît cea a *curentului normal* care exista în circuit înainte de defect şi a cărui mărime depinde de sarcina reţelei în acel moment.

Curentul de scurtcircuit se suprapune peste curentul normal.

Rezultă dar, că în timpul defectului, surplusul de curent cerut de defect va fi furnizat tot de sursele de energie care alimentează circuitul şi care vor fi astfel suprasolicitate. În acelaşi timp poate apărea şi o schimbare a circulaţiei curenţilor în diversele laturi ale circuitului considerat, care rezultă din suprapunerea celor doi curenţi.

Determinarea acestor curenţi apare deci, ca o problemă de primă importanţă, deoarece pe baza cunoaşterii mărimii şi circulaţiei curenţilor de scurtcircuit se va putea vedea solicitarea suplimentară la care sînt supuse maşinile electrice şi se va putea stabili planul de limitare şi localizare a defectelor. Din cunoaşterea acestor curenţi se vor putea dimensiona atît sursele de producere a energiei electrice, cît mai ales aparatele de separare a elementelor defecte, şi deci de întrerupere a lor — întreruptoarele electrice. De asemenea, se vor putea predetermina efectele, luîndu-se măsurile de siguranţă necesare unei bune funcţionări a instalaţiilor, prevenindu-se efectele mecanice datorite forţelor ce se dezvoltă în diversele părţi, din cauza curenţilor de scurtcircuit.

Calculul curenţilor de scurtcircuit nu este o operaţie simplă şi el devine destul de laborios, atunci cînd configuraţia reţelei este mai complicată.

Curentul de scurtcircuit $\underline{I}$ care, produs de sursa de energie avînd tensiunea pe fază la borne $\underline{U}$, se scurge spre defect pe drumul de scurtcircuit de impedanţă $\underline{Z}$, este dat de relaţia

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}, \tag{8.50}$$

în care $\underline{Z}$ este suma impedanţelor circuitului între generator şi locul defectului.

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{generator} + \underline{Z}_{transformator} + \underline{Z}_{linie} + \underline{Z}_{arc} + \ldots$$

În realitate, problema nu se prezintă atît de simplu. Într-adevăr, reţelele moderne comportă sisteme de centrale electrice interconectate, cu tensiuni şi puteri diferite, linii electrice de transmitere a energiei electrice de construcţii diferite, transformatoare cu diverse conectări etc.

Oricare ar fi configuraţia reţelei, principiul de calcul al curenţilor de scurtcircuit constă în a reduce reţeaua, prin transformări în circuite echivalente, la o reţea simplă căreia să i se poată aplica relaţia de calcul (8.50).

Un defect într-o reţea trifazată simetrică face ca aceasta să devină în general dezechilibrată. O problemă de scurtcircuit conduce deci, la studiul unei reţele dezechilibrate, care se poate face cu ajutorul coordonatelor simetrice. Rezultă astfel o metodă de studiu a problemelor de scurtcircuit, cu ajutorul coordonatelor simetrice.

În rezolvarea problemelor de scurtcircuit, se urmăreşte găsirea curenţilor de scurtcircuit, independent de curenţii normali din reţea. Situaţia de funcţionare a reţelei în timpul scurtcircuitului se obţine, suprapunînd cele două stări de funcţionare a reţelei.

După natura impedanţelor maşinilor electrice din reţea introduse în calcul, se va obţine valoarea curenţilor de scurtcircuit iniţiali sau permanenţi.

8.4.5.2. **Principiul metodei de calcul a curenţilor de scurtcircuit cu ajutorul coordonatelor simetrice.** Metoda de calcul a curenţilor de scurtcircuit cu ajutorul coordonatelor simetrice se bazează pe descompunerea reţelei reale, în trei reţele elementare fictive, fiecare din acestea fiind străbătută de curenţi simetrici şi echilibraţi, corespunzînd componentelor simetrice ale sistemului de curenţi dezechilibrat, dat. Aceste reţele vor avea fiecare o anumită impedanţă *de fază*, care depinde de succesiunea de fază a sistemului echilibrat considerat.

Pentru construirea acestor reţele, se utilizează aceleaşi premise stabilite pentru impedanţele unei reţele trifazate*.

Se vor obţine astfel, în cazul sistemelor trifazate, trei reţele fictive, corespunzătoare celor trei secvenţe :

Reţeaua directă sau de secvenţă 1, care este în toate privinţele identică cu reţeaua reală considerată ; valorile rezistenţelor şi ale reactanţelor sînt acelea care se obţin prin regulile obişnuite de calcul sau prin determinări experimentale. Orice maşină sincronă trebuie să fie considerată ca o sursă de forţă electromotoare care variază în mărime şi fază în funcţie de repartiţia puterilor active şi reactive, corespunzătoare momentului imediat înainte de apariţia defectului. La locul defectului, va apărea o diferenţă de potenţial a componentei directe, a cărei mărime depinde de natura defectului. Valoarea exactă a acestei diferenţe de potenţial poate fi calculată şi va fi determinată în cele ce urmează.

Reţeaua inversă sau de secvenţă 2 este în general identică cu reţeaua de secvenţă directă, numărul elementelor fiind întotdeauna acelaşi. Impedanţele constitutive ale acestei reţele sînt identice cu acelea ale reţelei directe pentru elementele statice şi diferite pentru maşinile rotative din reţea. Valorile lor se determină prin calcul sau experimental. Deoarece, generatoarele sincrone simetrice nu produc decît componenta directă a forţei electromotoare, această

* Vezi paragraful 8.4.2.

în care $\underline{Z}$ este suma impedanţelor circuitului între generator şi locul defectului.

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{generator} + \underline{Z}_{transformator} + \underline{Z}_{linie} + \underline{Z}_{arc} + \ldots .$$

În realitate, problema nu se prezintă atît de simplu. Într-adevăr, reţelele moderne comportă sisteme de centrale electrice interconectate, cu tensiuni şi puteri diferite, linii electrice de transmitere a energiei electrice de construcţii diferite, transformatoare cu diverse conectări etc.

Oricare ar fi configuraţia reţelei, principiul de calcul al curenţilor de scurtcircuit constă în a reduce reţeaua, prin transformări în circuite echivalente, la o reţea simplă căreia să i se poată aplica relaţia de calcul (8.50).

Un defect într-o reţea trifazată simetrică face ca aceasta să devină în general dezechilibrată. O problemă de scurtcircuit conduce deci, la studiul unei reţele dezechilibrate, care se poate face cu ajutorul coordonatelor simetrice. Rezultă astfel o metodă de studiu a problemelor de scurtcircuit, cu ajutorul coordonatelor simetrice.

În rezolvarea problemelor de scurtcircuit, se urmăreşte găsirea curenţilor de scurtcircuit, independent de curenţii normali din reţea. Situaţia de funcţionare a reţelei în timpul scurtcircuitului se obţine, suprapunînd cele două stări de funcţionare a reţelei.

După natura impedanţelor maşinilor electrice din reţea introduse în calcul, se va obţine valoarea curenţilor de scurtcircuit iniţiali sau permanenţi.

8.4.5.2. **Principiul metodei de calcul a curenţilor de scurtcircuit cu ajutorul coordonatelor simetrice.** Metoda de calcul a curenţilor de scurtcircuit cu ajutorul coordonatelor simetrice se bazează pe descompunerea reţelei reale, în trei reţele elementare fictive, fiecare din acestea fiind străbătută de curenţi simetrici şi echilibraţi, corespunzînd componentelor simetrice ale sistemului de curenţi dezechilibrat, dat. Aceste reţele vor avea fiecare o anumită impedanţă *de fază*, care depinde de succesiunea de fază a sistemului echilibrat considerat.

Pentru construirea acestor reţele, se utilizează aceleaşi premise stabilite pentru impedanţele unei reţele trifazate*.

Se vor obţine astfel, în cazul sistemelor trifazate, trei reţele fictive, corespunzătoare celor trei secvenţe :

Reţeaua directă sau de secvenţă 1, care este în toate privinţele identică cu reţeaua reală considerată ; valorile rezistenţelor şi ale reactanţelor sînt acelea care se obţin prin regulile obişnuite de calcul sau prin determinări experimentale. Orice maşină sincronă trebuie să fie considerată ca o sursă de forţă electromotoare care variază în mărime şi fază în funcţie de repartiţia puterilor active şi reactive, corespunzătoare momentului imediat înainte de apariţia defectului. La locul defectului, va apărea o diferenţă de potenţial a componentei directe, a cărei mărime depinde de natura defectului. Valoarea exactă a acestei diferenţe de potenţial poate fi calculată şi va fi determinată în cele ce urmează.

Reţeaua inversă sau de secvenţă 2 este în general identică cu reţeaua de secvenţă directă, numărul elementelor fiind întotdeauna acelaşi. Impedanţele constitutive ale acestei reţele sînt identice cu acelea ale reţelei directe pentru elementele statice şi diferite pentru maşinile rotative din reţea. Valorile lor se determină prin calcul sau experimental. Deoarece, generatoarele sincrone simetrice nu produc decît componenta directă a forţei electromotoare, această

---

* Vezi paragraful 8.4.2.

rețea nu va conține sursă de forță electromotoare, cu excepția aceleia care apare la locul defectului. Forțe electromotoare reale de secvență inversă pot să existe în această rețea, în cazul cînd în rețeaua reală sînt instalate compensatoare ale componentelor inverse de tensiune.

Rețeaua homopolară sau de secvență 0 va fi de asemenea lipsită de forță electromotoare internă, circulația curentului rezultînd din diferența de potențial ce apare la locul defectului. Impedanțele acestei rețele sînt fundamental diferite de acelea din rețelele precedente. Ele se determină fie prin calcul, cu ajutorul unor formule bine stabilite, fie experimental.

Prin această descompunere, o rețea dezechilibrată poate fi studiată ca și rețelele simetrice și echilibrate, considerîndu-se numai o fază și un fir neutru real sau fictiv.

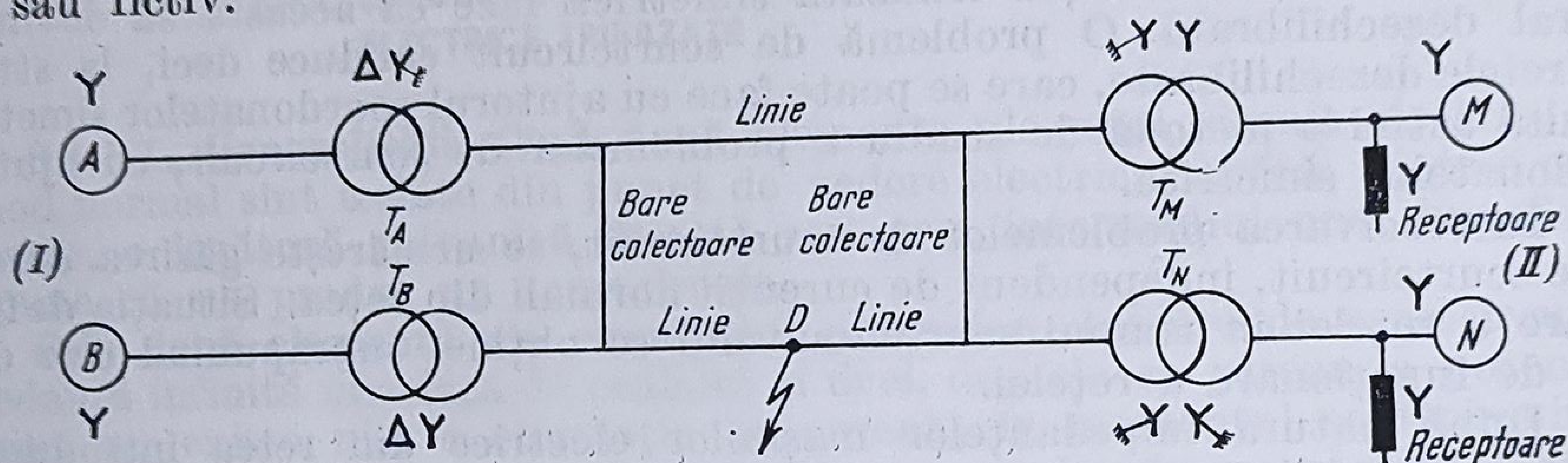


Fig. 8.34. Rețea electrică trifazată complexă.

La fiecare din aceste rețele, diversele impedanțe constituie unul din conductoarele circuitului — faza — conductorul de întoarcere fiind un conductor fictiv — conductorul neutru — de impedanță nulă.

Pentru ilustrarea celor de mai sus și pentru a vedea modul cum se aplică această metodă într-un caz real, fie o rețea complexă alcătuită din două linii de transmisie de energie electrică, funcționînd în paralel, dintr-o serie de alternatoare, diverse transformatoare și la una din extremități, din receptoare (fig. 8.34).

Se presupune că alternatoarele A și B nu au neutrul legat la pămînt, în schimb, unul din transformatoare (ambele cu conexiunea triunghi-stea) are neutrul pus la pămînt. La sosire (extremitatea II) alternatoarele respective au de asemenea neutrul izolat, în schimb transformatoarele (cu conexiunea stea-stea) au ambele neutrul pus la pămînt, pe partea de înaltă tensiune și numai la unul și pe partea de joasă tensiune.

La extremitatea (II) există și o serie de receptoare legate în stea, însă cu neutrul nelegat la pămînt.

Se presupune că în punctul D pe linie se produce un defect oarecare.

Cele trei rețele fictive corespunzătoare uneia din faze vor fi reprezentate după cum se arată în figura 8.35.

Rețeaua de secvență directă (a) cuprinde toate impedanțele existente ale rețelei reale, precum și forțele electromotoare ale alternatoarelor.

Rețeaua de secvență inversă (b) cuprinde aceleași impedanțe, ca și precedenta, pentru linii și transformatoare și impedanțele corespunzătoare pentru mașinile rotative. Nu va cuprinde însă forțe electromotoare.

Rețeaua homopolară (c) va cuprinde numai impedanțele corespunzătoare liniilor și transformatoarelor care au neutrul pus la pămînt ; de asemenea nu va cuprinde forțe electromotoare.

În toate aceste rețele fictive, sensul de circulație al curenților este același și este sensul curenților din rețeaua de secvență directă, de la surse către defect.

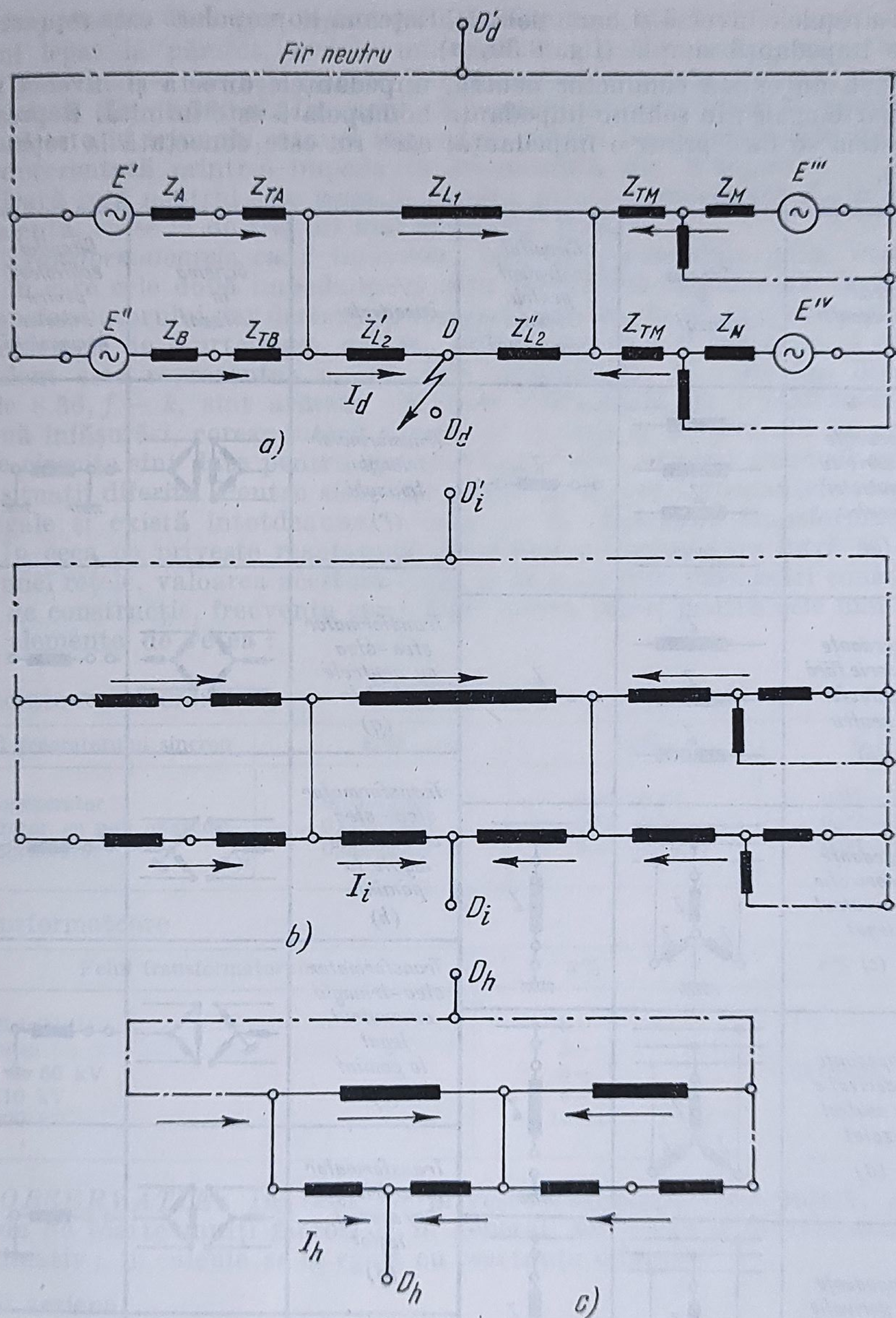


Fig. 8.35. Cele trei rețele fictive ale rețelei electrice date.

Circuitele echivalente ale diverselor tipuri de elemente care intră în componența unei rețele pot fi reprezentate, în general, prin scheme simple (fig. 8.36).

Impedanțele serie, legate pe diversele faze, dacă sînt simetrice și dacă există un conductor neutru, au aceeași valoare atît pentru rețeaua directă, cît

şi pentru reţelele inversă şi homopolară. Reţeaua homopolară este reprezentată printr-o impedanţă simplă (fig. 8.36, *a*).

Dacă nu există conductor neutru, impedanţele directă şi inversă rămîn mai departe egale; în schimb impedanţa homopolară este infinită. Reprezentarea acesteia se face printr-o impedanţă, care nu este conectată la reţea (fig. 8.36, *b*).

Felul impedanţei	Schema în trifazat	Circuitul echivalent pentru reţeaua homopolară	Felul impedanţei	Schema în trifazat	Circuitul echivalent pentru reţeaua homopolară
Impedanţe în serie cu conductor neutru (a)	Z Z Z neutru	Z	Transformator triunghi-triunghi (f)		
Impedanţe în serie fără conductor neutru (b)	Z Z Z	Z	Transformator stea-stea cu neutrele izolate (g)		
Impedanţe în derivaţie cu neutrul legat (c)	Z Z Z	Z	Transformator stea-stea cu neutrele legate la pămînt (h)		
Impedanţe în derivaţie cu neutrul izolat (d)	Z Z Z	Z	Transformator stea-triunghi cu neutrul legat la pămînt (i)		
Impedanţe în derivaţie cu neutrul legat printr-o impedanţă (e)	Z Z Z Z_N	Z $3Z_N$	Transformator stea-triunghi cu neutrul izolat (j)		
			Transformator stea-stea cu cu unul din neutre legat la pămînt celălalt izolat (k)		

Fig. 8.36. Circuitele echivalente ale diverselor impedanţe în sistemul homopolar.

Impedanțele derivație, legate pe diversele faze, dacă sînt simetrice și au neutrul legat la pămînt, sau la un conductor de întoarcere, au — ca și în cazul precedent — aceeași valoare pentru cele trei rețele, directă, inversă și homopolară (fig. 8.36, *c*). În cazul că neutrul nu este legat la pămînt, sau sistemul este în triunghi, atunci impedanța rețelei homopolare este infinită și este reprezentată printr-o impedanță deconectată (fig. 8.36, *d*).

Dacă însă neutrul este legat la pămînt printr-o impedanță $\underline{Z}_N$ în schema echivalentă, ea se ia de trei ori mai mare (fig. 8.36, *e*).

Transformatoarele cu 2 înfășurări pot fi reprezentate prin cuadripoli în *T*, în care cele două impedanțe în serie reprezintă impedanțele de dispersii ale transformatorului, iar derivația reprezintă admitanța de excitare a acestuia. În problemele de scurtcircuit, aceasta din urmă poate fi neglijată și circuitul echivalent este reprezentat numai prin impedanțele în serie (un dipol). În figurile 8.36, *f* — *k*, sînt arătate circuitele echivalente ale transformatoarelor cu două înfășurări, corespunzînd diverselor situații ce se prezintă în practică. Aceste circuite sînt date pentru sistemul homopolar, el fiind singurul care prezintă situații diferite. Pentru sistemele direct și invers, impedanțele respective sînt egale și există întotdeauna, oricare ar fi conectarea transformatorului.

În ceea ce privește reactanțele diverselor elemente care intră în constituția unei rețele, valoarea acestora depinde de o serie de parametri constructivi (tipul de construcție, frecvența etc.). Dăm cîteva valori pentru cele mai importante elemente de rețea :

— generatoare sincrone

Felul generatorului sincron	$x_s\ \Omega$	$x_a\ \Omega$	$x_0\ \Omega$
turbogenerator	0,95—1,45	0,07—0,17	0,01—0,14
generator cu poli aparenți	0,60—1,45	0,13—0,35	0,02—0,20
hidrogenerator	0,60—1,45	0,30—0,70	0,04—0,22

— transformatoare

Felul transformatorului	$x\%$	$r\%$
de distribuție	3— 5	
de rețea	5— 7	
pînă la 60 kV	5— 7	0,35—0,50
de 110 kV	6— 9	
de 220 kV	10—14	

OBSERVAȚIE: În ceea ce privește reactanța homopolară, aceasta depinde de foarte mulți factori și, în general, nu poate fi determinată decît aproximativ ; în calcule se ia egală cu reactanța directă.

— linii aeriene

Felul liniei	$\frac{x_h}{x_d}$	$x_d = x_i\ \Omega/\text{km}$
linie simplă, fără conductor de protecție	3,5	
linie dublă, fără conductor de protecție	5,5	
linie simplă, cu conductor de protecție	2	0,4
linie dublă, cu conductor de protecție	3	

şi pentru reţelele inversă şi homopolară. Reţeaua homopolară este reprezentată printr-o impedanţă simplă (fig. 8.36, *a*).

Dacă nu există conductor neutru, impedanţele directă şi inversă rămîn mai departe egale; în schimb impedanţa homopolară este infinită. Reprezentarea acesteia se face printr-o impedanţă, care nu este conectată la reţea (fig. 8.36, *b*).

Felul impedanţei	Schema în trifazat	Circuitul echivalent pentru reţeaua homopolară
Impedanţe în serie cu conductor neutru (a)	Z Z Z neutru	Z
Impedanţe în serie fără conductor neutru (b)	Z Z Z	Z
Impedanţe în derivaţie cu neutrul legat (c)	Z Z Z	Z
Impedanţe în derivaţie cu neutrul izolat (d)	Z Z Z	Z
Impedanţe în derivaţie cu neutrul legat printr-o impedanţă (e)	Z Z Z Z_N	Z $3Z_N$

Felul impedanţei	Schema în trifazat	Circuitul echivalent pentru reţeaua homopolară
Transformator triunghi-triunghi (f)		
Transformator stea-stea cu neutrele izolate (g)		
Transformator stea-stea cu neutrele legate la pămînt (h)		
Transformator stea-triunghi cu neutrul legat la pămînt (i)		
Transformator stea-triunghi cu neutrul izolat (j)		
Transformator stea-stea cu cu unul din neutre legat la pămînt celălalt izolat (k)		

Fig. 8.36. Circuitele echivalente ale diverselor impedanţe în sistemul homopolar.

Impedanțele derivație, legate pe diversele faze, dacă sînt simetrice și au neutrul legat la pămînt, sau la un conductor de întoarcere, au — ca și în cazul precedent — aceeași valoare pentru cele trei rețele, directă, inversă și homopolară (fig. 8.36, *c*). În cazul că neutrul nu este legat la pămînt, sau sistemul este în triunghi, atunci impedanța rețelei homopolare este infinită și este reprezentată printr-o impedanță deconectată (fig. 8.36, *d*).

Dacă însă neutrul este legat la pămînt printr-o impedanță $\underline{Z}_N$ în schema echivalentă, ea se ia de trei ori mai mare (fig. 8.36, *e*).

Transformatoarele cu 2 înfășurări pot fi reprezentate prin cuadripoli în *T*, în care cele două impedanțe în serie reprezintă impedanțele de dispersii ale transformatorului, iar derivația reprezintă admitanța de excitare a acestuia. În problemele de scurtcircuit, aceasta din urmă poate fi neglijată și circuitul echivalent este reprezentat numai prin impedanțele în serie (un dipol). În figurile 8.36, $f - k$, sînt arătate circuitele echivalente ale transformatoarelor cu două înfășurări, corespunzînd diverselor situații ce se prezintă în practică. Aceste circuite sînt date pentru sistemul homopolar, el fiind singurul care prezintă situații diferite. Pentru sistemele direct și invers, impedanțele respective sînt egale și există întotdeauna, oricare ar fi conectarea transformatorului.

În ceea ce privește reactanțele diverselor elemente care intră în constituția unei rețele, valoarea acestora depinde de o serie de parametri constructivi (tipul de construcție, frecvența etc.). Dăm cîteva valori pentru cele mai importante elemente de rețea :

— generatoare sincrone

Felul generatorului sincron	$x_s\ \Omega$	$x_a\ \Omega$	$x_0\ \Omega$
turbogenerator	0,95—1,45	0,07—0,17	0,01—0,14
generator cu poli aparenți	0,60—1,45	0,13—0,35	0,02—0,20
hidrogenerator	0,60—1,45	0,30—0,70	0,04—0,22

— transformatoare

Felul transformatorului	x%	r%
de distribuție	3— 5	
de rețea	5— 7	
pînă la 60 kV	5— 7	0,35—0,50
de 110 kV	6— 9	
de 220 kV	10—14	

OBSERVAȚIE: În ceea ce privește reactanța homopolară, aceasta depinde de foarte mulți factori și, în general, nu poate fi determinată decît aproximativ ; în calcule se ia egală cu reactanța directă.

— linii aeriene

Felul liniei	$\frac{x_h}{x_d}$	$x_d = x_i\ \Omega/\text{km}$
linie simplă, fără conductor de protecție	3,5	
linie dublă, fără conductor de protecție	5,5	0,4
linie simplă, cu conductor de protecție	2	
linie dublă, cu conductor de protecție	3	

8.4.5.3. **Metoda generală de calcul a curenților de scurtcircuit.** Rezultatul final la care trebuie ajuns într-o problemă de calcul de curenți de scurtcircuit este găsirea distribuției diverșilor curenți în rețea, mărimea lor și sarcina ce revine fiecărui alternator în parte. În unele cazuri este necesar să se determine și tensiunea în diverse puncte ale rețelei.

Determinarea curenților și tensiunilor se face prin componentele lor simetrice. Mărimea acestora se obține prin gruparea convenabilă a diverselor rețele fictive și aplicînd apoi regulile obișnuite de calculare a circuitelor electrice. Gruparea rețelelor fictive depinde de natura scurtcircuitului apărut în rețeaua reală.

Într-o rețea trifazată, scurtcircuitele simple care pot apărea pot fi grupate în patru categorii distincte și anume:

— scurtcircuit al unei faze la pămînt;
— scurtcircuit între două faze și la pămînt;
— scurtcircuit între două faze izolat de pămînt;
— scurtcircuit între toate trei fazele.

Pentru rezolvarea problemelor de scurtcircuit, se presupune că la locul defectului din rețeaua dată se ramifică trei conductoare fictive de impedanță nulă (fig. 8.37). Prin aceste conductoare se scurg curenții spre defect; fie $\underline{I}_x$, $\underline{I}_y$, $\underline{I}_z$ acești curenți care se derivă respectiv din fazele 1, 2 și 3 ale rețelei date. Trebuie observat că valoarea acestor curenți este diferită de valoarea curenților $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ și $\underline{I}_3$ ce circulă prin fazele rețelei.

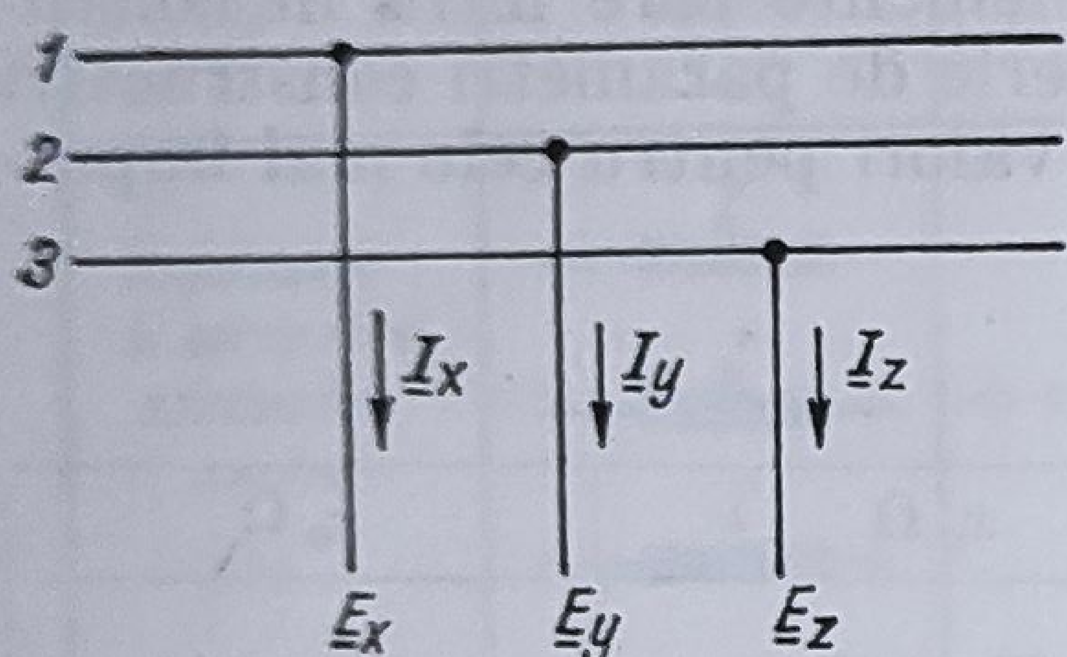


Fig. 8.37. Nodul fictiv al defectului.

De asemenea, fiecare din aceste conductoare au un anumit potențial față de pămînt, $\underline{E}_x$, $\underline{E}_y$, $\underline{E}_z$, care poate fi chiar potențialul fiecărei faze a rețelei față de pămînt.

Studiul diverselor scurtcircuite se face stabilind „condițiile de funcționare" ale defectului în acest punct, scriindu-se valorile acestor mărimi și relațiile dintre ele în cazul defectului considerat.

Aplicînd acestor sisteme teoria coordonatelor simetrice, se găsește modul de cuplare a diverselor rețele fictive și deci componentele simetrice corespunzătoare.

Cunoașterea componentelor simetrice conduce apoi la cunoașterea mărimilor reale ale curenților și tensiunilor ce există la locul defectului.

Înainte de a se trece la efectuarea calculelor, trebuie observat că forțele electromotoare ale diverselor mașini sincrone din rețea sînt, în general, diferite. În aceste condiții, calculul nu se poate face și pentru rezolvarea problemei, se ia o tensiune oarecare arbitrar aleasă, aceeași pentru toate elementele rețelei numită *tensiune de referință.*

Față de această tensiune, diversele impedanțe ale elementelor constitutive ale rețelei se recalculează în raport cu noua tensiune, cu ajutorul relației:

$$\underline{Z}' = k^2\underline{Z}$$

în care k este raportul dintre tensiunea aleasă ca tensiune de referință și tensiunea reală a elementului considerat.

După efectuarea calculului, curenţii obţinuţi se recalculează la tensiunea reală a elementului prin relaţia

$$\underline{I} = k\ \underline{I}'.$$

8.4.5.4. Studiul particular al diverselor scurtcircuite simple dintr-o reţea trifazată. 1. *Scurtcircuit al unei faze la pămînt cu arc electric* (fig. 8.38). Condiţiile de funcţionare ale defectului sînt

$$\underline{E}_x = \underline{Z}\,\underline{I}_x,\ \underline{I}_y = 0,\ \underline{I}_z = 0,$$

în care $\underline{Z}$ este impedanţa echivalentă a arcului electric.

Scriind relaţiile (8.11), (8.12) şi (8.13) care dau componentele simetrice ale sistemului de curenţi, se obţine:

$$\underline{I}_h = \frac{1}{3}(\underline{I}_x + \underline{I}_y + \underline{I}_z) = \frac{1}{3}\underline{I}_x,$$

$$\underline{I}_d = \frac{1}{3}(\underline{I}_x + \mathrm{a}\ \underline{I}_y + \mathrm{a}^2\underline{I}_z) = \frac{1}{3}\underline{I}_x,$$

$$\underline{I}_i = \frac{1}{3}(\underline{I}_x + \mathrm{a}^2\underline{I}_y + \mathrm{a}\underline{I}_z) = \frac{1}{3}\underline{I}_x,$$

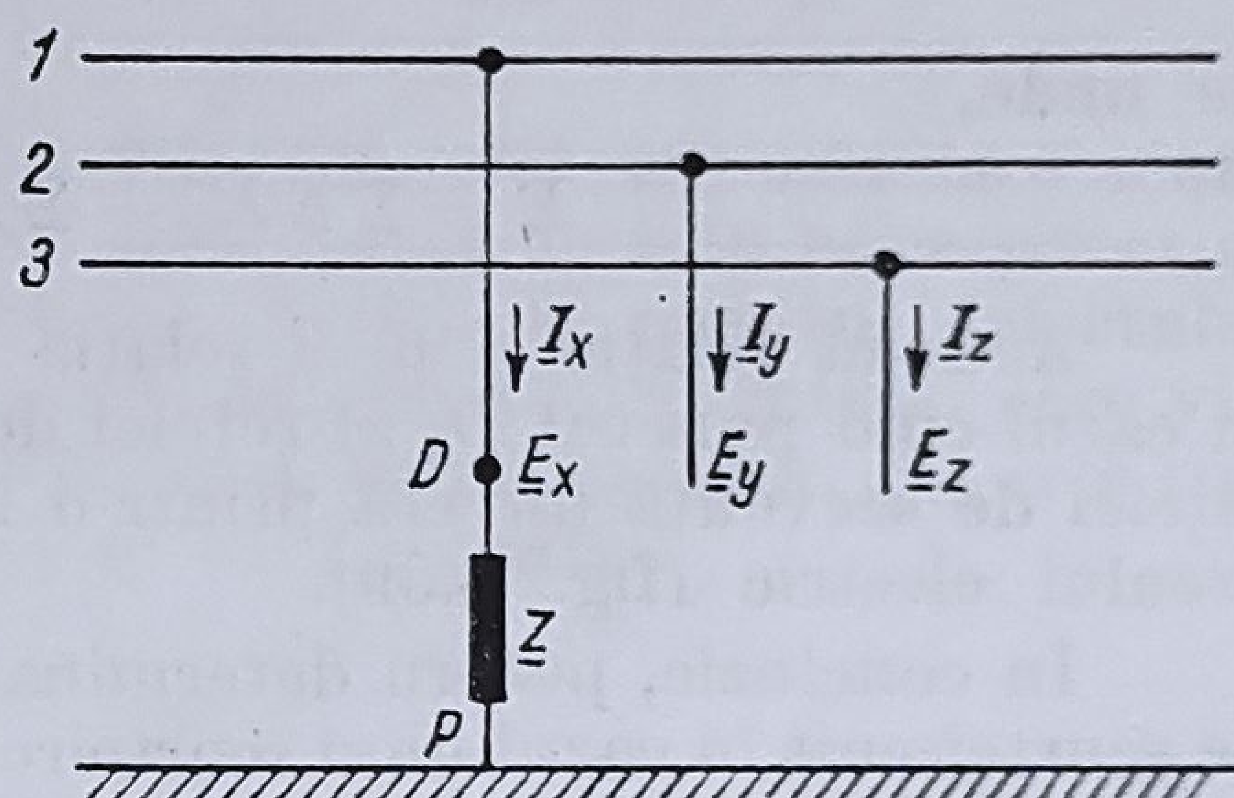


Fig. 8.38. Scurtcircuit al unei faze la pămînt cu arc electric.

de unde, rezultă

$$\underline{I}_h = \underline{I}_d = \underline{I}_i. \qquad (8.51)$$

apoi

$$\underline{I}_x = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i = 3\ \underline{I}_d$$

Pe de altă parte, scriind tensiunea $\underline{E}_x$ în funcţie de coordonatele sale simetrice, se obţine

$$\underline{E}_x = \underline{E}_h + \underline{E}_d + \underline{E}_i = \underline{Z}\ \underline{I}_x = 3\ \underline{Z}\ \underline{I}_d. \qquad (8.52)$$

Din relaţia (8.51) rezultă că cei trei curenţi care ies prin punctele D_d, D_i şi D_h (fig. 8.35) sînt egali. În consecinţă, cele trei reţele vor fi legate în serie, legîndu-se punctul D_d al reţelei directe la punctul D_i' al conductorului neutru al reţelei inverse şi punctul D_i al acestei reţele, la punctul D_h' al reţelei homopolare.

Componentele simetrice ale tensiunilor nu sînt altceva, decît tensiunile aplicate la bornele fiecărei reţele fictive în parte şi care produc curentul de secvenţă corespunzătoare reţelei respective. Ele pot fi asemuite cu forţele electromotoare ale unor generatoare fictive care alimentează reţeaua cu aceste tensiuni chiar în punctul defectului. Pentru a determina valoarea acestor componente se porneşte de la punctul corespunzător defectului de pe firul neutru (fig. 8. 34) şi, parcurgînd reţeaua *pe orice drum* spre punctul defectului de pe fază, se aplică teorema a II-a a lui KIRCHHOFF. În aceste condiţii, notînd cu $\Sigma\Delta\underline{E}_k$ căderea de tensiune în impedanţele reţelei de secvenţă k, se găseşte

$$\underline{E} = \underline{E}_d + \Sigma\,\Delta\,\underline{E}_d,$$

de unde

$$\underline{E}_d = \underline{E} - \Sigma\,\Delta\,\underline{E}_d,$$

$\underline{E}$ fiind forța electromotoare de referință din sistemul dat.

În același mod se găsește*

$$\underline{E}_i = 0 - \Sigma\,\Delta\,\underline{E}_i$$

pentru rețeaua de secvență inversă și

$$\underline{E}_h = 0 - \Sigma\,\Delta\,\underline{E}_h$$

pentru rețeaua de secvență homopolară.

Adunînd aceste trei relații, se obține

$$\underline{E} - \Sigma\,\Delta\,\underline{E}_d - \Sigma\,\Delta\,\underline{E}_i - \Sigma\,\Delta\underline{E}_h = \underline{E}_d + \underline{E}_i + \underline{E}_h = 3\,\underline{Z}\,\underline{I}_d$$

de unde,

$$\underline{E} = \Sigma\,\Delta\,\underline{E}_d + \Sigma\,\Delta\,\underline{E}_i + \Sigma\,\Delta\,\underline{E}_h + 3\,\underline{Z}\,\underline{I}_d. \qquad (8.53)$$

Această relație și deci relația echivalentă (8.52) este satisfăcută numai în cazul cînd punctul D_h al rețelei de secvență nulă este legat la punctul D'_d al rețelei de secvență directă printr-o impedanță egală cu de trei ori impedanța arcului electric (fig. 8.39).

În concluzie, pentru determinarea componentelor simetrice ale curentului de scurtcircuit în cazul unui scurtcircuit ale unei faze la pămînt prin arc electric, se leagă cele trei rețele fictive în serie și în serie cu o impedanță egală cu de trei ori impedanța arcului. Schema din figura 8.39 reprezintă circuitul echivalent al unui asemenea defect.

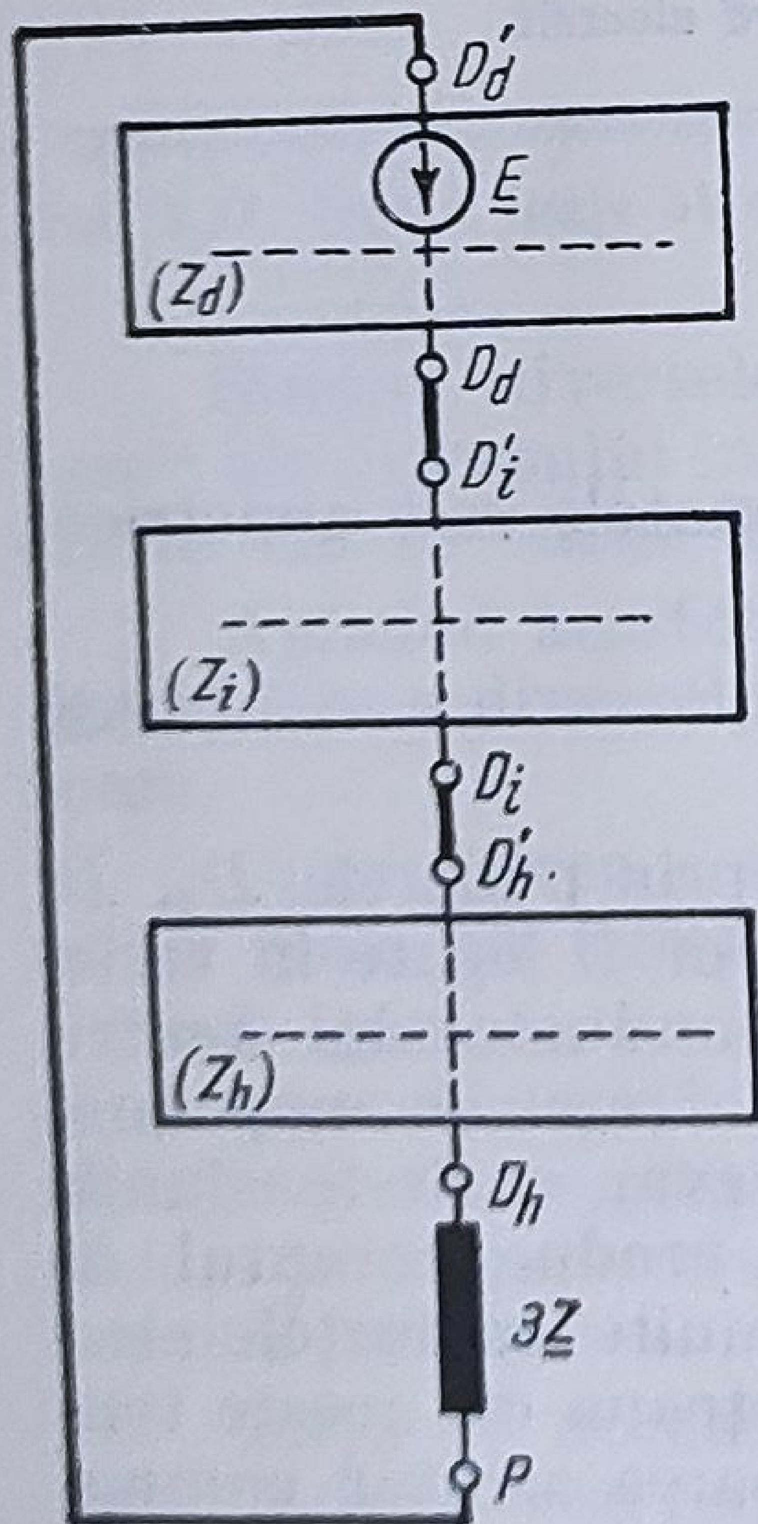


Fig. 8.39. Schema echivalentă a unui scurtcircuit a unei faze la pămînt cu arc electric.

Acestui circuit i se aplică apoi regulile obișnuite de calcul. Astfel, dacă $\underline{Z}_d$, $\underline{Z}_i$ și $\underline{Z}_h$ sînt impedanțele echivalente ale celor trei rețele fictive și $\underline{E}$ tensiunea de referință, componentele simetrice ale curentului, la locul defectului, sînt date de relația

$$\underline{I}_d = \underline{I}_i = \underline{I}_h = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_h + 3\,\underline{Z}},$$

iar componentele simetrice ale tensiunii la locul defectului sînt

$$\underline{E}_d = \underline{E} - \underline{Z}_d\,\underline{I}_d,$$

$$\underline{E}_i = -\,\underline{Z}_i\,\underline{I}_i,$$

$$\underline{E}_h = -\,\underline{Z}_h\,\underline{I}_h.$$

Curenții *reali* la locul defectului vor fi

$$\underline{I}_x = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i = 3\,\underline{I}_h = \frac{3\underline{E}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_h + 3\,\underline{Z}}\ \text{A},$$

$$\underline{I}_y = \underline{I}_h + a^2\,\underline{I}_d + a\,\underline{I}_i = (1 + a^2 + a)\,\underline{I}_h = 0$$

$$\underline{I}_z = \underline{I}_h + a\,\underline{I}_d + a^2\,\underline{I}_i = (1 + a + a^2)\,\underline{I}_h = 0$$

* În ipoteza că sursa este simetrică și echilibrată.

iar tensiunile la locul defectului

$$\underline{E}_x = \underline{E}_h + \underline{E}_d + \underline{E}_i = \underline{E} - (\underline{Z}_h \underline{I}_h + \underline{Z}_d \underline{I}_d + \underline{Z}_i \underline{I}_i + 3\underline{Z}\, \underline{I}_h) =$$
$$= \underline{E} - (\underline{Z}_h + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i + 3\underline{Z})\, \underline{I}_h = 3\underline{Z}\, \underline{I}_h$$

$$\underline{E}_y = \underline{E}_h + a^2 \underline{E}_d + a\, \underline{E}_i = a^2 \underline{E} - (\underline{Z}_h \underline{I}_h + a^2 \underline{Z}_d \underline{I}_d + a\, \underline{Z}_i \underline{I}_i + 3\, \underline{Z}\, \underline{I}_h) =$$
$$= \sqrt{3}\, \frac{\underline{Z}_h + a\underline{Z}_i}{\underline{Z}_h + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i + 3\underline{Z}}\, \underline{E} \,\underline{| -150^\circ}\ \text{V},$$

$$\underline{E}_z = \underline{E}_h + a\underline{E}_d + a^2\underline{E}_i = a\underline{E} - (\underline{Z}_h \underline{I}_h + a\underline{Z}_d \underline{I}_d + a^2 \underline{Z}\, \underline{I}_i + 3\underline{Z}\, \underline{I}_h) =$$
$$= \sqrt{3}\, \frac{\underline{Z}_h - a^2 \underline{Z}_i}{\underline{Z}_h + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i + 3\underline{Z}}\, \underline{E} \,\underline{| +150^\circ}\ \text{V}.$$

Cunoscînd componentele simetrice la locul defectului, se poate face acum distribuţia de curenţi în fiecare reţea fictivă şi cunoaşte deci, în orice punct al reţelei, componentele simetrice ale curentului. Astfel, la punctul defectului (fig. 8. 35) se va găsi că cele trei componente simetrice ale curentului care vin din partea stîngă sînt $\underline{I}_{mh}$, $\underline{I}_{md}$ şi $\underline{I}_{mi}$. Curentul real, corespunzător, pe cele trei faze se obţine cu ajutorul relaţiilor (8.10); se va găsi astfel

$$\underline{I}_{m1} = \underline{I}_{mh} + \underline{I}_{md} + \underline{I}_{mi},$$
$$\underline{I}_{m2} = \underline{I}_{mh} + a^2 \underline{I}_{md} + a\, \underline{I}_{mi},$$
$$\underline{I}_{m3} = \underline{I}_{mh} + a\, \underline{I}_{md} + a^2 \underline{I}_{mi}.$$

De asemenea, diferenţa de potenţial între două puncte oarecare ale reţelei se obţine din cunoaşterea componentelor simetrice ale curenţilor şi ale impedanţelor respective. Astfel, pentru prima bară colectoare, se vor găsi componentele simetrice de tensiune $\underline{E}_d$, $\underline{E}_i$ şi $\underline{E}_h$ (fig. 8.35), tensiunile respective pe fază fiind

$$\underline{E}'_1 = \underline{E}'_h + \underline{E}'_d + \underline{E}'_i,$$
$$\underline{E}'_2 = \underline{E}'_h + a^2 \underline{E}'_d + a\, \underline{E}'_i,$$
$$\underline{E}'_3 = \underline{E}'_h + a\, \underline{E}'_d + a^2 \underline{E}'_i.$$

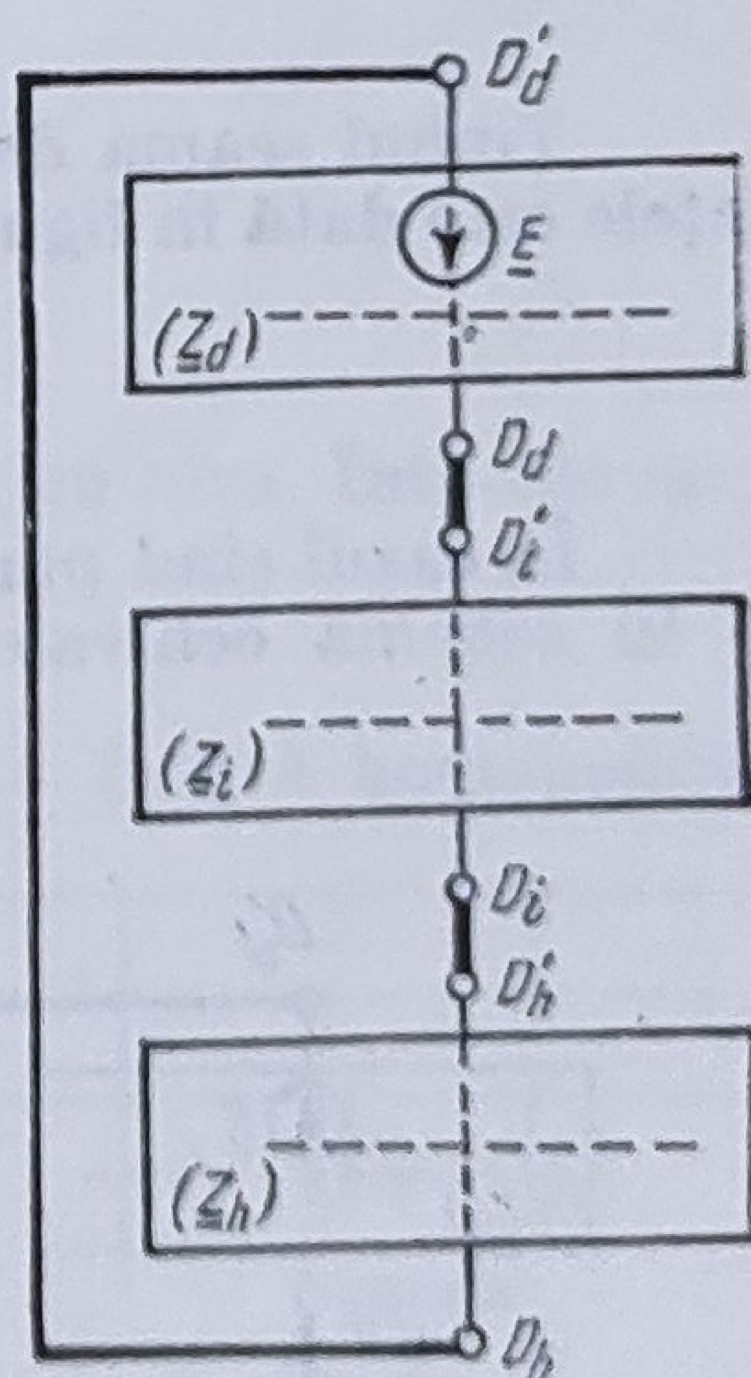


Fig. 8.40. Schema echivalentă a unui scurtcircuit direct a unei faze la pămînt.

În cazul cînd punerea la pămînt este directă, atunci în relaţiile stabilite mai sus, se face $\underline{Z} = 0$. În acest caz, schema defectului se modifică prin suprimarea impedanţei echivalente $\underline{Z}$ (fig. 8.40) iar ecuaţiile defectului sînt

$$\underline{E}_x = 0, \quad \underline{I}_y = 0, \quad \underline{I}_z = 0.$$

Restul calculului urmează să se facă la fel ca în cazul precedent.

2. *Scurtcircuit între două faze şi la pămînt cu arc electric* (fig. 8.41). Condiţiile de funcţionare ale defectului sînt:

$$\underline{I}_x = 0 \quad \text{şi} \quad \underline{E}_y = \underline{E}_z = \underline{Z}\,(\underline{I}_y + \underline{I}_z),$$

$\underline{Z}$ fiind impedanţa echivalentă a arcului electric.

Calculînd componentele simetrice ale tensiunilor la locul defectului, se găseşte

$$\underline{E}_h = \frac{1}{3} (\underline{E}_z + 2\, \underline{E}_y)$$

$$\underline{E}_d = \frac{1}{3} [\underline{E}_y + (a^2 + a)\, \underline{E}_y] = \frac{1}{3} (\underline{E}_z - \underline{E}_y),$$

$$\underline{E}_i = \frac{1}{3} [\underline{E}_z + (a + a^2)\, \underline{E}_y] = \frac{1}{3} (\underline{E}_z - \underline{E}_y).$$

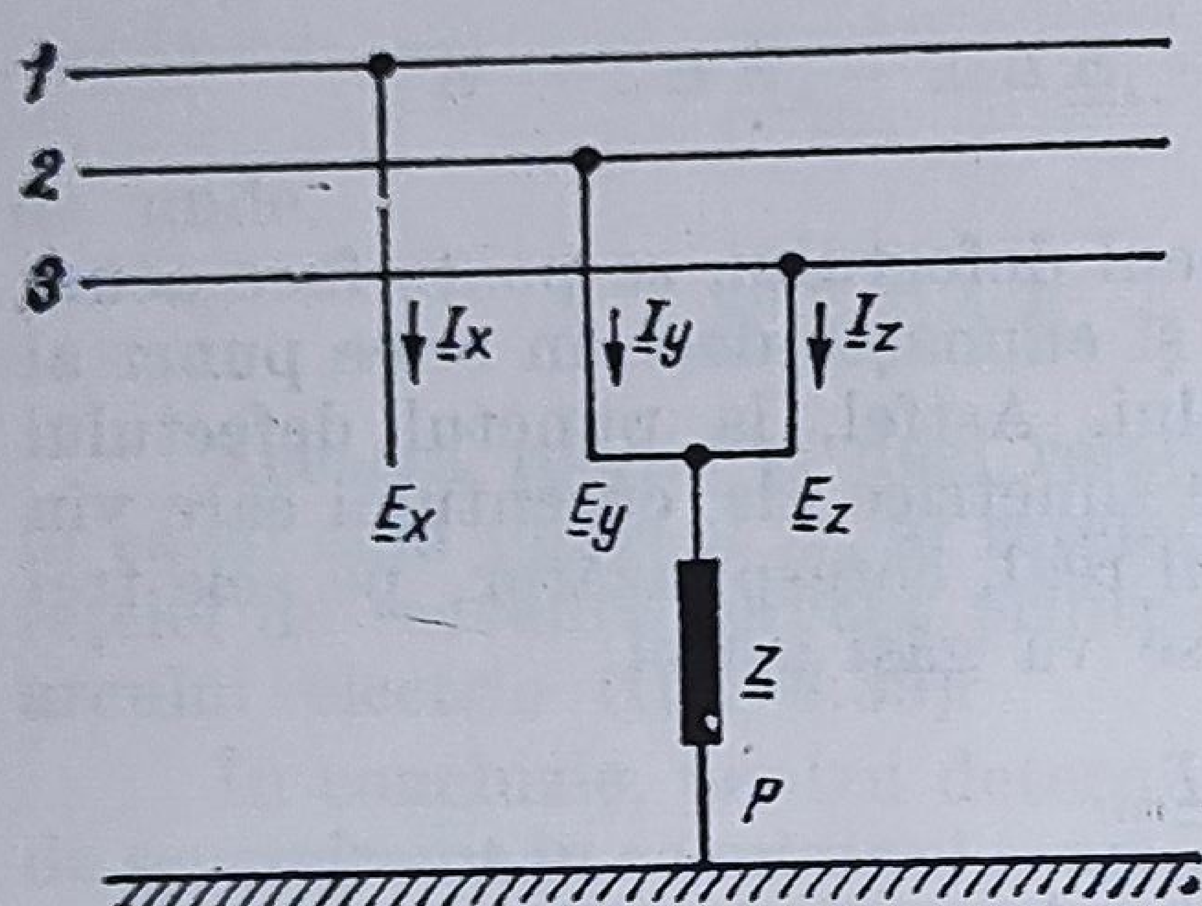


Fig. 8.41. Scurtcircuit între două faze şi la pămînt cu arc electric.

Din aceste relaţii, rezultă

$$\underline{E}_d = \underline{E}_i \tag{8.54}$$

şi

$$\underline{E}_h - \underline{E}_d = \underline{E}_y = \underline{Z}(\underline{I}_y + \underline{I}_z). \tag{8.55}$$

Din expresia (8.11) care dă componenta homopolară şi ţinînd seama că $\underline{I}_x = 0$, rezultă

$$\underline{I}_y + \underline{I}_z = 3\, \underline{I}_h,$$

astfel că, relaţia (8.55) devine

$$\underline{E}_h - \underline{E}_d = 3\, \underline{Z}\, \underline{I}_h. \tag{8.56}$$

Ţinînd seama de relaţiile (8.54) şi (8.56), schema de legătură a celor trei reţele este dată în figura 8.42, care verifică şi ecuaţia de funcţionare

$$\underline{I}_x = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i.$$

În cazul cînd punerea la pămînt este directă, atunci în relaţiile de mai sus şi în schema echivalentă se face

$$\underline{Z} = 0,$$

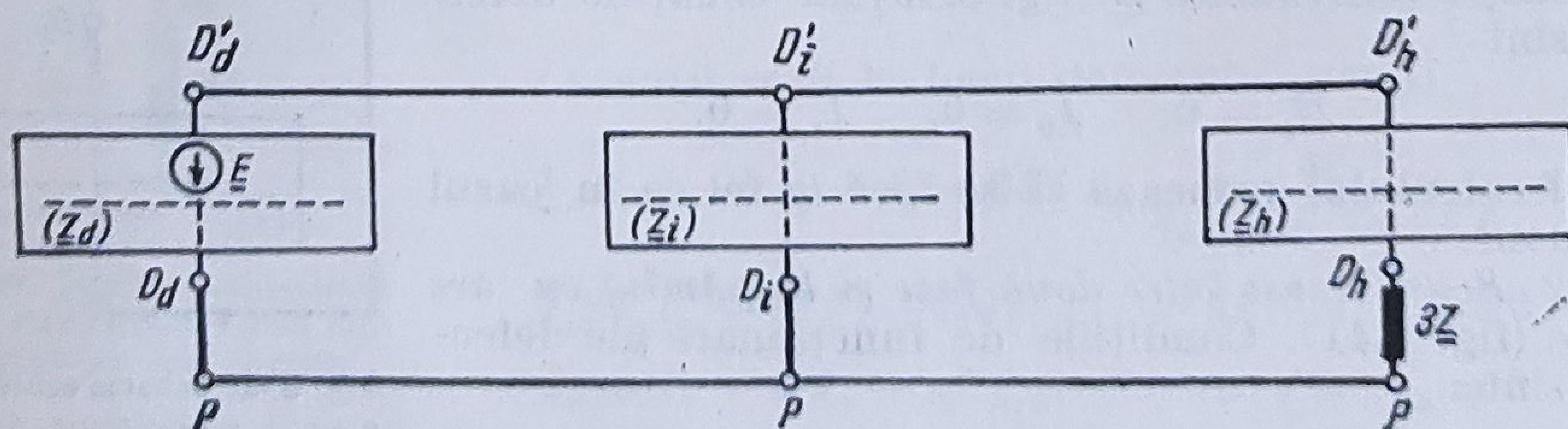


Fig. 8.42. Schema echivalentă a unui scurtcircuit între două faze şi la pămînt cu arc electric.

ecuaţiile de funcţionare fiind

$$\underline{I}_x = 0, \quad \underline{E}_y = \underline{E}_z = 0.$$

Determinarea schemei echivalente se face în acelaşi mod şi este redată în figura 8.43.

3. *Scurtcircuit între două faze cu arc electric, dar izolat faţă de pămînt* (fig. 8.44). Condiţiile de funcţionare ale defectului sînt

$$\underline{I}_x = 0, \quad \underline{I}_y + \underline{I}_z = 0, \quad \underline{E}_z = \underline{E}_y + \underline{Z}\,\underline{I}_y.$$

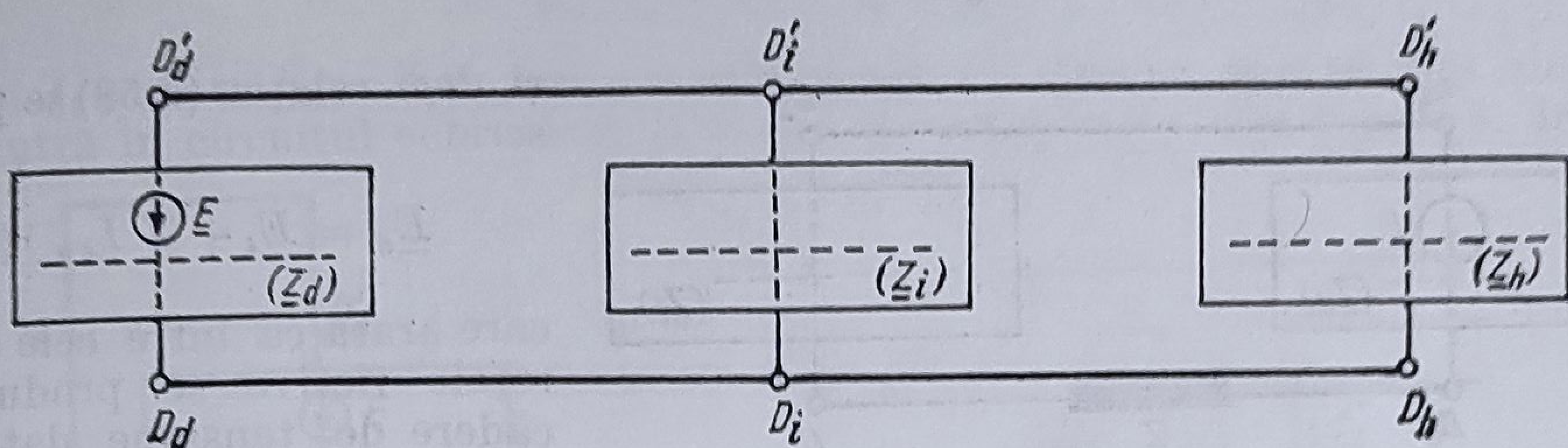


Fig. 8.43. Schema echivalentă a unui scurtcircuit între două faze şi direct la pămînt.

Componentele simetrice ale curenţilor sînt

$$\underline{I}_h = \frac{1}{3}(\underline{I}_x + \underline{I}_y + \underline{I}_z) = 0,$$

$$\underline{I}_d = \frac{1}{3}(\underline{I}_x + a\underline{I}_y + a^2\underline{I}_z) = \frac{-a + a^2}{3}\,\underline{I}_z, \tag{8.57}$$

$$\underline{I}_i = \frac{1}{3}(\underline{I}_x + a^2\,\underline{I}_y + a\,\underline{I}_z) = \frac{a - a^2}{3}\,\underline{I}_z$$

de unde rezultă

$$\underline{I}_d + \underline{I}_i = 0.$$

Deoarece $\underline{I}_h = 0$, rezultă că şi $\underline{E}_h$ trebuie să fie egal cu zero. Într-adevăr,

$$\underline{E}_h = -\,\underline{Z}_h\,\underline{I}_h = 0\,.$$

Dat fiind că $\underline{I}_h = 0$ şi $\underline{E}_h = 0$, rezultă că reţeaua fictivă homopolară nu intră în schema echivalentă a defectului.

Celelalte componente simetrice ale tensiunilor sînt

$$\underline{E}_d = \frac{1}{3}\,(\underline{E}_x - \underline{E}_z - a\,\underline{Z}\,\underline{I}_z)$$

şi

$$\underline{E}_i = \frac{1}{3}\,(\underline{E}_x - \underline{E}_z - a^2\,\underline{Z}\,\underline{I}_z)$$

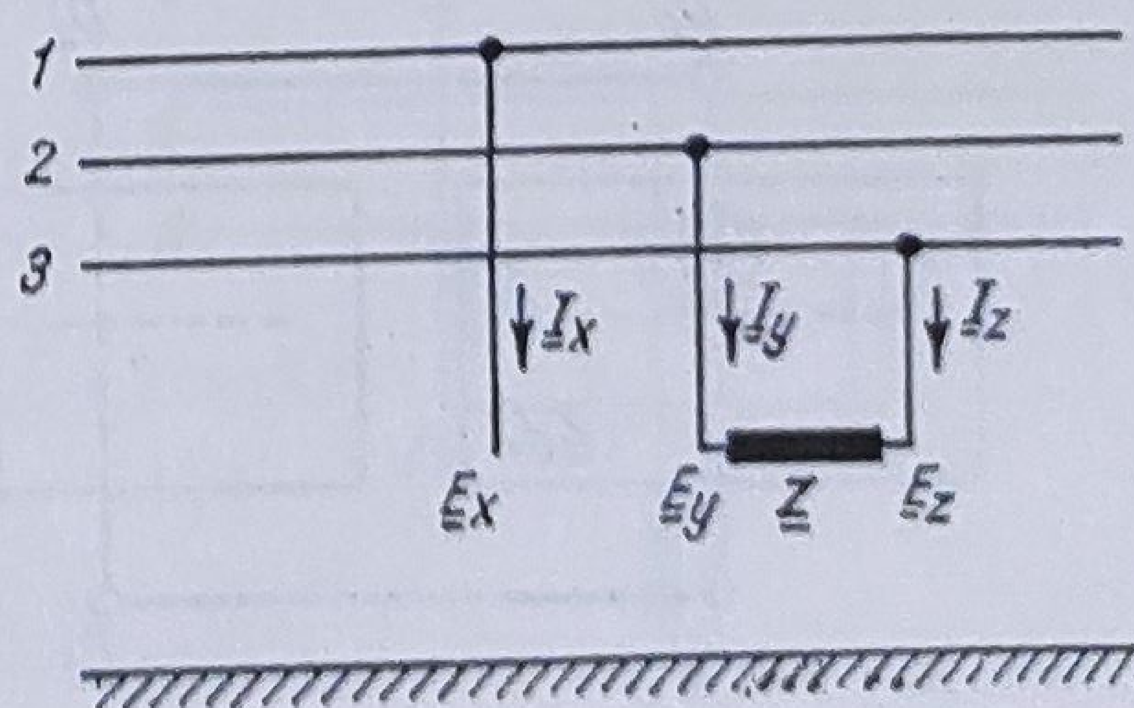


Fig. 8.44. Scurtcircuit între două faze, cu arc electric dar izolat faţă de pămînt

şi deci

$$\underline{E}_d \neq \underline{E}_i\,;$$

diferenţa dintre ele este

$$\underline{E}_d - \underline{E}_i = \frac{1}{3}\,(a^2 - a)\,\underline{Z}\,\underline{I}_z\,. \tag{8.58}$$

Din a doua relaţie (8.57) se vede că

$$\frac{1}{3}\,(a^2 - a)\,\underline{I}_z = \underline{I}_d$$

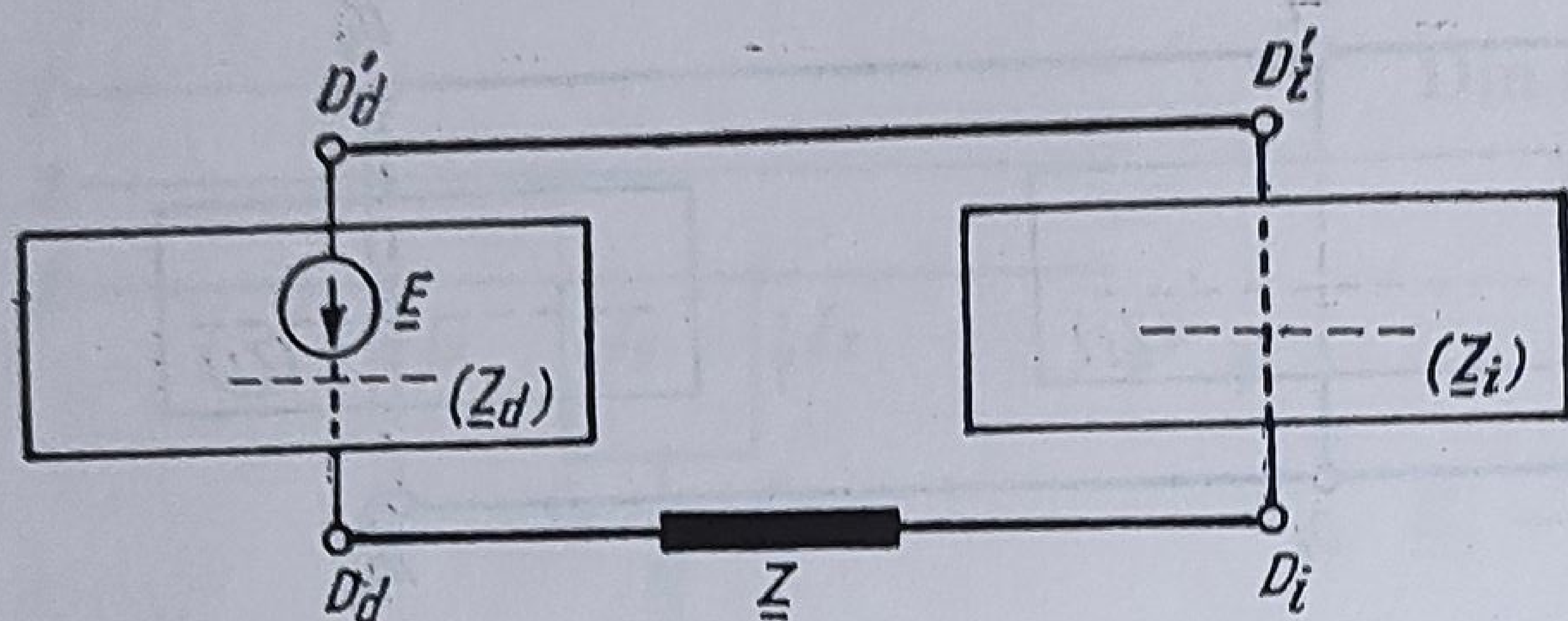


Fig. 8.45. Circuitul echivalent al unui scurtcircuit între două faze cu arc electric.

şi deci relaţia (8.58) se poate scrie

$$\underline{E}_d = \underline{E}_i + \underline{Z}\,\underline{I}_d\,, \tag{8.59}$$

care arată că între cele două reţele fictive se produce o cădere de tensiune datorită impedanţei corespunzătoare defectului.

Relaţiile (8.57) şi (8.59) arată că schema acestui defect trebuie realizată ca în figura 8.45.

Dacă scurtcircuitul este direct, fără arc electric, ecuaţiile de funcţionare ale defectului sînt

$$\underline{I}_x = 0,\ \underline{I}_y + \underline{I}_z = 0,\ \underline{E}_y = \underline{E}_z \tag{8.60}$$

iar schema echivalentă corespunzătoare este dată în figura 8.46.

4. *Scurtcircuit între toate trei fazele izolat de pămînt* (fig. 8.47). Condiţiile de funcţionare ale defectului sînt

$$\underline{E}_x = \underline{E}_y = \underline{E}_z = \underline{E} \tag{8.60}$$

şi

$$\underline{I}_x + \underline{I}_y + \underline{I}_z = 0\,. \tag{8.61}$$

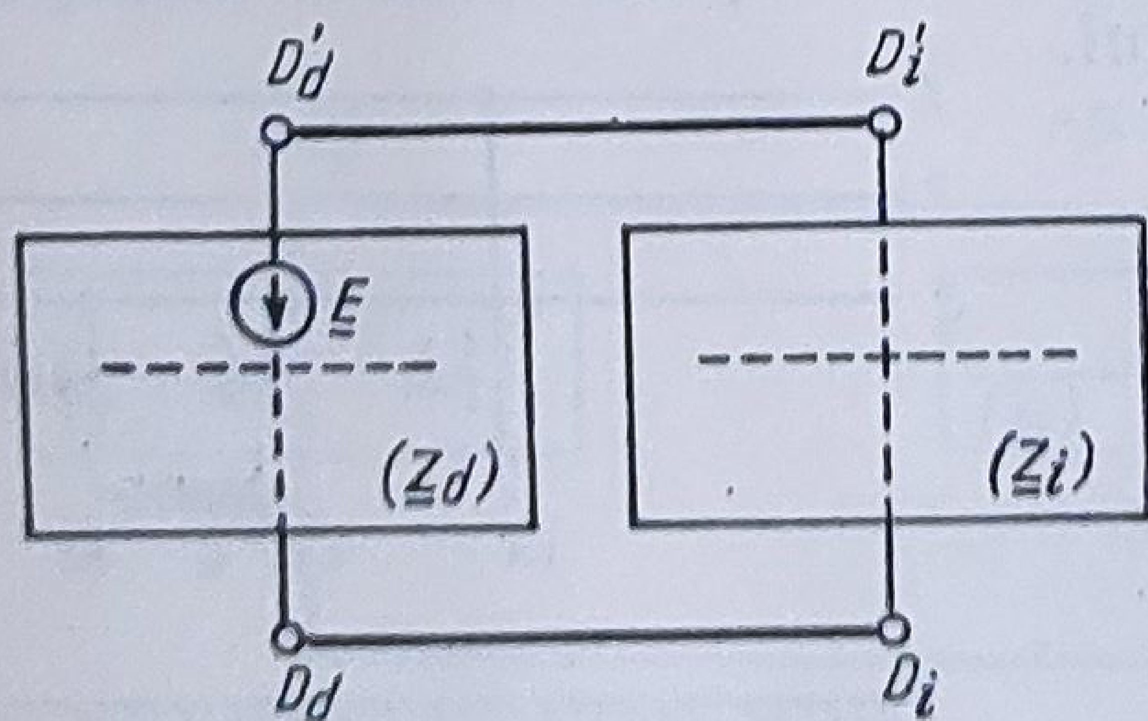


Fig. 8.46. Circuitul echivalent al unui scurtcircuit direct între două faze.

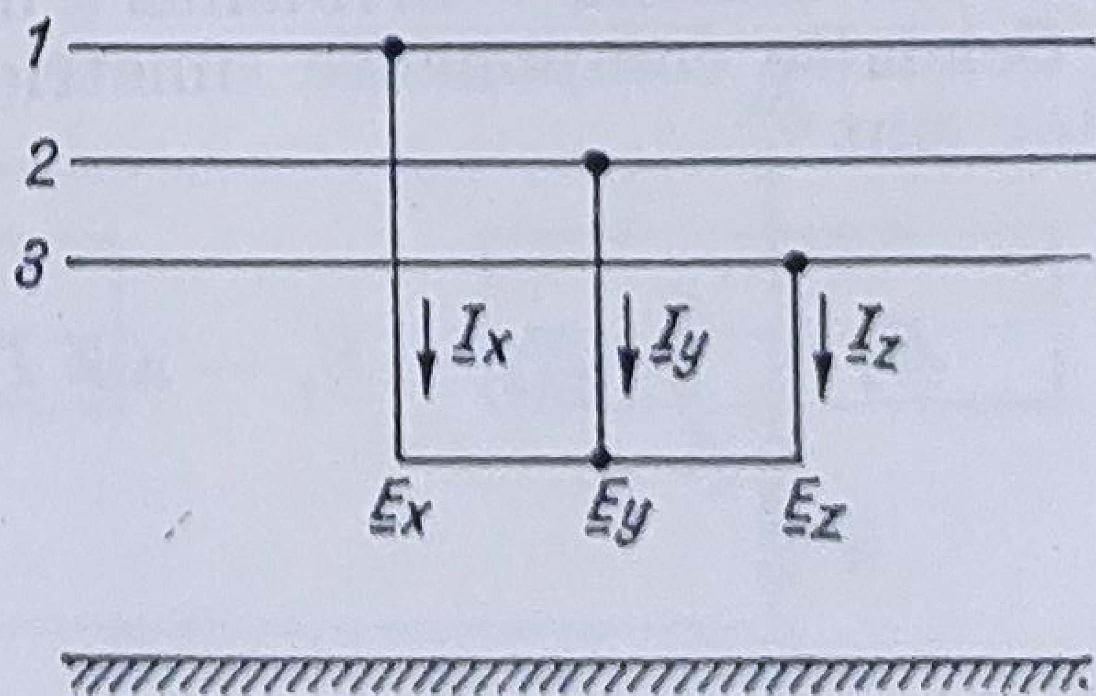


Fig. 8.47. Scurtcircuit între toate trei fazele şi izolat de pămînt.

Din relaţia (8.11), care dă componenta homopolară de curent, ţinînd seama de relaţia (8.61), rezultă

$$\underline{I}_h = 0 \quad \text{şi deci} \quad \underline{E}_h = 0\,.$$

Calculînd componentele simetrice de tensiune, se găseşte

$$\underline{E}_d = 0 \quad \text{şi} \quad \underline{E}_i = 0\,.$$

Rezultă dar

$$\underline{E}_d = \underline{E} - \underline{Z}_d \underline{I}_d = 0$$

$$\underline{E}_i = -\underline{Z}_i \underline{I}_i = 0$$

şi deci $\underline{I}_i = 0$ şi $\underline{E} = \underline{Z}_d \underline{I}_d$, care arată că reţeaua fictivă directă este singura care intră în circuitul echivalent şi care are deci aspectul din figura 8. 48.

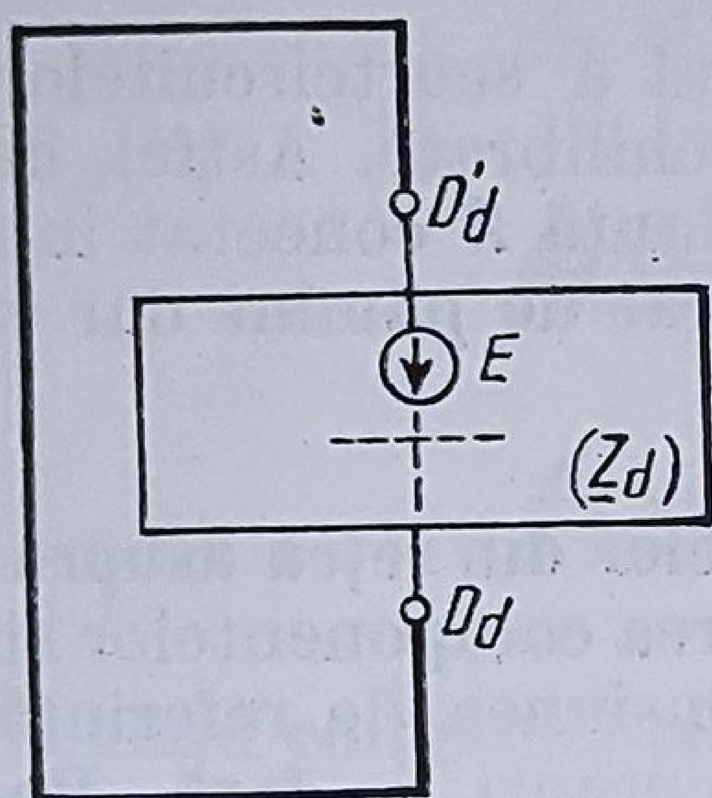


Fig. 8.48. Schema echivalentă a unui scurtcircuit trifazat izolat de pămînt.

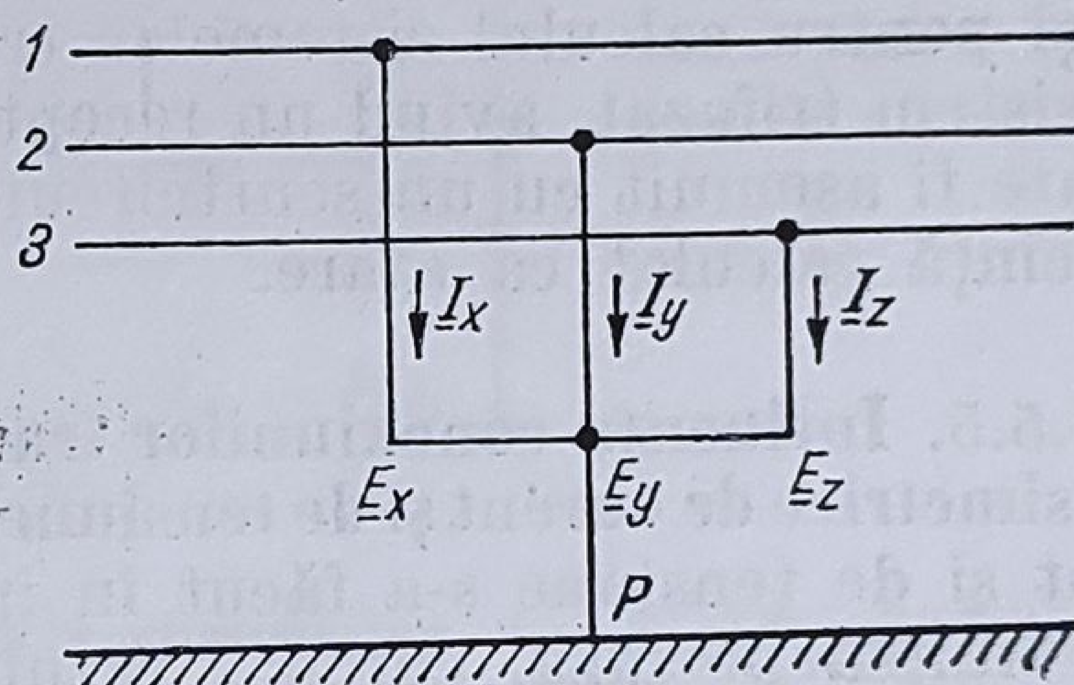


Fig. 8.49. Scurtcircuit trifazat şi la pămînt.

5. *Scurtcircuit între toate fazele şi la pămînt* (fig. 8.49). În acest caz condiţiile de funcţionare ale scurtcircuitului sînt

$$\underline{E}_x = \underline{E}_y = \underline{E}_z = 0\,.$$

Calculînd componentele simetrice respective, se găseşte

$$\underline{E}_h = \underline{E}_d = \underline{E}_i = 0$$

şi deci,

$$\underline{I}_h = 0, \quad \underline{I}_i = 0 \quad \text{şi} \quad \underline{E} = \underline{Z}_d \underline{I}_d\,.$$

Defectul se comportă deci, ca şi în cazul precedent şi are acelaşi circuit echivalent. Scurtcircuitul între toate fazele este un scurtcircuit simetric.

6. *Scurtcircuit între toate fazele şi la pămînt cu arc* (fig. 8.50). Condiţiile de funcţionare ale defectului sînt în acest caz

$$\underline{E}_x = \underline{E}_y = \underline{E}_z = \underline{Z}\,(\underline{I}_x + \underline{I}_y + \underline{I}_z) = 3\,\underline{Z}\,\underline{I}_h\,.$$

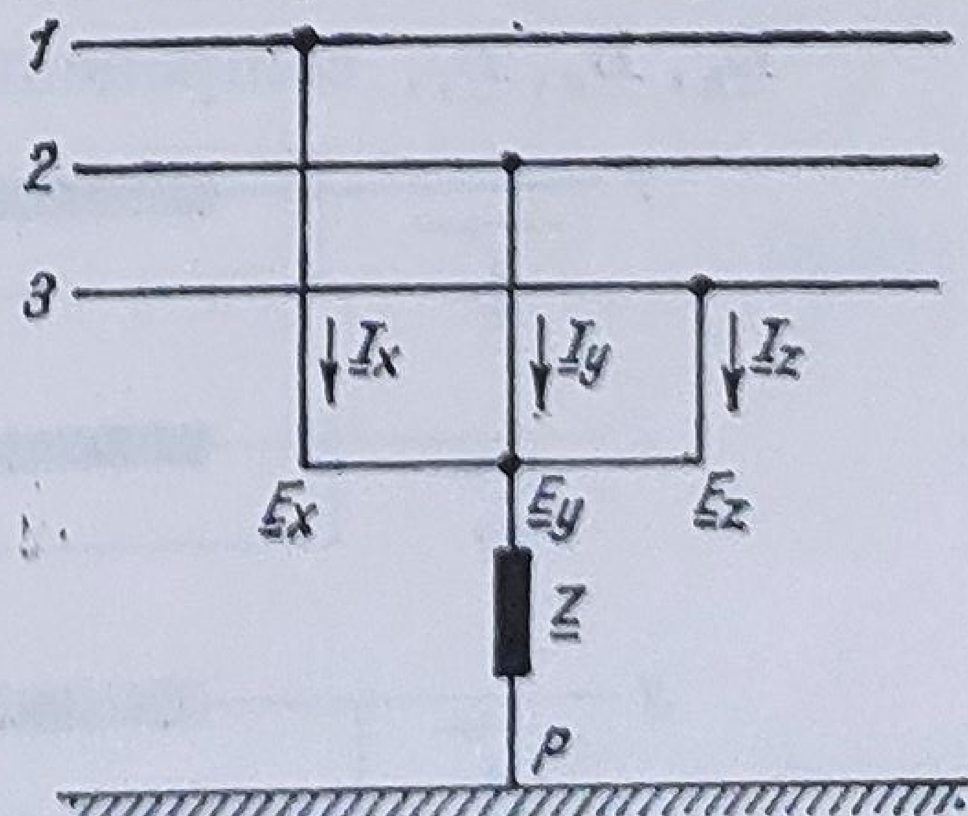


Fig. 8.50. Scurtcircuit trifazat şi la pămînt cu arc.

Rezultă imediat

$$\underline{E}_d = \underline{E}_i = 0$$

şi deci,

$$\underline{E} = \underline{Z}_d \underline{I}_d \qquad \text{şi} \qquad \underline{I}_i = 0 .$$

Ţinînd seama că

$$\underline{E}_h = - \underline{Z}_h \underline{I}_h = 3 \underline{Z} \underline{I}_h ,$$

rezultă

$$(3 \underline{Z} + \underline{Z}_h) \underline{I}_h = 0$$

şi deci

$$\underline{I}_h = 0 \qquad \text{şi} \qquad \underline{E}_h = 0 .$$

În consecinţă şi acest caz se reduce la precedentele.

OBSERVAŢIE: Metodele generale de calcul a scurtcircuitelor pot fi folosite şi pentru calculul sistemelor trifazate dezechilibrate. Astfel, de exemplu, un sistem trifazat, avînd un receptor de impedanţă Z conectat între două faze, poate fi asemuit cu un scurtcircuit bifazat izolat de pămînt dar cu arc şi în consecinţă calculat ca atare.

8.4.5.5. **Influenţa conexiunilor transformatoarelor din reţea asupra componentelor simetrice de curent şi de tensiune.** Determinarea componentelor simetrice de curent şi de tensiune s-a făcut în ipoteza că tensiunea de referinţă este o tensiune simplă pe fază, curenţii rezultanţi fiind curenţi pe fază. Repartiţia acestor componente simetrice în diversele elemente ale reţelei se face, de asemenea, fără să se ţină seama de prezenţa diverselor transformatoare care ar exista în reţea. Cele stabilite mai sus sînt valabile însă, numai în cazul transformatoarelor cu conectare stea-stea. În cazul conectării stea-triunghi sau, invers, în conectarea triunghi, curenţii de linie au un anumit defazaj faţă de curenţii de fază. Acest defazaj trebuie introdus în componentele simetrice corespunzătoare, în caz contrar determinarea curenţilor de linie făcîndu-se greşit.

Fie un transformator cu conexiunea triunghi-stea (fig. 8.51.). Fie

$\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3$, curenţii de linie pe partea primară;

$\underline{A}_h, \underline{A}_d, \underline{A}_i$, componentele lor simetrice;

$\underline{A}'_1, \underline{A}'_2, \underline{A}'_3$, curenţii de fază pe partea primară;

$\underline{B}_1, \underline{B}_2, \underline{B}_3$, curenţii din secundarul transformatorului;

$\underline{B}_h, \underline{B}_d, \underline{B}_i$, componentele lor simetrice.

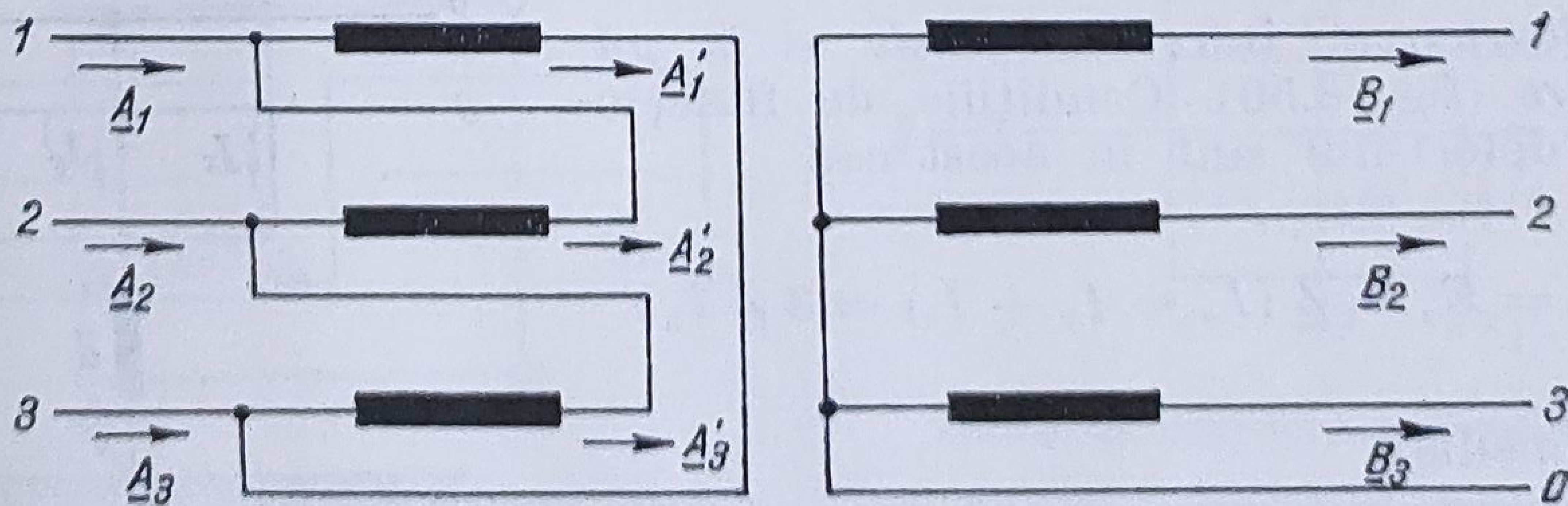


Fig. 8.51. Transformator cu conexiunea triunghi-stea.

Fie k raportul de transformare al transformatorului, definit prin relațiile

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} = k\,;$$

rezultă

$$A_1' = \frac{1}{\sqrt{3}} A_1 = \frac{k}{\sqrt{3}} B_1, \quad A_2' = \frac{k}{\sqrt{3}} B_2, \quad A_3' = \frac{k}{\sqrt{3}} B_3.$$

Pe de altă parte, între curenții de linie și de fază în înfășurarea conectată în triunghi, există următoarele relații :

$$\left.\begin{aligned} \underline{A}_1 &= \underline{A}_1' - \underline{A}_2' = \frac{k}{\sqrt{3}} (\underline{B}_1 - \underline{B}_2), \\ \underline{A}_2 &= \underline{A}_2' - \underline{A}_3' = \frac{k}{\sqrt{3}} (\underline{B}_2 - \underline{B}_3), \\ \underline{A}_3 &= \underline{A}_3' - \underline{A}_1' = \frac{k}{\sqrt{3}} (\underline{B}_3 - \underline{B}_1). \end{aligned}\right\} \tag{8.62}$$

Calculînd componentele simetrice ale curenților $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$, $\underline{A}_3$ și ținînd seama de relațiile (8.62) se obține

$$\underline{A}_h = \frac{1}{3} (\underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_3) = 0$$

$$\underline{A}_d = \frac{1}{3} \frac{k}{\sqrt{3}} [(\underline{B}_1 - \underline{B}_2) + \mathrm{a} (\underline{B}_2 - \underline{B}_3) + \mathrm{a}^2 (\underline{B}_3 - \underline{B}_1)] =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{k}{\sqrt{3}} [(\underline{B}_1 + \mathrm{a}\underline{B}_2 + \mathrm{a}^2\underline{B}_3) - (\underline{B}_2 + \mathrm{a}\underline{B}_3 + \mathrm{a}^2\underline{B}_1)] =$$

$$= \frac{k}{\sqrt{3}} (\underline{B}_{d1} - \underline{B}_{d2}) = \frac{k}{\sqrt{3}} (1 - \mathrm{a}^2)\, \underline{B}_d = k\, \underline{B}_d \underline{|30^\circ}.$$

Rezultă și invers

$$\underline{B}_d = \frac{1}{k} \underline{A}_d \underline{|-30^\circ}. \tag{8.63}$$

În același mod se găsește

$$\underline{A}_i = k\underline{B}_i \underline{|-30^\circ},$$

de unde,

$$\underline{B}_i = \frac{1}{k} \underline{A}_i \underline{|30^\circ}. \tag{8.64}$$

În ceea ce privește tensiunile, în cazul cînd în rețea nu există decît transformatoare cu conectarea în stea, componentele simetrice ale tensiunilor între faze, în diversele puncte ale rețelei, se determină aplicînd relațiile căderilor de tensiune; tensiunile reale se obțin apoi compunînd aceste componente.

În cazul transformatoarelor cu conectarea triunghi-stea, sau invers, componentele simetrice ale tensiunilor pe fază, deduse ca mai sus, trebuie transformate în componente ale tensiunilor între faze. Aceasta se obține imediat aplicînd relațiile (8.15) și (8.16), sau relațiile (8.17) care, pentru a ține seama de raportul de transformare, trebuie înmulțite cu acesta. Astfel, k fiind raportul de transformare al transformatorului, definit prin relația

$$\frac{U'}{U''} = k,$$

în care U' și U'' sînt respectiv tensiunile *între faze* la primarul și scundarul transformatorului, relațiile (8.15) și (8.16) se vor scrie

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}'_d &= \sqrt{3}k\,\underline{V}''_d \,\underline{|-90^\circ}\,, \\ \underline{U}'_i &= \sqrt{3}k\,\underline{V}''_i \,\underline{|90^\circ}\,, \end{aligned}\right\} \tag{8.65}$$

ar din relațiile (8.17), rezultă :

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}'_d &= \sqrt{3}\,k\,\underline{V}''_d \,\underline{|30^\circ}\,, \\ \underline{U}'_i &= \sqrt{3}\,k\,\underline{V}''_i \,\underline{|-30^\circ}\,. \end{aligned}\right\}$$

8.4.5.6. Exemplu de aplicație. Scurtcircuit la bornele unui alternator. Fie un alternator trifazat avînd tensiunea pe fază $\underline{E}_1 = 100 + \mathrm{j}\,0$ V, și impedanțele sincronă, asincronă și homopolară : $\underline{Z}_s = 0 + \mathrm{j}\,1{,}0\ \Omega$, $\underline{Z}_a = 0{,}1 + \mathrm{j}\,0{,}3\ \Omega$, $\underline{Z}_0 = 0 + \mathrm{j}\,0{,}1\ \Omega$. Se cere să se determine curenții de scurtcircuit în toate cazurile posibile.

1. *Scurtcircuit direct al unei faze la pămînt.* Schema echivalentă se obține legîndu-se în serie cele trei impedanțe. În acest caz componentele simetrice ale curentului sînt egale și date de relația

$$\underline{I}_d = \underline{I}_i = \underline{I}_h = \frac{E}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o} = 5{,}08 - \mathrm{j}\ 71{,}1\ \mathrm{A}.$$

Curentul pe faza 1 (faza în scurtcircuit) este

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i = \frac{3E}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o} = 15{,}24 - \mathrm{j}\ 213{,}3\ \mathrm{A}$$

și pe celelalte faze :

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_h + \mathrm{a}^2\underline{I}_d + \mathrm{a}\underline{I}_i = 0\,; \qquad \underline{I}_3 = \underline{I}_h + \mathrm{a}\underline{I}_d + \mathrm{a}^2\underline{I}_i = 0.$$

Componentele de tensiune directă, inversă şi homopolară sînt:

$$\underline{E}_d = \underline{E} - \underline{Z}_s\underline{I}_d = \left(1 - \frac{\underline{Z}_s}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o}\right)\underline{E} = \frac{\underline{Z}_a + \underline{Z}_o}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o}\underline{E} = 28{,}9 - \mathrm{j}\,5{,}08\,\mathrm{V};$$

$$\underline{E}_i = -\underline{Z}_a\underline{I}_i = -\frac{\underline{Z}_a\underline{E}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o} = -21{,}84 + \mathrm{j}\,5{,}59\ \mathrm{V};$$

$$\underline{E}_h = -\underline{Z}_o\underline{I}_h = -\frac{\underline{Z}_o\underline{E}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o} = -7{,}11 - \mathrm{j}\,0{,}508\ \mathrm{V}.$$

Tensiunile de fază sînt:

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_h + \underline{E}_d + \underline{E}_i = \left(\frac{\underline{Z}_a + \underline{Z}_o}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o} - \frac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_0} - \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o}\right)\underline{E} = 0;$$

$$\underline{E}_2 = \underline{E}_h + \mathrm{a}^2\underline{E}_d + \mathrm{a}\underline{E}_i = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_0}(\mathrm{a}^2 - \mathrm{a})\,\underline{Z}_a + (\mathrm{a}^2 - 1)\,\underline{Z}_o =$$

$$-19{,}88 - \mathrm{j}\,44{,}70\ \mathrm{V};$$

$$\underline{E}_3 = \underline{E}_h + \mathrm{a}\underline{E}_d + \mathrm{a}^2\underline{E}_i = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_0}(\mathrm{a} - \mathrm{a}^2)\,\underline{Z}_a + (\mathrm{a} - 1)\,\underline{Z}_o = -1{,}40 + \mathrm{j}43{,}16\mathrm{V}.$$

2. *Scurtcircuit între două faze şi la pămînt.* Schema echivalentă se obţine legînd în paralel cele trei impedanţe.

Calculîndu-se curenţii în reţeaua echivalentă, se găsesc componentele simetrice:

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_s + \dfrac{\underline{Z}_a\cdot\underline{Z}_o}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_0}} = \frac{\underline{Z}_a + \underline{Z}_0}{\underline{Z}_0\underline{Z}_s + \underline{Z}_s\underline{Z}_a + \underline{Z}_a\underline{Z}_0}\underline{E} = 0{,}50 - \mathrm{j}\,92{,}8\ \mathrm{A};$$

$$\underline{I}_i = -\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_a}\underline{I}_d = -\frac{\underline{Z}_0\underline{E}}{\underline{Z}_0\underline{Z}_s + \underline{Z}_s\underline{Z}_a + \underline{Z}_a\underline{Z}_0} = 5{,}58 + \mathrm{j}\,21{,}81\ \mathrm{A};$$

$$\underline{I}_h = -\frac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_a}\underline{I} = -\frac{\underline{Z}_0\underline{E}}{\underline{Z}_0\underline{Z}_s + \underline{Z}_s\underline{Z}_a + \underline{Z}_a\underline{Z}_0} = 5{,}07 + \mathrm{j}\ 71{,}02\ \mathrm{A}.$$

Din acestea se deduc curenţii de fază:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_0\underline{Z}_s + \underline{Z}_s\underline{Z}_a + \underline{Z}_a\underline{Z}_0}(\underline{Z}_a + \underline{Z}_0 - \underline{Z}_0 - \underline{Z}_a) = 0;$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_0\underline{Z}_s + \underline{Z}_s\underline{Z}_a + \underline{Z}_a\underline{Z}_0}(\mathrm{a}^2 - 1)\,\underline{Z}_a + (\mathrm{a}^2 - \mathrm{a})\,\underline{Z}_0 = -91{,}8 + \mathrm{j}\,101{,}3\ \ \mathrm{A};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_0\underline{Z}_s + \underline{Z}_s\underline{Z}_a + \underline{Z}_a\underline{Z}_0}(\mathrm{a} - 1)\,\underline{Z}_a + (\mathrm{a}^2 - \mathrm{a})\,\underline{Z}_0 = 106{,}9 + \mathrm{j}\,111{,}8\ \ \mathrm{A}.$$

Componentele simetrice ale tensiunilor fiind egale,

$$\underline{E}_d = \underline{E}_i = \underline{E}_h,$$

rezultă

$$\underline{E}_i = -\underline{I}_i \underline{Z}_a = \underline{E} \frac{\underline{Z}_0 \underline{Z}_a}{\underline{Z}_0 \underline{Z}_s + \underline{Z}_s \underline{Z}_a + \underline{Z}_a \underline{Z}_0} = 7{,}10 - \mathrm{j}\,0{,}507 \ \text{V}.$$

Tensiunile de fază sînt deci :

$$\underline{E}_1 = 3\,\underline{E} \frac{\underline{Z}_0 \underline{Z}_a}{\underline{Z}_0 \underline{Z}_s + \underline{Z}_s \underline{Z}_a + \underline{Z}_a \underline{Z}_0} = 3\,\underline{E}_i = 21{,}3 - \mathrm{j}\,1{,}521 \ \text{V}; \quad \underline{E}_2 = 0; \quad \underline{E}_3 = 0.$$

3. *Scurtcircuit între două faze fără punere la pămînt.* Schema echivalentă se obţine legînd în paralel impedanţele directă şi inversă ale alternatorului. Componentele simetrice de curent sînt

$$\underline{I}_d = -\underline{I}_i = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a} = 5{,}88 - \mathrm{j}\,76{,}5 \ \text{A}; \quad \underline{I}_h = 0.$$

Curenţii de fază sînt :

$$\underline{I}_1 = 0; \quad \underline{I}_2 = -\underline{I}_3\,(\mathrm{a}^2 - \mathrm{a}) \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a} = -132{,}5 - \mathrm{j}\,10{,}2 \ \text{A}.$$

Componentele simetrice ale tensiunilor sînt :

$$\underline{E}_d = \underline{E}_i = -\underline{Z}_a \underline{I}_i = \frac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a} \underline{E} = 23{,}54 - \mathrm{j}\,5{,}89 \ \text{V}; \quad \underline{E}_h = 0,$$

astfel, încît tensiunile pe faze vor fi

$$\underline{E}_1 = 2\,\underline{E}_d = \frac{2\,\underline{Z}_a}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a} \underline{E} = 47{,}08 - \mathrm{j}\,11{,}78 \ \text{V},$$

$$\underline{E}_2 = \underline{E}_3 = (\mathrm{a}^2 + \mathrm{a})\,\underline{E}_d = -\underline{E}_d = -\frac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a} \underline{E} = -23{,}54 + \mathrm{j}\,5{,}89 \ \text{V}.$$

4. *Scurtcircuit între toate fazele.* În acest caz scurtcircuitul este simetric şi curentul pe fază este

$$\underline{I} = \underline{I}_d = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_s} = \frac{100 + \mathrm{j}\,0}{0 + \mathrm{j}\,1{,}0} = -\mathrm{j}\,100 \ \text{A}.$$

8.5.5.7. Aplicarea metodei generale la calculul unui scurtcircuit într-o reţea electrică complexă. Calculul circuitelor dezechilibrate este una din aplicaţiile cele mai importante ale coordonatelor simetrice. Acest calcul îşi are în special aplicaţia în probleme de defecte în reţele în vederea dimensionării întreruptoa-

relor rețelei și a sistemului de protecție selectiv. De asemenea, problemele de dimensionare a aparatajului din punct de vedere termic și mecanic, cum și problemele de stabilitate a rețelelor se rezolvă tot pe această cale.

Înainte de a ataca o problemă de această natură, se fac anumite ipoteze simplificatoare, fără ca prin aceasta, rezultatele să sufere din punctul de vedere al rigurozității. Aceste ipoteze sînt :

a) Forța electromotoare a fiecărui generator din rețea este identică, în mărime și fază. În cazul general, aceasta nu se întîmplă și atunci tensiunile se reduc la o aceeași mărime, numită tensiune de referință.

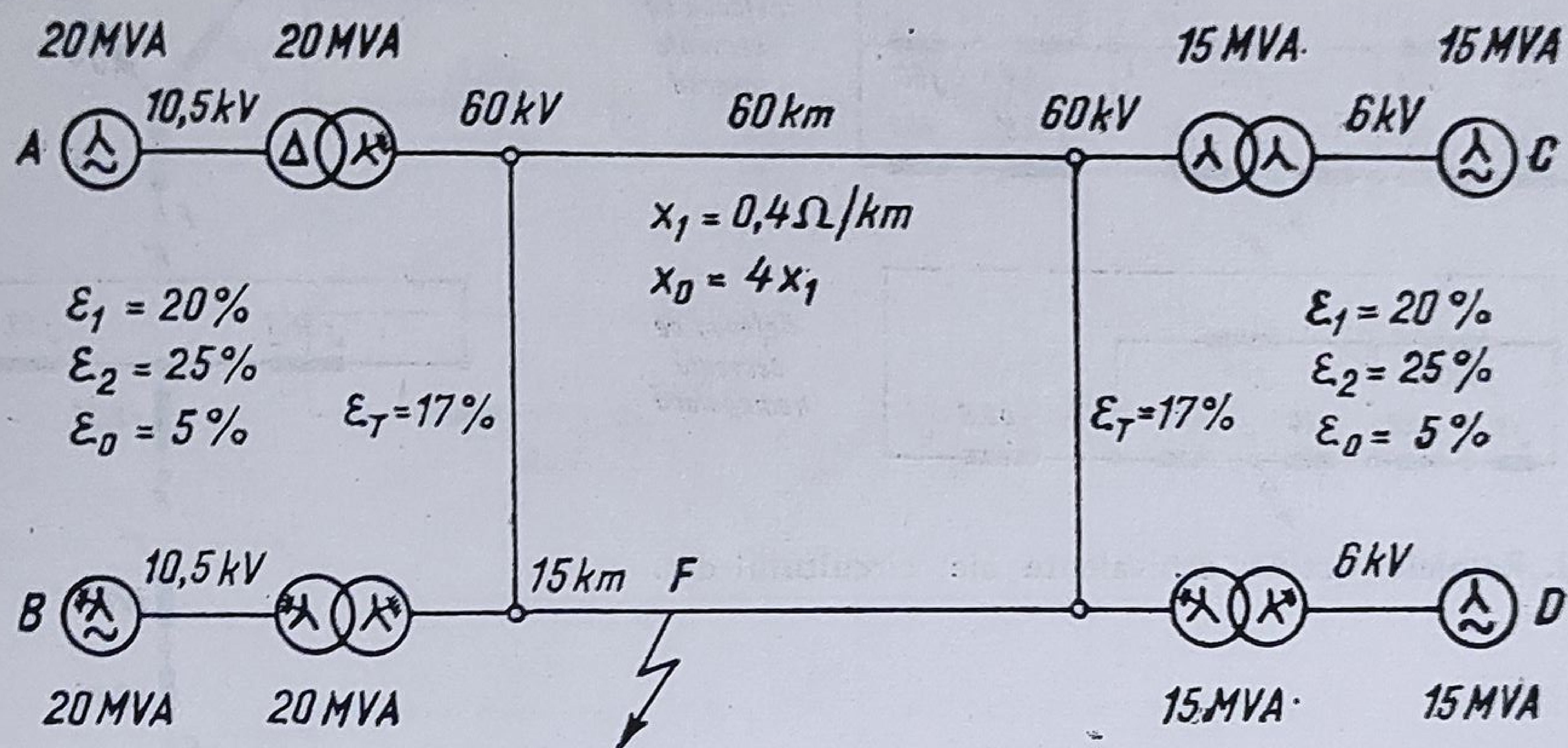


Fig. 8.52. Schema sistemului interconectat.

b) Se neglijează toate rezistențele față de reactanțele diverselor circuite.

c) Se neglijează curenții de magnetizare ai transformatoarelor, precum și curenții de încărcare ai cablurilor sau liniilor.

d) Se neglijează de asemenea, inductanțele mutuale între linii.

Mersul calculului poate fi rezumat în următoarele puncte :

1. Se determină rețeaua fictivă directă precum și distribuția de curenți în diversele laturi, luîndu-se pentru aceasta valoarea 1, pentru curentul care iese prin defect. Valorile astfel obținute se numesc *factorii de distribuție ai curenților.*

2. Se determină, ca mai sus, rețeaua inversă și distribuția de curenți.

3. Se procedează la fel, pentru rețeaua homopolară.

Aceste operații sînt aceleași pentru orice tip de defect. Restul calculului este diferit și depinde de defectul considerat. Totuși, este necesar ca acest calcul să se facă în ordinea următoare.

4. Se grupează convenabil diversele impedanțe în raport cu defectul considerat și se determină componentele simetrice ale curentului la locul defectului.

5. Se determină componentele simetrice ale curentului în diversele elemente ale rețelelor fictive, folosindu-se factorii de distribuție ai curenților.

6. Se calculează curenții pe faze cu ajutorul componentelor simetrice ale acestora.

7. Se determină componentele simetrice ale tensiunilor în diversele laturi ale celor trei rețele fictive, cu ajutorul componentelor simetrice ale curenților și ale diverselor impedanțe.

8. Se calculează tensiunile pe faze și între faze cu ajutorul componentelor simetrice.

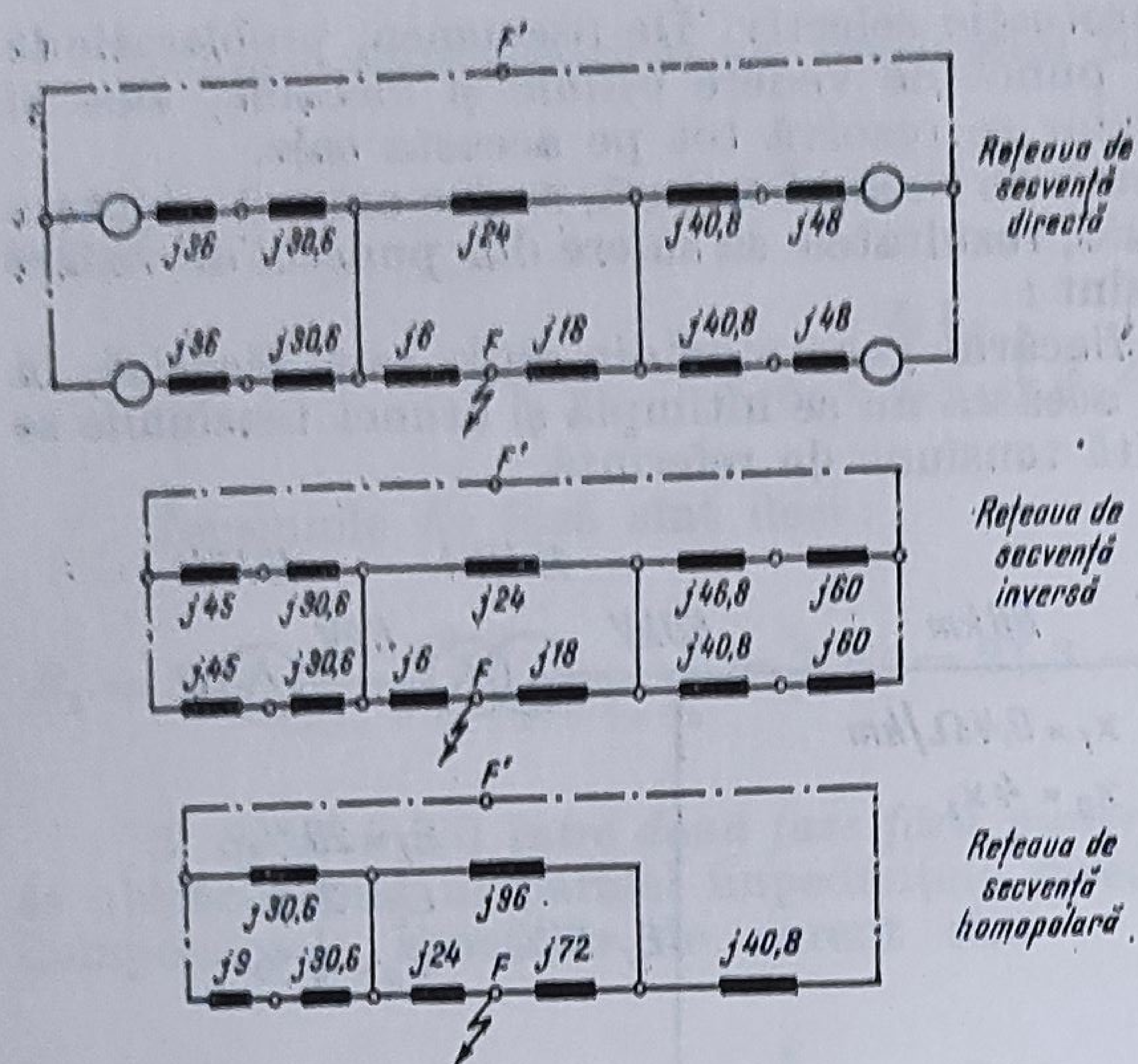


Fig. 8.53. Rețelele fictive echivalente ale circuitului dat.

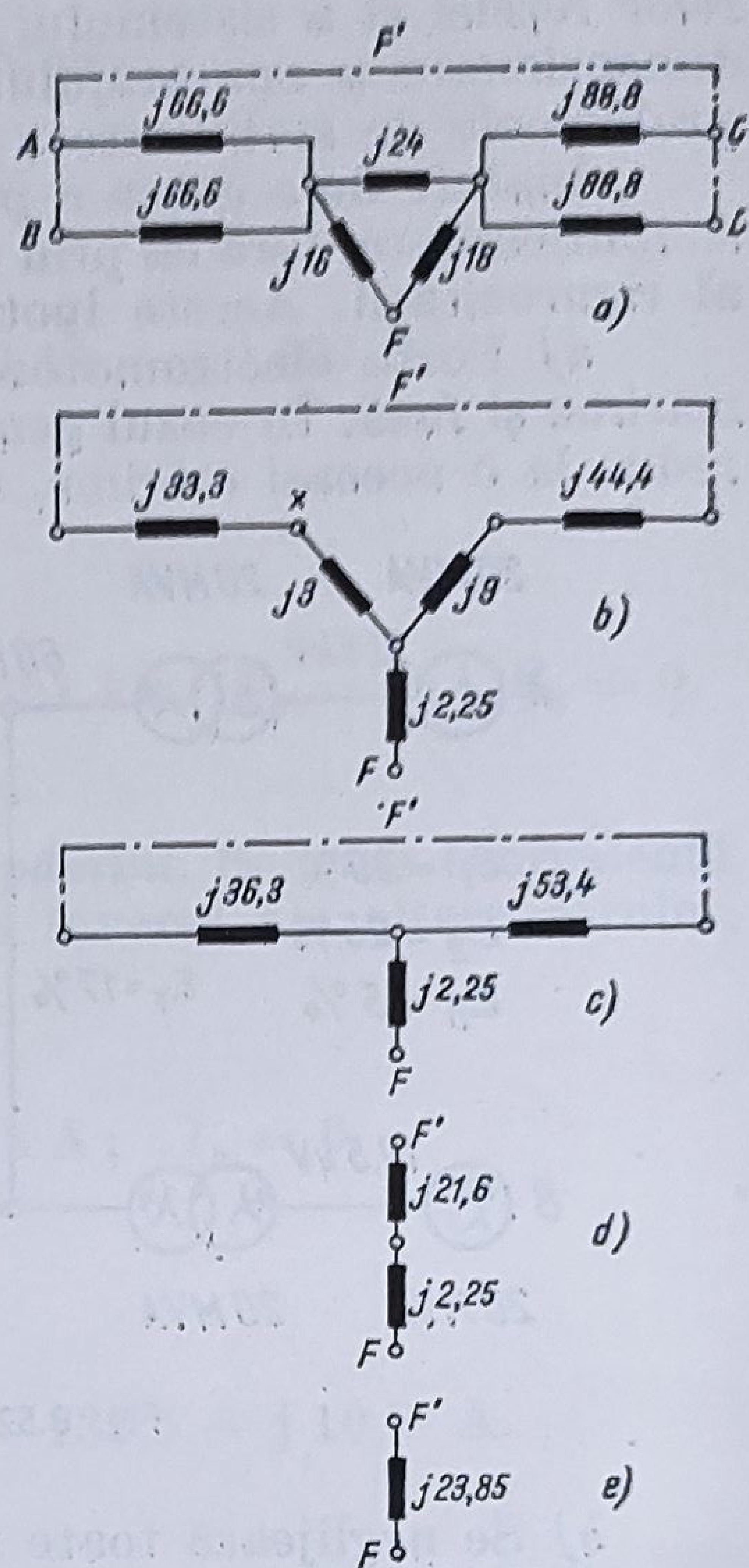


Fig. 8.54. Reducerea impedanțelor schemei fictive de secvență 1.

9. Se calculează tensiunile și curenții reali, ținîndu-se seama de conectarea și raportul de transformare al diverselor transformatoare.

Acestea fiind enunțate, fie rețeaua din figura 8.52 în care a avut loc un defect la 15 km de sistemul de alimentare, din stînga.

Elementele constituitive ale rețelei sînt acelea arătate în figură. Neglijînd rezistența, diversele reactanțe ale alternatoarelor din rețea și ale transformatoarelor, le deducem din tensiunea de scurtcircuit prin relația*

$$X = \frac{\varepsilon}{100} \cdot \frac{U^2}{S} \quad \Omega,$$

în care ε este tensiunea de scurtcircuit dată, în procente, U — tensiunea nominală a mașinii, în kV și S — puterea aparentă a acesteia, în MVA.

Cu aceste elemente se calculează reactanțele respective și se stabilesc cele trei rețele fictive (fig. 8.53).

S-a ales ca tensiune de referință, tensiunea de 60 kV a liniei de transmitere a energiei electrice, deoarece defectul a avut loc chiar pe această linie.

Pentru calculul impedanței echivalente și al factorului de distribuție al curenților, se fac toate transformările posibile rețelelor fictive echivalente

* Vezi 6.3.4

(sumări de impedanțe, transfigurare etc.). Se obțin astfel, pentru rețeaua directă, diversele transformări arătate în figura 8.54 și impedanța echivalentă

$$\underline{Z}_d = \mathrm{j}\ 23{,}85\ \Omega.$$

Pentru a găsi factorii de distribuție ai curenților, pornim de la figura 854,e spre schema reală, repartizînd curenții în diversele circuite după regulile cunoscute și luînd valoarea 1 pentru curentul care iese prin defect (curentul din impedanța echivalentă).

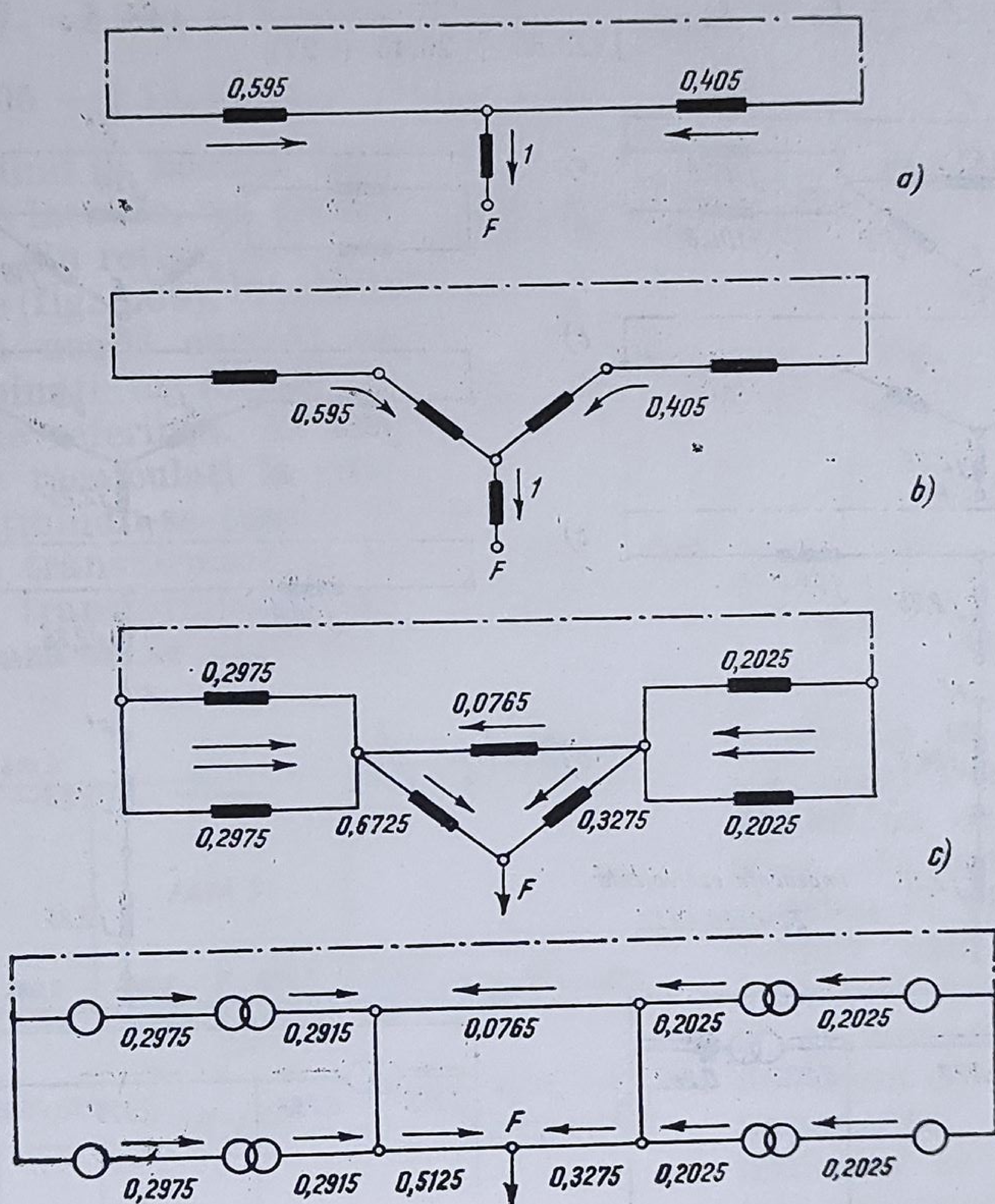


Fig. 8.55. Distribuția de curenți în rețeaua de secvență directă.

Distribuția de curenți în rețeaua fictivă directă este dată în figura 8.55.

Procedînd în același mod pentru rețelele fictive inversă și homopolară, găsim schemele echivalente și distribuțiile de curenți, date în figurile 8.56 și 8.57.

Calculul se va face numai pentru cazul unui scurtcircuit al unei faze la pămînt, cazul cel mai frecvent al rețelelor electrice aeriene.

În acest caz, cele trei rețele fictive — și, deci, impedanțele lor echivalente — vor fi legate în serie. În consecință, componentele simetrice de curent la defect sînt egale și sînt date de relația

$$\underline{I}_h = \underline{I}_d = \underline{I}_i = \frac{E}{\underline{Z}_h + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i}.$$

Gruparea impedanţelor dă

$$\underline{Z}_h + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i = \mathrm{j}\ 77{,}30\ \ \Omega.$$

Întrucît impedanţa circuitului echivalent are numai parte complexă, se poate lua tensiunea la bornele ei, care este identică cu tensiunea aplicată, de asemenea numai cu parte complexă; în acest caz, curentul rezultant este real. Rezultă

$$\underline{I}_h = \underline{I}_d = \underline{I}_i = \frac{\mathrm{j}\,\dfrac{60\ 000}{\sqrt{3}}}{\mathrm{j}\ (23{,}85 + 26{,}45 + 27)} = 448\ \mathrm{A}.$$

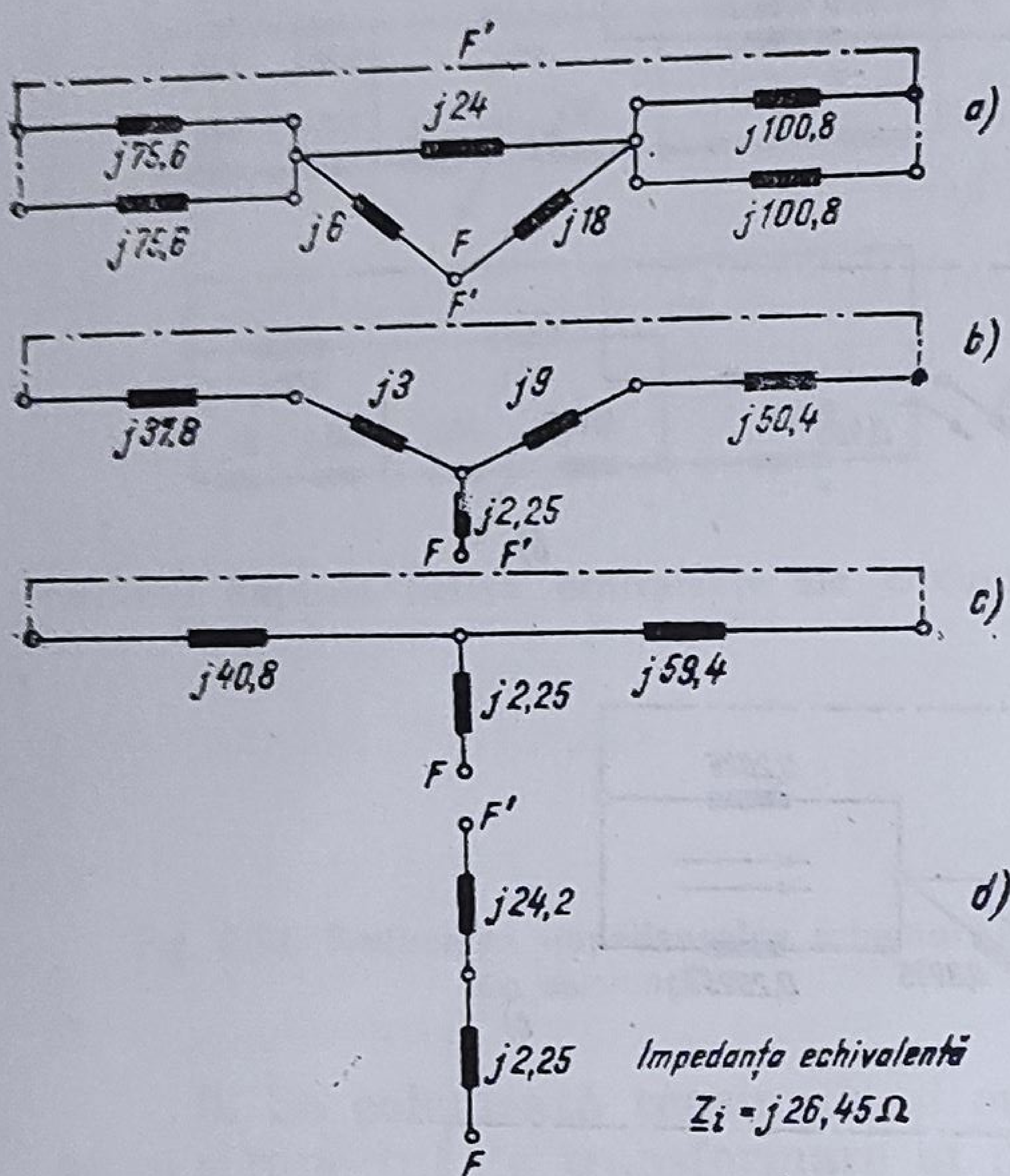


Fig. 8.56. Calculul impedanţei echivalente şi a distribuţiei de curenţi în reţeaua de secvenţă inversă.

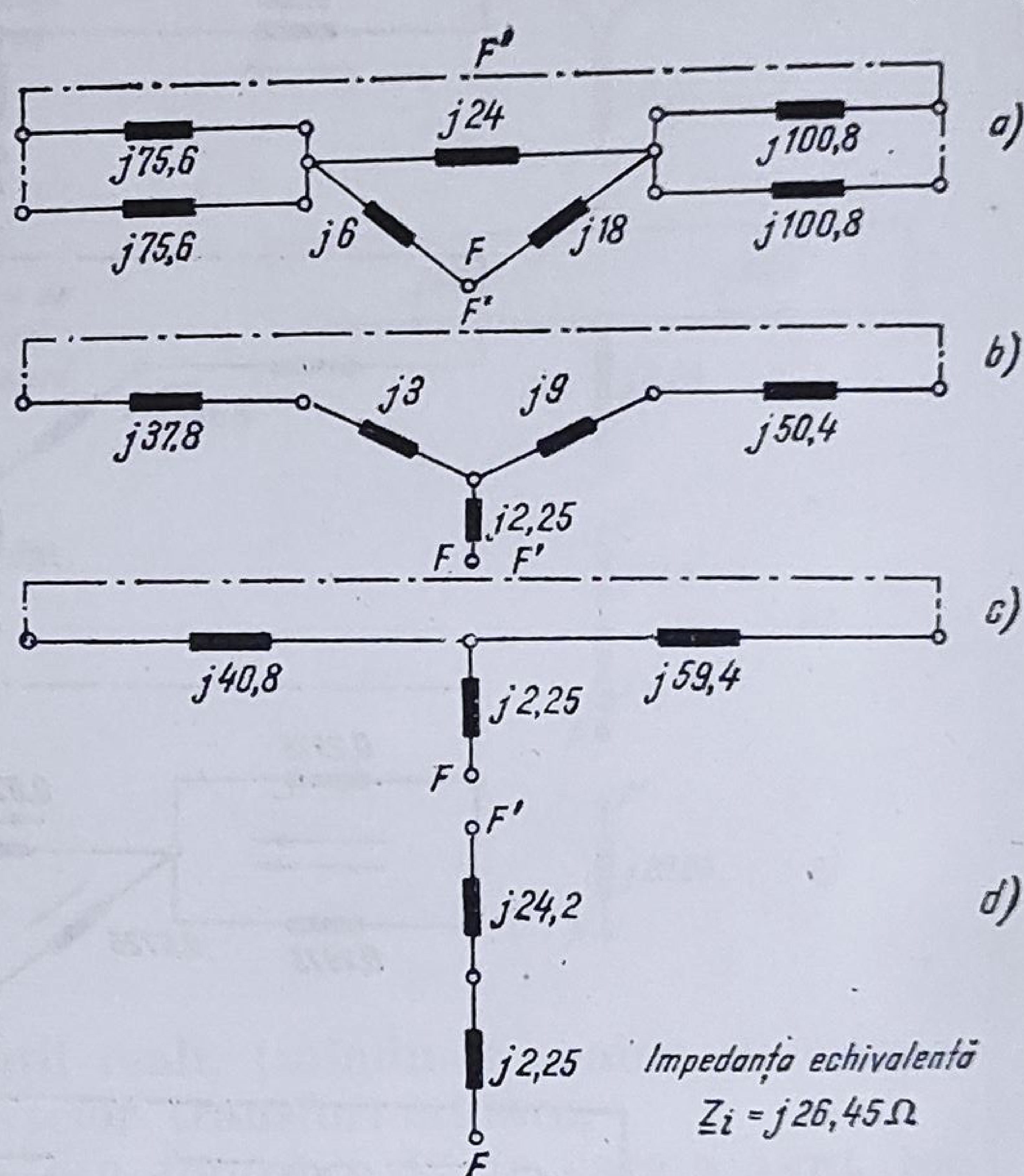


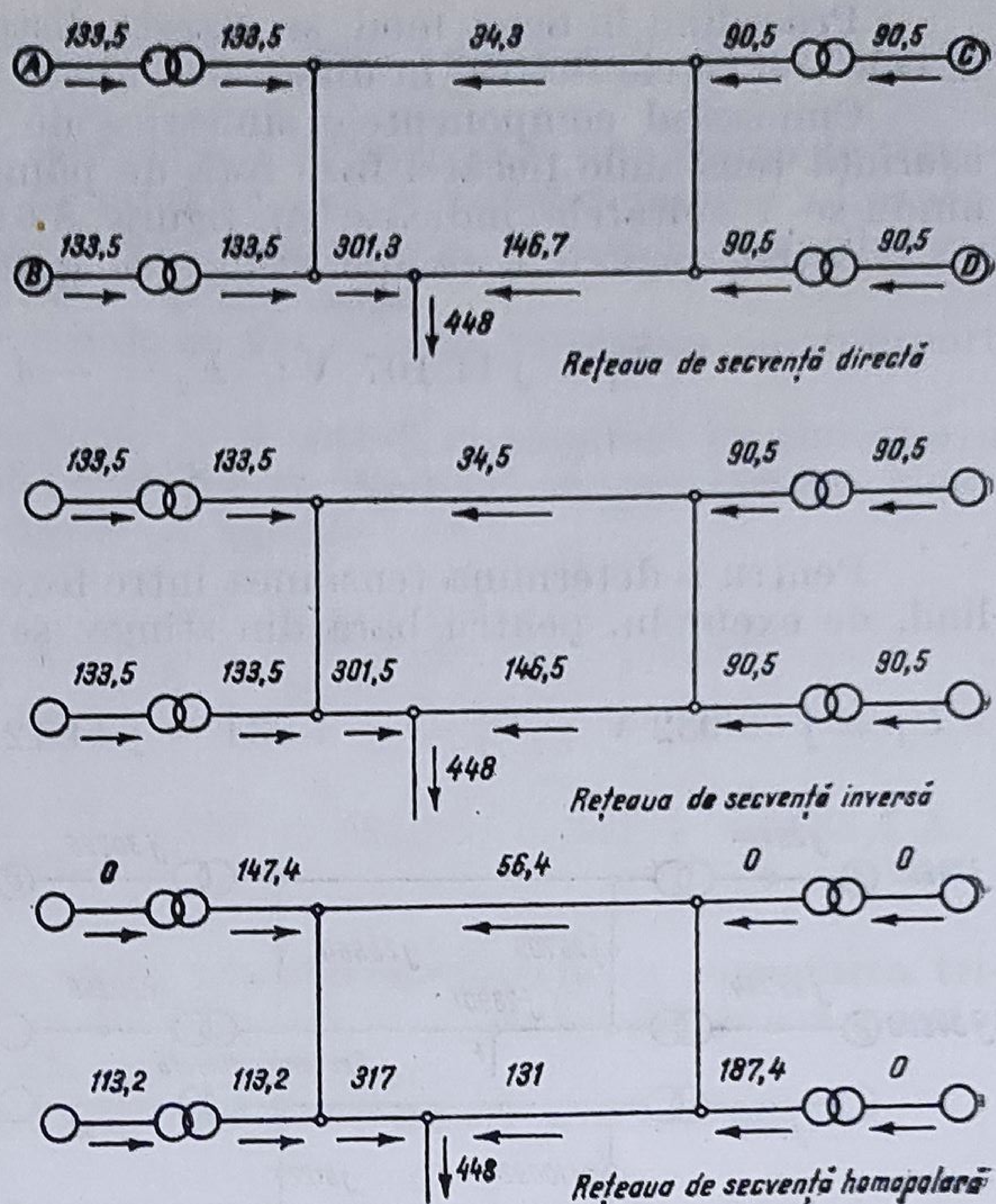
Fig. 8.57. Calculul impedanţei echivalente şi a distribuţiei de curenţi în reţeaua de secvenţă nulă.

Cunoscînd componentele simetrice de curent la defect, se pot găsi componentele simetrice în fiecare din laturile reţelei cu ajutorul factorilor de distribuţie; astfel, pentru linia bună, al cărei factor de distribuţie a componentei directe este 0,765, valoarea acestei componente este

$$0765 \times 448 = 34{,}3\ \mathrm{A}.$$

Calculînd în acelaşi mod pentru toate cele trei reţele fictive, se găseşte distribuţia componentelor simetrice de curent, reprezentată în figura 8.58. Cu ajutorul acestora se calculează curenţii de linie cu ajutorul relaţiilor (8.10).

Fig. 8.58. Repartiția curenților în cele → trei rețele fictive.



Calculînd, de exemplu, curentul în cele trei faze în linia defectă, pe porțiunea din dreapta defectului, se găsește

$$\underline{I}_1 = 146,7 + 146,5 + 131 = 424,2\text{A}; \ \underline{I}_2 = 7,95 - \text{j}\,13,43\text{A};$$

$$\underline{I}_3 = 7,95 + \text{j}\,13,43 \ \text{A}.$$

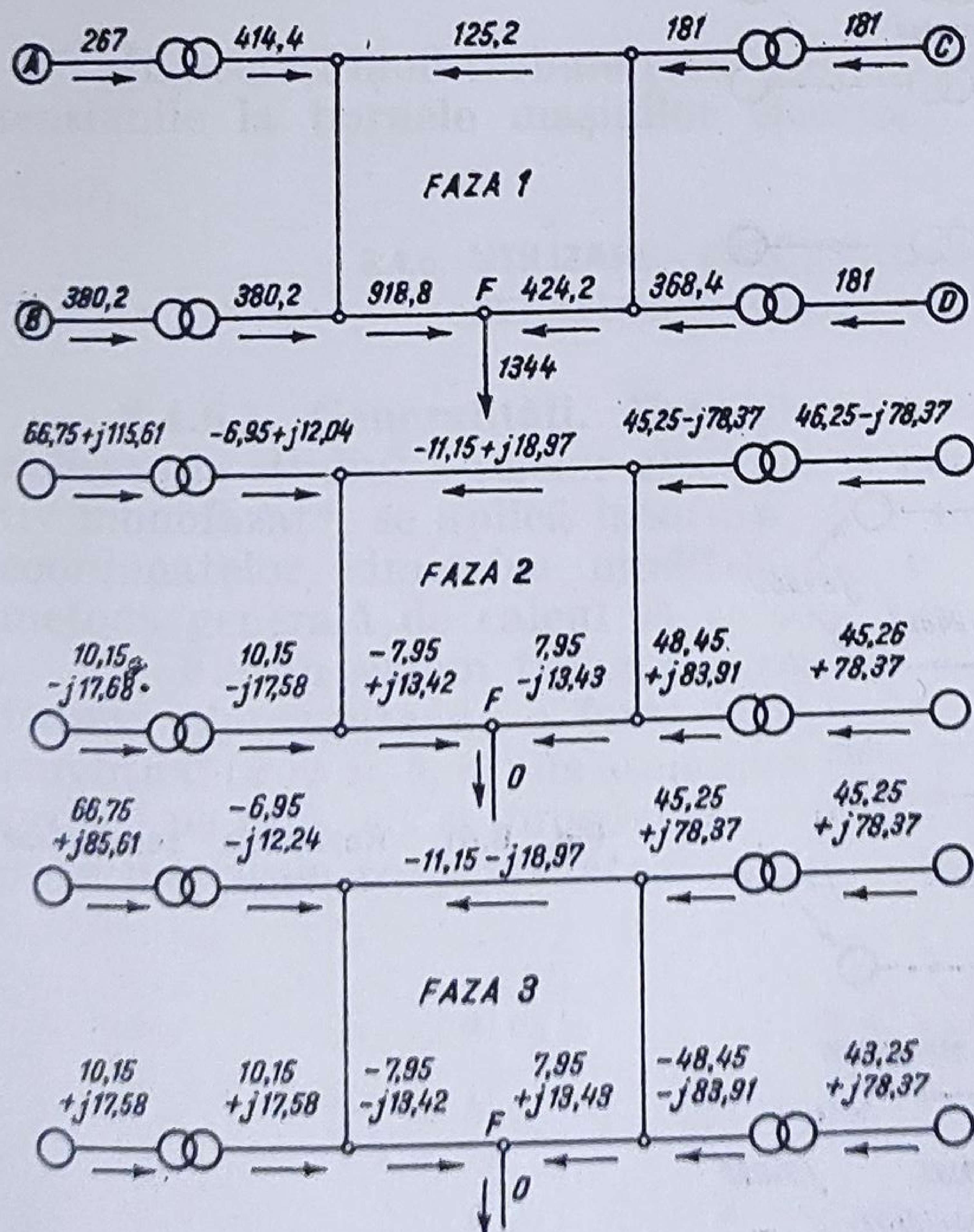
Procedînd în același mod pentru toate laturile, se găsesc toți curenții din rețea pe toate cele trei faze (fig. 8.59). Trebuie observat, că acești curenți au fost determinați în raport cu tensiunea de referință. Ei vor trebui să fie recalculați la situația reală, ținîndu-se seama de raportul de transformare și de conectarea transformatoarelor.

Urmează să se determine tensiunile în diversele puncte ale rețelei. Pentru aceasta se vor determina componentele simetrice ale tensiunilor pe fază. Acestea se obțin calculînd diversele căderi de tensiune cu ajutorul impedanțelor respective și al componentelor simetrice de curent care circulă prin aceste impedanțe. Aplicînd metoda indicată* se găsesc componentele simetrice de tensiune, la barele din stînga;

$$\underline{E}_d = \text{j}\,25\,709 \ \text{V};$$

$$\underline{E}_i = 0 - \text{j}\,75,6 \times 733,5 = -\text{j}\,10\,092 \ \text{V};$$

$$\underline{E}_h = 0 - \text{j}\,30,6 \times 147,4 = -\text{j}\,4\,510 \ \text{V}.$$



← Fig. 8.59. Repartiția curenților de scurt-circuit pe cele trei faze.

* Vezi 8.4.5.4.

Procedînd în acest mod, se găsește distribuția componentelor de tensiune în cele trei rețele fictive, în diferitele puncte ale rețelei (fig. 8. 60).

Cunoscînd componentele simetrice de tensiune, se calculează acum cu ușurință tensiunile fiecărei faze față de pămînt, aplicînd relațiile (8.10), obținîndu-se rezultatele indicate în figura 8.61.

Astfel, pentru bara din stînga se găsește:

$$\underline{E}_1 = \mathrm{j}\ 11\ 107\ \mathrm{V}; \quad \underline{E}_2 = -\ 4\ 834 + \mathrm{j}\ 33\ 016\ \mathrm{V};$$

$$\underline{E}_3 = -\ 4\ 834 - \mathrm{j}\ 33\ 016\ \mathrm{V}.$$

Pentru a determina tensiunea între faze, se utilizează relația (5.8). Calculînd, de exemplu, pentru bara din stînga, se găsește:

$$\underline{U}_1 = \mathrm{j}\ 66\ 032\ \mathrm{V}\ ; \quad \underline{U}_2 = -\ 4\ 834 - \mathrm{j}\ 44\ 123\ \mathrm{V}; \quad \underline{U}_3 = 4\ 834 - 21\ 909\ \mathrm{V}.$$

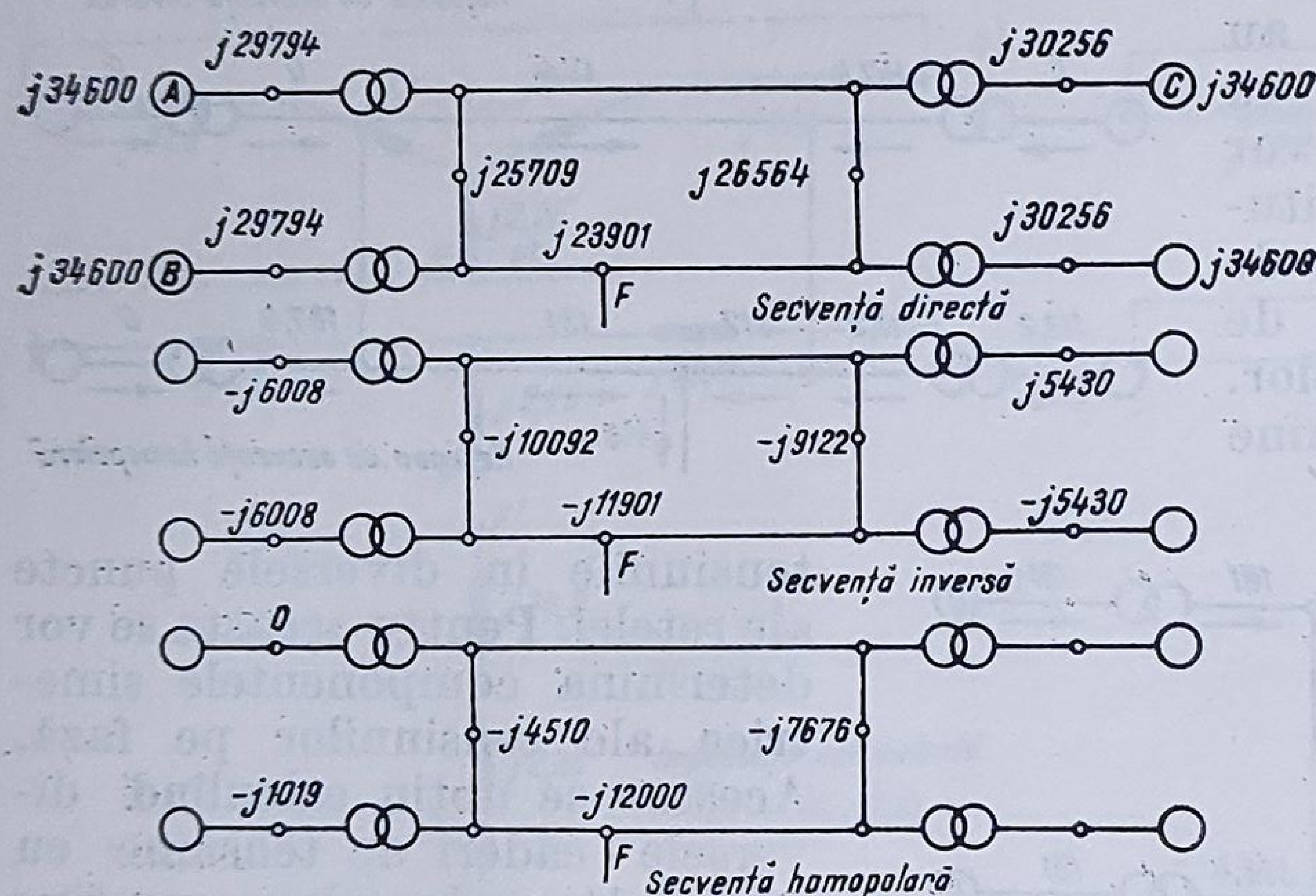


Fig. 8.60. Repartiția tensiunilor în rețelele fictive.

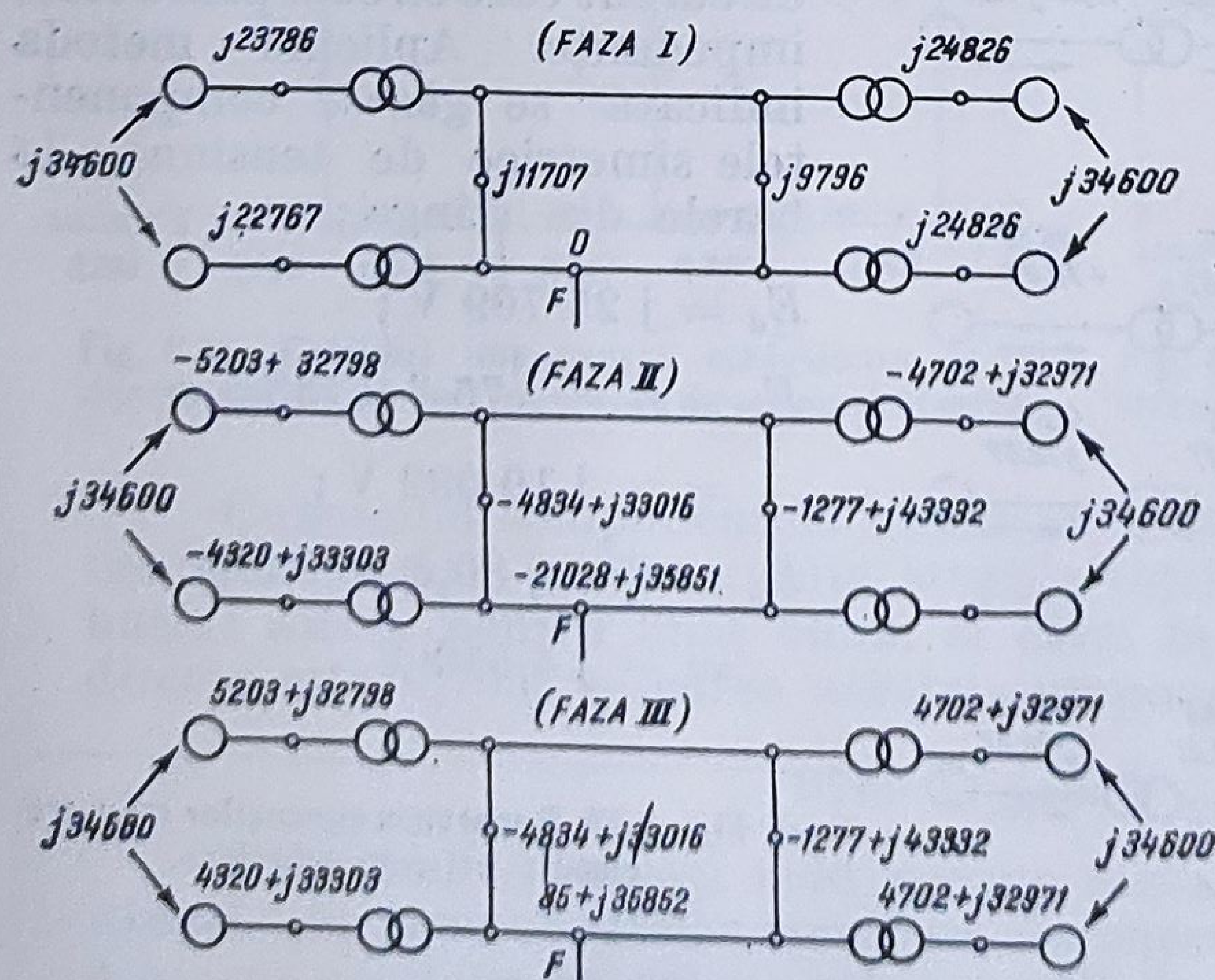


Fig. 8.61. Repartiția tensiunilor în rețea.

Tensiunile între faze pot fi obținute și prin intermediul componentelor simetrice, utilizînd relațiile (8.15) și (8.16).

Pentru a termina calculul de scurtcircuit, trebuie să se țină seama de transformatoarele din rețea, precum și de faptul că unele transformatoare au conectarea triunghi-stea, ceea ce are drept efect schimbarea de fază a curenților sau a tensiunilor respective, între primar și secundar.

Tot calculul a fost efectuat luîndu-se drept bază, tensiunea de transport de 60 kV.

Pentru a calcula curenții reali, în cazul transformatoarelor cu conectarea stea-stea, trebuie înmulțiți curenții calculați cu raportul de transformare simetric. Astfel, pentru generatorul din C se găsește:

$$\underline{I}_1 = \frac{60\,000}{6\,000} 181 = 1\,810 \text{ A}; \quad \underline{I}_2 = \frac{60\,000}{6\,000}(42{,}25 - \text{j } 48{,}37) =$$

$$= 422{,}5 - \text{j } 183{,}7 \text{ A}; \quad \underline{I}_3 = \frac{60\,000}{6\,000}(42{,}25 + \text{j } 78{,}37) = 422{,}5 + \text{j } 783{,}7 \text{ A}.$$

Pentru calculul curenților în cazul transformatoarelor cu conectarea triunghi-stea, trebuie să se țină seama de defazajul care are loc din cauza acestei conectări, utilizînd relațiile (8.63) și (8.64).

Se găsesc astfel, de exemplu, curenții debitați de alternatorul A:

$$\underline{I}_1 = 660{,}8 + \text{j } 381{,}6 \text{ A}; \quad \underline{I}_2 = 763{,}0 \text{ A}; \quad \underline{I}_3 = -660{,}8 + \text{j } 381 \text{ A}.$$

În același mod trebuie ținut seama și de transformatoare pentru a calcula tensiunile la bornele mașinilor electrice.

8.4.6. UTILIZAREA CALCULULUI MATRICEAL LA STUDIUL REȚELELOR ELECTRICE TRIFAZATE DEZECHILIBRATE

8.4.6.1. **Generalități. Formule de calcul.** Regulile de calcul matriceal aplicate la studiul rețelelor electrice de curent continuu sau de curent alternativ monofazat* se aplică întocmai și în cazul rețelelor trifazate. Introducerea coordonatelor simetrice modifică puțin formulele de transformare, fără ca metoda generală de calcul să se modifice.

Fie un sistem trifazat oarecare, la care presupunem că cele trei faze sînt fiecare alimentate de o forță electromotoare e_k și sînt străbătute fiecare de curenții i^k ($k = a, b, c$); de asemenea se presupune că sistemul are atît impedanțe proprii pe fază, cît și impedanțe mutuale între faze. Pentru acest sistem se pot scrie matricele corespunzătoare

$$[e] = \begin{array}{c|c|} a & e_a \\ b & e_b \\ c & e_c \end{array}, \quad [i] = \begin{array}{c|c|} a & i^a \\ b & i^b \\ c & i^c \end{array}, \quad [Z] = \begin{array}{c|c|c|c|} & a & b & c \\ a & Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ b & Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ c & Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \end{array}$$

* Vezi 2.4 și 6.2.4.

Utilizînd coordonatele simetrice, curenţii şi tensiunile date se pot scrie sub forma*.

$$[i] = [C_s][i_s] \text{ şi } [e] = [C_s][e_s]$$

în care

$$[i_s] = \begin{array}{c|c|} h & i^h \\ \hline d & i^d \\ \hline i & i^i \end{array}, \quad [e_s] = \begin{array}{c|c|} h & e_h \\ \hline d & e_d \\ \hline i & e_i \end{array}$$

sînt matricele componentelor simetrice ale curenţilor şi ale tensiunilor iar

$$[C_s] = \begin{array}{c|c|c|c|} & h & d & i \\ a & 1 & 1 & 1 \\ \hline b & 1 & a^2 & a \\ \hline c & 1 & a & a^2 \end{array} \tag{8.66}$$

este matricea de conexiune a sistemului (8.10) care dă legătura dintre mărimile pe fază şi componentele simetrice respective ; întrucît operatorul a este o mărime complexă, matricea $[C_s]$ este o matrice complexă.

Ţinînd seama de proprietăţile operatorului de rotaţie a, se găseşte uşor

$$[C_s]_t^* = \begin{array}{c|c|c|c|} & a & b & c \\ h & 1 & 1 & 1 \\ \hline d & 1 & a & a^2 \\ \hline i & 1 & a^2 & a \end{array} = 3[C_s]^{-1}. \tag{8.67}$$

În cazul coordonatelor simetrice, invariaţia puterii trebuie scrisă sub forma**

$$[e]_t [i]^* = 3[e_s]_t [i_s]^* ;$$

---

* Vezi relaţiile (8.10).

** Vezi paragraful 8.4.3. Aceasta se poate arăta şi direct. Într-adevăr, dacă în relaţia

$$[S] = [e]_t [i]^*$$

punem

$$[e] = [C_s][e_s] \text{ şi } [i] = [C_s][i_s],$$

rezultă

$$[S] = [e_s]_t [C_s]_t [C_s]^* [i_s]^*.$$

Însă

$$[C_s]_t = [C_s] \text{ şi } [C_s]_t^* = 3[C_s]^{-1}$$

rezultă

$$[C_s]_t [C_s]^* = [C_s] \, 3 [C_s]^{-1} = 3$$

şi deci

$$[S] = 3 [e_s]_t [i_s]^*.$$

rezultă formulele de transformare ale tensiunilor şi impedanţelor

$$[e_s] = \frac{1}{3}[C_s]_t^*[e] = [C_s]^{-1}[e], \tag{8.68}$$

$$[Z_s] = \frac{1}{3}[C_s]_t^*[Z][C_s] = [C_s]^{-1}[Z][C_s]. \tag{8.69}$$

Aplicînd aceste relaţii sistemului trifazat dat se găseşte

$$[e_s] = \frac{1}{3}\begin{matrix} h \\ d \\ i \end{matrix}\begin{bmatrix} e_a + e_b + e_c \\ e_a + ae_b + a^2e_c \\ e_a + a^2e_b + ae_c \end{bmatrix}, \quad [i_s] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} i^a + i^b + i^c \\ i^a + ai^b + a^2i^c \\ i^a + a^2i^b + ai^c \end{bmatrix}$$

şi

$$[Z_s] = \frac{1}{3}\begin{matrix} h \\ d \\ i \end{matrix}\begin{bmatrix} \xi_{00} & \mu_{01} & \mu_{02} \\ \mu_{01} & \xi_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{20} & \mu_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix}$$

în care s-a notat:

$$\underline{\xi}_{00} = \underline{Z}_{a0} + \underline{Z}_{b0} + \underline{Z}_{c0}$$

$$\underline{\xi}_{11} = \underline{Z}_{a1} + \underline{Z}_{b1} + \underline{Z}_{c1}$$

$$\underline{\xi}_{22} = \underline{Z}_{a2} + \underline{Z}_{b2} + \underline{Z}_{c2}$$

$$\underline{\mu}_{01} = \underline{Z}_{a1} + a^2\underline{Z}_{b1} + a\underline{Z}_{c1}, \quad \underline{\mu}_{10} = \underline{Z}_{a0} + a\underline{Z}_{b0} + a^2\underline{Z}_{c0},$$

$$\underline{\mu}_{02} = \underline{Z}_{a2} + a\underline{Z}_{b2} + a^2\underline{Z}_{c2}, \quad \underline{\mu}_{20} = \underline{Z}_{a0} + a^2\underline{Z}_{b0} + a\underline{Z}_{c0},$$

$$\underline{\mu}_{12} = \underline{Z}_{a2} + a^2\underline{Z}_{b2} + a\underline{Z}_{c2}, \quad \underline{\mu}_{21} = \underline{Z}_{a1} + a\underline{Z}_{b1} + a^2\underline{Z}_{c1},$$

$$\underline{Z}_{a0} = \underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ac}$$

$$\underline{Z}_{a1} = \underline{Z}_{aa} + a^2\underline{Z}_{ab} + a\underline{Z}_{ac}$$

$$\underline{Z}_{a2} = \underline{Z}_{aa} + a\underline{Z}_{ab} + a^2\underline{Z}_{ac}$$

. . . .

. . . .

În cazul particular cînd inductanțele mutuale ale celor trei înfășurări sînt nule, matricea de impedanță este

$$[Z] = \begin{array}{c|c|c|c|} & a & b & c \\ \hline a & Z_a & & \\ \hline b & & Z_b & \\ \hline c & & & Z_c \\ \hline \end{array}$$

și matricea corespunzătoare în coordonate simetrice va fi

$$[Z_s] = \begin{array}{c|c|c|c|} h & \mathfrak{Z}_h & \mathfrak{Z}_i & \mathfrak{Z}_d \\ \hline d & \mathfrak{Z}_d & \mathfrak{Z}_h & \mathfrak{Z}_i \\ \hline i & \mathfrak{Z}_i & \mathfrak{Z}_d & \mathfrak{Z}_h \\ \hline \end{array}$$

unde $\underline{\mathfrak{Z}}_h$, $\underline{\mathfrak{Z}}_d$ și $\underline{\mathfrak{Z}}_i$ sînt impedanțele de calcul*. Se observă ușor regula de formare a matricei $[Z_s]$ în acest caz, ea urmînd regula indicilor**.

8.4.6.2. **Metoda generală de calcul a rețelelor electrice trifazate nesimetrice.** La studiul rețelelor electrice trifazate, folosind coordonatele simetrice, se dau de obicei forțele electromotoare din circuit și diversele impedanțe. Necunoscute sînt curenții din rețea și tensiunile la bornele sarcinii. Se consideră date ale problemei :

— forțele electromotoare din rețea $\underline{E}_1$, $\underline{E}_2$, $\underline{E}_3$;
— impedanțele generatorului $\underline{Z}_s$, $\underline{Z}_a$, $\underline{Z}_0$;
— impedanțele pe fază ale rețelei $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$;
— eventual impedanțele mutuale $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$, $\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32}$, $\underline{Z}_{31} = \underline{Z}_{13}$;
— impedanțele la pămînt $\underline{Z}_g$ și ale arcului electric $\underline{Z}_A$.

Necunoscute sînt:

— curenții care circulă în rețea și componentele lor simetrice : $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ și $\underline{I}_d$, $\underline{I}_i$, $\underline{I}_h$;
— tensiunile la bornele sarcinii și componentele lor simetrice $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$ și $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$, $\underline{V}_h$.

În total sînt deci 12 necunoscute.

Între aceste mărimi se pot scrie următoarele relații matriceale :

$$[I] = [C_s]\,[I_s], \tag{8.70}$$

$$[V] = [C_s]\,[V_s], \tag{8.71}$$

$$[E_s] = [V_s] + [Z_s]\,[I_s], \tag{8.72}$$

în care indicele arată că avem de-a face cu mărimi în coordonate simetrice, iar $[C_s]$ este matricea de conexiune definită prin relația (8.66). Rezultă că nu avem decît 9 ecuații între cele 12 necunoscute, sistemul fiind astfel nedeter-

* Vezi relațiile (8.42).
** Vezi 8.3.5.3.

minat. Celelalte trei ecuaţii necesare rezolvării problemei sînt date de condiţiile particulare de funcţionare ale reţelei.

În cazul utilizării coordonatelor simetrice în studiul reţelelor electrice trifazate nesimetrice cu ajutorul calculului matriceal apar *patru* reţele diferite, cu ajutorul cărora se studiază reţeaua respectivă. Acestea sînt (fig. 8.62):

I. Reţeaua primitivă a reţelei date, conţinînd K elemente şi K bucle, repartizate în grupe, fiecare grupă conţinînd cîte trei laturi (sau numai una).

II. Reţeaua dată, conţinînd B bucle.

III. Reţeaua primitivă a reţelei echivalente în coordonate simetrice, conţinînd — la fel ca reţeaua primitivă (I) — K laturi şi K bucle grupate ca mai înainte, numărul acestor grupe fiind identic cu precedentul.

IV. Reţeaua echivalentă în coordonate simetrice, avînd acelaşi număr de laturi şi de bucle ca şi reţeaua dată (II) însă, în general, un număr diferit de subreţele. Această reţea este, de obicei, necunoscută la începutul studiului şi găsirea structurii ei constituie, în general, obiectul studiului.

La aceste patru reţele anumite elemente sînt cunoscute, altele urmează a fi determinate. Astfel, pot fi cunoscute impedanţele circuitelor fie din reţeaua primitivă a reţelei date (I), fie din reţeaua primitivă (III) a reţelei dată în coordonate simetrice, fie unele dintr-o reţea, altele din altă reţea.

Ca elemente de aflat, sînt în general curenţii şi tensiunile din reţeaua dată (II), fie din reţeaua echivalentă în coordonate simetrice (IV), fie din ambele.

Pentru rezolvarea problemei trebuie găsită matricea de conexiune care să transforme reţeaua (III) în reţeaua (IV) cînd matricea de conexiune care transformă reţeaua (I) în reţeaua (II) este cunoscută, legătura dintre reţele (II) şi (III) făcîndu-se prin matricea de conexiune a coordonatelor simetrice (8.66).

În practică studiul unei probleme poate fi simplificat, renunţîndu-se la unele reţele, în special la reţeaua (I).

8.4.6.3. **Exemplu de aplicaţie.** Fie să studiem prin metoda dată o reţea care funcţionează în scurtcircuit bifazat şi la pămînt cu arc electric (fig. 8.62). Ecuaţiile de funcţionare ale defectului sînt*

$$\underline{I}_x = 0 \quad \text{şi} \quad \underline{E}_y = \underline{E}_z = \underline{Z}_A\,(\underline{I}_y + \underline{I}_z)$$

care dau cele trei ecuaţii suplimentare necesare rezolvării problemei.

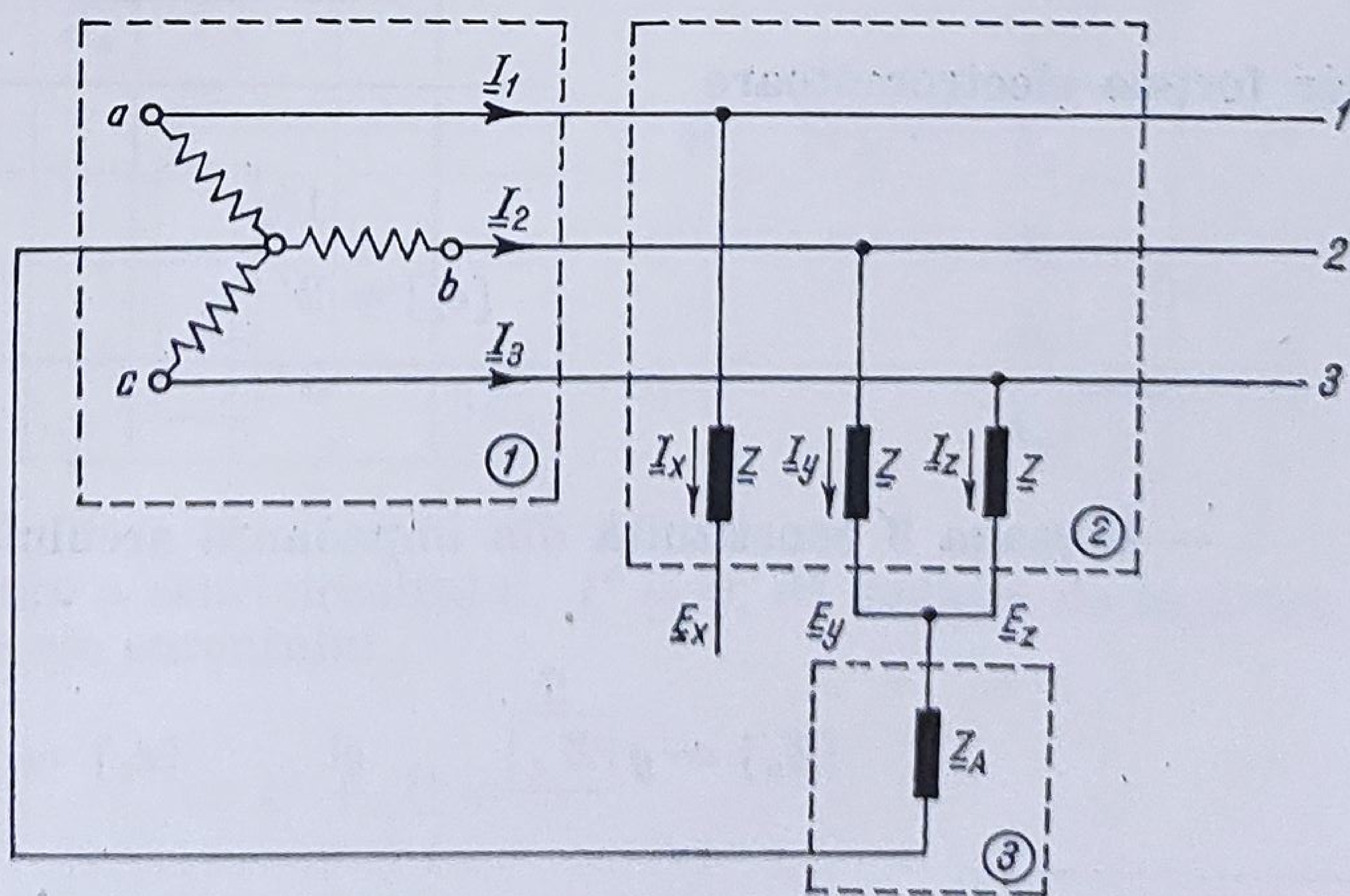


Fig. 8.62. Schema unui scurtcircuit între două faze şi la pămînt cu arc electric.

* Vezi 8.4.5.4. punctul 2.

Reţeaua dată poate fi considerată ca formată din trei reţele interconectate şi anume:

— Reţeaua 1 constituită din generatorul care o alimentează (sau în general generatorul echivalent al surselor care alimentează defectul) pentru care sînt date impedanţele echivalente

$$[Z_1]_s = \begin{array}{c|c|c|c|} & h_1 & d_1 & i_1 \\ \hline h_1 & Z_0 & & \\ \hline d_1 & & Z_s & \\ \hline i_1 & & & Z_a \\ \hline \end{array},$$

unde Z_0, Z_s şi Z_a sînt respectiv impedanţele de nul, sincronă şi asincronă a generatorului*, şi forţele electromotoare

$$[e_1]_s = \begin{array}{c|c|} h_1 & \\ \hline d_1 & E \\ \hline i_1 & \\ \hline \end{array},$$

generatorul fiind presupus simetric**.

— Reţeaua 2 constituită din elementele reţelei date şi care se presupune echilibrată; impedanţele reţelei sînt

$$[Z_2] = \begin{array}{c|c|c|c|} & 1' & 2' & 3' \\ \hline 1' & Z & & \\ \hline 2' & & Z & \\ \hline 3' & & & Z \\ \hline \end{array}$$

iar forţele electromotoare

$$[e_2] = \begin{array}{c|c|} 1' & \\ \hline 2' & \\ \hline 3' & \\ \hline \end{array}$$

— Reţeaua 3 constituită din impedanţa arcului electric avînd matricele

$$[Z_3] = g\begin{array}{|c|} g \\ \hline Z_A \\ \hline \end{array} \quad \text{şi} \quad [e_3] = g\begin{array}{|c|} g \\ \hline \ \\ \hline \end{array}$$

* Vezi 8.3.9.

** Indicele *s* la matrice arată că aceasta este exprimată în coordonate simetrice.

Prima operaţie ce trebuie făcută este transformarea matricelor de impedanţă $[Z_2]$ şi $[Z_3]$ în sistemul de coordonate simetrice cu ajutorul formulei de transformare (8.69). Se găseşte

$$[Z_2]_s = \begin{array}{c|c|c|c|} & h_2 & d_2 & i_2 \\ \hline h_2 & Z & & \\ \hline d_2 & & Z & \\ \hline i_2 & & & Z \\ \hline \end{array}$$

şi

$$[Z_3]_s = \begin{array}{c|c|} & h_3 \\ \hline h_3 & 3Z_A \\ \hline \end{array}\,,$$

întrucît matricea de conexiune a impedanţei de arc este

$$[C_3]_s = \begin{array}{c|c|} & h_3 \\ \hline g & 3 \\ \hline \end{array}\,,$$

care rezultă din relaţia

$$\underline{I}^g = \underline{I}^1 + \underline{I}^2 + \underline{I}^3 = 3\,\underline{I}^h$$

Calculul scurtcircuitului se face interconectînd aceste trei reţele. Vom avea

$$[Z]_s = \begin{array}{c|ccc|ccc|c|} & h_1 & d_1 & i_1 & h_2 & d_2 & i_2 & h_3 \\ \hline h_1 & Z_0 & & & & & & \\ d_1 & & Z_s & & & & & \\ i_1 & & & Z_a & & & & \\ \hline h_2 & & & & Z & & & \\ d_2 & & & & & Z & & \\ i_2 & & & & & & Z & \\ \hline h_3 & & & & & & & 3Z_A \\ \hline \end{array} \quad \text{şi} \quad [e]_s = \begin{array}{c|c|} \hline h_1 & \\ d_1 & E \\ i_1 & \\ \hline h_2 & \\ d_2 & \\ i_1 & \\ \hline h_3 & \\ \hline \end{array}$$

Ecuaţia de funcţionare a scurtcircuitului, $\underline{I}^a = 0$, dă ecuaţia de legătură a componentelor simetrice ale curentului

$$\underline{I}^h + \underline{I}^d + \underline{I}^i = 0,$$

care arată că două din aceste componente sînt independente; în consecinţă, poate fi eliminată una din axele de referinţă. Trecînd la noul sistem de axe,

se scriu vechii curenţi în funcţie de noii curenţi

$$\underline{I}^{h_1} = -\underline{I}^d - \underline{I}^i$$
$$\underline{I}^{d_1} = \underline{I}^d$$
$$\underline{I}^{i_1} = \underline{I}^i$$
$$\underline{I}^{h_2} = -\underline{I}^d - \underline{I}^i$$
$$\underline{I}^{d_2} = \underline{I}^d$$
$$\underline{I}^{i_2} = \underline{I}^i$$
$$\underline{I}^{h_3} = -\underline{I}^d - \underline{I}^i$$

de unde rezultă matricea de conexiune $[C_4^3] =$

	d	i
h_1	−1	−1
d_1	1	
i_1		1
h_2	−1	−1
d_2	1	
i_2		1
h_3	−1	−1

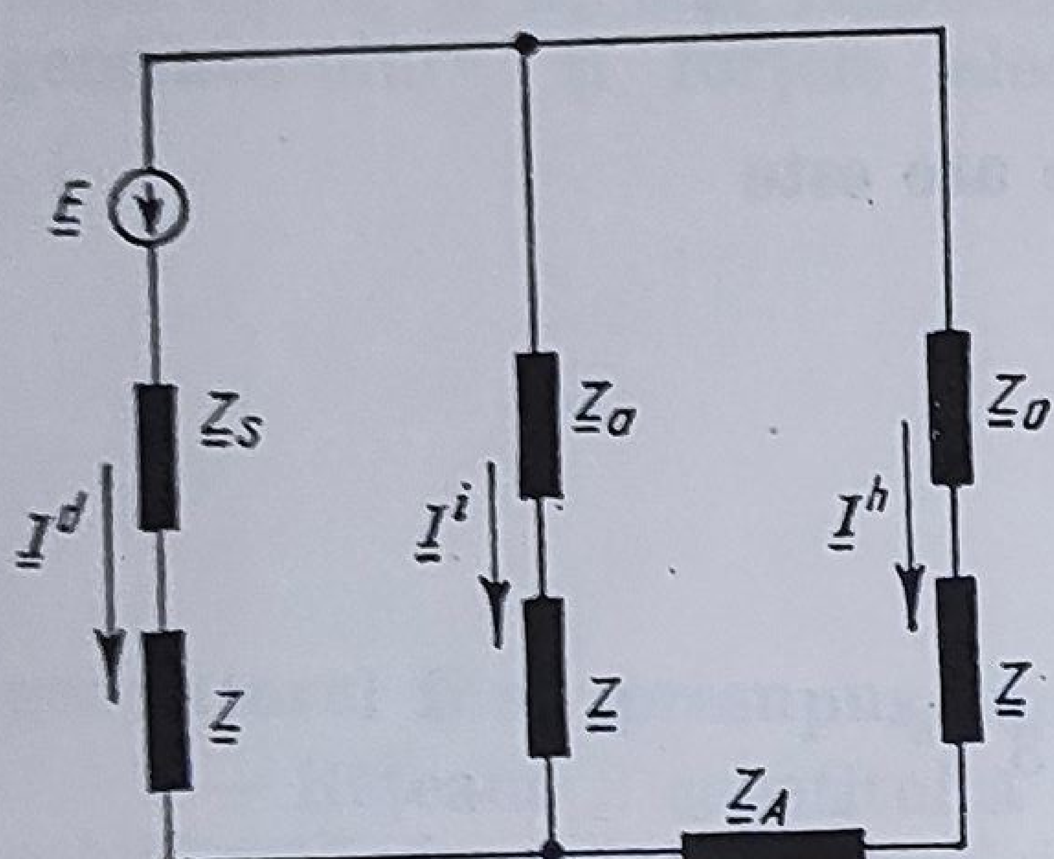


Fig. 8.63. Schema echivalentă a scurtcircuitului în coordonate simetrice.

matricea* $[C_4^3]$ făcînd trecerea de la reţeaua primitivă (III) în coordonate simetrice la reţeaua echivalentă (IV) în coordonate simetrice. Matricele acestei reţele se determină acum uşor şi sînt

$[e']_s = [C_4^3]_t\ [e]_s =$

d	E
i	

şi

$[Z']_s = [C_4^3]_t\ [Z]_s\ [C_4^3] =$

	d	i
d	$Z_0 + Z_s + 2Z + 3Z_A$	$Z_0 + Z + 3Z_A$
i	$Z_0 + Z + 3Z_A$	$Z_0 + Z_a + 2Z + 3Z_A$

Cu ajutorul acestor două matrice se construieşte circuitul echivalent al defectului considerat în coordonate simetrice (fig. 8.63) şi care este schema cunoscută**. Pornind de la această schemă, determinarea curenţilor de scurtcircuit se poate face fie direct***, fie cu ajutorul calculului matriceal, în care caz se va aplica relaţia (2.141).

$$[I]_s = [Z']_s^{-1}\ [E]_s.$$

Calculînd matricea inversă $[Z']_s^{-1}$ se găseşte

$[Z']_s^{-1} = \frac{1}{\Delta}$

	d	i
d	$Z_0 + Z_a + 2Z + 3Z_A$	$-Z_0 - Z - 3Z_A$
i	$-Z_0 - Z - 3Z_A$	$Z_0 + Z_s + 2Z + 3Z_A$

unde

$$\Delta = \underline{Z}_0(\underline{Z}_s+\underline{Z}_a)+\underline{Z}_s\underline{Z}_a+2\underline{Z}(\underline{Z}_0+\underline{Z}_s+\underline{Z}_A)+3\underline{Z}_A(\underline{Z}_s+\underline{Z}_a)+3\underline{Z}(\underline{Z}+3\underline{Z}_A)$$

* S-a notat $[C_n^m]$ pentru a arăta că această matrice transformă reţeaua m în reţeaua n.
** Vezi 8.4.5.4 punctul 2.
*** Vezi 8.4.5.6 punctul 2.

Rezultă

$$\begin{array}{c} d \\ i \end{array}\begin{bmatrix} I^d \\ I^i \end{bmatrix} = \frac{E}{\Delta}\begin{bmatrix} Z_0 + Z_a + 2Z + 3Z_A \\ -Z_0 - Z - 3Z_A \end{bmatrix}.$$

Găsirea curenţilor reali de scurtcircuit se face aplicînd relaţia (8.73) care operează transformarea reţelei date (II) în circuitul echivalent în coordonate simetrice (IV). Această matrice se stabileşte uşor. Într-adevăr, fie $[I]$ curenţii de scurtcircuit din reţeaua dată (II), $[I']$ curenţii de scurtcircuit din reţeaua primitivă în coordonate simetrice (III) şi $[I'']$ curenţii din reţeaua echivalentă în coordonate simetrice (IV). Avem imediat

$$[I] = [C_3^2]\,[I'] \quad \text{şi} \quad [I'] = [C_4^3]\,[I''];$$

rezultă

$$[I] = [C_3^2]\,[C_4^3]\,[I''] \quad \text{şi deci} \quad [C_4^2] = [C_3^2]\,[C_4^3]. \tag{8.73}$$

Matricea de trecere de la reţeaua dată (II) la reţeaua primitivă în coordonate simetrice (III) este

$[C_3^2] =$

	h_1	d_1	i_1	h_2	d_2	i_2	h_3
1	1	1	1				
2	1	a^2	a				
3	1	a	a^2				
1′				1	1	1	
2′				1	a^2	a	
3′				1	a	a^2	
g							3

matricea $[C_4^3]$ fiind cea calculată mai înainte, rezultă imediat

$[C_4^2] =$

	d	i
1		
2	$a^2 - 1$	$a - 1$
3	$a - 1$	$a^2 - 1$
1′		
2′	$a^2 - 1$	$a - 1$
3′	$a - 1$	$a^2 - 1$
g	-3	-3

Curenţii căutaţi vor fi

$$[I] = \begin{array}{c|c|} 1 & 0 \\ \hline 2 & (1-a^2)Z_a + (a-a^2)\,Z_0 + (a-2a^2)\,Z + 3\,(a-a^2)\,Z_A \\ \hline 3 & (1-a)\,Z_a + (a^2-a)\,Z_0 + (a^2-2a)\,Z + 3\,(a^2-a)\,Z_A \\ \hline 1' & 0 \\ \hline 2' & (1-a^2)\,Z_a + (a-a^2)\,Z_0 + (a-2a^2)\,Z + 3\,(a-a^2)\,Z_A \\ \hline 3' & (1-a)\,Z_a + (a^2-a)\,Z_0 + (a^2-2a)\,Z + 3\,(a^2-a)\,Z_A \\ \hline g & 3\,(Z_a + Z) \end{array} \cdot \frac{-E}{\Delta}.$$

În cazul particular al unui scurtcircuit direct la bornele alternatorului şi la pămînt, curenţii de scurtcircuit corespunzători se obţin făcînd în relaţia de mai sus $Z = Z_A = 0$ şi se obţine

$$\Delta = Z_0\,(Z_s + Z_a) + Z_s Z_a\,;$$

rezultă :

— componentele simetrice ale curenţilor

$$\begin{array}{c|c|} d & I^d \\ \hline i & I^i \end{array} = \begin{array}{c|c|} d & Z_0 + Z_a \\ \hline i & -Z_0 \end{array} \frac{E}{Z_0\,(Z_s + Z_a) + Z_s Z_a}\,;$$

— curenţii reali

$$\begin{array}{c|c|} 1 & I^1 \\ \hline 2 & I^2 \\ \hline 3 & I^3 \\ \hline 1' & I^{1'} \\ \hline 2' & I^{2'} \\ \hline 3' & I^{3'} \\ \hline g & I^p \end{array} = -\frac{E}{Z_0\,(Z_s + Z_a) + Z_s Z_a} \begin{array}{c|c|} 1 & 0 \\ \hline 2 & (1-a^2)\,Z_a + (a-a^2)\,Z_0 \\ \hline 3 & (1-a)\,Z_a - (a-a^2)\,Z_0 \\ \hline 1' & 0 \\ \hline 2' & (1-a^2)\,Z_a + (a-a^2)Z_0 \\ \hline 3' & (1-a)\,Z_a - (a-a^2)\,Z_0 \\ \hline g & 3\,Z_a \end{array},$$

regăsindu-se astfel rezultatul obţinut direct pe altă cale*. Se verifică uşor că

$$\underline{I}^p = \underline{I}^2 + \underline{I}^3$$

8.4.7. REGIMUL TRANZITORIU ÎN SISTEME TRIFAZATE

Folosirea mărimilor complexe la studiul regimurilor tranzitorii** dă posibilitatea examinării regimurilor tranzitorii în sisteme trifazate, în cazul cînd schimbarea regimului de funcţionare produce o dezechilibrare.

* Vezi 8.4.5.6, punctul 2.
** Vezi 7.4.

Fie o rețea trifazată, supusă unui regim tranzitoriu oarecare. Curenții și tensiunile în cele trei faze pot fi exprimați prin niște sume de mărimi complexe de forma

$$\underline{P}_1 = \Sigma A_1 \varepsilon^{p_1 t},$$
$$\underline{P}_2 = \Sigma A_2 \varepsilon^{p_2 t},$$
$$\underline{P}_3 = \Sigma A_3 \varepsilon^{p_3 t}.$$

Se definesc sumele $\underline{P}_h$, $\underline{P}_d$, $\underline{P}_i$ prin relațiile

$$\underline{P}_h = \frac{1}{3}(\underline{P}_1 + \underline{P}_2 + \underline{P}_3),$$

$$\underline{P}_d = \frac{1}{3}(\underline{P}_1 + a\underline{P}_2 + a^2\underline{P}_3), \tag{8.74}$$

$$\underline{P}_i = \frac{1}{3}(\underline{P}_1 + a^2\underline{P}_2 + a\underline{P}_3)$$

a fiind operatorul de rotație $1\underline{|120°}$.

Din relațiile (8.74) se deduce

$$\underline{P}_1 = \underline{P}_h + \underline{P}_d + \underline{P}_i,$$

$$\underline{P}_2 = \underline{P}_h + a^2\underline{P}_d + a\underline{P}_i, \tag{8.75}$$

$$\underline{P}_3 = \underline{P}_h + a\underline{P}_d + a^2\underline{P}_i.$$

În consecință, teoria coordonatoarelor simetrice se poate aplica și mărimilor tranzitorii.

Din relațiile (8.74) rezultă că starea electrică, atît pentru curenți cît și pentru tensiuni, provine din suprapunerea în fiecare latură a sistemului:

— a unei sume $\underline{P}_h$ de termeni avînd fiecare același amortisment și aceeași fază relativă în fiecare latură; acesta este sistemul *homopolar amortizat*;

— a unei sume $\underline{P}_d$ de termeni, avînd fiecare același armortisment în cele trei laturi, însă o fază relativă ψ_d pe faza 1, $\psi_d - \frac{2\pi}{3}$ pe faza 2 și $\psi_d + \frac{2\pi}{3}$ pe faza 3; acesta este sistemul *direct amortizat*;

— a unei sume $\underline{P}_i$ de termeni, avînd fiecare același amortisment în cele trei laturi, însă o fază relativă ψ_i pe faza 1, $\psi_i + \frac{2\pi}{3}$ pe faza 2 și $\psi_i - \frac{2\pi}{3}$ pe faza 3; acesta este sistemul *invers amortizat*.

Să considerăm, pentru fixarea ideilor, o rețea trifazată oarecare simetrică și echilibrată (fig. 8.64). Privită dintr-un punct M oarecare al ei, această rețea prezintă:

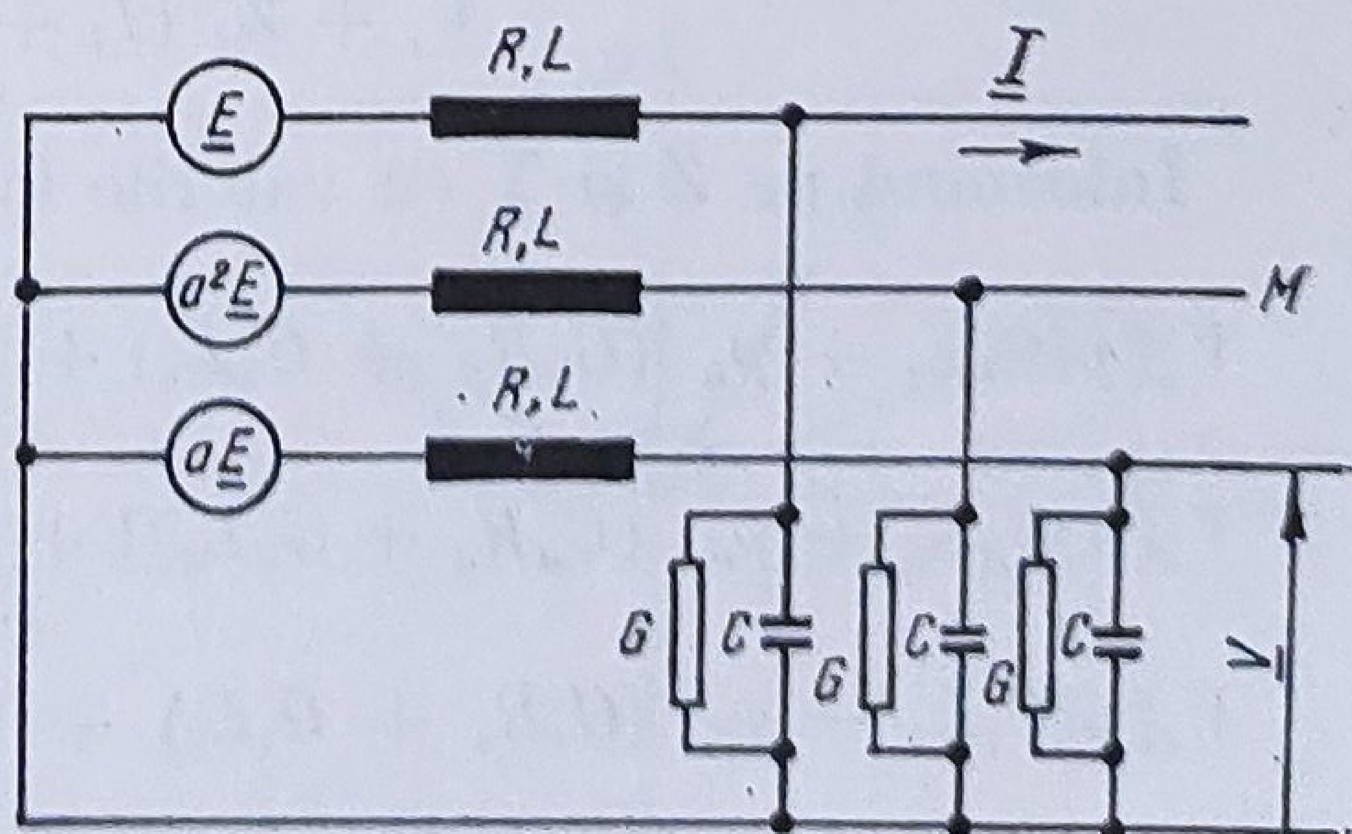


Fig. 8.64. Rețea electrică trifazată simetrică.

a) pentru un sistem *homopolar amortizat* de pulsație generalizată

$$\underline{\Omega}_h = -\mathrm{j}\, \underline{p}_h = \Omega_h - \mathrm{j}\delta_h ,$$

o impedanță

$$\underline{Z}_h = R_h + \underline{p}_h L_h$$

și o admitanță

$$\underline{Y}_h = G_h + \underline{p}_h C_h ;$$

b) pentru un sistem *direct amortizat* de pulsație generalizată

$$\underline{\Omega}_d = -\mathrm{j}\, \underline{p}_d = \Omega_d - \mathrm{j}\delta_d ,$$

o impedanță

$$\underline{Z}_d = R_d + \underline{p}_d L_d$$

și o admitanță

$$\underline{Y}_d = G_d + \underline{p}_d C_d ;$$

c) pentru un sistem *invers amortizat* de pulsație generalizată

$$\underline{\Omega}_i = -\mathrm{j}\, \underline{p}_i = \Omega_i - \mathrm{j}\,\delta_i$$

o impedanță

$$\underline{Z}_i = R_i + \underline{p}_i L_i$$

și o admitanță

$$\underline{Y}_i = G_i + \underline{p}_i C_i .$$

Teoremele lui KIRCHHOFF aplicate celor trei sisteme dau relațiile

$$\underline{V}_h + \underline{Z}_h (\underline{I}_h + \underline{V}_h \underline{Y}_h) = 0,$$

$$\underline{V}_d + \underline{Z}_d (\underline{I}_d + \underline{V}_d \underline{Y}_d) = 0,$$

$$\underline{V}_i + \underline{Z}_i (\underline{I}_i + \underline{V}_i \underline{Y}_i) = 0.$$

Înlocuind pe $\underline{Z}$ și $\underline{Y}$ cu valorile lor corespunzătoare se obține:

$$\underline{V}_h[\underline{p}_h^2 C_h L_h + \underline{p}_h (C_h R_h + G_h L_h) + (1 + G_h R_h)] + \underline{I}_h (R_h + \underline{p}_h L_h) = 0,$$

$$\underline{V}_d[\underline{p}_d^2 C_d L_d + \underline{p}_d (C_d R_d + G_d L_d)] + (1 + G_d R_d)] + \underline{I}_d (R_d + \underline{p}_d L_d) = 0,$$

$$\underline{V}_i[\underline{p}_i^2 C_i L_i + \underline{p}_i (G_i R_i + G_i L_i) + (1 + G_i R_i)] + \underline{I}_i (R_i + \underline{p}_i L_i) = 0$$

care reprezintă regimul liber al sistemului.

Starea electrică a reţelei în punctul M mai dă alte trei ecuaţii între componentele simetrice ale curenţilor, care reprezintă regimul forţat.

Suprapunerea acestor două regimuri constituie regimul tranzitoriu în sistemul trifazat.

Pentru găsirea stărilor reale pe faze în sistem, se compun componentele simetrice conform regulilor cunoscute.

Dacă se urmăreşte cunoaşterea ecuaţiei diferenţiale de funcţionare a sistemului, aceasta se obţine imediat înlocuind pe p şi p^2 prin simbolurile respective. Astfel, spre exemplu pentru componenta simetrică directă, se găseşte :

$$C_d L_d \frac{d^2 v_d}{dt^2} + (C_d R_d + G_d L_d) \frac{dv_d}{dt} + (1 + G_d R_d) v_d + R_d i_d + L \frac{di_d}{dt} = 0$$

Metoda poate fi aplicată, în acelaşi mod, la orice sistem polifazat.

8.4.8. CÎMPUL MAGNETIC ÎNVÎRTITOR ELIPTIC

În practică, se pot ivi situaţii anormale în funcţionarea maşinilor electrice, fie din cauză că bobinajul maşinii nu este simetric (datorit unei reparaţii defectuoase), fie că curenţii de alimentare a maşinii nu sînt simetrici. În aceste condiţii, cîmpul magnetic învîrtitor, produs de armătura trifazată a maşinii electrice, nu mai este circular şi devine eliptic.

Cazul cel mai frecvent este acel al unei maşini cu bobinaj polifazat simetric alimentat cu un sistem polifazat de curenţi nesimetric şi dezechilibrat.

Dacă curentul este dezechilibrat, îl descompunem în componente simetrice şi vom obţine — pentru aceeaşi armătură — două cîmpuri învîrtitoare (fig. 8.65), unul care se va roti în sens direct, corespunzînd componentei directe a curentului

$$B_d = B_{Md} \cos [p\theta - (\omega t - \varphi_d)]$$

şi unul care se va roti în sens invers ($m \neq m'$) corespunzînd componentei inverse a curentului

$$B_i = B_{Mi} \cos [p\theta + (\omega t - \varphi_i)].$$

Componentele acestor cîmpuri pe axele spaţiale ale armăturii sînt

$$\left.\begin{aligned} x_d &= B_{Md} \cos (\omega t - \varphi_d), \\ y_d &= -B_{Md} \sin (\omega t - \varphi_d), \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_i &= B_{Mi} \cos (\omega t - \varphi_i), \\ y_i &= B_{Mi} \sin (\omega t - \varphi_i). \end{aligned}\right\}$$

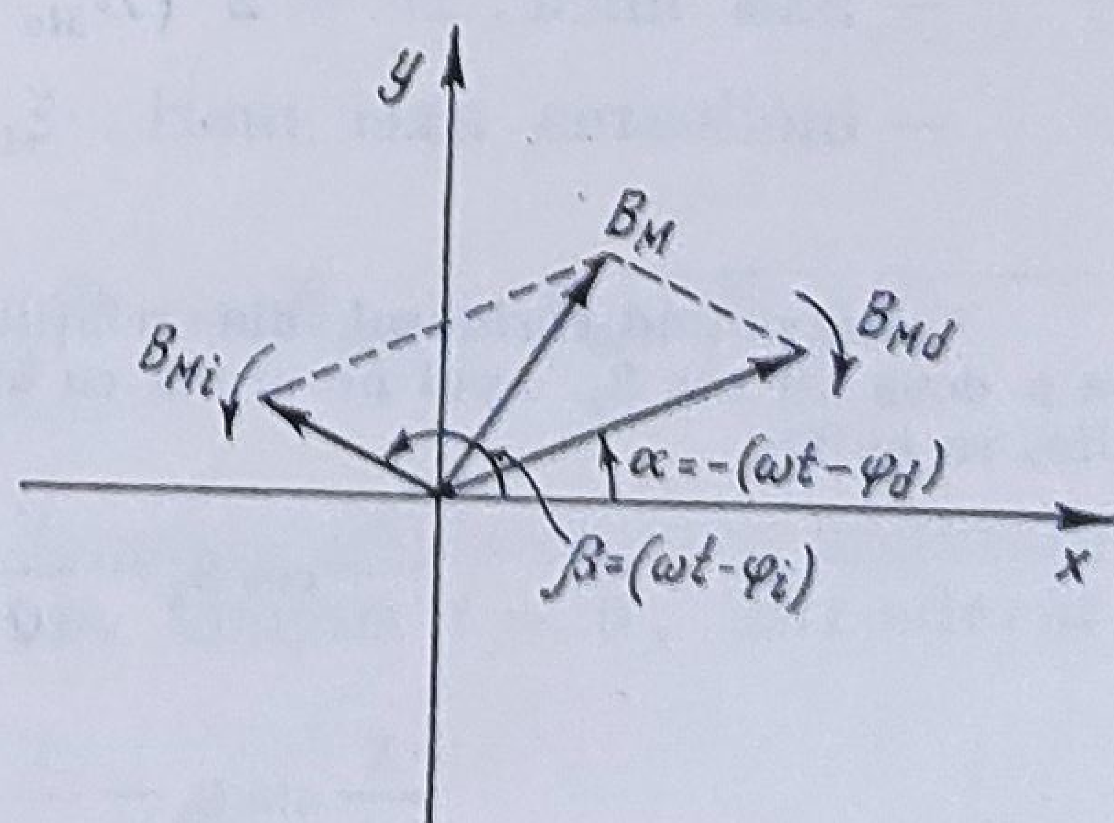


Fig. 8.65. Diagrama fazorială a cîmpului de inducţie magnetică.

Extremitatea cîmpului rezultant

$$\bar{B}_M = \bar{B}_{Md} + \bar{B}_{Mi}$$

va avea coordonatele

$$\left.\begin{aligned} X = x_d + x_i = (B_{Md} \cos \varphi_d + B_{Mi} \cos \varphi_i) \cos \omega t + (B_{Md} \sin \varphi_d + \\ + B_{Mi} \sin \varphi_i) \sin \omega t = P \cos (\omega t - \beta_1) \\ Y = y_d + y_i = -(B_{Md} \cos \varphi_d - B_{Mi} \cos \varphi_i) \sin \omega t + (B_{Md} \sin \varphi_d - \\ - B_{Mi} \sin \varphi_i) \cos \omega t = Q \cos (\omega t - \beta_2) \end{aligned}\right\} \quad (8.76)$$

în care P, Q, β_1, β_2 se obţin prin identificare

$$P = \sqrt{B_{Md}^2 + B_{Mi}^2 + 2 B_{Md} B_{Mi} \cos (\varphi_d - \varphi_i)}$$

$$Q = \sqrt{B_{Md}^2 + B_{Mi}^2 - 2 B_{Md} B_{Mi} \cos (\varphi_d - \varphi_i)}$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{B_{Md} \sin \varphi_d + B_{Mi} \sin \varphi_i}{B_{Md} \cos \varphi_d + B_{Mi} \cos \varphi_i}$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = -\frac{B_{Md} \cos \varphi_d - B_{Mi} \cos \varphi_i}{B_{Md} \sin \varphi_d - B_{Mi} \sin \varphi_i}$$

Ecuaţiile (8.76) sînt ecuaţiile parametrice ale unei elipse. Într-adevăr avem

$$\frac{X}{P} = \cos (\omega t - \beta_1),$$

$$\frac{Y}{Q} = \cos (\omega t -$$

de unde, eliminînd pe t între aceste două ecuaţii se obţine*

$$\frac{X^2}{P^2} + \frac{Y^2}{Q^2} - 2 \frac{XY}{PQ} \cos (\beta_1 - \beta_2) - \sin^2 (\beta_1 - \beta_2) = 0, \quad (8.78)$$

care este ecuaţia unei elipse cu centrul în originea axelor de coordonate.

Studiul acestei elipse se face în mod obişnuit. Se găseşte astfel:

— axa mare: $2a = 2\,(B_{Md} + B_{Mi})$;

— axa mică: $2b = 2\,(B_{Md} - B_{Mi})$;

— înclinarea axei mari: $\xi_1 = \frac{\varphi_d - \varphi_i}{2}$.

---

* Dezvoltînd cosinusul din relaţiile (8.77) şi înmulţind prima din aceste relaţii cu $\cos \beta_2$ şi pe a doua cu $\cos \beta_1$, apoi pe prima cu $\sin \beta_2$ şi pe a doua cu $\sin \beta_1$, şi scăzînd respectiv una din alta, se obţine

$$\frac{X}{P} \cos \beta_2 - \frac{Y}{Q} \cos \beta_1 = \sin \omega t \sin (\beta_1 - \beta_2),$$

$$\frac{X}{P} \sin \beta_2 - \frac{Y}{Q} \sin \beta_1 = -\cos \omega t \sin (\beta_1 - \beta_2).$$

Ridicînd la pătrat fiecare din aceste relaţii şi adunîndu-le se obţine relaţia (8.78).

Studiul acestui cîmp se face mai comod cu ajutorul cantităților complexe. Ecuația cîmpului este în acest caz

$$\underline{\overline{B}}_M = \underline{\overline{B}}_{Md}\underline{|-\xi} + \underline{\overline{B}}_{Mi}\underline{|\xi}, \tag{8.79}$$

în care $\xi = \omega t$ este unghiul pe care îl parcurg vectorii respectivi cu viteza ω și care este o elipsă*.

Luînd ca origine de fază axa x, și presupunînd că la $t = 0$ argumentele celor doi fazori sînt φ_d și φ_i, ecuația cîmpului (8.79) se scrie

$$\underline{\overline{B}}_M = \overline{B}_{Md}\underline{|\varphi_1 - \xi} + \overline{B}_{Mi}\underline{|\varphi_i + \xi}\,.$$

Cele două semiaxe sînt vectori cu originea în centrul elipsei și avînd modulele respectiv

$$a = |\overline{B}_{Md}| + |\overline{B}_{Mi}|$$

și

$$b = |\overline{B}_{Md}| - |\overline{B}_{Mi}|.$$

Argumentul ξ_1 al axei mari corespunde unghiului ξ pentru care cei doi vectori sînt în fază iar argumentul ξ_2 al axei mici corespunde unghiului ξ pentru care cei doi vectori sînt în opoziție, cele două argumente fiind legate prin relația

$$|\xi_1 - \xi_2| = \frac{\pi}{2}. \tag{8.80}$$

Argumentul ξ_1 al axei mari se determină observînd că, cei doi vectori rotindu-se în sens contrar, ei vor fi în fază cînd argumentele lor sînt egale

$$\varphi_d - \xi_1 = \varphi_i + \xi_1,$$

de unde rezultă

$$\xi_1 = \frac{\varphi_d - \varphi_i}{2}.$$

Ecuația semiaxei mari este deci

$$\overline{B}_{Ma} = \overline{B}_{Md}\left|\underline{\varphi_d - \frac{\varphi_d - \varphi_i}{2}}\right. + \overline{B}_{Mi}\left|\underline{\varphi_i + \frac{\varphi_d - \varphi_i}{2}}\right. = (\overline{B}_{Md} + \overline{B}_{Mi})\left|\underline{\frac{\varphi_d + \varphi_i}{2}}\right..$$

Este ușor de văzut că direcția axei mari coincide cu bisectoarea unghiului dintre cei doi vectori, $\overline{B}_{Md}$ și $\overline{B}_{Mi}$ considerați la timpul $t = 0$; într-adevăr, dacă $\varphi_i > \varphi_d$, atunci

$$\frac{\varphi_d + \varphi_i}{2} = \frac{\varphi_i - \varphi_d}{2} + \varphi_d\,;$$

dacă $\varphi_d > \varphi_i$, atunci

$$\frac{\varphi_d + \varphi_i}{2} = \frac{\varphi_d - \varphi_i}{2} + \varphi_i.$$

Ecuaţia semiaxei mici se obţine ţinînd seama de relaţia (8.80); se găseşte

$$\bar{B}'_{Md} = \bar{B}_{Md} \underline{\left| \varphi_d - \frac{\varphi_d - \varphi_i}{2} + \frac{\pi}{2} \right.} - \bar{B}_{Mi} \underline{\left| \varphi_i + \frac{\varphi_d - \varphi_i}{2} + \frac{\pi}{2} \right.} =$$

$$= (\bar{B}_{Md} - \bar{B}_{Mi}) \underline{\left| \frac{\varphi_d + \varphi_i}{2} + \frac{\pi}{2} \right.}.$$

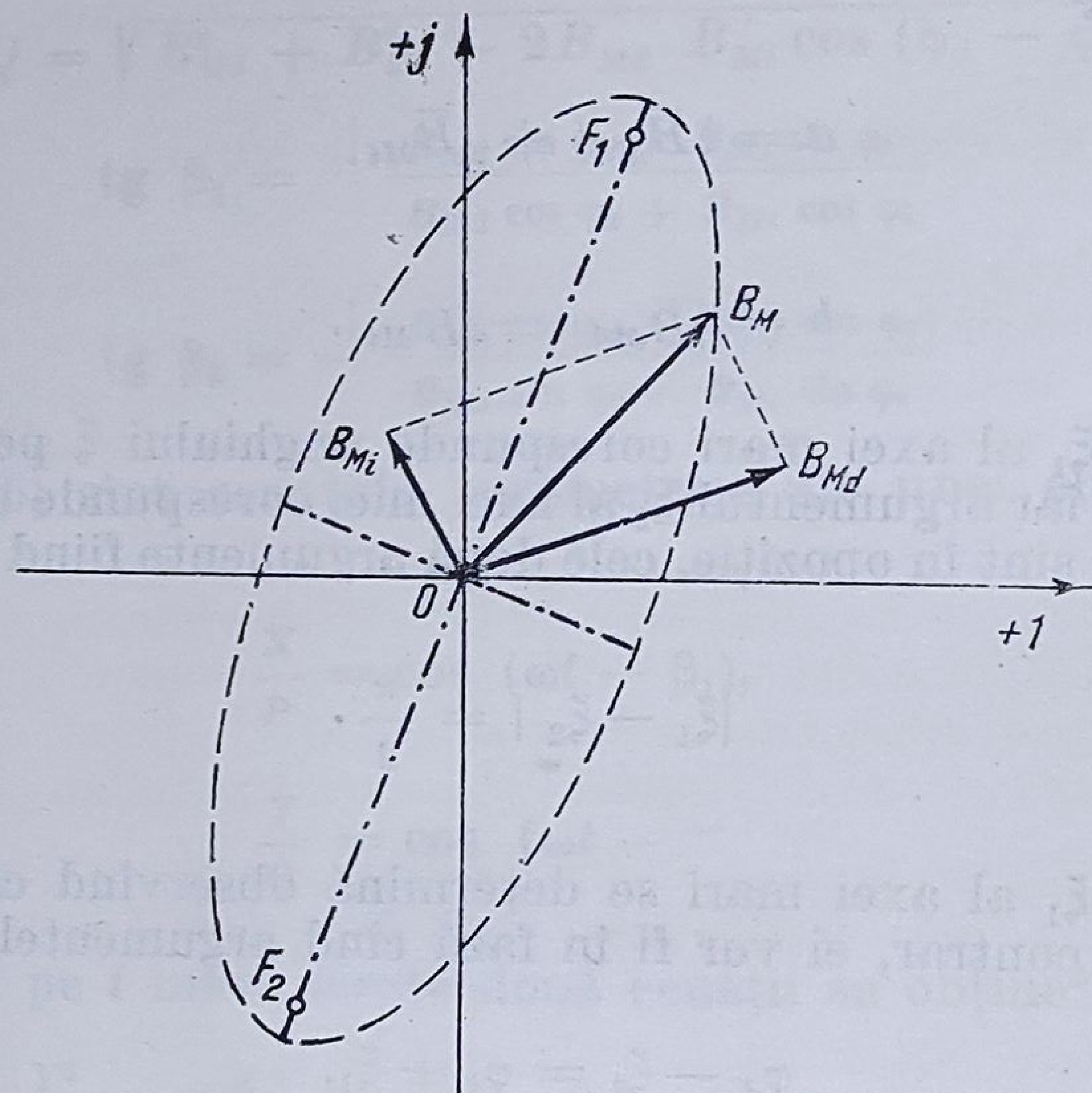


Fig. 8.66. Cîmp magnetic învîrtitor eliptic.

Cu aceste elemente elipsa reprezentînd hodograful vîrfului vectorului cîmp învîrtitor se construieşte uşor (fig. 8.66); un asemenea cîmp învîrtitor se numeşte eliptic.

Capitolul IX

CURENTUL ALTERNATIV MONOFAZAT NESINUSOIDAL REGIMUL DEFORMANT

9.1. GENERALITĂŢI

Studiul fenomenelor electrice în curent alternativ, studiul maşinilor electrice de curent alternativ sau al reţelelor electrice funcţionînd în curent alternativ se face admiţîndu-se că unda sau curba de tensiune sau de curent

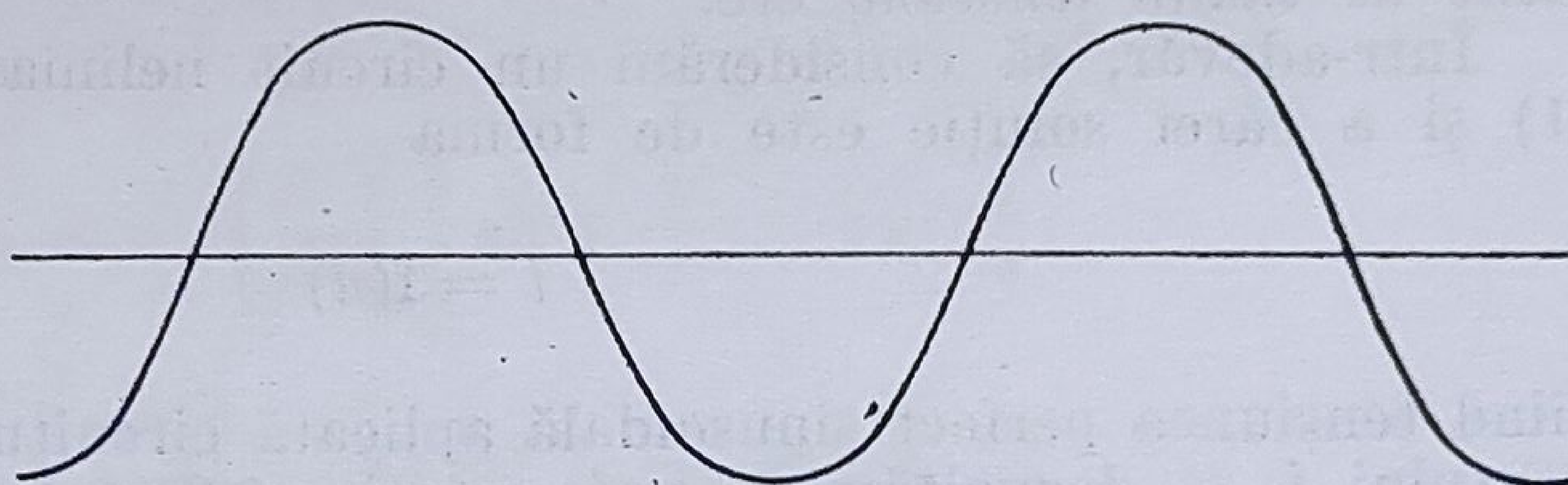


Fig. 9.1. Undă de tensiune sau de curent sinusoidală.

este perfect sinusoidală (fig. 9.1). În realitate, atît unda de tensiune cît şi unda de curent sînt în general departe de a fi sinusoidale şi, deşi periodice, ele au o formă oarecare (fig. 9.2). Se zice că undele respective sînt *deformate*.

Regimul sinusoidal poate fi considerat un caz particular, un caz către care se tinde a se ajunge în practică, dar care nu este realizat în general. Regimul sinusoidal conduce la soluţii mai simple ale tuturor problemelor de curent alternativ şi pentru acest motiv el este adoptat în expunerile teoretice.

Regimul deformant este acela care se întîlneşte mai mult în practică. El se datorează funcţionării în reţelele de curent alternativ a *aparatelor deformante* şi care sînt constituite în general de elementele neliniare din reţea. Funcţionarea unei reţele electrice, oricare ar fi caracterul ei, trebuie să satisfacă neapărat

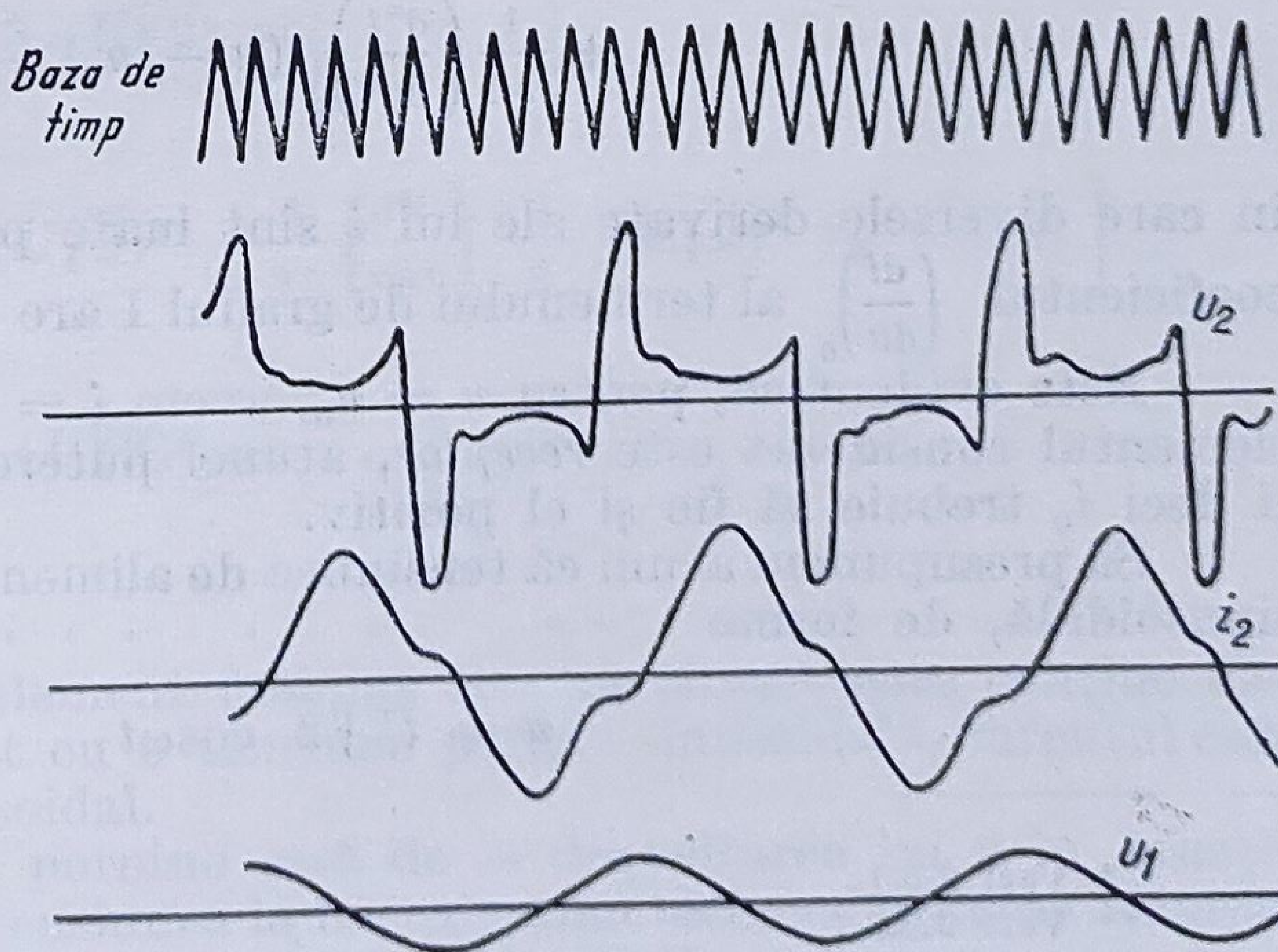


Fig. 9.2. Unde de tensiune şi de curent nesinusoidale.

teorema a doua a lui KIRCHHOFF, care poate fi scrisă în general sub forma

$$\Sigma e = \Sigma Ri + \Sigma \frac{d(Li)}{dt} + \Sigma \int \frac{1}{C} i \, dt + \Sigma u ; \tag{9.1}$$

în suma $\Sigma \frac{d(Li)}{dt}$ au fost cuprinse atît forțele electromotoare de inducție proprie, cît și acelea de inducție mutuală. Rezultă dar, că pentru a exista regim deformant, este necesar ca cel puțin unul din parametrii rețelei să nu fie liniar*, sau ca un semnal aplicat rețelei să fie nesinusoidal**.

După studiile academicianului prof. CONSTANTIN BUDEANU, aparatele deformante pot fi împărțite în două categorii: *aparate deformante de prima categorie*, care sînt cauza inițială — și singura dealtfel — a producerii regimului deformant și *aparate deformante de categoria a doua*, care nu dau naștere regimului deformant dar care, fiind alimentate cu curenți deformanți, amplifică această deformație. În prima categorie se clasează aparatele care, fiind alimentate cu tensiuni sau curenți riguros sinusoidali, produc fenomene deformante. Printre acestea sînt *mutatoarele* de orice categorie (supape mecanice, cu vapori de mercur etc.), *reactanțele cu miez de fier* (transformatoare, bobine de șoc etc.), *liniile aeriene de înaltă tensiune* etc.

Într-adevăr, să considerăm un circuit neliniar, care satisface ecuația (9.1) și a cărei soluție este de forma

$$i = f(u) \tag{9.2}$$

u fiind tensiunea perfect sinusoidală aplicată circuitului. Pentru a găsi forma curentului i, să dezvoltăm în serie relația (9.2) folosind dezvoltarea în serie TAYLOR; se obține

$$i = i_0 + \left(\frac{di}{du}\right)_0 (u - u_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 i}{du^2}\right)_0 (u - u_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n i}{du^n}\right)_0 (u - u_0)^n + \ldots \tag{9.3}$$

în care diversele derivate ale lui i sînt luate pentru $u = u_0$; dintre acestea, coeficientul $\left(\frac{di}{du}\right)_0$ al termenului de gradul I are dimensiunile unei admitanțe.

Este evident că, pentru $u = u_0$, avem $i = i_0$; dacă u_0 este pozitiv, cum elementul considerat este *receptor*, atunci puterea $u_0 i_0$ trebuie să fie pozitivă și deci i_0 trebuie să fie și el pozitiv.

Să presupunem acum că tensiunea de alimentare a elementului este perfect sinusoidală, de forma

$$u = U\sqrt{2}\, \cos\omega t$$

* Vezi 2.5.1.

** Vezi 9.3.3.1.

*** Academicianul CONST. BUDEANU (1886—1959) a fost profesor de Electrotehnică, Măsuri electrice și Tracțiuni electrice la politehnică și la Institutul politehnic din București. El este întemeietorul școlii românești de electrotehnică, privind regimul deformant.

Introducînd această valoare în relaţia (9.3) rezultă

$$i = i_0 + \left(\frac{di}{du}\right)_0 (U\sqrt{2}\cos\omega t - u_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2i}{du^2}\right)_0 (U\sqrt{2}\cos\omega t - u_0)^2 + \dots \tag{9.4}$$

Dar

$$\cos^2\omega t = \frac{1}{2}(\cos 2\omega t + 1)$$

$$\cos^3\omega t = \frac{1}{4}(\cos 3\omega t + 3\cos\omega t)$$

. . . .

Înlocuind aceste valori în relaţia (9.4) se obţine

$$i = I_0 + I_1\sqrt{2}\cos\omega t + I_2\sqrt{2}\cos 2\omega t + I_3\sqrt{2}\cos 3\omega t + \dots$$

în care:

$$I_0 = i_0 - \left(\frac{di}{du}\right)_0 u_0 + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2i}{du^2}\right)_0 \left[u_0^2 + \frac{1}{2}(U\sqrt{2})^2\right] - \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3i}{du^3}\right)_0 \left[\frac{3}{2}(U\sqrt{2})^2 u_0 + u_0^3\right] + \dots$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{di}{du}\right)_0 (U\sqrt{2}) - \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2i}{du^2}\right)_0 2u_0 (U\sqrt{2})^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3i}{du^3}\right)_0 \left[\frac{3}{4}(U\sqrt{2})^3 + 3(U\sqrt{2})u_0^2\right] + \dots\right]$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2i}{du^2}\right)_0 \frac{1}{2}(U\sqrt{2})^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3i}{du^3}\right)_0 \frac{3}{2}(U\sqrt{2})^2 u_0 + \dots\right]$$

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3i}{du^3}\right)_0 \frac{1}{4}(U\sqrt{2})^3 + \dots\right]$$

. . . .

În consecinţă, dacă un element neliniar sau un circuit care conţine elemente neliniare este alimentat cu o tensiune perfect sinusoidală, curentul care rezultă în circuit este nesinusoidal.

Un raţionament analog, pornind însă de la dezvoltarea lui u în funcţie de i, conduce la rezultatul că tensiunea la bornele unui element neliniar alimentat cu un curent perfect sinusoidal, este nesinusoidală.

Tot în această categorie trebuie să se pună şi alternatoarele industriale a căror curbă de tensiune nu este sinusoidală.

În a doua categorie sînt clasate aparatele care produc fenomene deformante numai dacă sînt alimentate cu curenţi alternativi nesinusoidali ca, spre exemplu, orice *reactanţă capacitivă* sau *capacitate* constantă, cum ar fi liniile de transmitere a energiei electrice, aeriene sau subterane etc.

Reţelele electrice moderne comportă în constituţia lor un număr destul de mare de aparate deformante de prima sau de a doua categorie. Într-adevăr, nu se poate concepe o reţea modernă fără transformatoare, al căror fier este adesea saturat; de asemenea, alimentarea tramvaielor şi căilor ferate electrice, funcţionînd cu curent continuu, se face azi, din ce în ce mai mult, cu ajutorul mutatoarelor; în sfîrşit reţelele, care în majoritatea cazurilor sînt constituite din cabluri subterane, formează de asemenea un aparat deformant.

Rezultă dar că, în aceste reţele vor apărea întotdeauna fenomene deformante.

Un regim deformant este caracterizat prin prezenţa armonicelor în instalaţiile electrice. El poate fi caracterizat ca atare şi prin fenomenele deformante particulare ce apar în acest caz şi în special prin efectele pe care le produce. Fenomenele deformante pot produce efecte de rezonanţă în reţelele şi maşinile electrice; ele măresc puterea aparentă, provocînd astfel o micşorare a factorului de putere; micşorează în general capacitatea de receptivitate a aparatelor receptoare, micşorîndu-le astfel randamentul; tot din cauza fenomenelor deformante, liniile de telecomunicaţii suferă anumite influenţe supărătoare din cauza existenţei acestor fenomene în liniile industriale vecine; în sfîrşit, fenomenele deformante introduc erori suplimentare în aparatele de măsură*.

Regimul deformant se defineşte astfel: *Regimul energetic ale cărui unde de tensiune şi curent sînt periodice şi cel puţin una din ele nu este sinusoidală este un regim deformant.*

9.2. STUDIUL UNDELOR COMPLEXE

9.2.1. UNDE ARMONICI

9.2.1.1. **Definiţii**. Două sau mai multe funcţii periodice sinusoidale se zice că sînt armonici între ele, dacă raportul perioadelor lor este un număr întreg oarecare. Funcţia de bază, faţă de care se face raportul perioadelor, se numeşte *unda*, *sinusoida* sau *armonica fundamentală*, celelalte se numesc *unde* sau *armonici superioare*.

Fie, spre exemplu, funcţiile

$$y_1 = A_1 \sin\omega t \text{ şi } y_2 = A_2 \sin 2\omega t.$$

Prima funcţie are perioada $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ şi a doua perioada $T_2 = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$.

Raportul perioadelor este

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{\omega}{\pi} = 2.$$

---

* Vezi 9.5.4.4.

Prima funcţie este armonica fundamentală, iar a doua funcţie este armonica de ordinul 2.

În general, perioada armonicii de ordinul n este a n-a parte din perioada armonicii fundamentale.

Reprezentarea lor grafică este arătată în figura 9.3.

Armonicile pot fi tot aşa de bine în cosinus ca şi în sinus, avînd astfel toate proprietăţile funcţiei respective. De asemenea, ele pot fi defazate cu un unghi oarecare faţă de origine. Astfel, expresia generală a unei armonici de ordinul n este

$$y_n = A_n \sin (n\omega t - \varphi_n). \tag{9.5}$$

Se observă că, în această expresie, defazajul faţă de origine nu este unghiul φ_n, ci unghiul $\frac{\varphi_n}{n}$. Într-adevăr, pentru a vedea cînd această funcţie trece prin zero, trebuie rezolvată ecuaţia

$$\sin(n\omega t - \varphi_n) = 0$$

care este satisfăcută pentru

$$\omega t = \frac{\varphi_n}{n}.$$

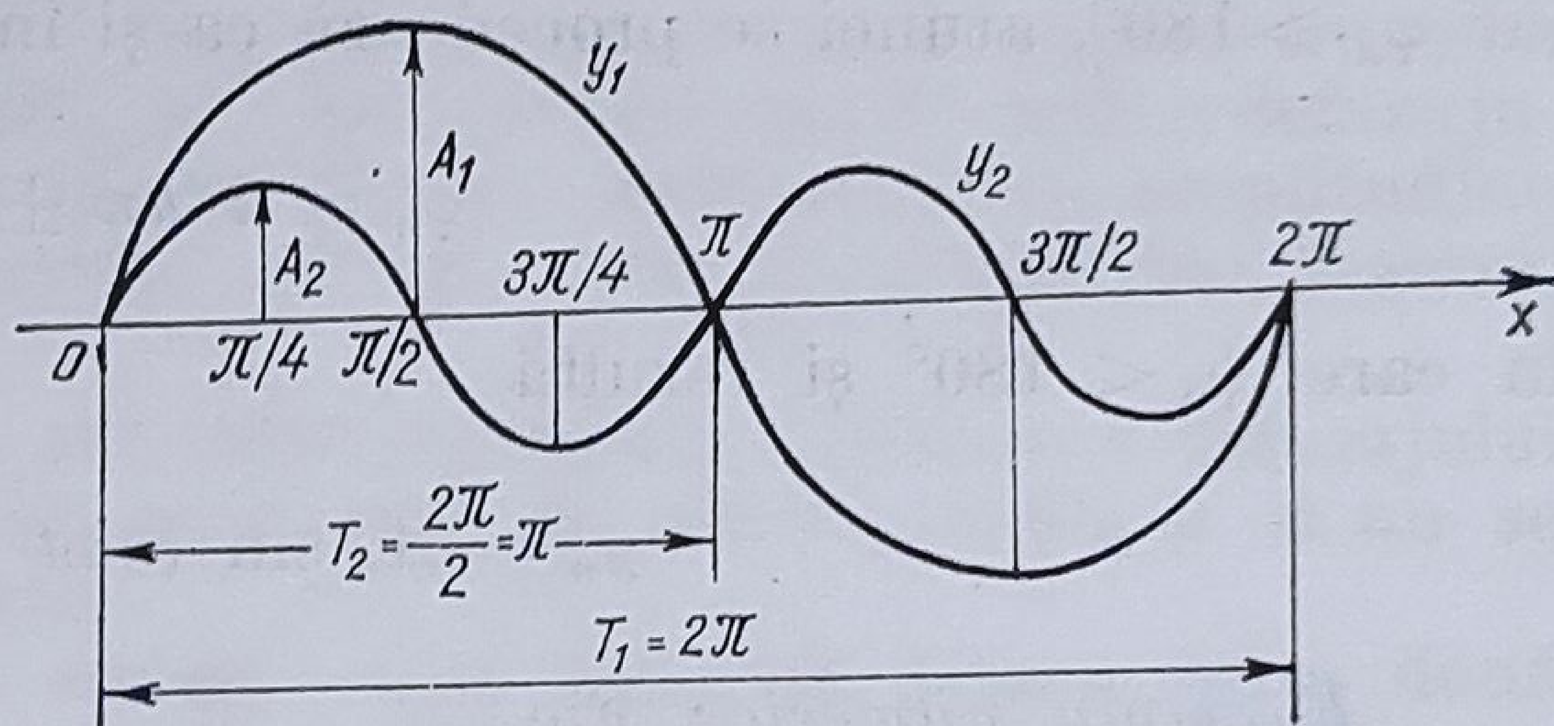


Fig. 9.3. Unde armonici.

Astfel, pentru a găsi defazajul faţă de origine al unei armonici oarecare, se scrie expresia sa (9.5) sub forma

$$y_n = A_n \sin n \left(\omega t - \frac{\varphi_n}{n}\right)$$

şi defazajul căutat este unghiul

$$\varphi_n' = \frac{\varphi_n}{n}.$$

În ceea ce priveşte defazajele, transformarea undei etc., se aplică pentru armonici aceleaşi reguli ca şi pentru unda fundamentală, cu condiţia de a se ţine seama de perioada proprie a armonicii superioare respective*.

Fie, de exemplu, armonica de ordinul n, pusă sub forma

$$y_n = A_n \sin n(\omega t - \varphi_n')$$

în care

$$\varphi_n' > \frac{1}{2} T_n = \frac{\pi}{n}.$$

* Vezi 4.1.2.5.

Se va determina unghiul $\varphi_n'' < \frac{\pi}{n}$, scăzînd din defazajul φ_n' un număr întreg de perioade ale armonicii n, adică punînd pe φ_n' sub forma

$$\varphi_n' = k\frac{2\pi}{n} \pm \varphi_n' \, ;$$

se va obţine astfel

$$y_n = A_n \sin n(\omega t \mp \varphi_n'').$$

În cazul cînd armonica este pusă sub forma

$$y_n = A_n \sin (n\omega t - \varphi_n)$$

iar $\varphi_n > 180°$, atunci se procedează ca şi în cazul undei fundamentale punînd

$$\varphi_n = 2\, k\pi \pm \psi_n$$

în care $\psi_n < 180°$ şi rezultă

$$y_n = A_n \sin (n\omega t \mp \psi_n).$$

Exemplu numeric: Fie

$$y_6 = 100 \sin 6(\omega t - 95°)$$

în care

$$\varphi_6' = 95° > \frac{1}{2}\, T_6 = \frac{\pi}{6} = 30° \, .$$

Pe de altă parte,

$$\varphi_6' = 95° = 2 \times \frac{360°}{6} - 25°$$

de unde

$$\varphi_6'' = -25°$$

şi deci

$$y_6 = 100 \sin 6\, (\omega t + 25°)\, .$$

OBSERVAŢII: 1. În cazul cînd

$$\frac{1}{2}\, T_n = \frac{\pi}{n}$$

nu este un număr întreg de grade, este mai comod a se opera asupra armonicii superioare pusă sub forma

$$y_n = A_n \sin (n\omega t - \varphi_n)\, .$$

Spre exemplu

$$y_7 = 5 \sin 7 (\omega t - 78^\circ) .$$

În acest caz, $\frac{1}{2} T = \frac{\pi}{7}$ nu este un număr întreg de grade. Se consideră atunci funcţia

$$y_7 = 5 \sin (7\omega t - 546^\circ) .$$

Punînd

$$\varphi_n = k\,360^\circ \pm \psi_n = 2 \times 360^\circ - 174^\circ$$

se obţine

$$y_7 = 5 \sin (7\omega t + 174^\circ) .$$

2. De asemenea, atunci cînd amplitudinea armonicii superioare este negativă sau funcţia este o cosinusoidă, înainte de a face transformarea defazajului, se face în prealabil transformarea funcţiei într-o sinusoidă cu amplitudine pozitivă cu ajutorul operaţiilor elementare, aşa cum s-a arătat mai înainte.

9.2.1.2. **Defazajul între două armonici superioare.** Definirea defazajului între două armonici superioare este o chestiune pur convenţională şi ea nu se poate face decît în anumite condiţii.

a) Defazajul între armonici de acelaşi ordin. Noţiunea defazaj între două armonici de acelaşi ordin are aceeaşi semnificaţie ca şi în cazul undelor fundamentale, făcîndu-se aceleaşi interpretări.

Trebuie observat că, dacă cele două armonici sînt date sub forma generală

$$y_n = A_n \sin (n\omega t - \varphi_n)$$

$$y'_n = A'_n \sin (n\omega t - \varphi'_n)$$

defazajul respectiv este

$$\frac{\varphi_n}{n} - \frac{\varphi'_n}{n}$$

şi nu

$$\varphi_n - \varphi'_n .$$

În consecinţă, pentru a nu se greşi în calcule, se pun expresiile armonicilor de acelaşi ordin sub forma

$$y_n = A_n \sin n \left(\omega t - \frac{\varphi_n}{n} \right)$$

şi numai după aceea se calculează defazajul respectiv.

b) Defazajul între armonici de ordine diferite. Se înţelege prin defazaj între două armonice de ordine diferite, cea mai mică valoare a intervalului dintre timpurile cînd cele două armonici trec prin zero cu valori crescătoare de acelaşi sens şi se determină în raport cu defazajul faţă de originea de fază.

Această noţiune se aplică mai ales pentru defazajul dintre o armonică superioară şi unda fundamentală.

Defazajul dintre armonicile

$$y_p = A_p \sin (p\omega t - \varphi_p)$$

şi

$$y_q = A_q \sin (q\omega t - \varphi_q)$$

în care A_p şi A_q sînt pozitivi, este

$$\varphi = \frac{\varphi_p}{p} - \frac{\varphi_q}{q}.$$

În particular, armonicile

$$y_p = A_p \sin p\, x$$

şi

$$y_q = A_q \sin q\, x$$

în care A_p şi A_q sînt pozitivi, sînt în fază, iar armonicile

$$y_p = A_p \sin p\, x$$

şi

$$y_q = A_q \sin q\, (x - \pi)$$

A_p şi A_q îndeplinind aceleaşi condiţii ca mai sus, sînt în opoziţie.

9.2.1.3. **Reprezentarea polară a funcţiilor periodice.** În afară de reprezentarea carteziană, o funcţie periodică, reprezentînd o undă periodică, poate fi reprezentată şi într-un sistem de coordonate polare. Această reprezentare este de multe ori utilă în aplicaţiile electrotehnicii.

Fie o rază vectoare OA, care se roteşte cu viteza uniformă ω în sensul trigonometric şi a cărei lungime în fiecare moment este egală cu valoarea instantanee a funcţiei în acel moment (fig. 9.4). O rotaţie completă a razei vectoare

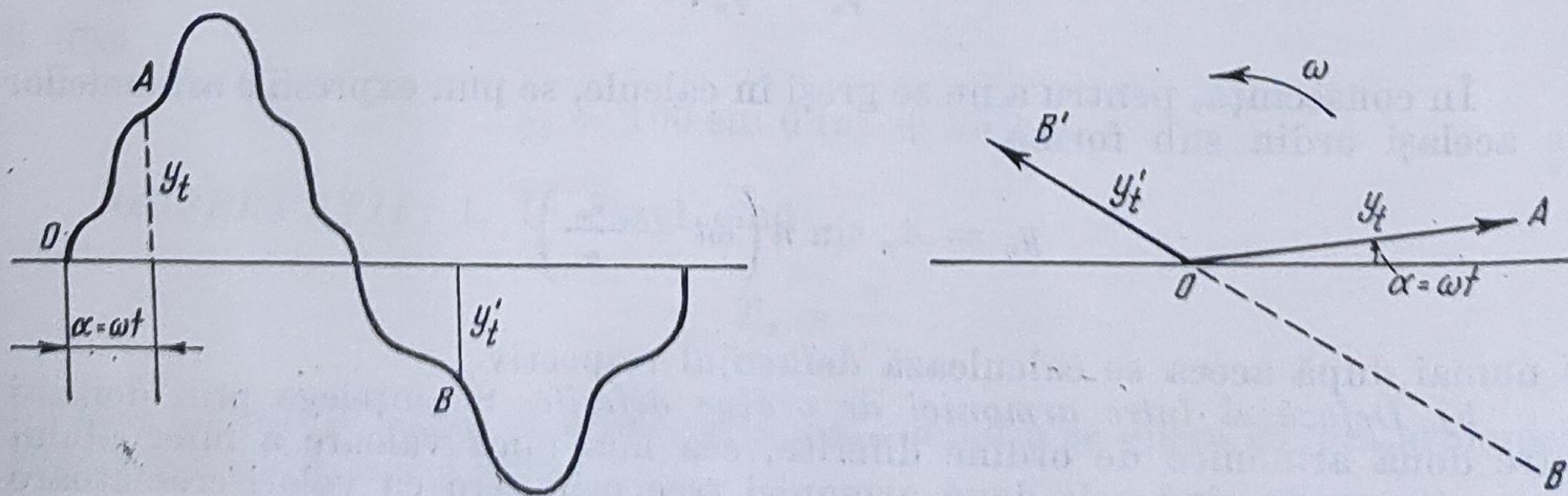


Fig. 9.4. Reprezentarea polară a funcţiilor periodice.

corespunde unui ciclu al funcţiei periodice, astfel că diferitele unghiuri pe care le face raza vectoare cu originea de fază sînt egale cu ωt.

Construcţia diagramei polare a unei funcţii periodice se face astfel: pentru diferitele unghiuri, corespunzătoare diverselor timpuri t, se construieşte raza vectoare a cărei mărime este egală cu valoarea instantanee a funcţiei la timpul considerat. Locul geometric al vîrfurilor acestor raze vectoare, pentru un ciclu complet, reprezintă curba polară a funcţiei periodice dată. Trebuie observat că, atunci cînd valoarea amplitudinii este negativă, ea se aşază în sens invers pe raza vectoare respectivă. Astfel, în cazul figurii 9.4, pe raza vectoare OB, mărimea amplitudinii s-a pus în sens contrar OB'.

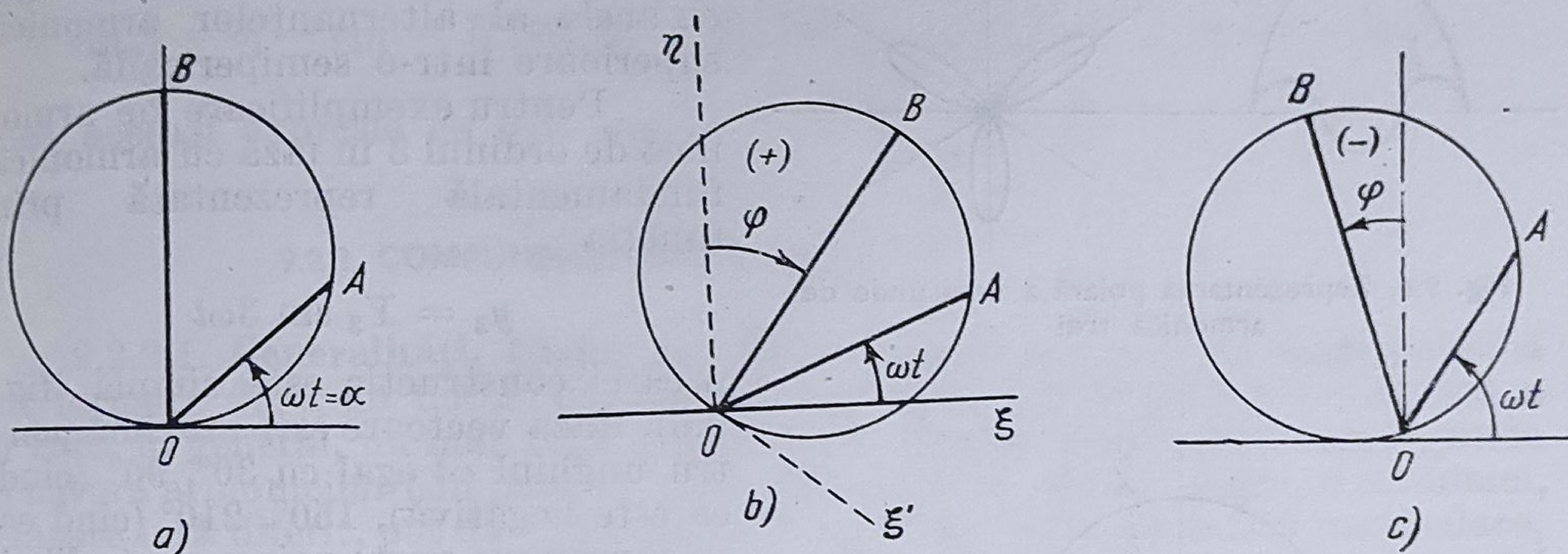


Fig. 9.5. Reprezentarea polară a unei funcţii periodice alternative sinusoidale.

Diagrama polară a unei funcţii periodice sinusoidale este un cerc avînd diametrul egal cu amplitudinea maximă (fig. 9.5,a). Într-adevăr, fie funcţia periodică sinusoidală

$$y = Y \sin \omega t$$

$OB = Y$ fiind un diametru, rezultă că

$$OA = OB \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = Y \sin \omega t = y\,.$$

Este uşor de observat că cercul reprezintă atît alternanţa pozitivă, cît şi cea negativă, a funcţiei periodice sinusoidale.

Dacă funcţia periodică sinusoidală are un anumit defazaj φ, pozitiv sau negativ, atunci, pentru a construi diagrama polară a funcţiei respective, este suficient a înclina diametrul principal al cercului în sensul orar pentru defazaje pozitive şi în sensul antiorar sau trigonometric pentru defazaje negative*. Astfel figura 9.5,b reprezintă funcţia

$$y = Y \sin (\omega t + \Phi)$$

ceea ce se poate demonstra uşor observînd că

$$\sphericalangle\, \eta O B = \sphericalangle\, \xi O \xi'$$

* S-ar părea că există o contradicţie între cele ce preced şi convenţia făcută pentru reprezentarea unghiurilor, pentru care s-a adoptat sensul trigonometric normal. De fapt, ţinînd seama că o funcţie periodică sinusoidală este reprezentată de relaţia (4.7), înclinarea axei în sensul orar corespunde la o înclinare cu un unghi negativ şi deci în expresia (4.7) apare defazajul pozitiv.

iar figura 9.5,c reprezintă funcţia

$$y = Y \sin (\omega t - \varphi) .$$

În acelaşi mod pot fi reprezentate şi funcţiile armonici superioare. În acest caz trebuie să se ţină seama de ipoteza ce s-a făcut, şi anume că raza vectoare se roteşte cu viteza ω şi că o rotire a acesteia cu 360° corespunde unui ciclu al undei fundamentale. Se va obţine deci, în cazul armonicilor superioare, o suprafaţă formată din mai multe curbe închise, numărul acestora fiind egal cu acela al alternanţelor armonicii superioare într-o semiperioadă.

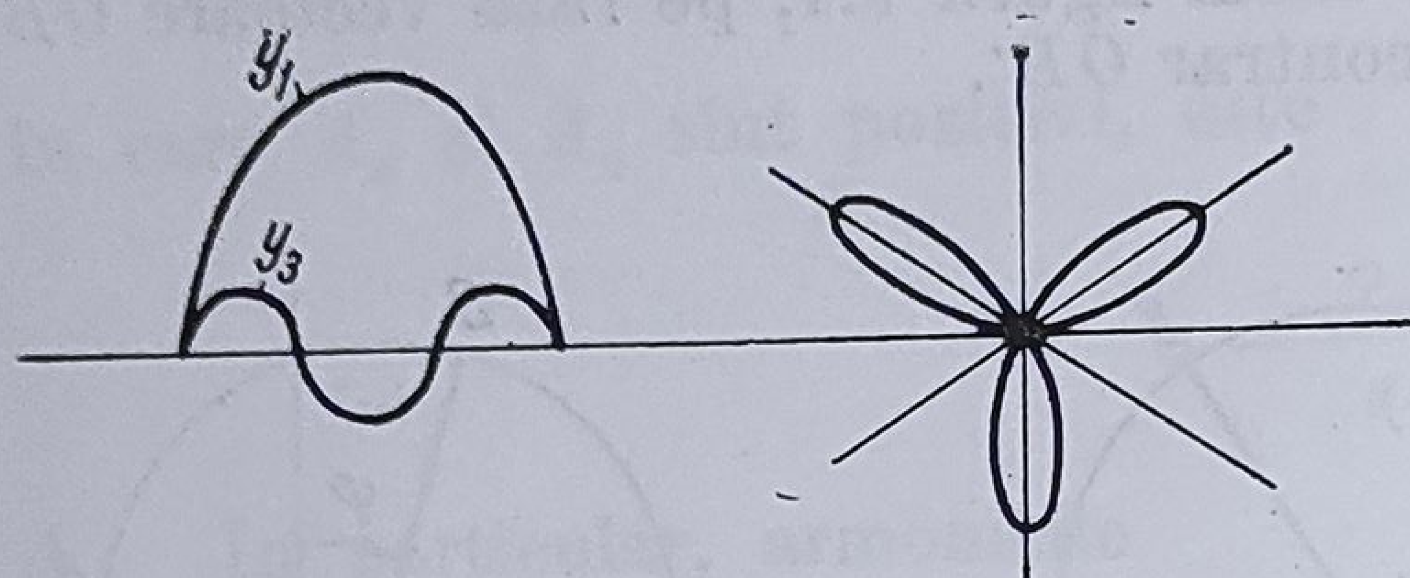


Fig. 9.6. Reprezentarea polară a unei unde de armonică trei

Pentru exemplificare fie armonica de ordinul 3 în fază cu armonica fundamentală reprezentată prin funcţia

$$y_3 = Y_3 \sin 3\omega t$$

a cărei construcţie este simplă (fig. 9.6). Raza vectoare este maximă pentru unghiul ωt egal cu 30°, 90° (cînd ea este negativă), 150°, 210° (cînd ea se suprapune peste prima rază, fiind negativă), 270° şi 330° (cînd ea se suprapune peste raza vectoare corespunzătoare unghiului de 150°, fiind negativă). Defazajul armonicii superioare nu face altceva decît să rotească axele principale de simetrie înainte sau înapoi, cu unghiul corespunzător, ca şi în cazul armonicii fundamentale.

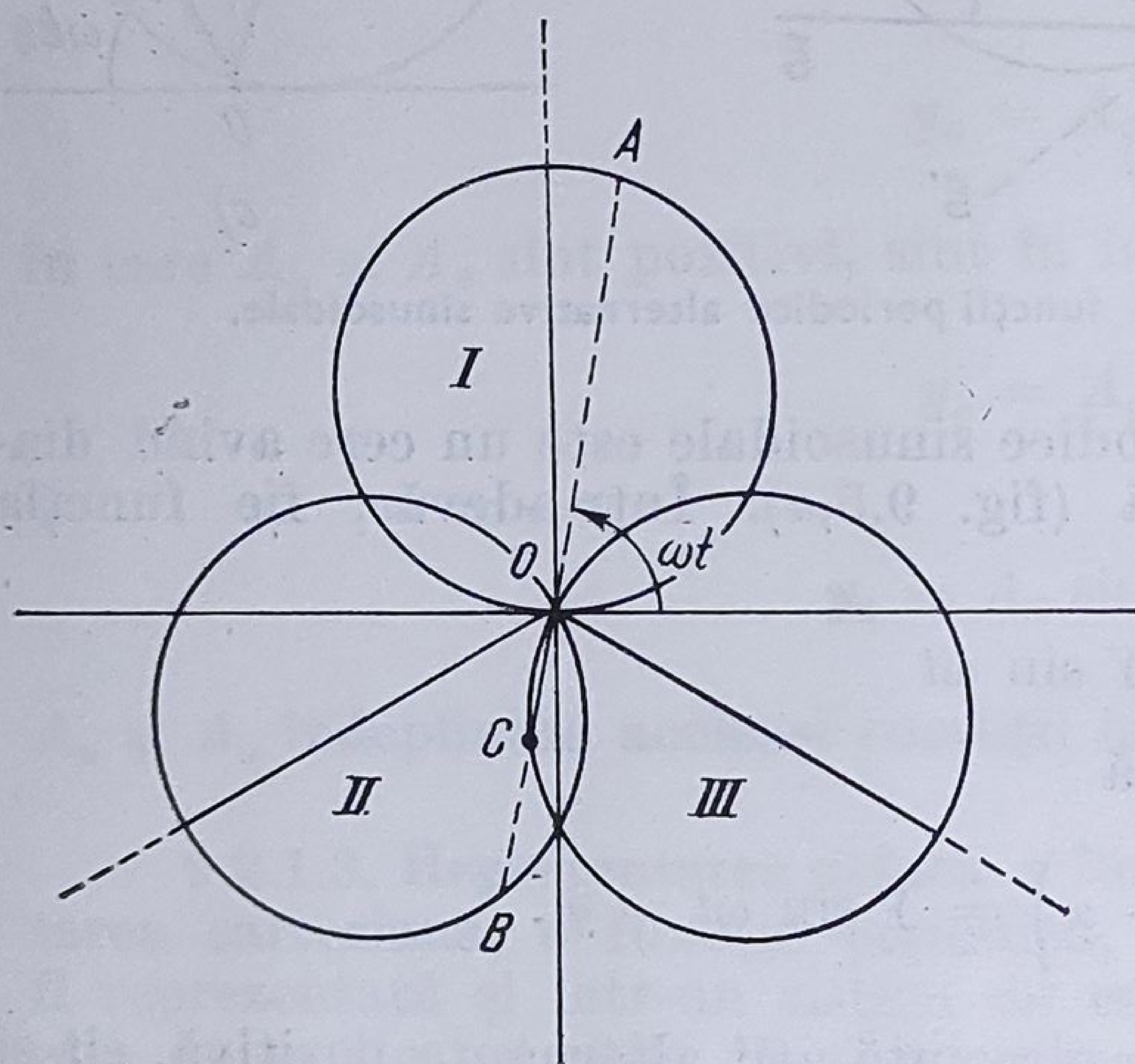


Fig. 9.7. Reprezentarea polară a undelor unui sistem trifazat

Diagrama polară poate fi folosită şi pentru reprezentarea sistemelor trifazate (şi în general polifazate) *conectate în stea*. Tensiunea diverselor faze poate fi reprezentată prin cercuri, trecînd toate prin aceeaşi origine şi avînd diametrele principale decalate cu 120°. Pentru faza I, diametrul principal se aşază în raport cu verticala, cu înclinarea corespunzătoare defazajului respectiv, întocmai ca în cazul sistemelor periodice sinusoidale simple (fig. 9.7).

Diagrama dă posibilitatea să se determine şi tensiunea între faze în orice moment t. Pentru aceasta se duce prin origine dreapta ABC, înclinată faţă de originea de fază cu unghiul ωt. În acest caz, segmentul AB reprezintă tensiunea între fazele I şi II, segmentul BC reprezintă tensiunea între fazele II şi III, iar segmentul CA reprezintă tensiunea între fazele III şi I.

Într-adevăr, fie de determinat tensiunea între fazele III şi I. Din figura 9.7 rezultă că

$$OA = E \sin \omega t$$

şi

$$OC = E \sin (\omega t - 60°)$$

după cum se poate stabili uşor pe figură. Adunînd cele două segmente se obţine

$$OA + OC = E[\sin \omega t + \sin (\omega t - 60°)] = E\sqrt{3} \sin (\omega t - 30°) .$$

Pe de altă parte

$$e_{\mathrm{I}} = E \sin \omega t \qquad \text{şi} \qquad e_{\mathrm{III}} = E \sin (\omega t + 120°)$$

de unde

$$e_{\mathrm{III-I}} = e_{\mathrm{I}} - e_{\mathrm{III}} = E\,[\sin \omega t - \sin (\omega t + 120°)] = E\sqrt{3} \sin (\omega t - 30°)$$

adică aceeaşi expresie ca mai sus.

9.2.2. COMPUNEREA ARMONICILOR

9.2.2.1. **Generalităţi.** Undele complexe care se întîlnesc în electrotehnică sînt formate dintr-un număr oarecare de armonici, constituind o rezultantă a lor care, în general, nu mai este o sinusoidă. Forma undei rezultante depinde de natura armonicilor componente şi de defazajul lor relativ. Aceleaşi armonici, defazate însă diferit, pot da unde rezultante diferite. În unele cazuri particulare, compunerea armonicilor conduce la anumite condiţii de simetrie ale undei rezultante nesinusoidale, cu ajutorul cărora se pot face anumite simplificări în operaţia inversă de descompunere în armonici a unei unde nesinusoidale.

Se deosebesc astfel trei cazuri principale:
- compunerea de armonici de aceeaşi perioadă;
- compunerea de armonici de perioadă diferită;
- compunerea de armonici oarecare cu un termen constant.

9.2.2.2. **Compunerea armonicilor oarecare de aceeaşi perioadă.** Fie armonicile

$$y_n' = A_n' \sin (n\,\omega\,t - \varphi_n')$$

şi

$$y_n'' = A_n'' \sin (n\,\omega\,t - \varphi_n'').$$

Compunînd aceste două armonici este uşor de văzut că se va obţine tot o sinusoidă de acelaşi ordin

$$y_n = A_n \sin (n\,\omega\,t - \varphi_n)$$

ai cărei parametri, amplitudinea A_n şi defazajul φ_n, se obţine prin identificarea coeficienţilor lui $\sin\omega t$ şi $\cos\omega t$ din ambii membri ai relaţiei

$$y_n = y_n' + y_n''$$

aşa cum s-a procedat şi în cazul regimului sinusoidal*.

---

* Vezi 4.1.3.1, *a*

Un caz particular, care se întîlneşte foarte des în analiza armonică, îl constituie suma funcţiilor în cuadratură

$$y'_n = A_n \sin n\omega t \text{ şi } y''_n = B_n \cos n\omega t.$$

Rezultanta este o funcţie armonică de ordinul n şi de forma

$$y_n = C_n \sin (n\omega t - \varphi_n)$$

în care

$$\left.\begin{aligned} C_n &= \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \text{şi} \qquad \operatorname{tg} \varphi_n &= -\frac{B_n}{A_n}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.6)$$

Ca o consecinţă, rezultă că o armonică oarecare de ordinul n

$$y'_n = A_n \sin (n\omega t - \varphi_n),$$

avînd un defazaj (φ_n/n) faţă de originea O, poate fi descompusă în două armonici

$$y'_n = A_n \sin n\omega t,$$

$$y''_n = B_n \cos n\omega t,$$

coeficienţii A_n şi B_n deducîndu-se cu ajutorul relaţiilor 4.7

Este uşor de văzut că o asemenea armonică se poate descompune într-o infinitate de moduri în două armonici, una în sinus şi cealaltă în cosinus, fiecare din aceste descompuneri fiind diferită.

Într-adevăr, luînd o altă origine O_1, va rezulta un alt defazaj al armonicii respective şi deci alte componente pentru armonici.

Originea O_1 fiind aleasă oriunde, rezultă că descompunerea depinde de poziţia acestei origini.

9.2.2.3. Compunerea armonicilor oarecare de perioade diferite. În compunerea armonicilor oarecare de perioade diferite pot apărea următoarele cazuri :

a) compunerea armonicilor oarecare, constituind cazul general ;

b) compunerea armonicilor oarecare, pare şi impare, în fază sau în opoziţie ;

c) compunerea armonicilor oarecare, pare şi impare, aşezate simetric unele faţă de celelalte ;

d) compunerea armonicilor oarecare impare;

e) compunerea armonicilor oarecare pare.

a) Compunerea armonicilor oarecare. Fie de găsit forma undei rezultante a unei sume de armonici oarecare, de amplitudini şi perioade diferite

$$y = C_1 \sin (\omega t - \varphi_1) + C_2 \sin 2 (\omega t - \varphi_2) + \ldots + C_n \sin n (\omega t - \varphi_n). \qquad (9.7)$$

Procedînd grafic, prin sumarea algebrică a diferitelor amplitudini se va obține o undă periodică oarecare de perioadă 2π, dar care nu va mai fi o sinusoidă (fig. 9.8). Perioada curbei rezultante este în adevăr 2π, căci cea mai mică valoare a variabilei $\omega t = x$ pentru care fiecare din sinusoidele componente reia aceeași valoare, este 2π.

Este ușor de văzut dealtfel că, întrucît pentru fiecare din sinusoide există relația

$$f(\omega t) = f(\omega t + 2\pi),$$

unda rezultantă va satisface de asemenea aceleași relații.

Gradul de deformare al undei depinde de următorii trei factori :

α) *Natura armonicilor* în ceea ce privește gradul lor de paritate sau imparitate.

β) *Valoarea defazajelor*, adică de poziția relativă a diverselor armonici.

γ) *Raportul amplitudinilor* diverselor armonici.

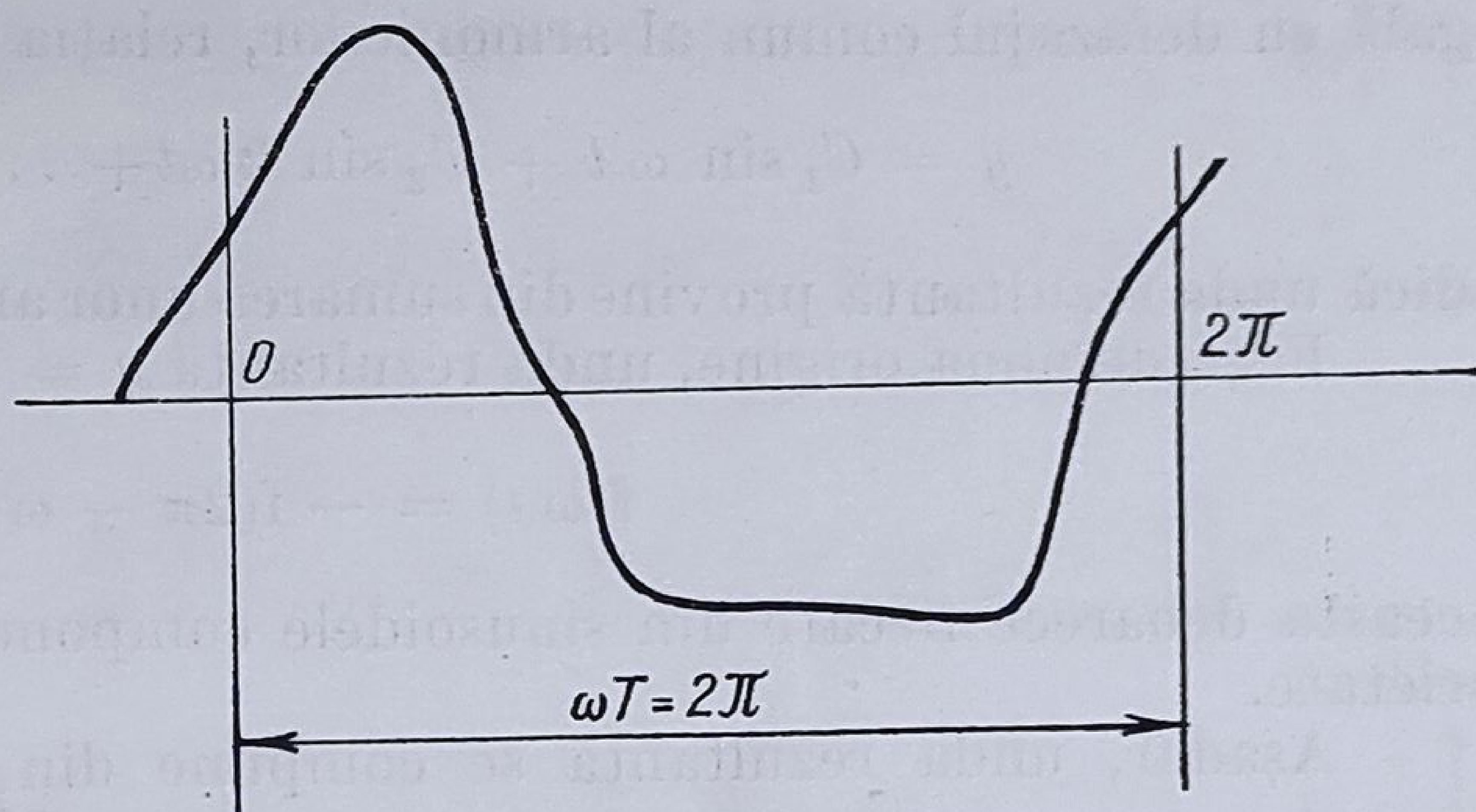


Fig. 9.8. Undă periodică nesinusoidală

O asemenea undă rezultantă nu are nici un fel de simetrie și nu se bucură decît de proprietatea că perioada sa este egală cu 2π, adică aceeași cu a undei fundamentale.

Pentru o asemenea undă, aria închisă cu axa absciselor pentru o perioadă este nulă. Într-adevăr,

$$S = \int_0^T y\, dt = \sum_1^n C_n \int_0^T \sin n(\omega t - \varphi_n)\, dt = 0.$$

OBSERVAȚIE: Funcția

$$y = \sum_1^n C_n \sin n(\omega t - \varphi_n)$$

poate fi descompusă în două sume de termeni în sinus și în cosinus

$$y = \sum_1^n A_n \sin n\omega t + \sum_1^n B_n \cos n\omega t.$$

Rezultă că sumarea unor armonici pare și impare în sinus și în cosinus dă o undă periodică deformată de perioadă 2π, fără nici un fel de simetrie.

Corolar : Fiind dată o undă periodică oarecare, de perioadă 2π, pentru care aria închisă între curbă și axa absciselor este nulă pentru o perioadă, această undă poate fi descompusă într-o serie de armonici pare și impare de forma $C_n \sin n(\omega t - \varphi_n)$ sau într-o serie de armonici pare și impare de forma

$$A_n \sin n\omega t + B_n \cos n\omega t$$

față de originea dată.

b) Compunerea armonicilor oarecare, pare și impare, în fază (sau în opoziție). Funcția corespunzătoare (9.7) se scrie în acest caz

$$y = C_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + C_2 \sin 2(\omega t - \varphi_1) + \dots + C_n \sin n(\omega t - \varphi_1),$$

amplitudinile $C_1, C_2, \dots, C_n$ putînd fi pozitive sau negative (armonici în fază, respectiv în opoziție).

Făcînd schimbarea de origine în punctul O_1 de abscisă

$$\overline{OO_1} = x_1 = \varphi_1,$$

egală cu defazajul comun al armonicilor, relația de mai sus devine

$$y = C_1 \sin \omega t + C_2 \sin 2\omega t + \dots + C_n \sin n\omega t,$$

adică unda rezultantă provine din sumarea unor armonici în *sinus* pare și impare.

Față de noua origine, unda rezultantă $y = f(\omega t)$ se bucură de proprietatea

$$f(\omega t) = -f(2\pi - \omega t),$$

aceasta deoarece fiecare din sinusoidele componente se bucură de aceeași proprietate.

Așadar, unda rezultantă se compune din două semiperioade simetrice față de o axă verticală yy', dusă la $x = \pi$, și răsturnată față de axa absciselor (fig. 9.9). Unda se anulează pentru $x = 0$ și $x = 2\pi$. În aceste puncte toate armonicile trec prin zero.

Corolar: În cazul cînd o undă experimentală periodică, de perioadă 2π este constituită din două jumătăți identice dar răsturnate față de axa absciselor și au o axă de simetrie pentru $t = \pi$, adică are proprietatea

$$f(\omega t) = -f(2\pi - \omega t),$$

această curbă poate fi descompusă față de originea ei într-o serie de armonici în *sinus*, pare și impare, în fază sau în opoziție.

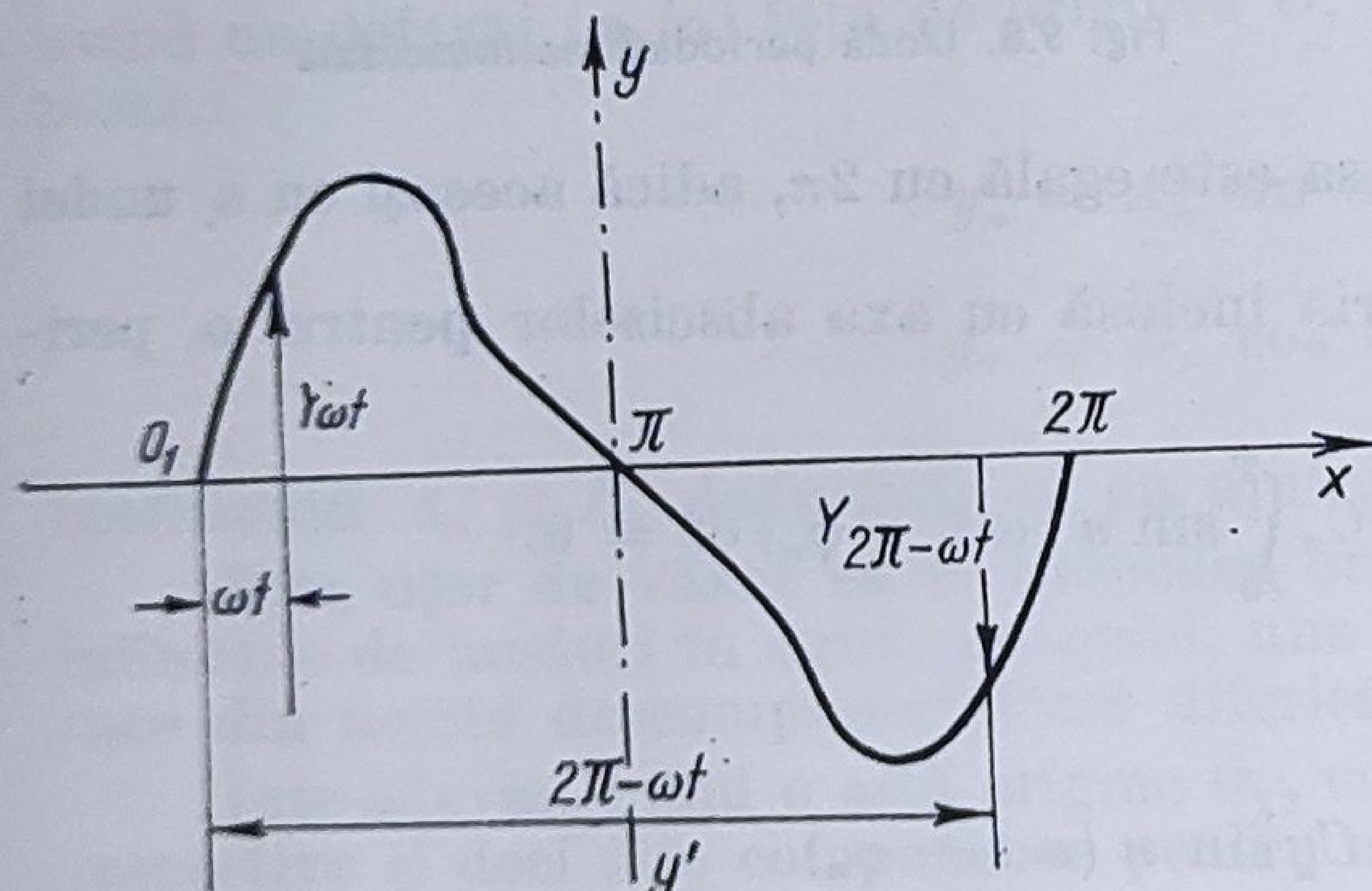


Fig. 9.9. Undă periodică nesinusoidală cu simetria $f(\omega t) = -f(2\pi - \omega t)$.

c) Compunerea armonicilor oarecare, pare și impare, așezate simetric unele față de celelalte. Acesta este cazul cînd armonicile superioare impare sînt în fază cu unda fundamentală, iar armonicile superioare pare sînt în cuadratură cu această armonică (fig. 9.10).

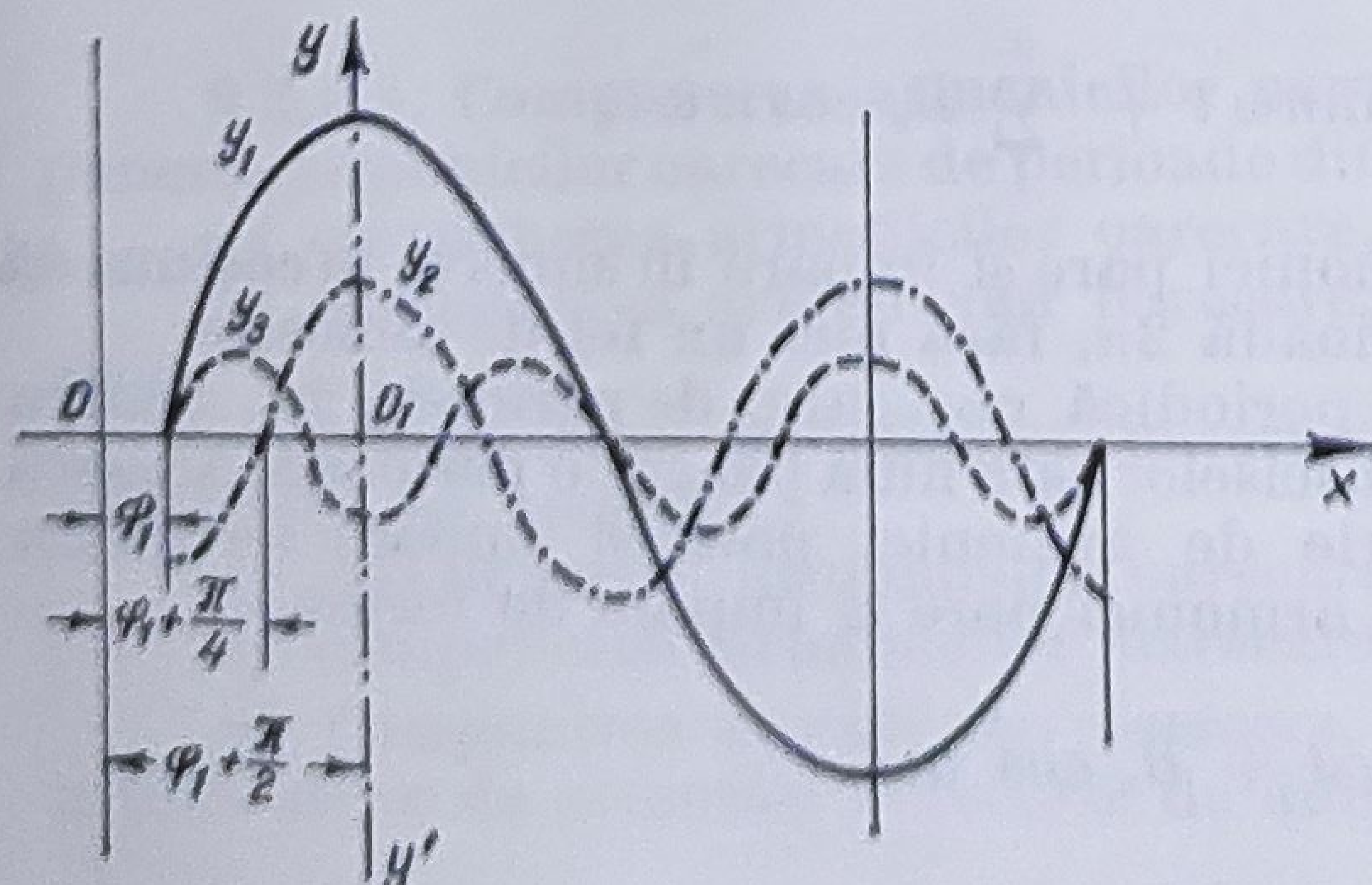


Fig. 9.10. Compunerea armonicilor în fază și în cuadratură.

În acest caz, funcţia (9.7) se scrie

$$y=f(\omega t) = \Sigma C_{2n+1} \sin (2n+1)(\omega t - \varphi_1) + \Sigma C_{2n} \sin 2n\left(\omega t - \varphi_1 - \frac{\pi}{4n}\right). \quad (9.8)$$

Este uşor de văzut, că toate armonicile sînt simetric aşezate faţă de axa verticală yy' dusă în punctul O_1, de abscisă $\overline{OO_1} = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$.

Dacă se schimbă originea în acest punct, toate armonicile devin armonici în *cosinus*. Într-adevăr,

$$C_{2n+1} \sin (2n+1)(\omega t - \varphi_1) = C_{2n+1} \sin (2n+1)\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) =$$

$$= C_{2n+1} \sin (2n+1)\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = C_{2n+1} \cos (2n+1)\omega t$$

şi

$$C_{2n} \sin 2n\left(\omega t - \varphi_1 - \frac{\pi}{4n}\right) = C_{2n} \sin\left(2n\omega t - 2n\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= C_{2n} \sin\left[2n\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) - 2n\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right] = C_{2n} \sin\left[2n\omega t + (2n-1)\frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= -C_{2n} \cos n\pi \cos 2n\omega t.$$

În consecinţă, relaţia (9.8) se va scrie

$$y = \Sigma C_n \cos n\omega t. \quad (9.9)$$

Dat fiind că fiecare din armonicile sumei (9.9) se bucură de proprietatea

$$f(\omega t) = f(2\pi - \omega t),$$

şi unda rezultantă se va bucura de aceeaşi proprietate. În consecinţă, unda rezultantă se va compune din două semiperioade identice şi simetric aşezate faţă de o axă verticală yy' dusă prin punctul de abscisă $\omega t = \pi$ (fig. 9.11).

Corolar: Orice undă periodică nesinusoidală, de perioadă 2π, formată din două jumătăţi identice, simetrice faţă de o axă verticală dusă prin punctul de abscisă $\omega t = \pi$ şi care are proprietatea

$$f(\omega t) = f(2\pi - \omega t),$$

se poate descompune într-o sumă de armonici pare şi impare în cosinus.

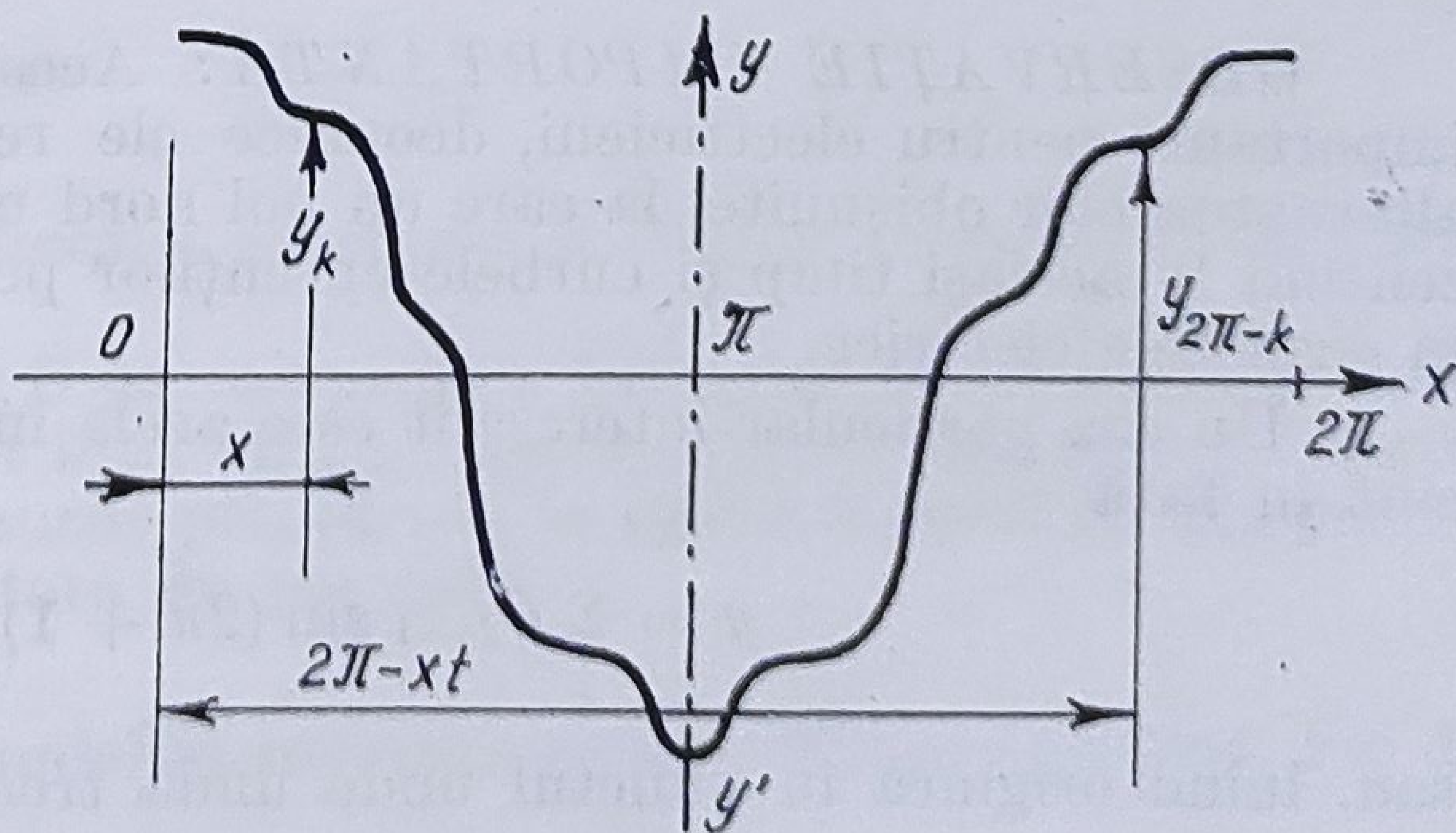


Fig. 9.11. Undă periodică nesinusoidală cu simetria $f(\omega t) = f(2\pi - \omega t)$.

d) Compunerea armonicilor impare. Fie

$$y = \Sigma\, C_{2n+1} \sin (2n + 1) (\omega t - \varphi_{2n+1}). \tag{9.10}$$

Dat fiind că fiecare armonică se bucură de proprietatea că

$$f(\omega t) = - f(\omega t + \pi),$$

şi unda rezultantă se va bucura de aceeaşi proprietate.

Rezultă că ea va fi formată din două jumătăţi identice, a doua jumătate obţinîndu-se din prima, luînd simetrica acesteia faţă de axa absciselor şi dîndu-i-se o translaţie de o jumătate de perioadă spre dreapta (fig. 9.12).

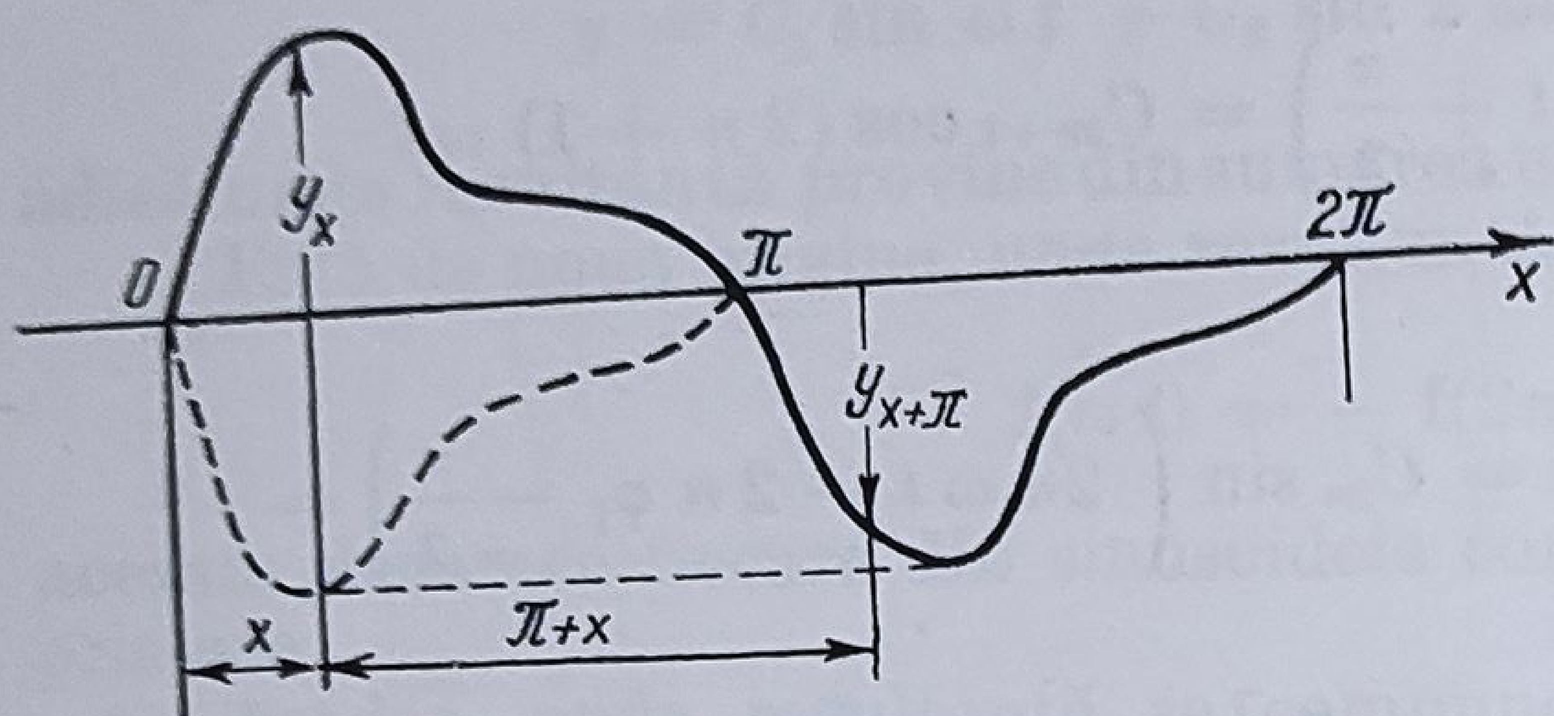


Fig. 9.12. Undă periodică nesinusoidală cu simetria $f(\omega t) = - f(\omega t + \pi)$. Curba electrotehnică.

Descompunînd armonicile din expresia (9.10) în componente în sinus şi în cosinus, se obţine

$$y = \Sigma\, [A_{2n+1} \sin (2n + 1)\omega t + B_{2n+1} \cos (2n + 1)\, \omega\, t],$$

adică acest caz echivalează cu sumarea de armonici impare în sinus şi în cosinus.

Corolar: O undă periodică nesinusoidală, de perioadă 2π, care se bucură de proprietatea

$$f(\omega t) = - f(\omega t + \pi),$$

poate fi descompusă într-o serie de armonici impare de forma

$$C_{2n+1} \sin (2n + 1) (\omega t - \varphi_{2n+1})$$

sau într-o serie de armonici impare în sinus şi în cosinus de forma

$$A_{2n+1} \sin (2n + 1)\, \omega\, t + B_{2n+1} \cos (2\, n + 1)\, \omega\, t.$$

OBSERVAŢIE IMPORTANTĂ: Acest gen de unde sînt cele mai importante pentru electricieni, deoarece ele reprezintă undele de tensiune ale alternatoarelor obişnuite, la care un pol nord urmează unui pol sud, ele reprezentînd în acelaşi timp şi curbele curenţilor pe care aceste tensiuni îi produc în circuitele electrice.

Un caz particular interesant este acela în care diversele armonici impare sînt în fază

$$y = \Sigma\, C_{2n+1} \sin (2n + 1) (\omega t - \varphi_1)$$

sau, luînd originea în punctul unde unda trece prin zero,

$$Y = \Sigma\, C_{2n+1} \sin (2n + 1)\, \omega\, t.$$

Se vede uşor că fiecare din armonicile componente se bucură de proprietatea

$$f(\omega t) = f(\pi - \omega t) = -f(\pi + \omega t) = -f(2\pi - \omega t) \quad (9.11)$$

proprietatea pe care o va avea şi unda rezultantă. Unda rezultantă va fi deci formată din două jumătăţi identice, fiecare jumătate avînd o axă de simetrie verticală la un sfert de perioadă, unda fiind formată din patru sferturi de perioadă egală (fig. 9.13).

Dacă se ia ca origine de fază punctul de pe abscisă pentru care armonica fundamentală este maximă, adică punctul de abscisă $\overline{OO'} = x = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$, undele de sumat devin *armonici impare în cosinus*

$$y = \Sigma C_{2n+1} \cos (2n + 1) \omega t.$$

Rezultă deci că, sumarea armonicilor impare în sinus este identică cu sumarea armonicilor impare în cosinus. Armonicile în cosinus se bucură de proprietatea

$$f(\omega t) = -f(\pi - \omega t) = -f(\pi + \omega t) = f(2\pi - \omega t). \quad (9.12)$$

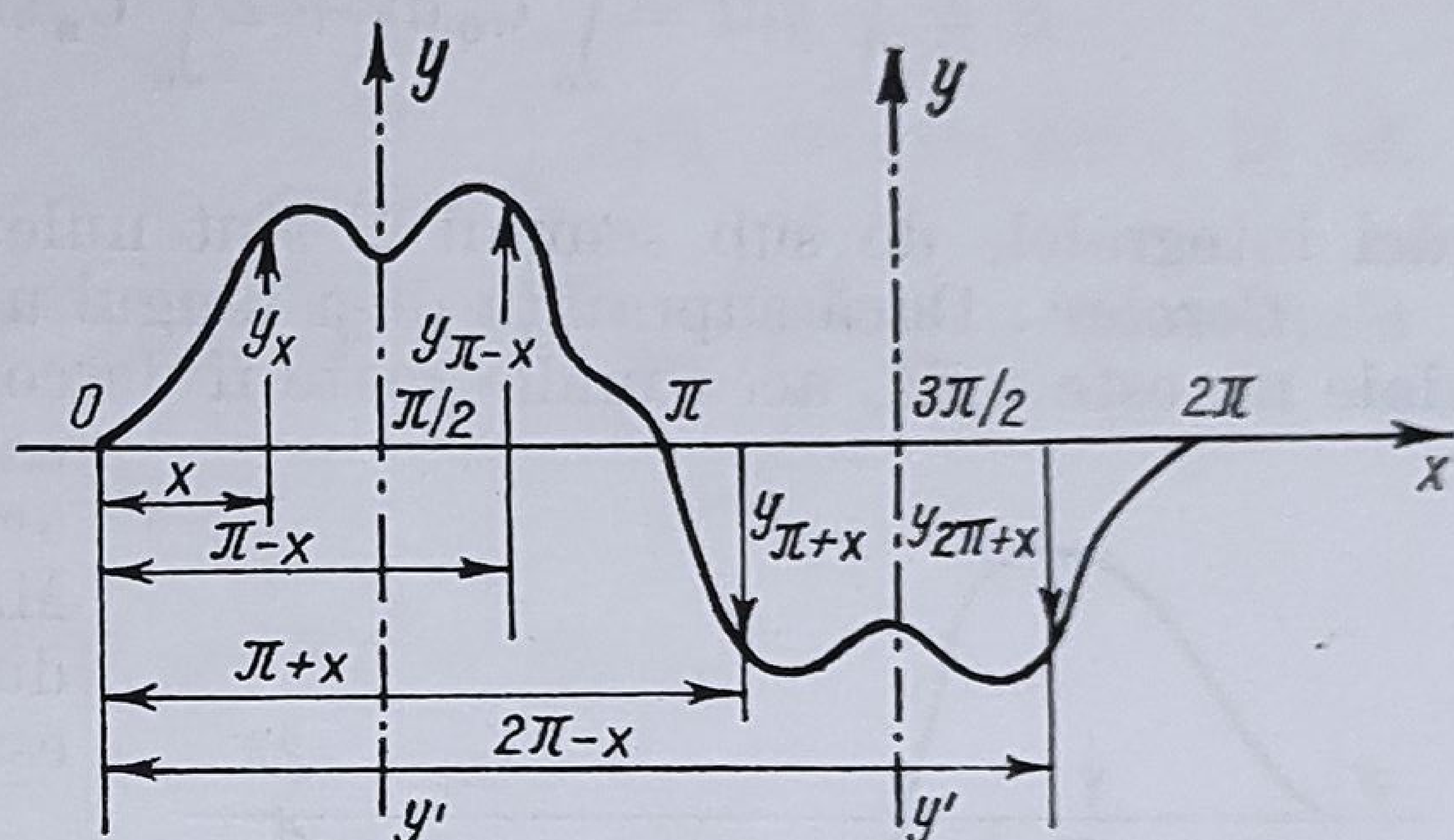


Fig. 9.13. Undă periodică nesinusoidală.

Corolar : Undele periodice nesinusoidale de perioadă 2π, care se bucură de una din proprietăţile (9.11) sau (9.12) sînt unde *bisimetrice* ; ele pot fi descompuse într-o serie de aromonici impare în *sinus* sau în *cosinus*, după cum este satisfăcută relaţia (9.11) sau (9.12).

e) Compunerea armonicilor oarecare pare. Fie

$$y = \Sigma C_{2n} \sin 2n (\omega t - \varphi_{2n}).$$

Este uşor de văzut că, pentru fiecare armonică există relaţia

$$f(\omega t) = f(\omega t + \pi),$$

ceea ce înseamnă că perioada fiecărei unde este π. Deci şi perioada undei rezultante va fi tot π.

Situaţia este ca şi cum ar fi de sumat pe o jumătate de perioadă o undă fundamentală desenată pe acest interval cu toate armonicile sale pare şi impare.

Tot ce s-a spus pentru cazurile precedente se aplică în cazul de faţă pentru armonicile sumate pe o jumătate de perioadă.

9.2.2.4. **Compunerea armonicilor oarecare cu un termen constant.** Fie de construit unda

$$y = C_0 + \Sigma C_n \sin n(\omega t - \varphi_n) \quad (9.13)$$

care este obținută prin adăugarea unui termen constant C_0 la o funcție periodică nesinusoidală oarecare. Rezultanta acestei unde va fi unda nesinusoidală reprezentată prin ecuația

$$\Sigma\, C_n \sin\ n\,(\omega t - \varphi_n),$$

căreia i s-a dat o translație verticală de lungime $\overline{OO_1} = C_0$ (fig. 9.14), ceea ce este tot una cu a deplasa axa absciselor în sens contrar cu aceeași lungime $\overline{OO_1} = C_0$.

Se observă că, în acest caz, suprafața închisă între undă și axa absciselor nu mai este nulă, ci este egală cu aceea a dreptunghiului TC_0. Într-adevăr,

$$S = \int_0^T y\mathrm{d}t = \int_0^T C_0\,\mathrm{d}t + \Sigma \int_0^T C_n \sin n(\omega t - \varphi_n)\mathrm{d}t = C_0\,T$$

căci integralele de sub semnul Σ sînt nule.

Corolar : Dacă suprafața de-a lungul unei perioade a unei unde nesinusoidale nu este nulă, acea undă poate fi descompusă într-o sumă de termeni din care unul este constant, ceilalți fiind armonici oarecare, pare sau impare. Mărimea termenului constant se deduce din calculul ariei suprafeței și este egală cu valoarea medie a curbei

$$C_0 = \frac{A}{T},$$

în care A reprezintă aria suprafeței închisă de undă și axa absciselor.

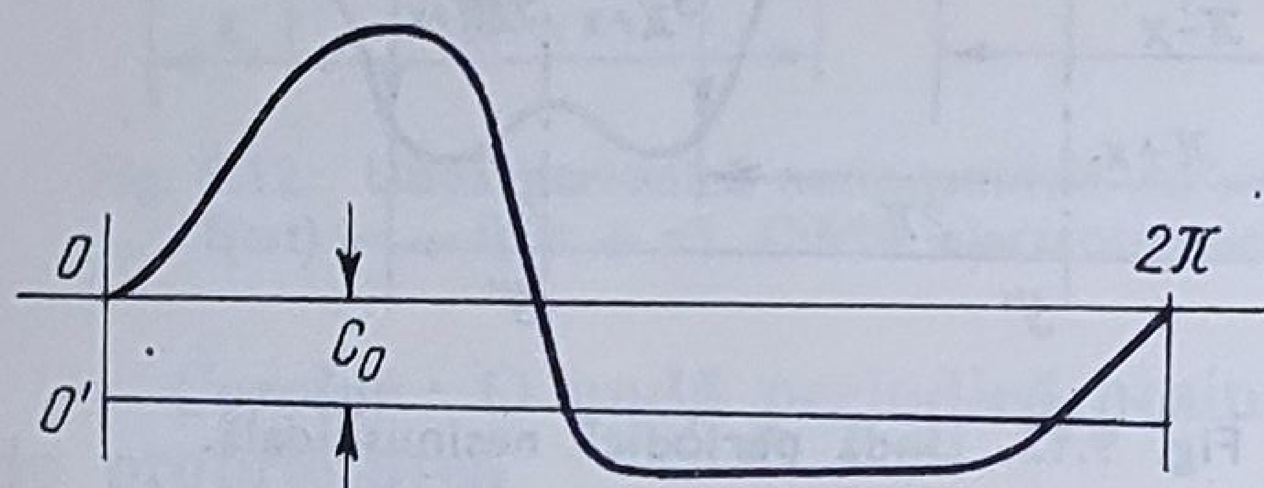


Fig. 9.14. Undă periodică nesinusoidală generală.

Expresia (9.13) reprezintă expresia cea mai generală a unei unde periodice nesinusoidale.

9.2.2.5. **Interferența armonicilor**. Un caz particular de compunere a armonicilor îl constituie compunerea a două armonici impare sau pare de ordin succesiv. Prin compunerea acestui fel de armonici se produce fenomenul denumit *bătaie* : amplitudinea undei rezultante a acestor armonici este o funcție periodică de timp, avînd frecvența egală cu aceea a undei fundamentale.

Fie unda nesinusoidală

$$y = Y_1 \sin \omega t + Y_{2n+1} \sin\,[(2n+1)\omega t + \alpha] + Y_{2n+3} \sin\,[(2n+3)\,\omega t + \beta]$$

și, pentru simplificarea expunerii, se presupune că

$$Y_{2n+1} = Y_{2n+3} = Y.$$

Rezultanta celor două armonici este

$$y_n = Y\{\sin\,[(2n+1)\omega t + \alpha] + \sin\,[(2n+3)\omega t + \beta]\} =$$

$$= 2Y \cos\left(\omega t - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) \times \sin\left[2(n+1)\,\omega t + \frac{\alpha-\beta}{2}\right]. \qquad (9.14)$$

Se vede uşor că amplitudinea acestei unde este o funcţie periodică de timp, avînd aceeaşi frecvenţă ca şi unda fundamentală; ordinul armonicii rezultante este egal cu media aritmetică a ordinelor armonicilor componente. Maximul amplitudinii armonicii rezultante este $2Y$ şi are loc la timpul

$$t = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

cînd se produc *bătăile de interferenţă.*

Două cazuri particulare interesante pot apărea în raport cu valorile unghiurilor α şi β:

a) Pentru $\alpha = 0°$ şi $\beta = 180°$ se obţine

$$y'_n = 2Y \cos(\omega t + 90°) \times \sin[2(n+1)\ \omega t + 90°] = 2Y \sin\ \omega t \times \cos 2(n+1)\ \omega t.$$

În acest caz bătaia are loc în acelaşi timp cu maximul undei fundamentale (fig. 9.15, *a*).

b) Pentru $\alpha = \beta = 0°$ se obţine

$$y''_n = 2Y \cos \omega t \times \sin\ 2(n+1)\,\omega t$$

şi bătaia are loc, în acest caz, pentru $t = 0$ sau $t = \frac{\pi}{\omega}$, adică atunci cînd armonica fundamentală trece prin zero (fig. 9.15, *b*).

În cazul general, cînd amplitudinile celor două unde care interferează nu sînt egale, interferenţa se produce între întreaga undă cu amplitudinea mică şi o parte din unda cu amplitudinea mare, în modul arătat mai sus, rămînînd astfel o armonică reziduală cu amplitudine constantă.

Astfel, pentru exemplificare, undele

$$y_{17} = Y_{17} \sin\ 17\ \omega t \text{ şi } y_{19} = Y_{19}\ \sin\ 19\ \omega t$$

în care

$$Y_{17} > Y_{19}$$

vor da unda rezultantă

$$Y = (Y_{17} - Y_{19}) \sin 17\omega t + 2Y_{19} \cos \omega t \times \sin 18\,\omega t,$$

interferenţa fiind în acest caz nesinusoidală.

Un alt caz interesant de interferenţă este atunci cînd ordinul armonicilor diferă cu patru. În acest caz, armonica rezultantă este de aceeaşi paritate cu armonicile com-

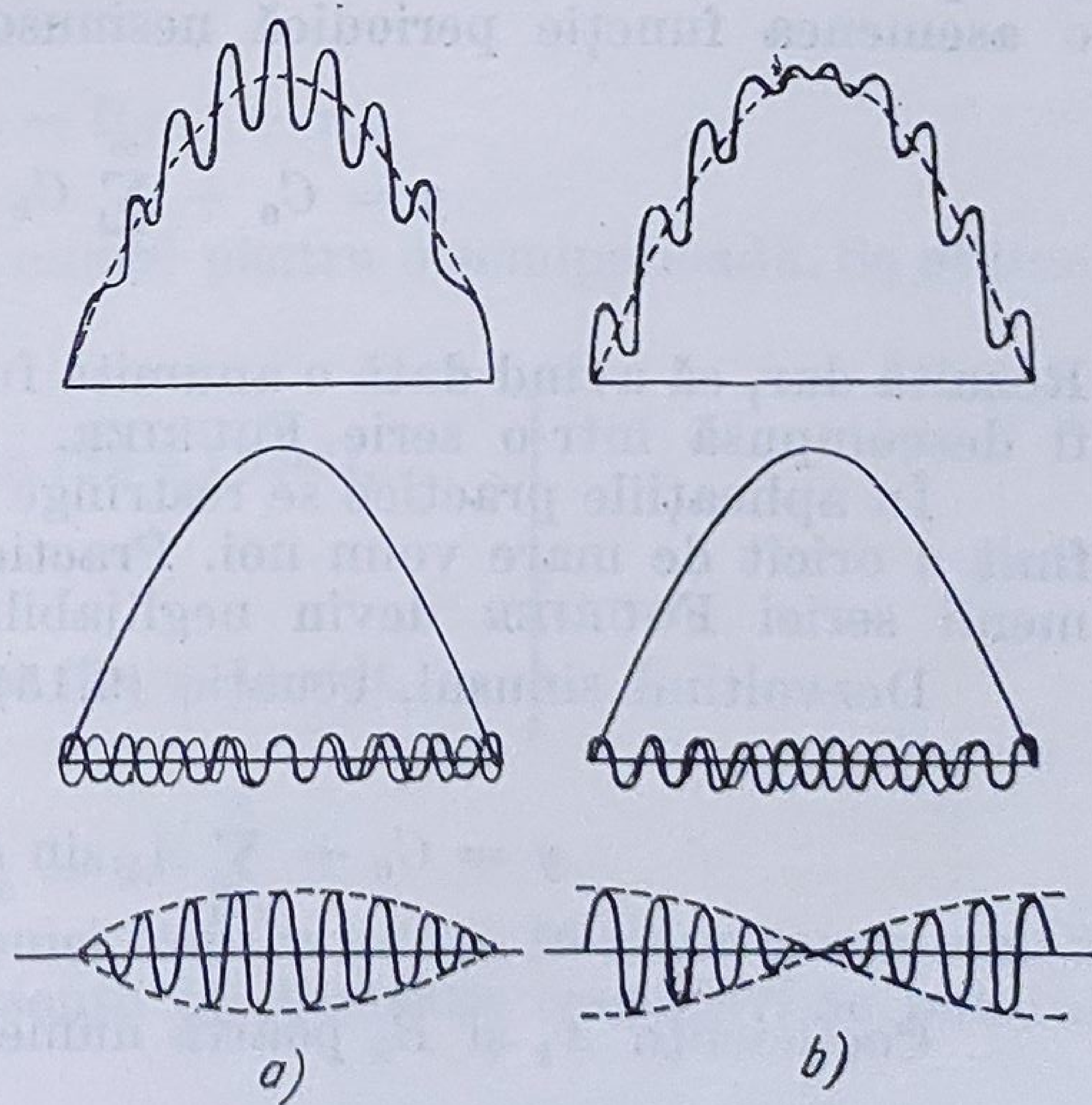


Fig. 9.15. Interferenţa armonicilor.

ponente iar amplitudinea sa este o funcţie periodică de timp de frecvenţă dublă aceleia a armonicii fundamentale.

Fie, pentru ilustrare, armonicile de ordinul n şi $n+4$, avînd, pentru simplificare, aceeaşi amplitudine. Se obţine

$$Y_n \sin n\omega t + Y_n \sin (n+4)\omega t = 2Y_n \cos 2\omega t \sin (n+2)\omega t$$

de unde rezultă cele arătate mai sus.

Undele rezultante, date de relaţia (9.14), se numesc şi *unde modulate*.

Fenomenul de modulaţie este folosit foarte mult în tehnica frecvenţelor înalte, în special în transmisiunea sunetelor.

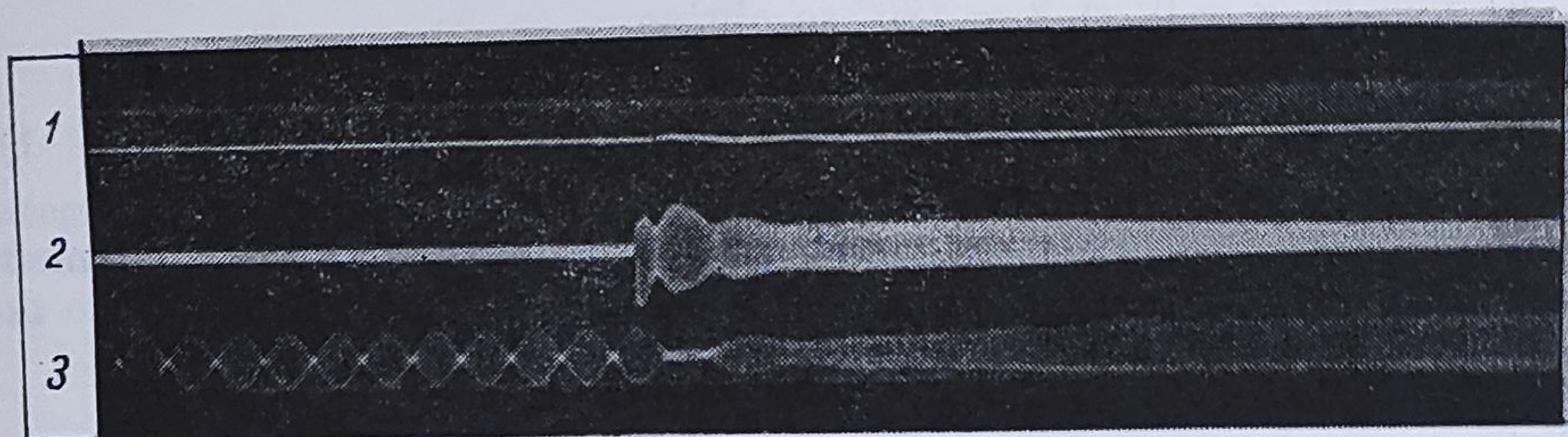


Fig. 9.16. Apariţia bătăilor la sincronizarea alternatoarelor.

Fenomenul bătăilor apare la punerea în paralel a alternatoarelor sincorne, în perioada de sincronizare, în special în cazul cînd această operaţie se face prin metoda autosincronizării* (fig. 9.16).

9.2.3. ANALIZA ARMONICĂ A UNDELOR PERIODICE NESINUSOIDALE CĂRORA LI SE POATE SCRIE ECUAŢIA ANALITICĂ

9.2.3.1. **Metoda integrării.** Undele periodice nesinusoidale fiind reprezentate prin funcţii periodice nesinusoidale, ecuaţia cea mai generală care exprimă o asemenea funcţie periodică nesinusoidală este

$$y = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin (k\omega t - \varphi_k). \tag{9.15}$$

Rezultă dar, că avînd dată o anumită funcţie periodică nesinusoidală, ea poate fi descompusă într-o serie FOURIER.

În aplicaţiile practice se restrînge numărul termenilor seriei la un număr finit n oricît de mare voim noi. Practic s-a constatat că pentru $n > 25$, termenii seriei FOURIER devin neglijabili.

Dezvoltînd sinusul, ecuaţia (9.15) se poate scrie:

$$y = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos k\omega t. \tag{9.16}$$

Coeficienţii A_k şi B_k poartă numele de *coeficienţii lui* FOURIER.

---

* Vezi [215]

Descompunerea în serie armonică a unei funcţii periodice nesinusoidale constă în a găsi valoarea coeficienţilor lui FOURIER.

Aceasta se poate obţine prin metoda cunoscută a cuadraturii* şi rezultă

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T}\int_0^T y \sin n\omega t dt, \\ B_n &= \frac{2}{T}\int_0^T y \cos n\omega t dt, \\ C_0 &= \frac{1}{2} B_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{9.17}$$

Dacă se ia $\omega\, t = x$, perioada acestei funcţii fiind 2π, coeficienţii lui FOURIER iau forma

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \sin nx dx, \\ B_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \cos nx dx, \\ C_0 &= \frac{B_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y dx. \end{aligned}\right\} \tag{9.18}$$

Calculul coeficienţilor lui FOURIER cu ajutorul relaţiilor (9.17) sau (9.18) nu se poate face, decît dacă se cunoaşte expresia analitică a undei.

Calculul expresiilor coeficienţilor lui FOURIER poate fi simplificat într-o oarecare măsură dacă undele periodice au o anumită simetrie.

Astfel, pentru undele formate din armonici impare — undele din electrotehnică — pentru care avem simetria,

$$f(\omega t) = -f(\omega\, t + \pi),$$

coeficienţii lui FOURIER se pot calcula numai pentru o semiperioadă. Se obţine :

$$\left.\begin{aligned} A_{2n+1} &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} y \sin (2n+1)\omega t dt, \\ B_{2n+1} &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} y \cos (2n+1)\omega t dt. \end{aligned}\right\} \tag{9.19}$$

Este evident că în acest caz $C_0 = 0$.

Pentru undele formate din armonici impare numai în sinus sau numai în cosinus — undele bisimetrice — coeficienţii lui FOURIER respectivi se pot cal-

---

* Vezi [10] pag. 198

cula efectuînd integrarea numai pe un sfert de perioadă. Se găsește astfel

$$A_{2n+1} = \frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} y\sin(2n+1)\omega t\, dt, \tag{9.20}$$

pentru curbele în sinus și

$$B_{2n+1} = \frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} y\cos(2n+1)\omega t dt, \tag{9.21}$$

pentru curbele în cosinus.

OBSERVAȚII: 1. Dacă din expresiile (9.17) se calculează coeficientul B_n al termenului de ordinul 0, se găsește

$$B_0 = \frac{2}{T}\int_0^T y dt,$$

și deci

$$C_0 = \frac{1}{2}B_0,$$

expresie adesea întîlnită pentru termenul constant.

2. Curba undei reprezentată prin funcția periodică nesinusoidală y poate fi

— fie formată, între 0 și T, de un singur arc de curbă;

Pentru calculul coeficienților lui FOURIER se aplică relațiile (9.17) sau (9.18) în expresia acestor coeficienți, efectuîndu-se cuadratura respectivă.

— fie formată, între 0 și T, de un număr oarecare de arce de curbă diferite.

Pentru calculul coeficienților lui FOURIER integrarea trebuie făcută pentru intervalele corespunzătoare fiecărei funcții componente în parte, conform regulilor cunoscute.

Astfel, de exemplu, pentru calculul lui A_n se obține

$$A_n = \frac{2}{T}\left[\int_0^{t_1} f_1(\omega t)\sin n\,\omega t\,dt + \ldots + \int_{t_n}^{T} f_n(\omega t)\sin n\,\omega t\,dt\right].$$

În ceea ce privește funcțiile componente $f_k(\omega t)$, ecuația lor trebuie să fie raportată la aceeași origine O ca și întreaga funcție $f(\omega t)$.

Pentru ilustrarea metodei, fie de calculat coeficienții seriei FOURIER corespunzători curbei numită „dinți de ferăstrău" (fig. 9.17) și reprezentată printr-un segment de dreaptă AB între 0 și 2π, de ecuație:

$$y = -\frac{25}{\pi}x + 100.$$

Aplicînd relațiile (9.18) se găsește:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{25}{\pi}x + 100\right)\sin nx\, dx = \frac{50}{\pi n},$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{25}{\pi}x + 100\right)\cos nx\, dx = 0,$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{25}{\pi}x + 100\right) dx = 75.$$

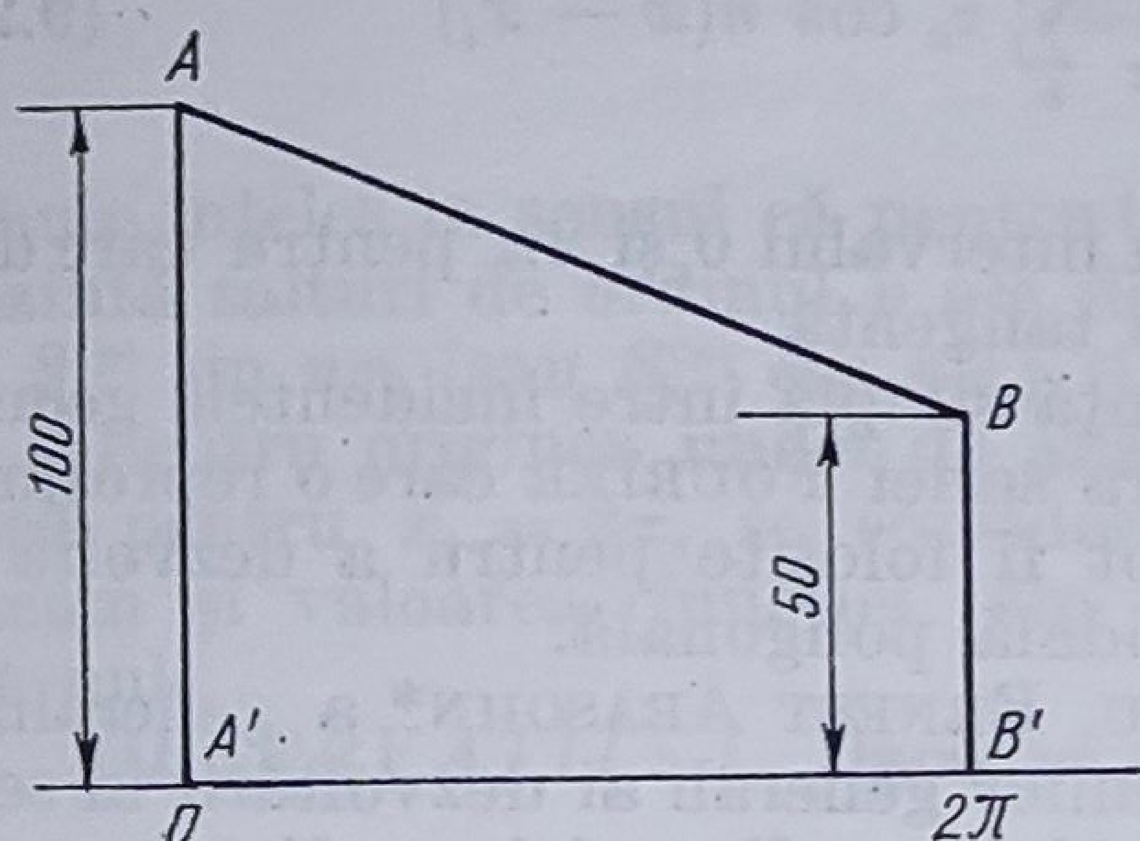


Fig. 9.17. Curba „dinți de ferăstrău".

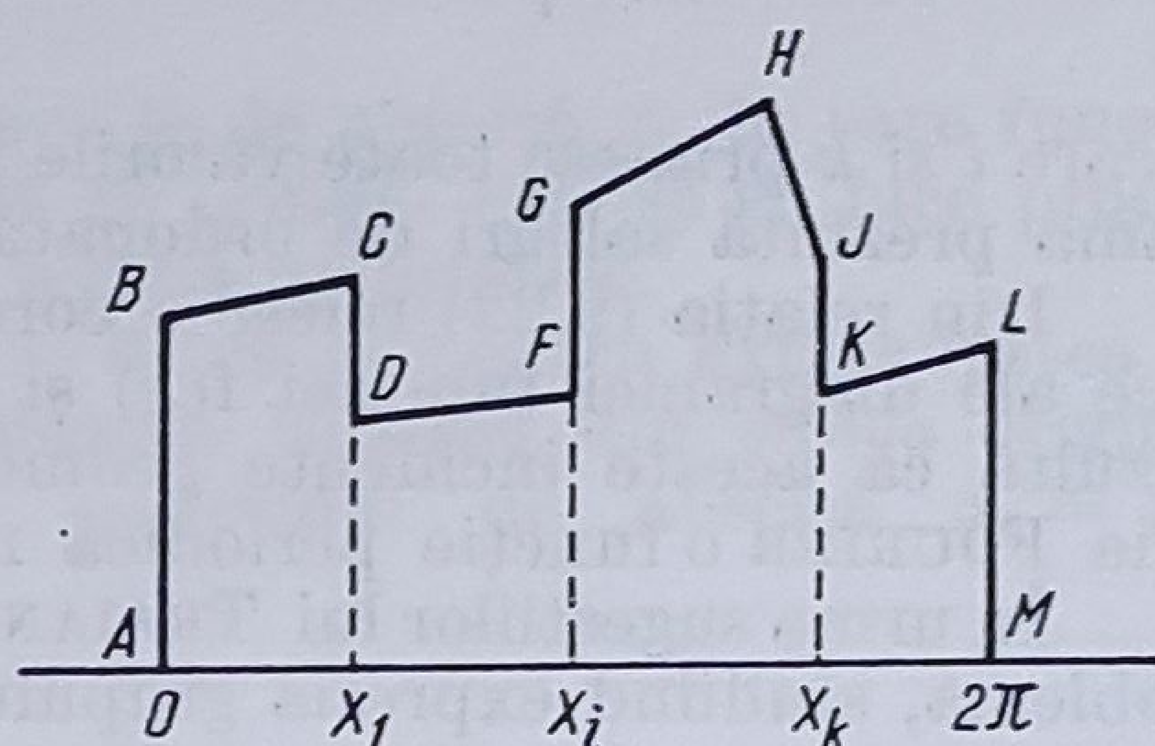


Fig. 9.18. Undă periodică nesinusoidală poligonală.

Dezvoltarea în serie armonică a acestei funcții este deci

$$y = 75 + \frac{50}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots\right]$$

9.2.3.2. **Metoda discontinuităților sau a incidentelor geometrice.** Metoda discontinuităților geometrice a fost enunțată pentru prima oară de *profesorul* TRAIAN LALESCU* în cursul de „Serii trigonometrice" pe care îl preda în 1919 la Universitatea din București**. LALESCU a stabilit metoda pentru funcțiile periodice poligonale, înțelegînd prin asemenea funcții o undă care, între 0 și 2π, are ca diagramă o linie poligonală $OABCDEFGHJKLM$ (fig. 9.18).

Această funcție este determinată prin *salturile verticale* sau prin *salturi de ordonată*.

$$\sigma_0 = +\overline{AB};\ \sigma_1 = -\overline{CD}; \ldots;\ \sigma_i = +\overline{FG};$$

$$\sigma_k = -\overline{JK}; \ldots; \qquad \sigma_{2\pi} = -\overline{LM}$$

și prin *salturile unghiulare* sau *salturile de tangentă*

$$\tau_0 = k_0 - 0 = +k_0;\ \tau_1 = k_1 - k_0; \ldots; \ldots$$

---

* Dr. TRAIAN LALESCU (1882–1929) a fost profesor de matematici la Universitatea din București și la politehnicile din Timișoara și București.

** Vezi și [163]

în care $k_0, k_1, \ldots, k_n, \ldots$ sînt coeficienţii unghiulari ai dreptelor $\overline{AB}, \overline{CD}, \ldots$ Aceste elemente constituie *incidentele geometrice* ale diagramei. Atît salturile de ordonată cît şi salturile de tangentă se obţin făcînd diferenţa dintre valoarea corespunzătoare *la dreapta* punctului considerat şi aceea corespunzătoare *la stînga* aceluiaşi punct. Dezvoltînd în serie FOURIER o asemenea funcţie, care este de fapt o serie de funcţii periodice nesinusoidale poligonale elementare, se obţine pentru grupul termenilor generali în sinus şi cosinus

$$A_n \sin nx + B_n \cos nx$$

o expresie de forma

$$\frac{1}{n\pi} \sum_i \sigma_i \sin n(x - x_i) + \frac{1}{n^2\pi} \sum_k \tau_k \cos n(x - x_i) \qquad (9.22)$$

în care i şi k primesc toate valorile lui x din intervalul 0 şi 2π pentru care diagrama prezintă salturi de ordonată sau de tangentă.

Din relaţia (9.22) reiese o corespondenţă simplă între incidentele geometrice ale diagramei funcţiei $f(x)$ şi structura seriei FOURIER care o reprezintă. Rezultă că aceste incidente geometrice pot fi folosite pentru a dezvolta în serie FOURIER o funcţie periodică nesinusoidală poligonală.

În urma sugestiilor lui TRAIAN LALESCU, ERNEST ABASOHN* a generalizat problema, studiind expresia grupului termenilor generali ai dezvoltării în serie FOURIER pentru funcţii periodice nesinusoidale polinomiale, adică pentru funcţii avînd diagrama formată din arce de parabolă de un ordin oarecare m, cu ecuaţii de forma

$$y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m ;$$

ERNEST ABASOHN dă formulele generale pentru termenii seriei FOURIER.

Pentru a aplica formulele generale, în cazul funcţiilor periodice polinomiale, în afară de *saltul de ordonată* sau *saltul de ordinul 0* şi *saltul de tangentă* sau *saltul de ordinul 1*, se mai defineşte şi *saltul de pantă de ordinul p*, care este diferenţa derivatelor de ordinul p ale funcţiei *la dreapta* şi la *stînga* punctului considerat, adică

$$S^{(p)} = F^{(p)}(x_i) - f^{(p)}(x)_i ,$$

în care $F(x_i)$ este valoarea funcţiei la dreapta punctului considerat şi $f(x_i)$ aceea la stînga acestuia.

Cu aceste elemente termenii generali ai descompunerii în serie Fourier ai unei funcţii periodice nesinusoidale sînt

$$\pi A_n = + \frac{1}{n} \Sigma S_i^{(0)} \cos nx_i - \frac{1}{n^2} \Sigma S_i^{(1)} \sin nx_i -$$

$$- \frac{1}{n^3} \Sigma S_i^{(2)} \cos nx_i + \frac{1}{n^4} \Sigma S_i^{(3)} \sin nx_i + \frac{1}{n^5} \Sigma S_i^{(4)} \cos nx_i - \ldots \qquad (9.23)$$

---

* ERNEST ABASOHN (1897–1942) a fost profesor de matematici şi subdirector al politehnicii din Bucureşti.

$$\pi B_n = -\frac{1}{n}\Sigma S_i^{(0)} \sin nx_i - \frac{1}{n^2}\Sigma S_i^{(1)} \cos nx_i +$$

$$+\frac{1}{n^3}\Sigma S_i^{(2)} \sin nx_i + \frac{1}{n^4}\Sigma S_i^{(3)} \cos nx_i - \ldots \tag{9.24}$$

$$2\pi\, C_0 = \Sigma\left(-\frac{1}{1\,!}\,x_i\, S_i^{(0)} + \frac{1}{2\,!}\,x_i^2\, S_i^{(1)} - \frac{1}{3\,!}\,x_i^3\, S_i^{(2)} + \ldots\right) \tag{9.25}$$

în care termenul general

$$\Sigma\, S_i^{(p)} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\, nx_i$$

trebuie înțeles în sensul că pentru toate punctele de abscisă x_i în care funcția prezintă salturi de ordinul p ale derivatelor de ordinul (p), se va face produsul $S_i^{(p)} \sin nx_i$ (sau $S_i^{(p)} \cos nx_i$) și se vor aduna rezultatele.

Pentru originea undei de analizat $x_i = 0$, ca și pentru extremitatea ei, adică pentru $x_i = 2\pi$, se consideră că valoarea funcției din *stînga* originii, precum și valoarea funcției din *dreapta* punctului de abscisă $x_i = 2\pi$, sînt nule.

OBSERVAȚII: 1. Dacă se notează

$$-P_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\,S_i^{(0)} - \frac{1}{n^3}\,S_i^{(2)} + \frac{1}{n^5}\,S_i^{(4)} - \ldots$$

$$Q_n\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^2}\,S_i^{(1)} + \frac{1}{n^4}\,S_i^{(3)} - \frac{1}{n^6}\,S_i^{(5)} + \ldots$$

atunci dezvoltarea în serie FOURIER a unei funcții periodice nesinusoidale oarecare f(x) este dată de relația

$$\mathrm{f}(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_i\left[P_n\left(\frac{1}{n}\right)\sin nx_i + Q_n\left(\frac{1}{n}\right)\cos nx_i\right]\right\}\cos nx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_i\left[-P_n\left(\frac{1}{n}\right)\cos nx_i + Q_n\left(\frac{1}{n}\right)\sin nx_i\right]\right\}\sin nx.$$

2. Metoda discontinuităților sau a incidentelor geometrice prezintă oarecare avantaje asupra metodei integrării, în special atunci cînd unda de analizat este poligonală, ceea ce în general însă nu prea este cazul.

Dacă unda periodică nesinusoidală intră în cazul general, dificultatea formării termenilor armonicilor constă în imposibilitatea simțurilor noastre de a aprecia derivatele de ordin superior lui 2, deci și salturile lor.

Ori de cîte ori diagrama obținută experimental permite înscrierea unui contur poligonal, aplicarea metodei de mai sus este simplă; în cazul arcelor de parabolă de ordinul 2, problema se complică imediat deoarece, în afară de determinarea ordonatelor și a coeficienților unghiulari, va trebui să se determine și razele de curbură.

Pentru exemplificare, fie de descompus în serie armonică unda din figura 9.17. Se vor aplica relaţiile (9.23), (9.24) şi (9.25), care se vor limita numai la primii doi termeni, funcţia neavînd decît salturi de ordonate şi de tangente şi anume, numai în punctele de la extremităţile perioadei, adică de abscise $x = 0$ şi $x = 2\pi$. Pentru coeficientul A_n calculul se aranjează după cum urmează :

Salturi de ordonate $\quad S^{(0)} = F^{(0)}(x_i) - f^{(0)}(x_i)$

În punctul A' de abscisă $x = 0$ $\quad S_0^{(0)} = 100 - 0 = 100$

$$S_0^{(0)} \cos nx_0 = 100 \cos n.0 = 100$$

În punctul B' de abscisă $x = 2\pi$ $\quad S_{2\pi}^{(0)} = 0 - 50 = -50$

$$S_{2\pi}^{(0)} \cos nx_{2\pi} = -50 \cos n\ 2\pi = -50$$

$$\frac{1}{n} \Sigma S_i^{(0)} \cos nx_i = \frac{100-50}{n} = \frac{50}{n}$$

Salturi de tangentă $\quad S^{(1)} = F^{(1)}(x_i) - f^{(1)}(x_i).$

Se observă că aceste salturi se multiplică cu sin nx_i, care este nul pentru cele două extremităţi ale intervalului, astfel că aceste salturi nu dau valori în calculul coeficientului respectiv. Rezultă dar

$$A_n = \frac{50}{\pi n}.$$

Pentru coeficientul B_n se obţine zero pentru primul termen al relaţiei (9.24), deoarece sinusul este nul pentru cele două abscise ; al doilea termen este format din salturile de tangentă ; se găseşte :

În punctul A' de abscisă $x = 0$ $\quad S_0^{(1)} = \left(-\frac{AA''}{A''B}\right) - 0 = -\frac{50}{2\pi} = -\frac{25}{\pi}$

$$S_0^{(1)} \cos nx_0 = -\frac{25}{\pi} \cos n0 = -\frac{25}{\pi}$$

În punctul B' de abscisă $x = 2\pi$ $\quad S_{2\pi}^{(1)} = 0 - \left(-\frac{25}{\pi}\right) = \frac{25}{\pi}$

$$S_{2\pi}^{(1)} \cos nx_{2\pi} = \frac{25}{\pi} \cos n\,2\pi = \frac{25}{\pi}$$

$$\frac{1}{n^2} \Sigma S_i^{(1)} \cos nx_i = \frac{1}{n^2}\left(-\frac{25}{\pi} + \frac{25}{\pi}\right) = 0$$

şi deci $B_n = 0$.

Termenul constant C_0 se determină calculînd primii doi termeni ai relației (9.25). Contribuția punctului de abscisă $x_i = 0$ este nulă, astfel încît rămîne

$$2\pi C_0 = -2\pi S_{2\pi}^{(0)} + \frac{1}{2}(2\pi)^2 S_{2\pi}^{(1)}$$

Ținînd seama de valorile găsite mai sus, rezultă

$$2\pi C_0 = 50 \cdot 2\pi + \frac{1}{2}\frac{25}{\pi}4\pi^2 = 2\pi \cdot 75$$

și deci

$$C_0 = 75.$$

S-au obținut astfel aceleași valori ca și în cazul integrării.

9.2.3.3. **Formule generale pentru calculul simultan al coeficienților lui Fourier.** Pentru determinarea coeficienților lui Fourier ai seriei reprezentînd o undă periodică nesinusoidală se procedează calculîndu-se acești coeficienți pentru termenii în sinus și cosinus, utilizîndu-se relațiile (9.17) sau (9.18) și apoi, folosind relațiile (9.6), se calculează coeficientul termenului general și defazajul său.

Prof. Alexandru Th. Popescu* a dat o relație cu ajutorul căreia se calculează simultan acești doi parametri.

Fie unda periodică nesinusoidală oarecare $f(x)$ care urmează a fi descompusă într-o serie armonică. Coeficienții lui Fourier sînt dați de relațiile (9.18)

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx \quad \text{și} \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx\,;$$

acești coeficienți, fiind valorile unor integrale definite, sînt niște factori numerici care se exprimă numai în funcție de n și de π. Valoarea lor nu se schimbă dacă variabila independentă x este înlocuită cu un alt simbol γ, σ, z, . . etc. Se va putea scrie deci

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\gamma)\sin n\gamma\, d\gamma$$
$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\gamma)\cos n\gamma\, d\gamma \tag{9.26}$$

cu condiția ca $f(\gamma)$ să fie exact aceeași funcție în γ ca și $f(x)$ funcția în x.

Expresia armonicii de ordinul n este

$$C_n \sin(nx - \varphi_n) = A_n \sin nx + B_n \cos nx =$$
$$= \frac{1}{\pi} \sin nx \int_0^{2\pi} f(\gamma)\sin n\gamma\, d\gamma + \frac{1}{\pi}\cos nx \int_0^{2\pi} f(\gamma)\cos n\gamma\, d\gamma.$$

---

* Profesor emerit Alex. Th. Popescu a fost șeful Catedrei de aparate și măsuri electrice la Institutul politehnic din București.

În această expresie factorii $\sin nx$ și $\cos nx$ sînt independenți de variabila γ, în raport cu care se efectuează cele două integrale; ei pot fi trecuți sub semnul integralei. Efectuînd această trecere, dînd factor comun pe $f(\gamma)d\gamma$ și restrîngînd suma produselor de funcții trigonometrice ce rezultă, se obține:

$$C_n \sin(nx - \varphi_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\gamma)\cos n(x-\gamma)d\gamma. \quad (9.27)$$

În cazul metodei discontinuităților, formula generală se obține introducînd în expresia armonicii de ordinul n

$$C_n \sin(nx - \varphi_n) = A_n \sin nx + B_n \cos nx$$

valorile coeficienților A_n și B_n sînt date de relațiile (9.23) și (9.24). Observînd, ca și în cazul precedent, că factorii constanți care multiplică sumele $\Sigma S_i^{(p)} \sin nx_i$ și $\Sigma S_i^{(p)} \cos nx_i$ pot fi introduși sub semnul sumă, se obține relația

$$\pi C_n \sin(nx - \varphi_n) = \frac{1}{n}\Sigma S_i^{(0)} \sin n(x - x_i) - \frac{1}{n^2}\Sigma S_i^{(1)} \cos n(x - x_i) -$$

$$- \frac{1}{n^3}\Sigma S_i^{(2)} \sin n(x - x_i) + \frac{1}{n^4}\Sigma S_i^{(3)} \cos n(x - x_i) + \frac{1}{n^5}\Sigma S_i^{(4)} \sin n(x - x_i) - \ldots \quad (9.28)$$

care este analoagă cu relațiile (9.23) și (9.24) care dau coeficienții A_n și B_n.

Exemplu de aplicație: Pentru exemplificare se vor aplica formulele generale (9.27) și (9.28) undei din figura 9.17.

Prin metoda integrării: Se introduce în relația (9.27)

$$f(\gamma) = -\frac{25}{\pi}\gamma + 100$$

care este ecuația undei date, în care s-a luat γ ca variabilă independentă. Se găsește:

$$C_n \sin(nx - \varphi_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{25}{\pi}\gamma + 100\right)\cos n(x-\gamma)\,d\gamma = \frac{50}{\pi n}\sin nx$$

integrarea făcîndu-se prin părți.

Prin metoda discontinuităților: Din relația (9.28) se rețin numai primii doi termeni, funcția dată neavînd derivate de ordin superior.

Salturile de ordonată au fost găsite, la $x = 0$, $S_0^{(0)} = 100$ și la $x = 2\pi$, $S_{2\pi}^{(0)} = -50$; rezultă

$$\frac{1}{n}\Sigma S_i^{(0)} \sin n(x - x_i) = \frac{1}{n}[100 \sin nx - 50 \sin(nx - 2\pi)] = \frac{50}{n}\sin nx.$$

Salturile de pantă au fost găsite, la $x = 0$, $S_0^{(1)} = -\frac{25}{\pi}$ şi la $x = 2\pi$, $S_{2\pi}^{(1)} = \frac{25}{\pi}$; rezultă

$$\frac{1}{n^2} \Sigma S_i^{(1)} \cos\ n(x - x_i) = \frac{1}{n^2} \left[-\frac{25}{\pi} \cos\ nx + \frac{25}{\pi} \cos\ (nx - 2\pi) \right] = 0$$

şi deci

$$C_n \sin\ (nx - \varphi_n) = \frac{50}{n\pi} \sin\ nx.$$

9.2.4. ANALIZA ARMONICĂ A UNDELOR PERIODICE NESINUSOIDALE EXPERIMENTALE

9.2.4.1. **Generalităţi.** În studiul fenomenelor electrice, curbele periodice care se obţin cu ajutorul aparatelor înregistratoare (oscilografe, reografe etc.) şi care reprezintă unde periodice nesinusoidale, sînt curbe periodice oarecare, a căror ecuaţie analitică nu se cunoaşte.

De asemenea, este practic imposibil ca în aceste curbe să se poată înscrie un contur poligonal oarecare, numărul de laturi corespunzător trebuind să fie foarte mare. În consecinţă, metodele de analiză armonică indicate în paragrafele precedente nu se mai pot aplica.

Există numeroase metode pentru determinarea armonicilor unei unde periodice nesinusoidale experimentale, aproape toate aceste metode bazîndu-se pe calculul coeficienţilor lui FOURIER.

Fie o undă periodică nesinusoidală, reprezentată printr-o curbă periodică nesinusoidală, obţinută pe o cale experimentală (fig. 9.19). Descompunerea în serie FOURIER a acestei curbe necesită calculul coeficienţilor lui FOURIER daţi de relaţiile (9.18). Pentru a-i putea calcula este necesar a transforma expresiile lor în sume finite; aceasta înseamnă a înlocui aria închisă de curba respectivă şi axa absciselor printr-o sumă de arii de dreptunghiuri elementare înscrise în această arie.

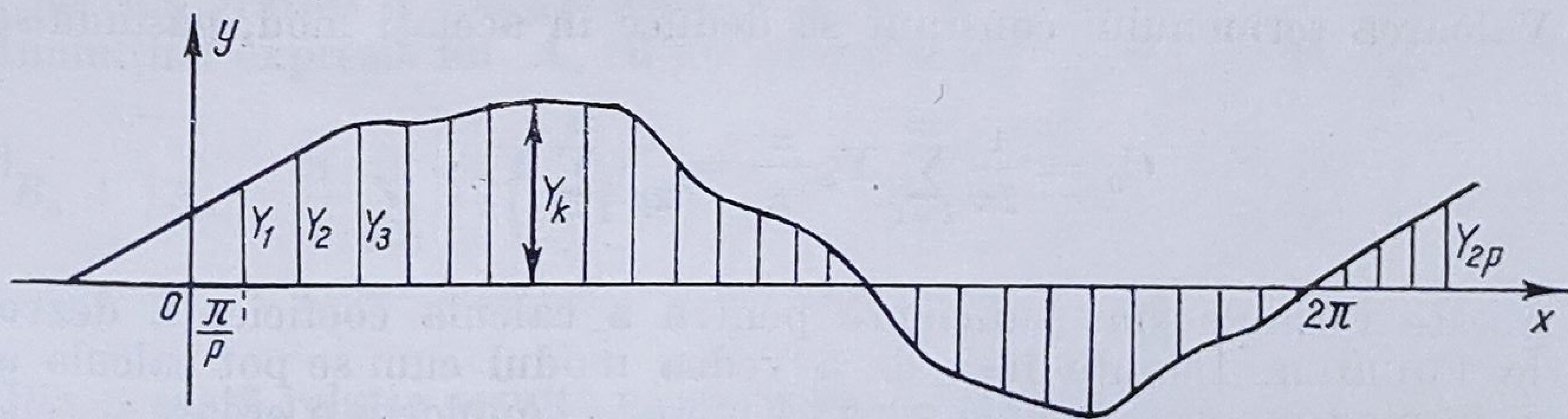


Fig. 9.19. Curbă periodică nesinusoidală

Pentru aceasta se împarte perioada într-un număr *par* de părţi egale $2p$*. Fiecare din aceste diviziuni este deci egală cu

$$\alpha = \frac{2\pi}{2p} = \frac{\pi}{p}.$$

---

* Împărţirea perioadei se poate face într-un număr oarecare de părţi egale, par sau impar. Alegerea unui număr par prezintă oarecare avantaje în sistematizarea şi simplificarea calculelor.

Se duc ordonatele la curba corespunzătoare acestor diviziuni şi se numerotează, atribuindu-se primei ordonate cifra 0; ultima ordonată va avea indicele $2p$. Este evident că

$$Y_0 = Y_{2p}.$$

Elementului diferenţial din integrală îi va corespunde baza dreptunghiurilor elementare în care a fost descompusă curba, adică tocmai mărimea α a diviziunilor efectuate. Rezultă deci că

$$dx \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{p}.$$

Elementului $y\,dx$ din integrală îi corespunde aria dreptunghiului elementar de ordonată Y_k şi baza

$$y\;dx \rightarrow Y_k \frac{\pi}{p};$$

abscisa corespunzătoare ordonatei Y_k fiind

$$x_k = k\frac{\pi}{p}$$

integrala care dă coeficientul lui FOURIER se transformă în o serie de $2p$ termeni de forma

$$Y_k \frac{\pi}{p} \sin nk\frac{\pi}{p}, \text{ respectiv } Y_k \frac{\pi}{p} \cos nk\frac{\pi}{p},$$

astfel, încît coeficienţii lui FOURIER vor fi daţi de relaţiile

$$A_n = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{2p} Y_k \sin nk\frac{\pi}{p} \text{ şi } B_n = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{2p} Y_k \cos nk\frac{\pi}{p} \qquad (9.29)$$

Valoarea termenului constant se deduce în acelaşi mod, găsindu-se

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{2\pi} Y_k \frac{\pi}{p} = \frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{2p} Y_k. \qquad (9.30)$$

Aceste formule sînt suficiente pentru a calcula coeficienţii dezvoltării în serie FOURIER. Înainte însă de a vedea modul cum se pot calcula aceste expresii în mod practic, trebuie spus că metoda comportă o eroare sistematică datorită faptului că se calculează numai un număr finit de armonici şi anume numai *armonicile de ordin 1 pînă la p*, adică

$$A_1, A_2, \ldots, A_p$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_p.$$

Într-adevăr, metoda fiind bazată pe transformarea integralelor (9.18) care dau coeficienţii seriei FOURIER în sume finite, comportă de la început, o

eroare, datorită acestei aproximații. De asemenea, prin faptul că în calculul coeficienților prin această metodă nu s-a ținut seama decît de cele $2p$ ordonate, s-a comis o nouă eroare prin neglijarea celorlalte puncte ale curbei : este ca și cum curba n-ar conține decît punctele corespunzătoare acestor ordonate. De aici, rezultă că toate undele periodice nesinusoidale reprezentate prin curbe care trec prin aceste puncte vor avea aceeași descompunere în armonici. În aceste condiții, unda

$$y = \frac{B_0}{2} + \sum_{k=1}^{p} (A_k \sin kx + B_k \cos kx)$$

care s-a obținut prin descompunerea undei date cu ajutorul acestei metode nu va reprezenta în general unda reală

$$y = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

în care a_k și b_k sînt coeficienții lui FOURIER.

Metoda comportă deci o eroare sistematică, care se calculează exprimîndu-se valoarea coeficienților determinați cu relația (9.29) în funcție de coeficienții reali ai seriei FOURIER*.

Calculul coeficienților dezvoltării în serie a unei curbe reprezentative a undei nesinusoidale respective, obținută pe cale experimentală, utilizînd relațiile (9.29) și (9.30) este destul de laborios. Pentru simplificarea calculului s-au preconizat numeroase metode analitice sau grafice. Dintre primele cităm metoda ordonatelor echidistante a lui THOMPSON-RUNGE**, care conduce la o mecanizare destul de interesantă.

Metodele grafice și în special calculatoarele electronice dau însă tehnicianului metode mult mai expeditive pentru obținerea analizei armonice, a unei unde nesinusoidale. De aceea, îndrumăm cititorul care dorește să cunoască și să aplice metodele analitice la literatura de specialitate, — în cele ce urmează se va indica numai o metodă grafică și două metode experimentale simple.

9.2.4.2. **Metoda grafică ROTH.** Metoda grafică ROTH dă posibilitatea calculării pe cale grafică a coeficienților dați de relațiile (9.29) și (9.30).

Înmulțind expresia lui A_n cu j și adunînd-o cu expresia lui B_n, se obține

$$\underline{C}_n = B_n + \mathrm{j}A_n = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{2p} Y_k\left(\cos nk\frac{\pi}{p} + \mathrm{j}\cos nk\frac{\pi}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{2p} Y_k \underline{\big|n\cdot k\frac{\pi}{p}} . \tag{9.31}$$

Din această relație rezultă că se poate determina armonica de ordinul n, dacă se face suma geometrică a diverselor ordonate, luate fiecare cu argumentul $nk\frac{\pi}{p}$ față de originea de fază și împărțind rezultanta prin p ($2p$ fiind numărul de părți în care s-a divizat perioada).

Procedeul este următorul : se împarte perioada într-un număr $2p$ părți egale ; prin fiecare diviziune se duc verticale determinîndu-se ordonatele res-

* Vezi [229]
** Vezi [10] pag. 216

pective Y_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, 2p-1$). Se duc apoi $2p$ raze făcînd între ele unghiuri egale cu $\alpha = \frac{\pi}{p}$, pe fiecare din aceste raze așezîndu-se ordonatele corespunzătoare Y_k (fig. 9.20); dacă una din aceste ordonate are o valoare negativă, ea se așază pe prelungirea în sens invers a razei respective așa cum se procedează la construcția polară a unei funcții periodice oarecare*. Pentru a găsi amplitudinea armonicii de ordinul n, se construiește un poligon funicular format din diversele ordonate așezate pe raze, făcînd între ele unghiuri egale cu $k \frac{\pi}{p}$,

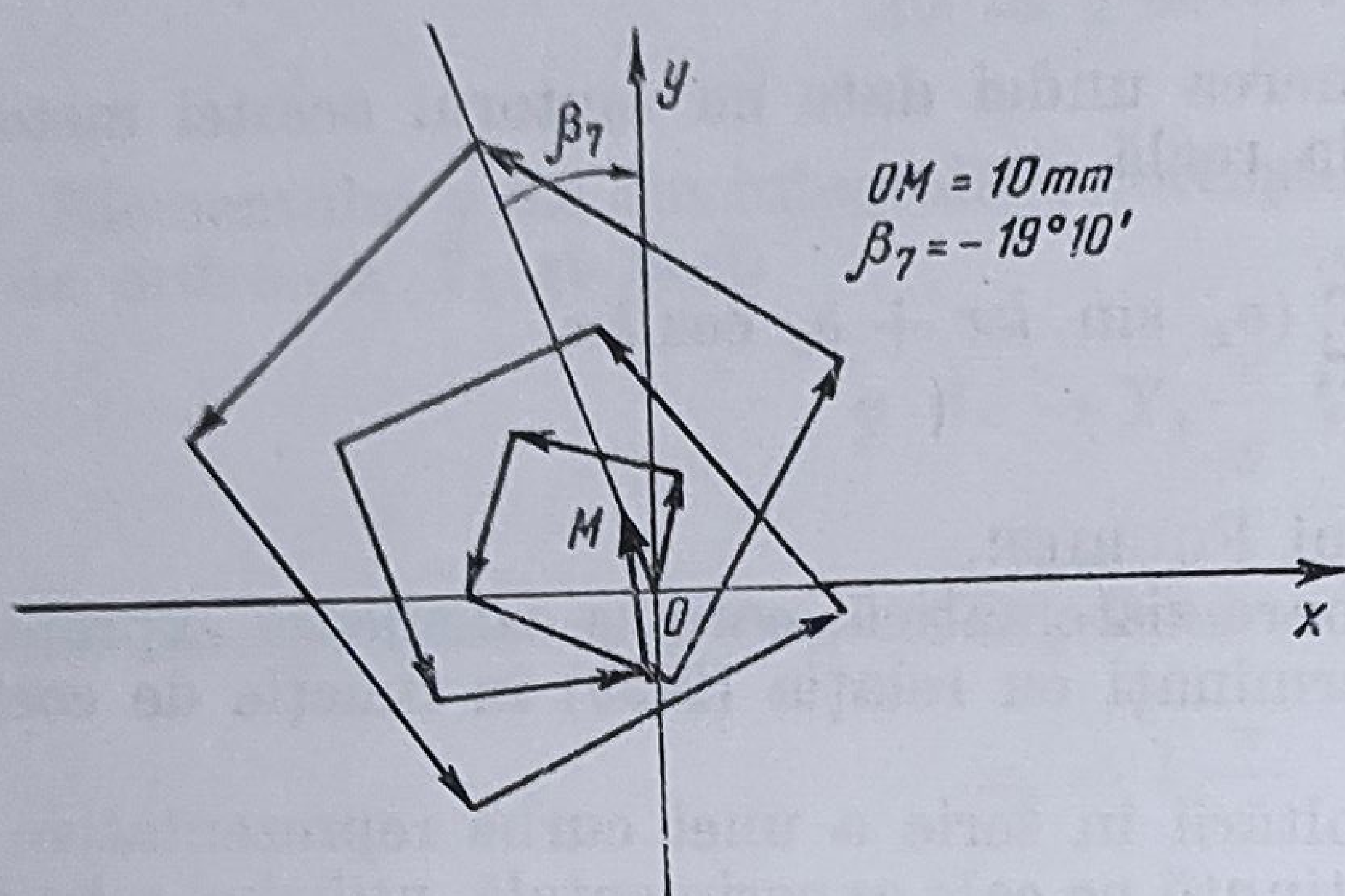


Fig. 9.20. Calculul coeficienților armonicilor prin metoda grafică ROTH (armonica de ordinul 7).

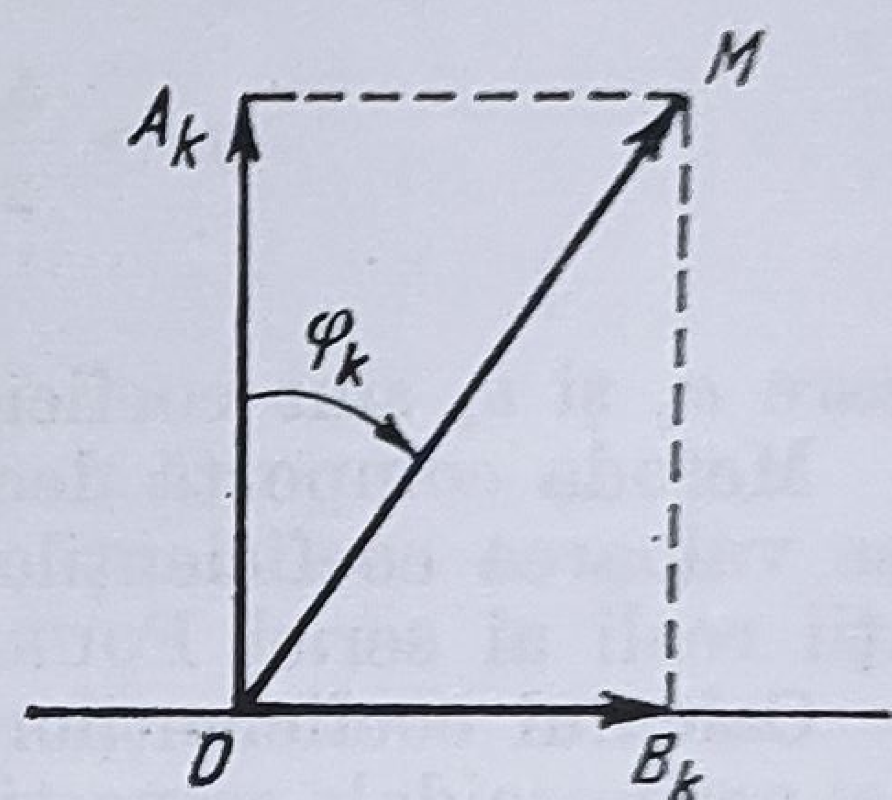


Fig. 9.21. Determinarea unghiului de fază al armonicii.

începînd de la raza orizontală, care se ia ca origine de fază și pe care este așezată ordonata Y_0; astfel ordonatele $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2p-1}$ se așază pe razele făcînd unghiurile $n\frac{\pi}{p}$, $2\,n\frac{\pi}{p}, \ldots, (2p-1)n\frac{\pi}{p}$. Suma geometrică a acestor vectori, împărțită cu p, dă — la scara corespunzătoare — amplitudinea armonicii de ordinul n căutată.

Defazajul corespunzător acestei armonici, unghiul φ_n, este egal cu unghiul pe care îl face rezultanta obținută cu o axă dusă prin origine și perpendiculară pe originea de fază. Într-adevăr, se poate considera armonica respectivă reprezentată într-un sistem de referință care se rotește cu viteza $k\omega$ și atunci raza vectoare va descrie un cerc avînd diametrul principal egal cu valoarea amplitudinii maxime a acestei armonici și înclinat cu unghiul φ_k față de ordonată (vezi 9.2.1.3).

Aceasta se poate arăta și direct, fără a recurge la reprezentarea polară și cinematică a armonicii respective. Într-adevăr, o armonică este în fază atunci cînd îi lipsește termenul în cosinus, adică $B_k = 0$. În acest caz $\varphi_k = 0$. Relația (9.31), aplicată armonicii de ordinul k, dă

$$\operatorname{tg} \varphi'_k = \frac{A_k}{B_k}.$$

Pentru a avea îndeplinită condiția de mai sus (fig. 9.21) trebuie luat drept fază unghiul complementar. Rezultă

$$\operatorname{tg}(90° - \varphi_k) = \operatorname{ctg} \varphi_k = \frac{A_k}{B_k}$$

* Vezi 9.2.1.3.

de unde

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{B_k}{A_k}.$$

9.2.4.3. **Metode experimentale pentru determinarea armonicilor unei funcții periodice nesinusoidale.** În afară de metodele grafice, electricienii au căutat și metode experimentale cu ajutorul cărora să poată determina cît mai repede și, mai ales, cît mai precis diversele armonici ale unei funcții periodice nesinusoidale. În acest caz analiza armonică se face chiar în momentul studierii fenomenului.

Există o serie întreagă de asemenea metode; în cele ce urmează se vor examina pe scurt numai două din ele și anume:

a) Metoda prin rezonanță electrică.

b) Metoda cu electrodinamometrul.

S-au lăsat de o parte metodele folosind calculatoarele electronice, acestea ieșind din cadrul acestei lucrări.

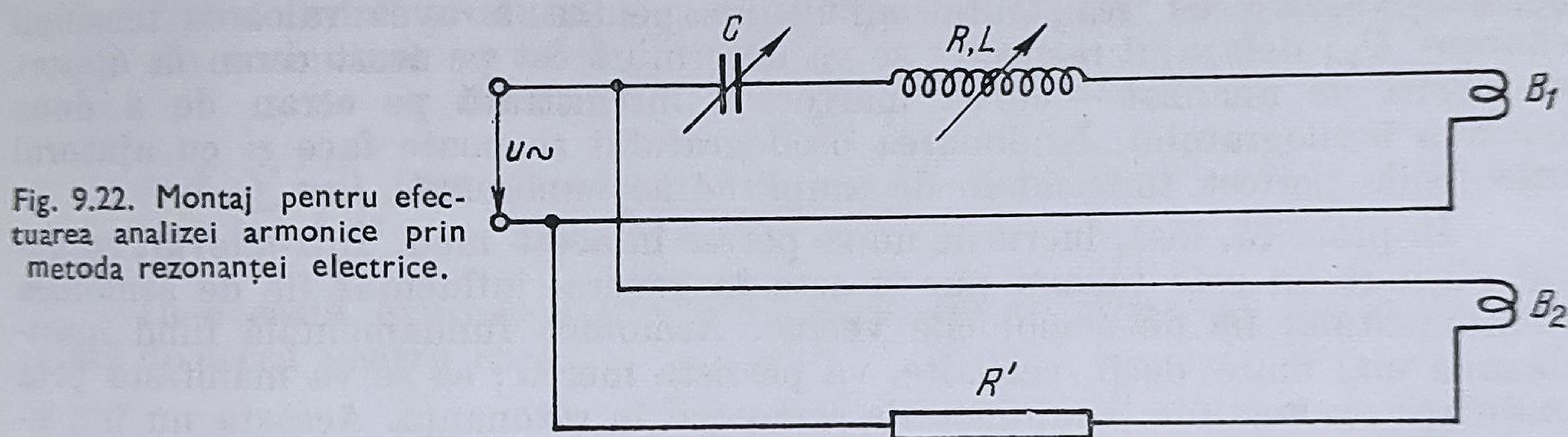


Fig. 9.22. Montaj pentru efectuarea analizei armonice prin metoda rezonanței electrice.

a) Metoda prin rezonanță electrică. Oscilograful permite să se separe direct armonicile unei curbe de tensiune prin folosirea rezonanței electrice.

Fie de analizat o tensiune u nesinusoidală. Se realizează un circuit format dintr-o bobină fără fier, reglabilă în mod continuu și un condensator, de asemenea reglabil, însă în mod discontinuu; acest circuit se leagă în serie cu una din buclele de tensiune ale unui oscilograf și la bornele sale se aplică tensiunea u (fig. 9.22); o a doua buclă a oscilografului este legată direct, prin intermediul unei rezistențe, la tensiunea u. Acest al doilea circuit servește de martor pentru toate determinările ulterioare.

După cum se va vedea mai tîrziu *, curentul în circuitul analizat (circuitul legat la bucla B_1) este dat de relația

$$i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \left(Lk\omega - \frac{1}{Ck\omega}\right)^2}} \sin(k\omega t - \varphi_k - \psi_k) \tag{9.32}$$

în care

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{Lk\omega - \frac{1}{Ck\omega}}{R}.$$

* Vezi 9.3.3.1.

Într-un asemenea circuit, curentul dat de armonica U_k este cu atît mai mare, cu cît armonica este mai importantă și numitorul expresiei (9.32) este mai mic. Numitorul acestei expresii este minim pentru

$$L\,C\,k^2\omega^2 = 1,$$

adică atunci cînd este realizată rezonanța armonicii de ordinul k; în aceste condiții, curentul dat de această armonică este maxim și egal cu raportul dintre forța electromotoare U_k a armonicii corespunzătoare prin rezistența ohmică a circuitului; dacă aceasta este mică, valoarea acestui curent poate deveni foarte mare.

Variind inductanța se poate face să intre în rezonanță diversele armonici, de la cea fundamentală pînă la aceea de ordinul cel mai înalt și, cum în acest caz pentru o armonică oarecare curentul este egal cu raportul U_k/R și este în fază cu tensiunea corespunzătoare ($\text{tg}\ \varphi_k = 0$), va fi suficient să se măsoare pe ecranul oscilografului amplitudinea armonicii și să se înmulțească această valoare cu rezistența circuitului pentru a avea valoarea tensiunii căutate U_k; defazajul respectiv se va determina tot pe acest ecran în raport cu curba de analizat — curba martoră — înregistrată pe ecran de a doua buclă a oscilografului. Etalonarea oscilografului se poate face și cu ajutorul unei unde perfect sinusoidale de amplitudine cunoscută.

În practică, însă, lucrurile nu se petrec în acest mod. Într-adevăr, curentul obținut nu este tocmai pur și este în general influențat fie de armonica fundamentală, fie de armonicile vecine. Armonica fundamentală fiind întotdeauna mai mare decît celelalte, va persista mereu; ea se va manifesta prin ondulații cu maxime și minime ale armonicii în rezonanță. Aceasta nu împiedică însă la determinarea elementelor armonicilor respective.

În cazul cînd există două armonici vecine, destul de importante, nu se poate obține niciodată rezonanța perfectă a uneia din cele două armonici, una fiind influențată de cealaltă.

Pentru a se obține rezultate cît mai precise, trebuie folosite condensatoare de calitate foarte bună, avînd o capacitate suficientă și pierderi în dielectric foarte mici, precum și inductanțe astfel constituite, încît să nu apară pierderi prin curenți FOUCAULT.

b) Metoda cu electrodinamometrul. Metoda constă în a folosi un electrodinamometru la care unul din circuite este legat la tensiunea (sau străbătut de curentul) de analizat; al doilea circuit este străbătut de un curent perfect sinusoidal cu frecvență variabilă.

Se cunoaște ecuația de funcționare a unui aparat electrodinamic

$$\alpha = \frac{\varphi'(\alpha)}{\lambda} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i_1 i_2 \, dt \tag{9.33}$$

în care i_1 și i_2 sînt curenții care străbat cele două bobine.

Fie deci

$$i_1 = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\, I_k \sin\,(k\omega t - \beta_k)$$

curentul nesinusoidal care urmează a fi analizat și

$$i_2 = \sqrt{2}\, I \sin (n\omega t - \varphi)$$

curentul auxiliar, care a fost luat cu frecvență corespunzătoare armonicii n, a cărui amplitudine este căutată.

Introducînd aceste valori în expresia (9.33), se obține

$$\alpha = K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\, I\, I_k}{T} \int_0^T \sin (k\omega t - \beta_k) \sin (n\omega t - \varphi) dt$$

în care s-a notat

$$K = \frac{\varphi'(\alpha)}{\lambda}.$$

Transformînd produsul de sinusuri de sub semnul integralei într-o diferență de cosinusuri, se obține

$$\alpha = K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I\, I_k}{T} \int_0^T \{\cos [(k-n)\omega t - (\beta_k - \varphi)] - \cos [(k+n)\omega t - (\beta_k + \varphi)]\}\, dt.$$

În această expresie toate integralele din membrul al doilea sînt nule afară de aceea pentru care

$$k - n = 0.$$

Se obține astfel,

$$\alpha = K\, I\, I_n \cos (\beta_n - \varphi). \tag{9.34}$$

Pentru a determina defazajul armonicii căutate, se variază defazajul φ al undei analizatoare pînă cînd deviația electrodinamometrului este maximă. În acest caz din relația (9.34) se va deduce valoarea efectivă a armonicii corespunzătoare

$$I = \frac{\alpha}{K\, I_n}$$

iar defazajul dat undei analizatoare determină defazajul armonicii respective față de originea de fază aleasă.

9.2.5. DEZVOLTAREA ÎN SERIE FOURIER A FUNCȚIILOR NEPERIODICE

9.2.5.1. **Generalități.** În unele aplicații din electrotehnică, forțele electromotoare aplicate circuitelor nu sînt periodice; de asemenea ele pot să nu fie continue și să aibă orice formă. Rezolvarea problemelor respective poate fi făcută mai ușor dacă circuitul corespunzător ar putea fi studiat, ca

funcționînd sub acțiunea unei forțe electromotoare periodice oarecare. Se pune deci problema dezvoltării în serie trigonometrică a unei funcții $f(x)$ definită numai în intervalul * $[0, 2\pi]$. În acest caz nu se mai poate vorbi de periodicitatea lui $f(x)$, ceea ce însă nu poate împiedica efectuarea dezvoltării în serie FOURIER a funcției respective, întrucît relațiile (9.18) se aplică numai la intervalul $[0, 2\pi]$. Pe de altă parte, dacă se prelungește funcția $f(x)$, în mod periodic în dreapta și în stînga intervalului $[0, 2\pi]$, pe întreaga axă a absciselor, se obține o funcție periodică ce coincide cu funcția dată în intervalul corespunzător și care are aceeași dezvoltare în serie FOURIER ca și funcția $f(x)$ dată; în consecință este același lucru să se vorbească de seria FOURIER a lui $f(x)$, definită în intervalul $[0, 2\pi]$ sau de seria FOURIER a funcției obținută din $f(x)$ prin prelungirea ei periodică pe axa Ox.

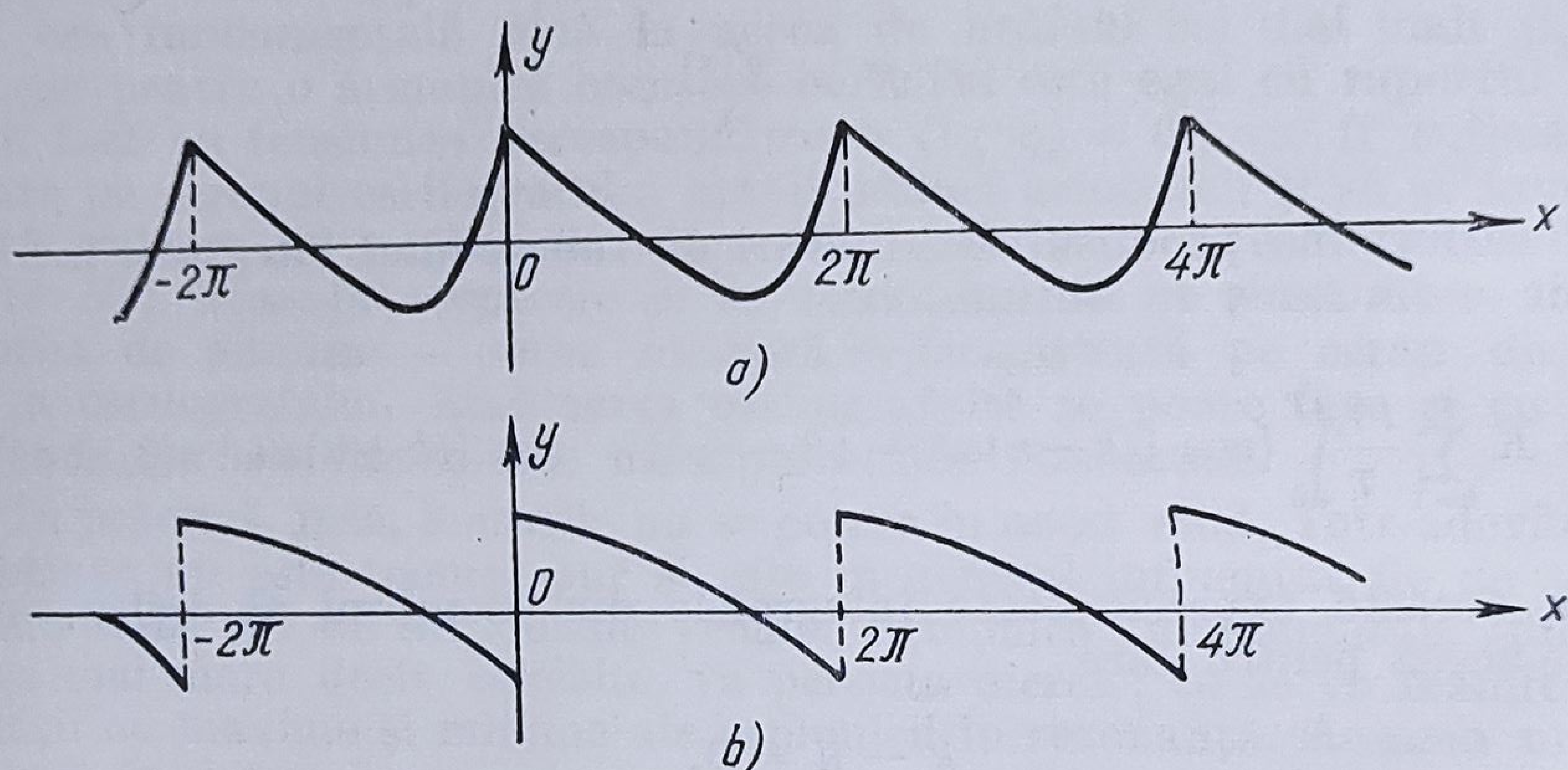


Fig. 9.23. Funcții neperiodice.

În legătură cu această prelungire periodică a lui $f(x)$ trebuie observat următoarele:

Dacă $f(0) = f(2\pi)$, efectuarea prelungirii periodice se face fără nici o dificultate (fig. 9.23, *a*); $f(x)$ fiind continuu în intervalul $[0, 2\pi]$, și prelungirea ei va fi continuă pe toată axa Ox.

Dacă însă $f(0) \neq f(2\pi)$, prelungirea periodică nu se poate realiza întrucît, datorită periodicității, $f(0)$ trebuie să coincidă cu $f(2\pi)$, ceea ce nu se întîmplă în acest caz (fig. 9.23, *b*). Se poate evita această dificultate în două moduri:

a) se renunță la valorile lui $f(x)$ în punctele $x = 0$ și $x = 2\pi$, formînd astfel o funcție care nu este definită pentru aceste valori și prelungind periodic pe $f(x)$ fără a defini această prelungire în punctele x de forma $2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;

b) se schimbă în mod convenabil, dacă e posibil, valorile lui $f(0)$ și $f(2\pi)$, prin schimbarea originii astfel, încît ele să fie egale.

Trebuie observat că valoarea coeficienților seriei FOURIER rămîne aceeași în ambele cazuri, aceasta deoarece schimbarea valorilor unei funcții într-un număr finit de puncte, sau chiar inexistența ei în aceste puncte, nu poate influența asupra valorii unei integrale definite a ei și în particular asupra

* Se poate lua intervalul oricum, spre exemplu în originea în mijlocul său $[-\pi, \pi]$.

valorii integralelor (9.18) care dau coeficienţii seriei FOURIER*. În consecinţă, fie că se modifică sau nu funcţia $f(x)$ în modul arătat mai sus, seria FOURIER corespunzătoare rămîne neschimbată.

Trebuie observat de asemenea că dacă $f(0) \neq f(2\pi)$ şi dacă $f(x)$ este continuă în intervalul $[0, 2\pi]$, prelungirea periodică a lui $f(x)$ pe întreaga axă Ox va avea discontinuităţi în punctele de abscisă $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$).

Cele arătate mai sus sînt aplicabile oricărei funcţii $f(x)$ definită într-un interval $[a, a + 2\pi]$, a fiind oarecare.

9.2.5.2. **Limitele la dreapta şi la stînga ale unei funcţii, într-un punct. Puncte de discontinuitate de prima speţă.** Notînd

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) \qquad (x < x_0)$$

şi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 + 0) \qquad (x > x_0)$$

dacă aceste limite există şi sînt finite, prima dintre aceste limite se numeşte *limita la stînga* a lui $f(x)$ în punctul x_0, iar a doua — *limita la dreapta* a lui $f(x)$ în punctul x_0.

În caz de continuitate

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0).$$

În cazul cînd punctul x_0 este un punct de discontinuitate, dacă cele două limite există, punctul x_0 se numeşte un *punct de discontinuitate de prima speţă* al funcţiei $f(x)$; în cazul cînd *cel puţin una* din limite *nu există*, punctul respectiv se numeşte *punct de discontinuitate de a doua speţă*.

Pentru un punct de discontinuitate de primă speţă, mărimea

$$\delta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

se numeşte *saltul* funcţiei $f(x)$ în punctul x_0.

9.2.5.3. **Funcţii netede şi funcţii netede pe porţiuni.** O funcţie $f(x)$ se zice că este *netedă* în intervalul $[a, b]$ dacă în acest interval ea admite o derivată continuă; aceasta înseamnă că, în acest interval parcurgînd curba, coeficientul unghiular al tangentei geometrice la curbă variază *continuu* fără salturi (fig. 9.24, *a*).

O funcţie $f(x)$ se zice că este *netedă pe porţiuni* în intervalul $[a, b]$ dacă acest interval poate fi descompus într-un număr finit de intervale parţiale astfel ca în fiecare din ele $f(x)$ să fie o funcţie netedă (fig. 9.24, *b*). Funcţiile netede pot fi astfel considerate ca un caz particular al acestora.

O funcţie $f(x)$ discontinuă poate fi considerată netedă pe porţiuni în intervalul $[a, b]$ dacă:

— are un număr finit de discontinuităţi de prima speţă în intervalul considerat;

* Vezi [279] pag. 23.

— funcţia este continuă în fiecare din intervalele parţiale $[c, d]$ în care punctele de discontinuitate împart intervalul $[a, b]$ (fig. 9.24, c).

Orice funcţie netedă pe porţiuni este mărginită şi are o derivată mărginită în întreg intervalul, cu excepţia punctelor unghiulare şi a celor de discontinuitate — unde funcţia nu există; funcţia corespunzătoare nu are decît discontinuităţi de prima speţă.

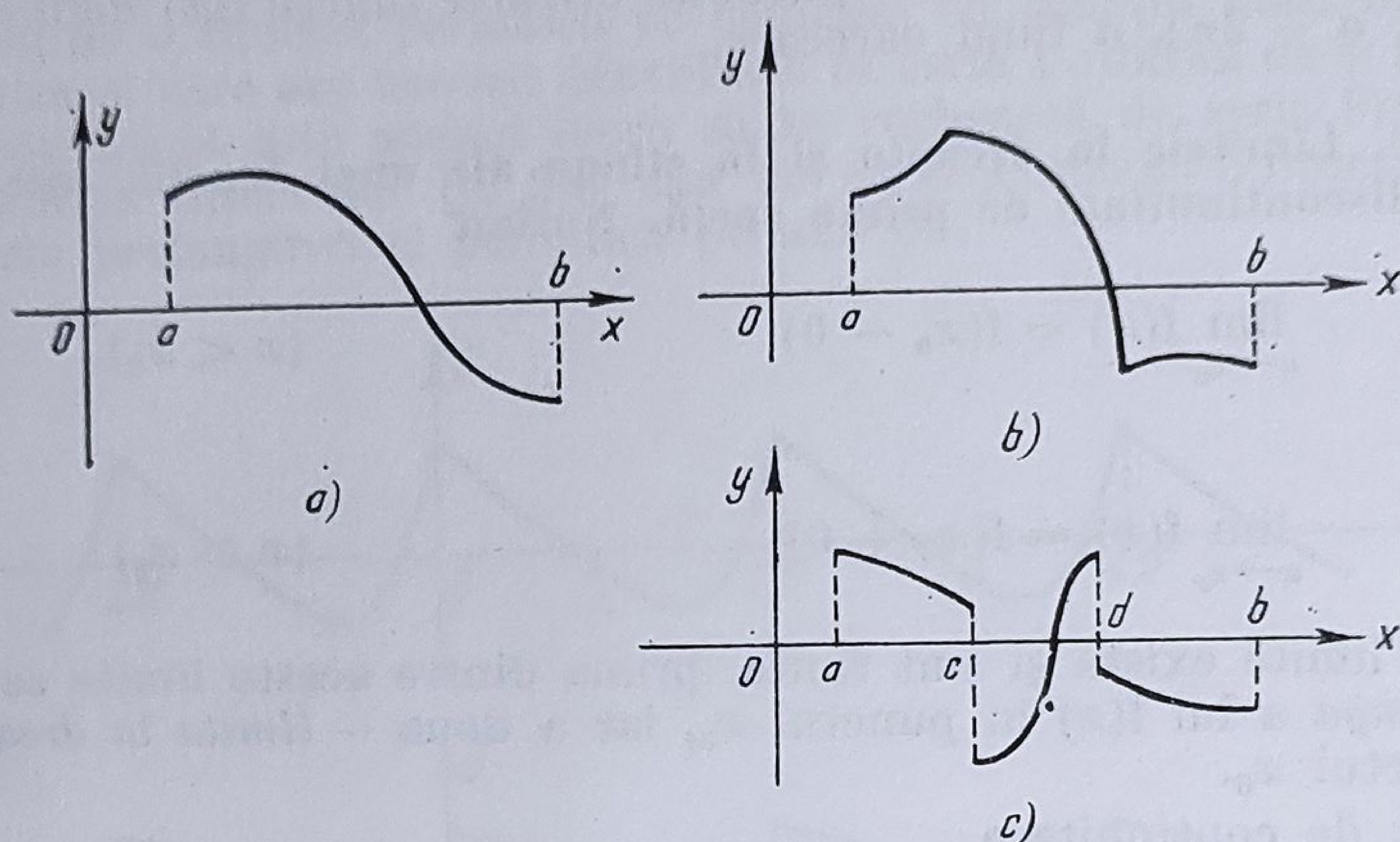


Fig. 9.24. Funcţii netede (a) şi funcţii netede pe porţiuni (b).

9.2.5.4. **Un criteriu de convergenţă pentru seriile FOURIER*.** Fără a da demonstraţia corespunzătoare, se enunţă în cele ce urmează un criteriu de convergenţă pentru seriile FOURIER ale unei funcţii $f(x)$ oarecare.

Seria FOURIER a unei funcţii $f(x)$, de perioadă 2π, netedă pe porţiuni (continuă sau discontinuă), este convergentă pentru toate valorile lui x şi suma ei este egală cu $f(x)$ în orice punct de continuitate şi cu

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

în fiecare punct de discontinuitate. Dacă $f(x)$ este continuă peste tot, atunci seria este absolut şi uniform convergentă.

9.2.6. SERIILE FOURIER CU TERMENI COMPLECŞI

9.2.6.1. **Transformarea seriilor FOURIER obişnuite în serii cu termeni complecşi.** Fie o funcţie periodică oarecare $f(x)$, de perioadă $T = \frac{2\pi}{\omega}$, a cărei dezvoltare în serie FOURIER este de forma (9.16)

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t). \tag{9.35}$$

* Vezi [279] pag. 26

Aplicînd identităţile lui EULER

$$\sin k\omega t = \frac{1}{2j}(\varepsilon^{jk\omega t} - \varepsilon^{-jk\omega t}) \quad \text{şi} \quad \cos k\omega t = \frac{1}{2}(\varepsilon^{jk\omega t} + \varepsilon^{-jk\omega t})$$

termenul general al seriei FOURIER se poate scrie

$$A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t = \underline{C}_k\, \varepsilon^{jk\omega t} + \underline{C}_k\, \varepsilon^{-jk\omega t}$$

în care s-a notat

$$\underline{C}_k = \frac{1}{2}(B_k - jA_k) \quad \text{şi} \quad \underline{C}_{-k} = \frac{1}{2}(B_k + jA_k) = \underline{C}_k^* \tag{9.36}$$

numerele $\underline{C}_k$ şi $\underline{C}_{-k} = \underline{C}_k^*$ fiind complex conjugate.

Cu aceste elemente seria FOURIER (9.35) se poate scrie

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\underline{C}_k\, \varepsilon^{jk\omega t} + \underline{C}_{-k}\, \varepsilon^{-jk\omega t}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k\, \varepsilon^{jk\omega t}. \tag{9.37}$$

Expresia (9.37) reprezintă dezvoltarea în serie FOURIER cu termeni complecşi a funcţiei periodice oarecare f(t).

9.2.6.2. **Calculul coeficienţilor seriei FOURIER cu termeni complecşi.** Determinarea coeficienţilor $\underline{C}_k$ ai seriei (9.37) se face procedînd ca şi în cazul determinării coeficienţilor seriei FOURIER cu termeni reali, aplicînd metoda integrării. *

Fie de determinat coeficientul $\underline{C}_k$ al termenului $\varepsilon^{jk\omega t}$ al seriei respective. Înmulţind ambii membri ai relaţiei (9.27) cu $\varepsilon^{jn\omega t}$, unde n este un număr întreg oarecare pozitiv, negativ sau nul, şi luînd valoarea medie pe un interval de timp cuprins între timpurile T_0 şi $T_0 + T$, unde T este perioada funcţiei f(t), se obţine :

$$\frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)\, \varepsilon^{jn\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k\, \varepsilon^{j\omega(k+n)t}\, dt.$$

Schimbînd ordinea de sumare în membrul al doilea al relaţiei de mai sus şi efectuînd integrala respectivă, se obţine

$$\frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} \underline{C}_k\, \varepsilon^{j\omega(k+n)t}\, dt = \frac{\underline{C}_k \varepsilon^{j\omega(k+n)T_0}}{j\omega(k+n)T}\,[\varepsilon^{j\omega(k+n)T} - 1]. \tag{9.38}$$

Pentru $k + n = N \neq 0$, exponenţiala din paranteza dreaptă se poate scrie

$$\varepsilon^{j\omega NT} = \varepsilon^{j2\pi N} = \cos 2\pi N + j \sin 2\pi N = 1$$

şi integrala (9.38) este nulă;

* Vezi 9.2.3.1.

pentru $k + n = N = 0$, paranteza expresiei (9.38) este de asemenea nulă, dar și numitorul acestei expresii este nul, astfel că integrala (9.38) capătă forma nedeterminată $\frac{0}{0}$. Ridicînd această nedeterminare prin aplicarea regulii lui L'HOPITAL, se obține

$$\lim_{N\to 0} \frac{\varepsilon^{j\omega N T_0}}{j\omega N T}(\varepsilon^{j2\pi N} - 1) = 1$$

și deci, din relația (9.38), rezultă

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} \mathrm{f}(t)\, \varepsilon^{-jk\omega t}\, dt, \tag{9.39}$$

expresie cu ajutorul căreia se poate calcula valoarea coeficienților seriei FOURIER cu termeni complecși; această relație este analoagă cu relațiile (9.17) cu care se determină coeficienții seriei FOURIER cu termeni reali. Dealtfel aceștia pot fi deduși din relația (9.39). Într-adevăr, ținînd seama de relațiile (9.20) și de relația lui EULER

$$\varepsilon^{-jk\omega t} = \cos k\omega t - j \sin k\omega t$$

și identificînd părțile reale și cele complexe, se obțin tocmai relațiile (9.17).

9.2.6.3. **Valoarea medie a produsului a două serii FOURIER cu termeni complecși.** Fie $\mathrm{f}_1(t)$ și $\mathrm{f}_2(t)$ două funcții de forma (9.37); să calculăm valoarea medie, în timpul unei perioade, a produsului acestor două funcții

$$M = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{f}_1(t)\cdot \mathrm{f}_2(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k\, \varepsilon^{jk\omega t}\right]\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{D}_l\, \varepsilon^{jl\omega t}\right] dt.$$

Efectuînd produsul din membrul al doilea al acestei relații și schimbînd ordinea de sumare, se obține

$$M = \sum_{\substack{k=-\infty \\ l=-\infty}}^{\infty} \underline{C}_k\, \underline{D}_l \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon^{j(k+l)\omega t}\, dt. \tag{9.40}$$

Efectuînd integrala, se găsește

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon^{j(k+l)\omega t}\, dt = \frac{1}{j(k+l)\omega T}\left[\varepsilon^{j(k+l)\omega T} - 1\right];$$

pentru $k + l = N \neq 0$ se poate scrie

$$\varepsilon^{j(k+l)\omega T} = \varepsilon^{j2\pi N} = \cos 2\pi N + \sin 2\pi N = 1$$

și integrala este nulă; pentru $k + l = N = 0$ paranteza este tot nulă dar, de data aceasta, și numitorul expresiei respective e nul. Ridicînd nedeterminarea cu ajutorul teoremei lui L'Hopital se găsește

$$I = 1$$

și deci relația (9.40) devine

$$M = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k \, \underline{D}_{-k}. \quad (9.41)$$

9.2.6.4. Spectre de frecvență. În anumite probleme tehnice, interesează numai amplitudinea unora din armonicile superioare în vederea eliminării unora din ele, fie în vederea combaterii lor; de asemenea defazajul diverselor armonici nu interesează, deși acesta este foarte important, întrucît de el depinde forma undei nesinusoidale respective.

Reprezentînd pe un grafic în abscisă valorile diverselor frecvențe, sau ordinul diverselor armonici, și în dreptul acestora un segment de dreaptă a cărui lungime este proporțională cu amplitudinile armonicilor corespunzătoare, se obține o diagramă care se numește *spectrul de frecvențe* al undei respective (fig. 9.25).

În consecință, un spectru de frecvențe poate da imaginea unei unde nesinusoidale însă, dintr-un spectru de frecvență nu poate fi reconstituită unda nesinusoidală respectivă decît *numai* dacă se cunosc defazajele diverselor armonici.

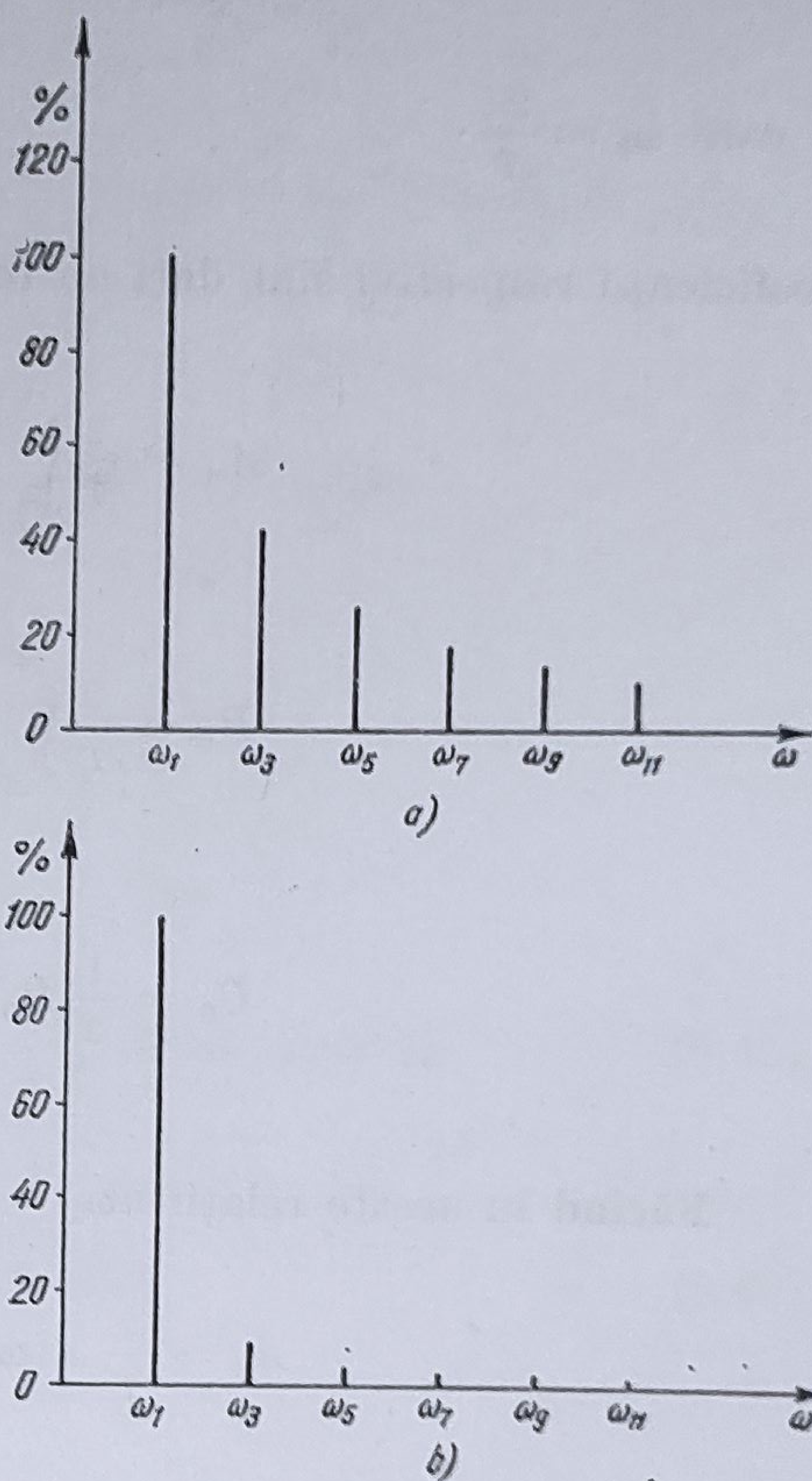


Fig. 9.25. Spectre de frecvență.

9.2.7. INTEGRALA FOURIER

9.2.7.1. Integrala Fourier în termeni reali. Fie o funcție $f(t)$ definită într-un interval oarecare T. După cum s-a văzut*, această funcție poate fi reprezentată, în intervalul considerat, printr-o serie Fourier. Ne propunem să găsim o reprezentare analoagă pentru o asemenea funcție definită însă pentru toate valorile variabilei t în intervalul $[-\infty, +\infty]$. Acesta este cazul, spre exemplu, al unei funcții $f(t)$ diferită de zero în intervalul T și nulă pentru toate valorile lui t în afara acestui interval. O asemenea funcție o putem obține din seria Fourier a funcției $f(t)$ dacă facem ca perioada T corespunzătoare să tindă către infinit.

---

* Vezi 9.2.5.

Pentru a dezvolta în serie FOURIER funcţia f(t), să mutăm originea sistemului de axe de coordonate în mijlocul intervalului T; în aceste condiţii funcţia f(t) poate fi reprezentată prin seria FOURIER dată de expresia

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega_1 t + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\omega_1 t \tag{9.42}$$

în care $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$. (9.43)

Coeficienţii respectivi sînt daţi de relaţiile (9.17)

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t \, dt,$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t \, dt,$$

$$C_0 = \frac{1}{2} B_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \, dt.$$

Făcînd în aceste relaţii $n\omega_1 = \omega$ şi notînd

$$A_n = \frac{2}{T} A(\omega) \text{ şi } B_n = \frac{2}{T} B(\omega),$$

relaţia (9.42) devine o funcţie de ω şi se poate scrie

$$f(t) = \frac{2}{T} \Sigma A(\omega) \sin \omega t + \frac{2}{T} \Sigma B(\omega) \cos \omega t \; (\omega = \omega_1, 2\omega_1, \ldots). \tag{9.44}$$

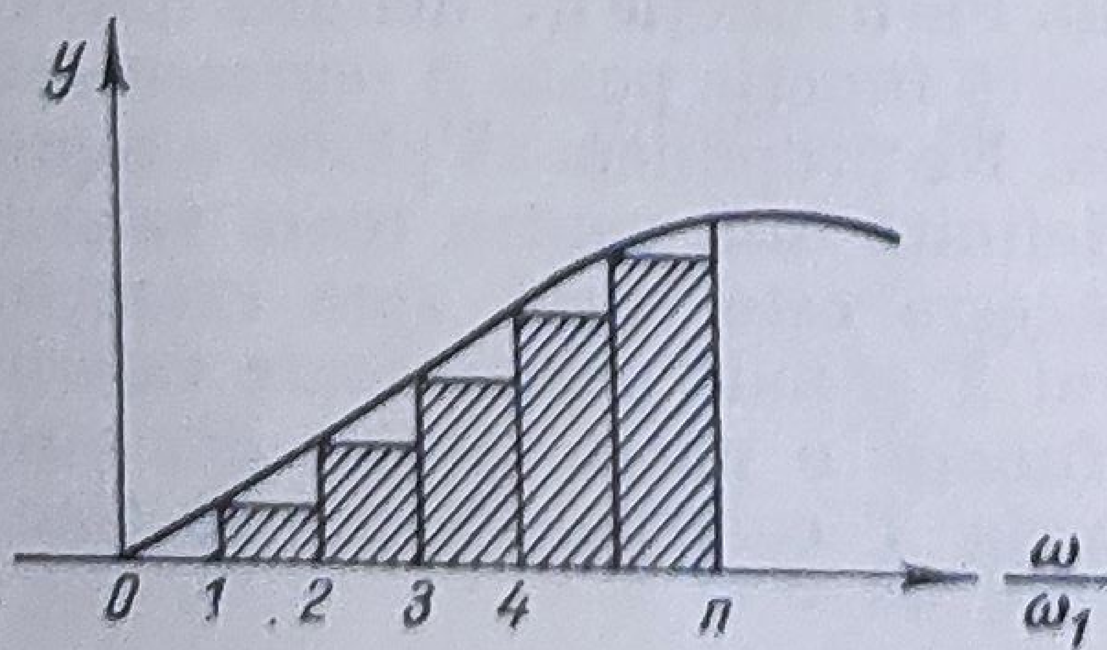


Fig. 9.26. Funcţia A(ω)sin ωt.

Pentru un anumit timp t, funcţiile de sub semnul sumă din relaţia (9.44) pot fi reprezentate în funcţie de ω; astfel, în figura 9.26 este reprezentată funcţia $A(\omega) \sin \omega t$, diferitele dreptunghiuri haşurate avînd înălţimea $A(\omega) \sin \omega t$ pentru $n\omega_1 = \omega$ şi lăţimea ω_1.

Rezultă dar că suprafaţa haşurată are aria

$$S = \Sigma \omega_1 A(\omega) \sin \omega t \; (\omega = \omega_1, 2\omega_1, \ldots).$$

Făcînd pe T să crească indefinit, ceea ce face ca ω_1 să tindă către zero, suprafața hașurată tinde către suprafața cuprinsă între curbă și axa absciselor. Se obține deci

$$\lim_{\omega_1\to 0} \Sigma\, \omega_1\, A(\omega) \sin \omega t = \int_0^{\infty} A(\omega) \sin \omega t \, d\omega \quad (\omega = \omega_1,\ 2\omega_1,\ \ldots)$$

sau ținînd seama de (9.13)

$$\lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} \Sigma\, A(\omega) \sin \omega t = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \sin \omega t \, d\omega \quad (\omega = \omega_1,\ 2\omega_1,\ \ldots).$$

În același mod se obține și

$$\lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\, \Sigma\, B(\omega) \cos \omega t = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t \, d\omega$$

ținînd seama că

$$C_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt = 0.$$

Cu acestea, funcția $f(t)$ poate fi scrisă

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \sin \omega t \, d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t \, d\omega \tag{9.45}$$

în care

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt \tag{9.46}$$

și

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt. \tag{9.47}$$

$A(\omega)$ și $B(\omega)$ se numesc *funcțiile de frecvență* ale spectrului funcției $f(t)$.
Introducînd expresiile (9.46) și (9.47), care sînt niște constante și în care, pentru oportunitate am schimbat variabila t în τ, expresia (9.45) poate fi scrisă

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega (t - \tau) \, d\tau \tag{9.48}$$

care reprezintă dezvoltarea în integrală FOURIER a funcției $f(t)$.
Scriind expresia (9.45) sub forma

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t]\, d\omega$$

rezultă că $f(t)$ poate fi considerat ca suma unui număr infinit de oscilații sinusoidale de amplitudine

$$C(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$$

și avînd defazajul

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{A(\omega)}{B(\omega)}$$

se poate scrie deci

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} C(\omega)\cos(\omega t - \varphi)\,d\omega.$$

Mărimea $C(\omega)$ se numește *densitate spectrală* sau *densitatea de amplitudine a spectrului* sau — prin analogie — *spectrul funcției* $f(t)$.

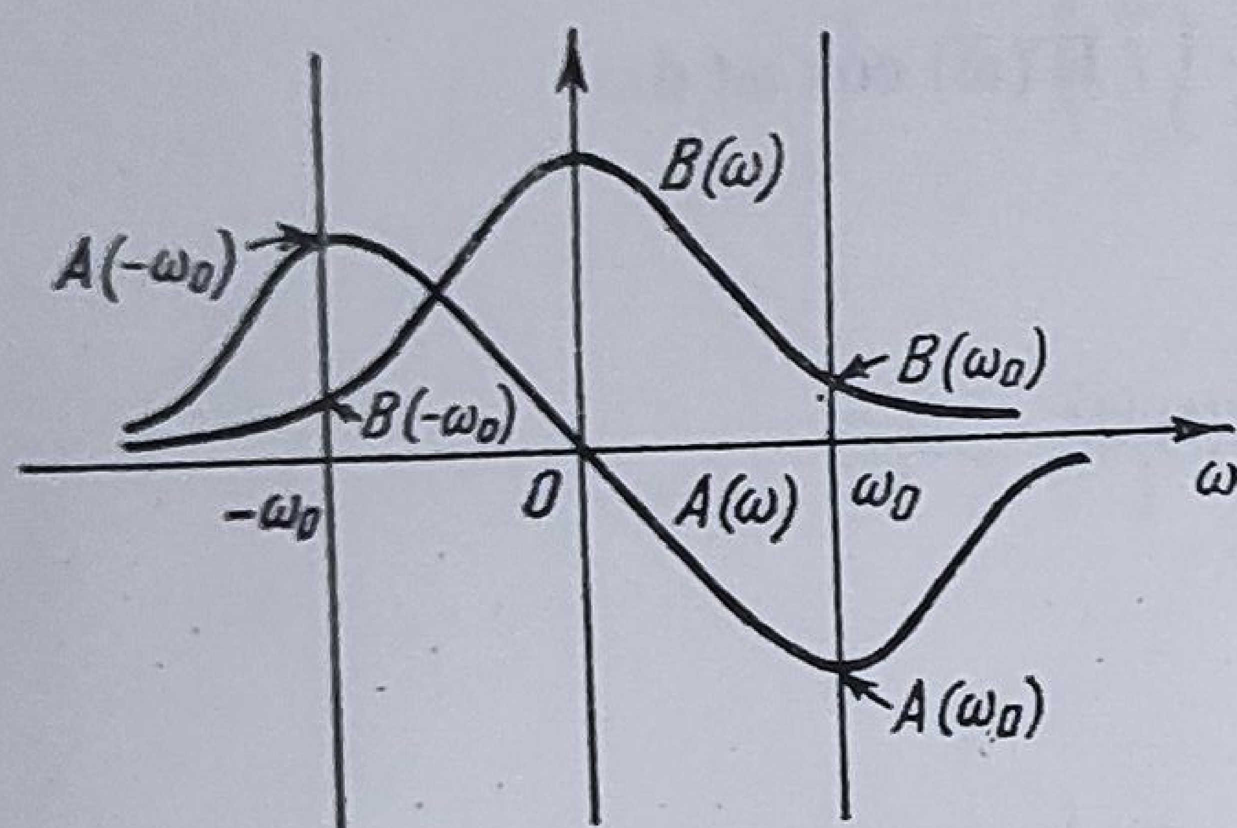


Fig. 9.27. Spectrul unei funcții pare.

Reluînd expresiile (9.45) și (9.46) se vede ușor că, în raport cu frecvența, funcția $A(\omega)$ este o funcție impară pentru care

$$A(\omega) = -A(-\omega)$$

iar funcția $B(\omega)$ este o funcție pară, pentru care (fig. 9.27)

$$B(\omega) = B(-\omega).$$

9.2.7.2. Integrala Fourier în termeni complecși. Să considerăm expresia (9.48) în care s-a schimbat ordinea de sumare și s-a înlocuit cosinusul respectiv prin relația lui Euler corespunzătoare; vom avea

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^{\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^{\infty} f(\tau)\left[\varepsilon^{j\omega(t-\tau)} + \varepsilon^{-j\omega(t-\tau)}\right] d\tau. \qquad (9.49)$$

Ținînd seama că

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^{-j\omega(t-\tau)}\,d\tau = \int_{-\infty}^{0} \varepsilon^{j\omega(t-\tau)}\,d\tau$$

relația (9.49) se poate scrie

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\varepsilon^{j\omega(t-\tau)}\,d\tau. \qquad (9.50)$$

Expresia (9.50) reprezintă forma complexă a dezvoltării în integrală Fourier a funcției $f(t)$.*

* Vezi [4] pag. 64.

Relația (9.50) poate fi pusă și sub o altă formă, utilă în aplicațiile practice : scoțînd de sub a doua integrală exponențiala $\varepsilon^{j\omega t}$, întrucît nu depinde de τ, se obține

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{j\omega t}\, d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\varepsilon^{-j\omega\tau}\, d\tau,$$

sau notînd

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\varepsilon^{-j\omega\tau}\, d\tau, \tag{9.51}$$

rezultă

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)\varepsilon^{j\omega t}\, d\omega. \tag{9.52}$$

Expresiile (9.51) și (9.52) pot fi deduse și direct, pornind de la expresia (9.37) a seriei *FOURIER* în termeni complecși. Într-adevăr, repetînd raționamentul făcut în paragraful 9.2.7.1. se obține

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k\, \varepsilon^{jk\omega_1 t}, \tag{9.53}$$

în care

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}.$$

Punînd

$$k\omega_1 = \omega \begin{pmatrix} k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots. \\ \omega = \pm \omega_1, \pm 2\omega_1, \pm 3\omega_1, \ldots \end{pmatrix}$$

expresia (9.39) a coeficientului termenului general poate fi scrisă

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\varepsilon^{-j\omega\tau}\, d\tau = \frac{1}{T}C(j\omega) = \frac{\omega_1}{2\pi}C(j\omega)\ (\omega = \pm\omega_1, \pm 2\omega_1, \ldots).$$

Cu aceasta expresia (9.53) devine, ținînd seama că $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$,

$$f(t) = \lim_{\omega_1\to 0} \sum_{\omega} \frac{\omega_1}{2\pi} C(j\omega)\varepsilon^{j\omega t} \quad (\omega = \pm\omega_1, \pm 2\omega_1 \pm \ldots.). \tag{9.54}$$

Notînd

$$G(j\omega) = \lim_{\omega_1\to 0} \frac{1}{2\pi}C(j\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}C(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\varepsilon^{-j\omega\tau}\, d\tau,$$

relația (9.54) poate fi scrisă

$$f(t) = \lim_{\omega_1\to 0} \sum_{\omega} \omega_1 G(j\omega)\varepsilon^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)\varepsilon^{j\omega t}\, d\omega,$$

adică tocmai expresia (9.52), expresia lui $G(j\omega)$ de mai sus fiind identică cu (9.51).

Funcţia $G(j\omega)$ dată de relaţia (9.51) se numeşte* *spectrul funcţiei* $f(t)$; ea fiind o mărime complexă, se poate separa în doi termeni sub forma

$$G(j\,\omega) = R(\omega) + j\,I\,(\omega) = |G(j\,\omega)|\,\underline{|\varphi},\tag{9.55}$$

unde

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\,\tau\,d\tau;\; I(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\,\tau\,d\tau;\tag{9.56}$$

$$|G(j\,\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)};\; \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{I(\omega)}{R(\omega)}.$$

Comparînd relaţiile (9.56) cu relaţiile (9.46) şi (9.47) rezultă:

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi}A(\omega);\; R(\omega) = \frac{1}{2\pi}B(\omega).$$

Între funcţiile definite de relaţiile (9.51) şi (9.52) se poate observa o oarecare dualitate; într-adevăr, cunoscînd funcţia $f(t)$, ecuaţia (9.51) determină funcţia $G(j\omega)$ şi invers, cunoscînd funcţia $G(j\omega)$, ecuaţia (9.52) determină funcţia $f(t)$.

9.2.7.3. **Validitatea integralei Fourier.** Pentru ca o funcţie neperiodică $f(t)$, dată într-un interval oarecare, să poată fi dezvoltată într-o integrală Fourier, este necesar ca funcţia dată să îndeplinească următoarele condiţii**:

a) în intervalul $(-\infty, +\infty)$, funcţia $f(t)$ are un număr finit de extreme;

b) intervalul dat poate fi descompus într-un număr finit de intervale parţiale, în interiorul cărora $f(t)$ trebuie să fie continuă şi monotonă, adică să scadă sau să crească odată cu t;

c) funcţia $f(t)$ trebuie să fie absolut integrabilă în intervalul $(-\infty, +\infty)$, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty;\tag{9.57}$$

d) numărul de discontinuităţi al funcţiei $f(t)$ trebuie să fie finit în fiecare interval; în punctele de discontinuitate integrala lui Fourier (9.48) sau (9.50) este egală cu valoarea medie definită la 9.2.5.4;

e) integrala (9.51) trebuie să fie convergentă; aceasta revine în a spune că integralele (9.46) şi (9.47) sau (9.53) sînt simultan convergente, ceea ce se realizează dacă

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0.\tag{9.58}$$

---

* I se atribuie şi celelalte denumiri date expresiei $G(\omega)$.

** Vezi [4] pag. 70, [155] pag. 150 şi [231] pag. 84.

În cazul cînd condiţiile (9.57) şi (9.58) nu sînt satisfăcute, integralele (9.51) şi (9.52) nu mai au sens.

Prin introducerea unui parametru auxiliar — direct sau prin intermediul unei funcţii auxiliare — care la sfîrşit este făcut să tindă către zero, se pot rezolva şi problemele în care condiţiile (9.57) şi (9.58) nu sînt satisfăcute.

Pentru exemplificare, să considerăm funcţia unitate a lui HEAVISIDE, definită după cum urmează*:

$$\Upsilon_{(t)} \begin{cases} = 0 \text{ pentru } t < 0, \\ = 1 \text{ pentru } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Această funcţie nu satisface condiţia (9.58). Pentru a obţine dezvoltarea ei în integrală FOURIER, să o înmulţim cu funcţia auxiliară

$$\mathrm{F}(t) = \varepsilon^{-\beta t},$$

care presupunem că este nulă pentru $t < 0$, avînd o valoare finită pentru $t \geqslant 0$ şi tinzînd către zero, cînd t tinde către infinit.

Relaţia (9.51) dă

$$\mathrm{G}(\mathrm{j}\,\omega) = \lim_{\beta\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-\beta t}\,\varepsilon^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\beta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \varepsilon^{-\beta t}\,\varepsilon^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\mathrm{j}\omega}.$$

Introducînd această valoare în relaţia (9.50) se obţine **

$$\mathrm{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{j}\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,S_i\,(\omega t).$$

9.3. STUDIUL PARTICULAR AL REGIMULUI DEFORMANT

9.3.1. MĂRIMILE CARACTERISTICE ALE REGIMULUI DEFORMANT

9.3.1.1. **Valoarea efectivă a unei funcţii periodice nesinusoidale.** Fie o funcţie periodică nesinusoidală, dată prin dezvoltarea ei în serie FOURIER

$$y = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k\sqrt{2}\,\sin\,(k\,\omega\,t - \varphi_k) \tag{9.59}$$

---

* Vezi 3.6.2.5.

** Punînd $\varphi(\omega) = \frac{\varepsilon^{j\omega t}}{\omega} = \frac{\cos\omega t}{\omega} + \mathrm{j}\,\frac{\sin\omega t}{\omega}$ rezultă

$$f\,(t) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Calculînd prima integrală prin metoda reziduurilor pe un contur în jurul originii, se găseşte

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}$$

funcţia $\frac{\cos\omega t}{\omega}$ fiind impară.

Pe de altă parte $\omega = 0$ nu este un punct singular al funcţiei $\frac{\sin\omega t}{\omega}$ şi deci integrala $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega$ are un sens.

în care Y_k reprezintă valoarea efectivă a armonicii de ordinul k, n putînd fi oricît de mare voim.

Valoarea efectivă a unei funcții periodice sinusoidale este definită prin relația (4.2)

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2 \mathrm{d}t}.$$

Această definiție se extinde și în cazul funcțiilor periodice nesinusoidale. Ridicînd la pătrat expresia (9.59) se obține

$$\int_0^T y^2 \,\mathrm{d}t = Y_0^2 T + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T 2 Y_k^2 \sin^2 (k\,\omega\, t - \varphi_k)\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \sum_{\substack{m,\,n=1\\ m\neq n}}^{\infty} \int_0^T 2 Y_k\, Y_l \sin (k\,\omega\, t - \varphi_k) \times \sin (l\,\omega\, t - \varphi_l)\,\mathrm{d}t.$$

Ținînd seama de identitățile

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\,(1 - \cos 2\,x)\,;\ \sin x \sin y = \frac{1}{2}\,[\cos (x - y) - \cos (x + y)],$$

prima integrală din membrul al doilea devine

$$\frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 2\, Y_k^2 = T \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^2,$$

iar a doua este nulă.

În consecință,

$$Y = \sqrt{Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots}, \qquad (9.60)$$

adică valoarea efectivă a unei mărimi nesinusoidale este egală cu rădăcina pătrată a sumei pătratelor valorilor efective ale amplitudinilor diverselor armonici.

Relația astfel stabilită este valabilă atît pentru un curent periodic nesinusoidal, cît și pentru o tensiune periodică nesinusoidală. Rezultă :

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots}\,;$$

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \ldots}.$$

În cazul cînd funcția periodică nesinusoidală prezintă anumite simetrii, calculul valorii efective poate fi făcut numai de-a lungul unei jumătăți de perioadă sau sfert de perioadă.

În cazul cînd funcţia periodică nesinusoidală este redată printr-o serie FOURIER cu termeni complecşi, valoarea efectivă a acestei funcţii se poate obţine utilizînd relaţia (9.41) în care se face

$$\underline{C}_k = \underline{D}_k = \underline{Y}_k \quad \text{respectiv} \quad \underline{C}_{-k} = \underline{D}_{-k} = \underline{Y}_{-k}.$$

Ţinînd seama de relaţiile (9.36) şi de expresia (9.59), se obţine fără dificultate

$$M^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{Y}_k \underline{Y}_{-k} = Y_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \underline{Y}_k \underline{Y}_{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^2 = Y^2,$$

adică pătratul relaţiei (9.60) şi deci al valorii efective.

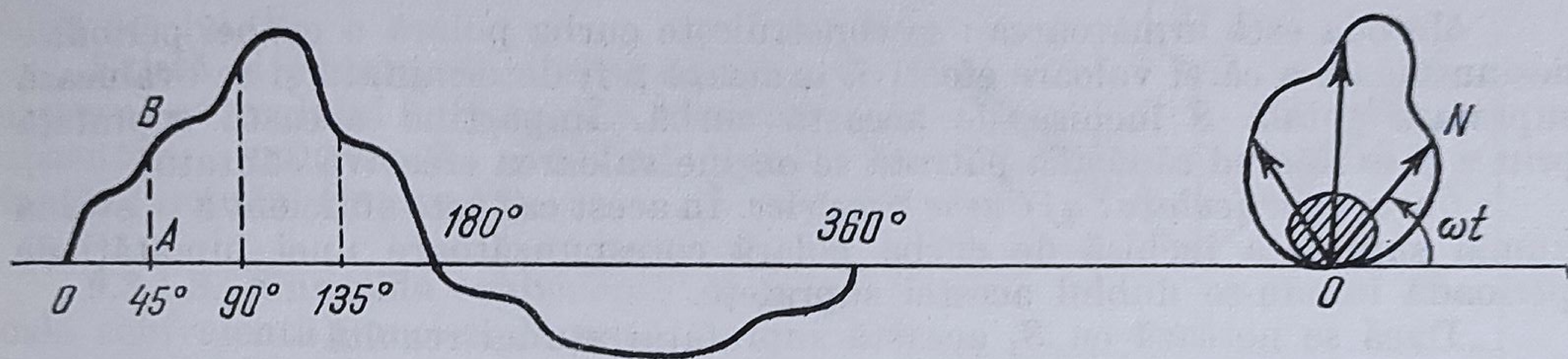


Fig. 9.28. Curba periodică nesinusoidală şi curba polară corespunzătoare.

Valoarea efectivă a unei funcţii periodice nesinusoidale oarecare poate fi determinată şi grafic. Această metodă se aplică în special curbelor experimentale.

Fie

$$y = f(\omega t),$$

curba periodică nesinusoidală, a cărei valoare efectivă urmează a fi determinată (fig. 9.28) şi căreia i se construieşte curba polară luînd $ON = AB = y$ şi $\omega t = OA$.

Suprafaţa închisă de o curbă, dată în coordonate polare, se calculează cu ajutorul relaţiei

$$S = \int_0^{2\pi} ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\theta.$$

Cum

$$\rho = y \text{ şi } \theta = \omega t, \text{ deci } d\theta = \omega dt,$$

se obţine

$$S = \frac{\omega}{2}\int_0^T y^2 \, dt.$$

Dar, din relaţia (4.2) rezultă

$$\int_0^T y^2 \, dt = Y^2 T$$

astfel, încît

$$S = \frac{\omega}{2} Y^2 T,$$

de unde

$$Y = \sqrt{\frac{S}{\pi}}, \quad (9.61)$$

deoarece

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Metoda este următoarea : se construieşte curba polară a curbei periodice nesinusoidale a cărei valoare efectivă urmează a fi determinată şi se evaluează suprafaţa totală S închisă de această curbă. Împărţind această suprafaţă prin π şi extrăgînd rădăcina pătrată se obţine valoarea efectivă căutată.

Cazuri particulare : a) Curbe simetrice. În acest caz este suficient a se evalua numai suprafaţa închisă de curba polară corespunzătoare unei jumătăţi de perioadă luîndu-se dublul acestei suprafeţe.

Dacă se notează cu S_1 această suprafaţă, atunci rezultă

$$Y = \sqrt{\frac{2S_1}{\pi}}: \quad (9.62)$$

b) Sinusoida. Curba polară a unei semiperioade este un cerc descris pe amplitudinea maximă ca diametru *.

Aplicînd relaţia (9.62) se găseşte

$$Y = \sqrt{\frac{2S_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{2\pi R^2}{\pi}} = \sqrt{2\left(\frac{\sqrt{2}\,Y}{2}\right)^2} = Y.$$

9.3.1.2. **Reziduul deformant**. Se numeşte *reziduu deformant*, sau numai *reziduu* al unei unde periodice nesinusoidale, unda care se obţine din unda dată suprimîndu-se armonica fundamentală. Valoarea efectivă a acestei unde este dată de relaţia

$$Y_d = \sqrt{Y^2 - Y_1^2} \cong \sqrt{Y_0^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + \ldots + Y_n^2} \quad (9.63)$$

în care Y este valoarea efectivă a undei periodice nesinusoidale considerate, n fiind oricît de mare.

Reziduul deformant al unei unde nesinusoidale are o mare importanţă în studiul regimurilor deformante, după cum se va vedea în cele ce vor urma**.

Determinarea lui se poate face pe cale analitică, utilizînd relaţia (9.63), sau pe cale experimentală.

---

* Vezi 9.2.1.3.
** Vezi 9.3.1.4.

Principiul metodei * experimentale constă în a echilibra o punte WHEATSTONE de curent alternativ pentru unda fundamentală, puntea fiind alimentată cu tensiunea nesinusoidală pentru care urmează să se determine reziduul deformant (fig. 9,29); în aceste condiţii, prin aparatul de „zero", care în acest caz este un aparat indicator cu fir cald, va trece un curent proporţional cu reziduul undei de tensiune aplicată punţii.

Pentru măsurarea reziduului deformant al unei unde de curent, se trece curentul respectiv printr-o rezistenţă neinductivă R_3, alimentarea punţii făcîndu-se prin aplicarea la bornele punţii a tensiunii rezultante la bornele rezistenţei.

Etalonarea aparatului indicator se face deschizînd întrerupătorul *1* (fig. 9.29) şi aplicînd la bornele *ab* o tensiune cunoscută; etalonarea se face pentru diversele valori ale lui R_3.

Există şi o variantă a acestei punţi, în sensul că reglajul se face prin variaţia capacităţii, inductanţa rămînînd constantă (metoda CHIODI **).

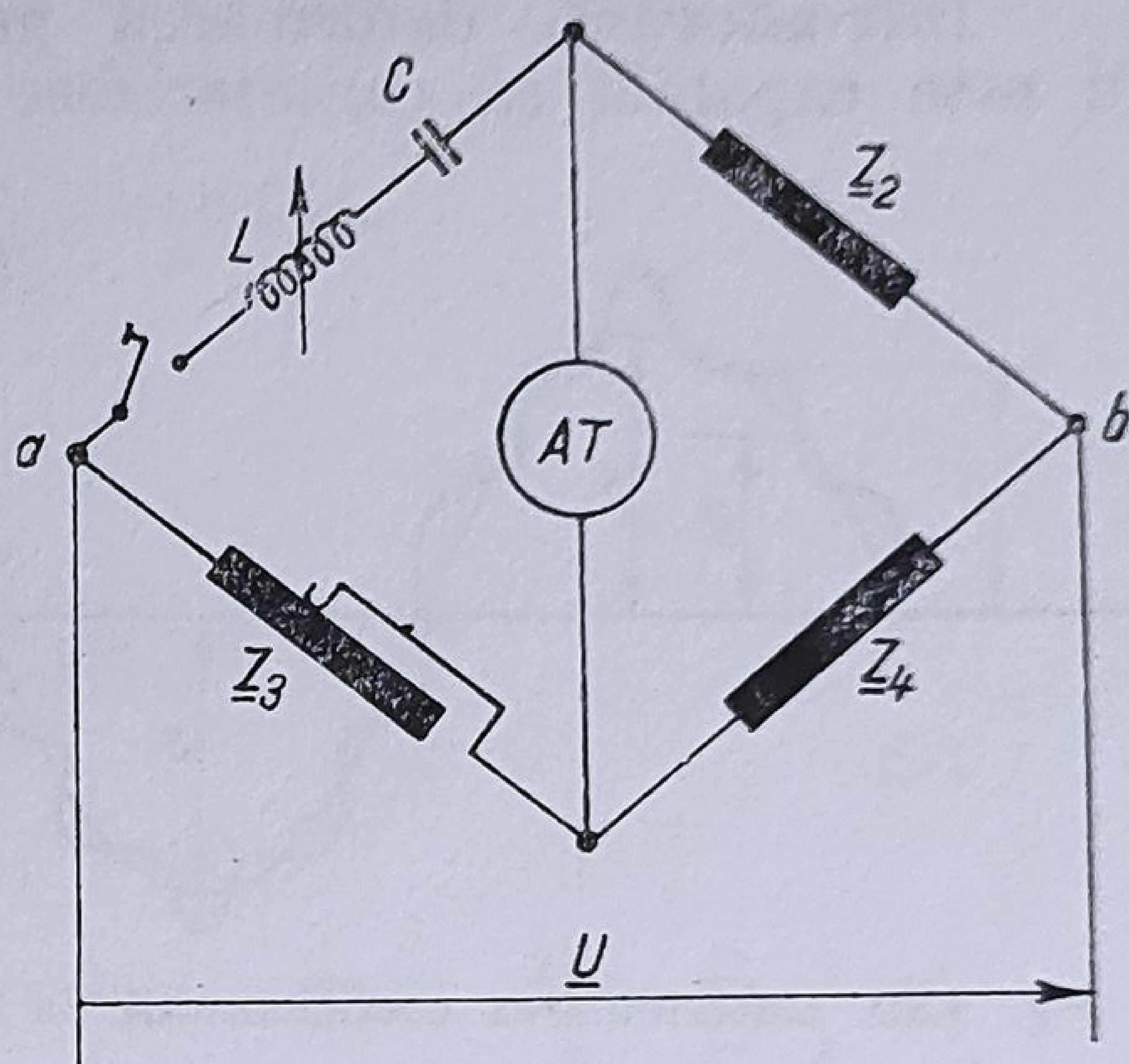


Fig. 9.29. Montaj pentru măsurarea reziduului deformant

9.3.1.3. **Sinusoida echivalentă.** Sinusoida echivalentă a unei unde periodice nesinusoidale este sinusoida care are aceeaşi valoare efectivă ca şi unda deformantă, pulsaţia sa fiind presupusă aceea a undei fundamentale a undei date.

În cazul existenţei simultane a undelor de curent şi de tensiune, sinusoidele echivalente trebuie să îndeplinească condiţia de a da în circuit aceeaşi putere ca şi undele deformante corespunzătoare.

9.3.1.4. **Criterii de caracterizare a unei unde periodice nesinusoidale.** Caracterizarea unui regim deformant se face cu ajutorul unor criterii propuse în acest scop. Aceste criterii determină un anumit raport al undelor periodice nesinusoidale faţă de acelea sinusoidale, utilizîndu-se în acest scop mărimile caracteristice ale regimului deformant.

a) Coeficientul de deformare a undei periodice nesinusoidale. Prescripţiile STAS 1893—50 definesc noţiunea de coeficient de deformare a undei periodice nesinusoidale a tensiunii sau curentului prin cea mai mare valoare, exprimată în procente, a raportului

$$d = |a - g| |s$$

în care *a* este ordonata curbei reprezentative a undei periodice date, *g* ordonata curbei reprezentative a armonicii fundamentale a undei date corespunzînd la aceeaşi abscisă ca şi pentru *a*, *s* amplitudinea curbei reprezentative a armonicii fundamentale (fig. 9.30). Pentru stabilirea armonicii fundamentale trebuie folosite cel puţin 12 puncte ale curbei. În locul armonicii fundamentale se poate întrebuinţa sinusoida echivalentă.

Conform acestor prescripţii, forma undei poate fi considerată sinusoidală dacă $d \leqslant 5\%$ pentru generatoare sincrone mai mari de 1000 kVA, sau $d \leqslant 10\%$

* Numită metoda BELFILS. Vezi [36]
** Vezi [81]

pentru generatoare sincrone cuprinse între 100 şi 1000 kVA; aceste cifre se referă la unda de tensiune produsă de generatoarele respective. Prescripţiile nu dau nici o limită în ceea ce priveşte unda de curent. Prin extindere însă se poate admite că, o undă de curent este practic sinusoidală dacă $d \leqslant 5\%$.

Aceste prevederi au la origine vechi prescripţii *VDE*.

Criteriul de definire a unui regim deformant bazat pe această definire a coeficientului de deformare a undei periodice nesinusoidale, poate conduce la lucruri absurde. În afară de aceasta, el este practic inaplicabil.

Într-adevăr*, deformarea geometrică a ordonatelor unei oscilograme nu este capabilă să caracterizeze fenomenul fizic corespunzător. Fie unda periodică nesinusoidală

$$e = 100 \sin \omega t + 5 \sin 3 \omega t.$$

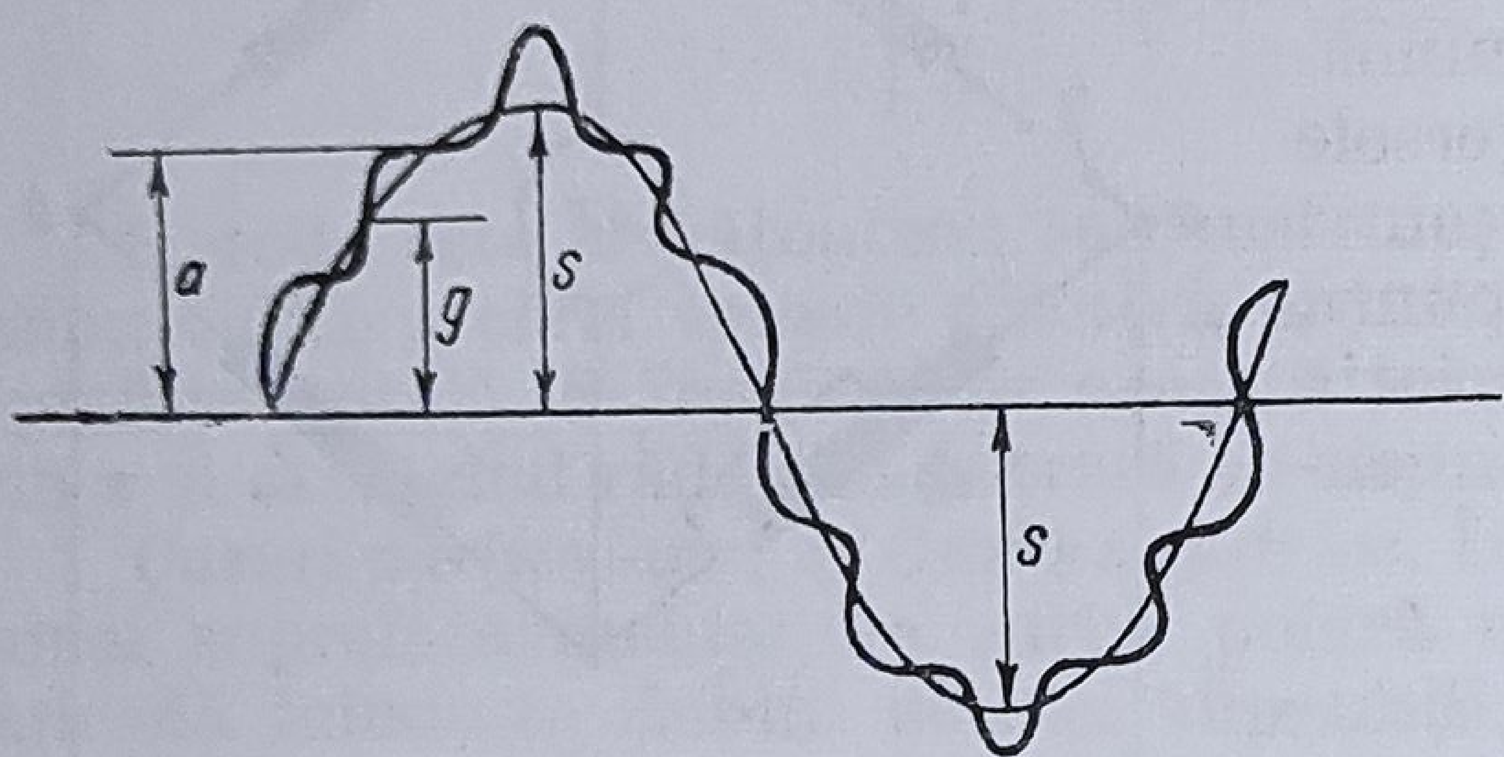


Fig. 9.30. Determinarea coeficientului de deformare.

Aplicînd criteriul adoptat, coeficientul său de deformare este $d = 5\%$. Dacă acestei unde, i se adaugă unda

$$e' = 5\left[\frac{1}{3} \sin 9 \omega t + \frac{1}{5} \sin 15 \omega t + \ldots + \frac{1}{2k+1} \sin 3(2k+1) \omega t\right],$$

se obţine unda nesinusoidală rezultantă

$$e + e' = 100 \sin \omega t + 5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin 3(2k+1) \omega t,$$

a cărei sumă din membrul al doilea reprezintă o undă dreptunghiulară, avînd amplitudinea maximă $\pm \frac{5\pi}{4}$.

Calculînd coeficientul de deformare a undei totale $e + e'$ se găseşte $d = 3,93\%$, ceea ce este absurd deoarece ar însemna că o undă mai deformată este mai bună decît o undă mai puţin deformată.

Aplicînd teoria erorilor expresiei de definiţie a coeficientului de deformare se găseşte

$$\frac{\Delta d}{d} = \left|\frac{\Delta a + \Delta g}{a - g}\right| + \left|\frac{\Delta s}{s}\right|.$$

Ordonata maximă ce se poate obţine cu un bun oscilograf modern este de ordinul 30—40 mm. Fie deci $s = 40$ mm. Pentru a avea $d = 5\%$, este necesar ca $a - g = 2$ mm. Citirile ordonatelor a, g şi s nu se pot face efectiv, decît cu o eroare absolută, fără precizare de semn, de cel puţin 0,5 mm. Rezultă dar că $\Delta a + \Delta g \cong 1$ mm şi $\Delta s = 0,5$ mm, de unde $\frac{\Delta d}{d} > 50\%$. În consecinţă, coeficientul de deformare poate fi determinat cu o eroare care poate fi de ordinul de 50% şi deci cu o valabilitate cu totul dubioasă.

* Vezi [62]

b) Factorul de formă. Se numeşte *factor de formă* al unei unde periodice nesinusoidale raportul dintre valoarea efectivă a undei, evaluată pe jumătate de perioadă şi valoarea medie a acestei unde evaluată tot pe jumătate de perioadă

$$\alpha = \frac{Y}{Y_{med}} \tag{9.64}$$

Astfel, pentru o undă periodică sinusoidală se găseşte

$$\alpha = \frac{Y}{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} Y} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}111.$$

În cazul unei funcţii nesinusoidale

$$Y = \sqrt{Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots}$$

şi

$$Y_{med} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \left(Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\, Y_k \sin k\omega t \right) dt = Y_0 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} Y_k$$

astfel că factorul de formă este

$$\alpha = \frac{\sqrt{Y_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^2}}{\frac{\pi Y_0}{2\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} Y_k} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

în care k este un număr *impar*, pentru armonicile pare valoarea medie fiind nulă şi pe o jumătate de perioadă* .

Factorul de formă nu poate fi considerat ca un criteriu de caracterizare a unei unde nesinusoidale, deoarece se pot găsi unde periodice nesinusoidale pentru care

$$\sqrt{Y_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^2} = \frac{\pi Y_0}{2\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} Y_k$$

şi, în acest caz, factorul de formă este egal cu $(\pi/2\sqrt{2}) = 1{,}111$ adică exact cu acel al undelor periodice sinusoidale. De exemplu, dacă se adaugă la o undă fundamentală o armonică de ordin n, Y_n, a cărei amplitudine îndeplineşte condiţia,

$$\frac{Y_n}{Y_1} = \frac{2n}{n^2 - 1},$$

* În acest caz, calculele corespunzătoare se fac pentru un sfert de perioadă.

n fiind oarecare, atunci factorul de formă al undei complexe

$$y = \sqrt{2}\ Y_1 \sin \omega t + \sqrt{2}\ Y_n \sin n\omega t$$

este 1,111 ca şi al undei sinusoidale.

c) Coeficientul de distorsiune. Se numeşte *coeficient de distorsiune* al unei unde nesinusoidale, raportul dintre valoarea efectivă a reziduului şi valoarea efectivă a curbei. Expresia sa matematică este deci

$$\delta = \frac{Y_d}{Y}. \tag{9.65}$$

Acest criteriu a fost adoptat de Comitetul Internaţional pentru studiul fenomenelor reactive şi deformante, în 1947, ca fiind criteriul de caracterizare a unei unde deformante.

O undă oarecare este considerată practic sinusoidală şi regimul corespunzător practic sinusoidal, dacă $\delta \leqslant 5\%$.

Trebuie observat că nici acest criteriu nu este absolut; într-adevăr el nu poate distinge două unde periodice nesinusoidale formate din acelaşi număr de armonici avînd aceleaşi amplitudini, dar defazaje diferite. Pînă la găsirea unui criteriu mai corespunzător, acest criteriu rămîne cel oficial admis.

d) Factorul de vîrf sau de creastă. La încercarea de tensiune a materialelor, precum şi la încercarea de izolaţie a maşinilor şi instalaţiilor electrice, trebuie ţinut seama de valoarea maximă a undei de tensiune, deoarece eventuala străpungere se datorează acestei tensiuni maxime. Cu aparatele obişnuite de măsură folosite se măsoară numai mărimile efective, care sînt oarecum o valoare medie a mărimii alternative considerate. Or, în cazul regimului deformant, se poate întîmpla ca o piesă de bună calitate să fie străpunsă la o anumită valoare a tensiunii efective, iar o alta, ştiută a fi de calitate inferioară, să reziste acestei probe pentru aceeaşi valoare a tensiunii de încercare.

Aceasta se datorează faptului că, într-un asemenea regim se poate întîmpla ca, pentru o aceeaşi valoare efectivă, diversele unde să aibă valori maxime diferite. Este deci necesar a se cunoaşte legătura ce există între valoarea maximă a unei unde periodice oarecare şi valoarea efectivă a acestei unde.

Se defineşte raportul

$$f_v = \frac{U_{max}}{U}, \tag{9.66}$$

dintre valoarea maximă a undei şi valoarea sa efectivă ca *factorul de vîrf* sau *factorul de creastă*. Pentru o undă periodică sinusoidală factorul de vîrf este

$$f_v = \frac{U\sqrt{2}}{U} = 1,41,$$

U fiind valoarea efectivă a curbei.

Se spune că o undă pentru care $f_v < 1,41$ este o *undă turtită*; o undă, pentru care $f_v > 1,41$, este o *undă ascuţită*.

Pentru a ilustra cele afirmate mai sus, fie undele de tensiune

$$U_1 = 10000\sqrt{2}\ \sin\ \omega t - 2000\sqrt{2}\ \sin\ 3\omega t,$$

$$U_2 = 10000\sqrt{2}\ \sin\ \omega t + 2000\sqrt{2}\ \sin\ 3\omega t,$$

care au amîndouă aceeași valoare efectivă

$$U = \sqrt{10000^2 + 2000^2} = 10\,198\ \text{V}.$$

Este ușor de văzut că valoarea maximă a primei unde este

$$10000\sqrt{2} + 2000\sqrt{2} = 12000\sqrt{2} = 17\,000\ \text{V},$$

iar a undei a doua

$$10000\sqrt{2} - 2000\sqrt{2} = 8000\sqrt{2} = 11\,300\ \text{V},$$

cele două armonici componente ale lor fiind în opoziție și în fază.

Factorul de vîrf al primei unde este

$$f_v' = \frac{17000}{10198} = 1{,}665,$$

unda fiind deci ascuțită, iar al celei de a doua

$$f_v'' = \frac{11300}{10198} = 1{,}110,$$

unda fiind turtită.

Factorul de vîrf are o mare importanță în tehnica încercărilor; el se utilizează drept criteriu de caracterizare a undelor periodice nesinusoidale, numai din punctul de vedere arătat în cele ce preced.

9.3.2. PUTEREA ÎN REGIMUL DEFORMANT

9.3.2.1. Puterea activă. Puterea activă într-un regim periodic oarecare este definită cu valoarea medie de-a lungul unei perioade a produsului ui, în care u și i sînt valorile instantanee ale tensiunii și curentului, adică*

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui\ dt.$$

* Vezi și 4.3.2.2.

Fie

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sqrt{2} \sin (k\omega t - \alpha_k),$$

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sqrt{2} \sin (k\omega t - \beta_k).$$

Introducînd aceste valori în expresia de mai sus, efectuînd produsul şi transformînd produsele de linii trigonometrice în sume, se obţine

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T U_0 I_0 \, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T}\int_0^T U_k I_l \Big[\cos [(k-l)\,\omega t - (\alpha_k - \beta_l)] -$$

$$- \cos [(k+l)\,\omega t - (\alpha_k + \beta_l)]\Big] \, dt\,;$$

pentru $k \neq l$ toate integralele definite de mai sus sînt nule; pentru $k = l$ rămîn numai integralele de forma

$$\frac{1}{T}\int_0^T U_k I_k \cos (\beta_k - \alpha_k) \, dt = U_k I_k \cos (\beta_k - \alpha_k).$$

Notînd

$$\varphi_k = \beta_k - \alpha_k$$

atunci expresia puterii active este

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k\,, \tag{9.67}$$

adică puterea activă în regim deformant este egală cu suma puterilor active, dată de diversele perechi de armonici.

Calculul expresiei puterii active se poate deduce şi din expresia seriei FOURIER cu termeni complecşi. Într-adevăr, făcînd

$$f_1(t) = u(t) \qquad \text{şi} \qquad f_2(t) = i(t)$$

şi ţinînd seama de relaţiile (9.36) şi (9.41) se obţine

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot i(t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{U}_k \underline{I}^*_{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\underline{U}_k \underline{I}_{-k} + \underline{U}_{-k} \underline{I}_k\Big] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [U'_k I'_k + U''_k I''_k]. \tag{9.68}$$

Însă*

$$U'_k = U_k \cos \alpha_k, \quad U''_k = U_k \sin \alpha_k, \quad \text{tg}\, \alpha_k = \frac{U''_k}{U'_k}$$

$$I'_k = I_k \cos \beta_k, \quad I''_k = I_k \sin \beta_k, \quad \text{tg}\, \beta_k = \frac{I''_k}{I'_k}$$

$$\alpha_k - \beta_k = \varphi_k,$$

astfel, că relaţia (9.68) devine

$$\sum_{k=0}^{\infty} [U'_k I'_k + U''_k I''_k] = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos(\alpha_k - \beta_k) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k,$$

adică tocmai expresia puterii active în regimul deformant.

Puterea activă în regim deformant se poate măsura cu orice wattmetru electrodinamic, aparatul dînd măsura mărimii respective cu o eroare acceptabilă**. Unitatea de măsură a puterii active este *watt*-ul (W).

9.3.2.2. **Puterea reactivă.** Definirea*** puterii reactive în regimul sinusoidal nu prezintă nici o dificultate. Pentru aceasta se porneşte de la noţiunea de *putere aparentă* (4.115)

$$S = U I.$$

Comparînd această relaţie cu relaţia puterii active (4.111)

$$P = U I \cos \varphi,$$

se vede imediat, că numeric

$$S > P.$$

Fie P_c *puterea complementară* care lipseşte puterii active pentru a fi egală numeric cu puterea aparentă. Se defineşte această putere complementară ca diferenţa geometrică dintre puterea aparentă şi puterea activă, adică

$$P_c = \sqrt{S^2 - P^2},$$

sau, ţinînd seama de expresiile (4.111) şi(4.115), se găseşte

$$P_c = \sqrt{U^2 I^2 - U^2 I^2 \cos^2 \varphi} = UI \sin \varphi = Q, \qquad (4.114)$$

adică, în regimul sinusoidal puterea complementară este chiar puterea reactivă.

---

* Vezi 9.2.2.2.
** Vezi 9.5.4.4.
*** Vezi 9.5.4.4.

Cele trei puteri, S, P şi Q care apar în sistemele sinusoidale de curent alternativ, formează un sistem ortogonal şi care poate fi exprimat prin relaţia fazorială

$$\underline{S} = P \pm \mathrm{j}Q,$$

semnul $\pm$ corespunzînd unei puteri reactive inductive, respectiv capacitive*.

Definirea puterii reactive într-un regim deformant este mult mai grea şi încă astăzi, după peste 40 ani de discuţii, electricienii nu au căzut încă de acord asupra unei definiţii unitare a acestei mărimi.

Sînt două concepţii care stau la baza definiţiilor date pentru puterea reactivă în regim deformant.

Prima concepţie este legată de noţiunea de energie medie a cîmpurilor magnetice şi electrice, puterea reactivă fiind definită de expresia

$$Q = 2\omega\,(W_m - W_e)$$

în care

$$W_m = \frac{1}{2}\,LI^2$$

este energia cîmpului magnetic şi

$$W_e = \frac{1}{2}\,CU^2$$

este energia cîmpului electric.

Ţinînd seama de aceasta, au fost propuse o serie de definiţii convenţionale. Astfel, A. Liénard a propus pentru definirea puterii reactive expresia

$$Q = -\frac{\omega}{T}\int_0^T u\,q\,\mathrm{d}t,$$

în care u este valoarea instantanee a tensiunii, q valoarea instantanee a cantităţii de electricitate şi ω pulsaţia armonicii fundamentale. În regimul deformant, această relaţie conduce la expresia

$$Q_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,U_k I_k \sin\varphi_k \tag{9.69}$$

pentru puterea reactivă.

La o expresie identică conduce şi relaţia

$$Q = -\frac{\omega}{T}\int_0^T \varphi_i\,\mathrm{d}t$$

propusă de A. Iliovici, în care φ este un flux definit de relaţia $e = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, i curentul instantaneu, ω şi T pulsaţia şi perioada curentului alternativ al undei fundamentale.

---

* Vezi 4.3.7.4.

Expresia (9.69) poate fi măsurată cu ajutorul unui *varmetru* electrodinamic al cărui circuit voltmetric are o rezistență neglijabilă față de reactanța sa inductivă.

A. ILIOVICI a mai propus o expresie de definiție,

$$Q = -\frac{1}{\omega T}\int_0^T i\,\mathrm{d}e,$$

în care i și e sînt valorile instantanee ale curentului și tensiunii, iar ω și T pulsația și perioada undei fundamentale. Această relație conduce la expresia

$$Q_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k\, U_k I_k \sin\varphi_k \tag{9.70}$$

pentru puterea reactivă, care poate fi măsurată cu ajutorul unui *varmetru de inducție*, al cărui circuit voltmetric trebuie să aibă o rezistență neglijabilă față de reactanța sa inductivă. Ea mai poate fi măsurată și cu un *varmetru electrodinamic*, al cărui circuit voltmetric este constituit dintr-o reactanță capacitivă foarte puternică.

Aceste expresii de definiție sînt însă lipsite de o bază fizică admisibilă* . Într-adevăr, aceste expresii de putere reactivă sînt nesimetrice față de expresia puterii active (4.111).

În afară de aceasta, ansamblul de puteri active-reactive, sub forma (P, Q_1) sau (P, Q_2) nu are nici o corelație cu expresia (4.115) a puterii aparente.

În sfîrșit, definițiile de forma (9.69) și (9.70) conduc la unele concluzii inadmisibile. Astfel, fie un regim deformant format din unda fundamenală și armonica 3. Dacă printr-un mijloc de rezonanță (filtru) suprimăm armonica fundamentală — ceea ce este totdeauna posibil, puterea reactivă în circuit devine

$$Q_1 = \frac{1}{3} U_3 I_3 \sin\varphi_3,$$

sau,

$$Q_2 = 3 U_3 I_3 \sin\varphi_3,$$

ceea ce este cu totul în contradicție cu expresia (4.114) consacrată a puteri. reactive, regimul în acest caz — după filtrare — fiind un regim pur sinusoidal

Însăși faptul că pot exista două expresii pentru a exprima aceeași mărime într-un același regim deformant, diferite între ele, dovedește caracterul convențional arbitrar al acestor definiții.

Simpla posibilitate de măsurare nu constituie o justificare suficientă. Dealtfel, relațiile (9.69) și (9.70) nu au căpătat nici un fel de aplicație practică și s-au dovedit incapabile a justifica toată gama de fenomene ale unui regim deformant**.

A doua concepție se datorează Acad. prof. C. I. BUDEANU și se bazează pe metoda separării *puterii aparente* în trei termeni ortogonali.

S-a ajuns la această concepție pornindu-se de la definirea puterii reactive în regim sinusoidal.

---

* Pentru detalii vezi [56, 57, 64].

** Vezi [23], o aplicație ce s-a dat relației (9.70).

Ca şi în regimul sinusoidal, în regimul nesinusoidal puterea aparentă este formată din doi termeni ortogonali, puterea activă şi puterea complementară, adică

$$S^2 = P^2 + P_c^2 = U^2 I^2$$

U şi I fiind valorile efective ale tensiunii şi curentului.

În regim deformant

$$U^2 = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^2, \quad I^2 = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2$$

şi dacă φ_n este unghiul de defazaj al armonicii de curent de ordinul n faţă de armonica de tensiune de ordinul n, relaţia a doua de mai sus poate fi scrisă

$$I^2 = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 (\cos^2 \varphi_n + \sin^2 \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \cos^2 \varphi_n + \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \sin^2 \varphi_n$$

şi deci expresia puterii aparente devine

$$S^2 = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^2 \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \cos^2 \varphi_n + \sum_{n=0}^{\infty} U_n^2 \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \sin^2 \varphi_n . \tag{9.71}$$

Ţinînd seama de identitatea lui LAGRANGE

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m^2 \sum_{m=0}^{\infty} b_m^2 = \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m b_m \right)^2 + \sum_{\substack{m,n=0 \\ m \neq n}}^{\infty} (a_m b_n - a_n b_m)^2,$$

relaţia (9.71) poate fi scrisă

$$S^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n \right)^2 + \sum_{m,n=0}^{\infty} (U_m I_n \cos \varphi_n - U_n I_m \cos \varphi_m)^2 +$$

$$+ \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n \right)^2 + \sum_{m,n=0}^{\infty} (U_m I_n \sin \varphi_n - U_n I_m \sin \varphi_m)^2 .$$

În această expresie, primul termen este pătratul puterii active. Rezultă

$$P_c^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n \right)^2 + \sum_{m,n=0}^{\infty} (U_m I_n \cos \varphi_n - U_n I_m \cos \varphi_m)^2 +$$

$$+ \sum_{m,n=0}^{\infty} (U_m I_n \sin \varphi_n - U_n I_m \sin \varphi_m)^2 \quad (m \neq n). \tag{9.72}$$

Termenul

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n \right)^2$$

este pătratul sumei puterilor reactive ale fiecărui grup de armonici în parte.

Prof. BUDEANU a propus, şi această propunere a fost acceptată de C.E.I.* de a se defini puterea reactivă prin relaţia

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n , \tag{9.73}$$

obţinîndu-se astfel o expresie analoagă cu aceea a puterii active.

Puterea reactivă definită prin această expresie nu poate fi măsurată cu aparatele de măsură clasice** . Din studiile ce s-au făcut însă*** , s-a constatat că eroarea de determinare a puterii reactive în regim deformant, folosindu-se un varmetru electrodinamic, care măsoară expresia (9.69), rămîne mai mică decît 2%. Măsurarea exactă a acestei mărimi se poate face cu *PQD*-metrul****.

Notînd cu D^2 ultimii doi termeni ai expresiei (9.72), puterea aparentă poate fi scrisă sub forma

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \tag{9.74}$$

ceea ce arată că ea poate fi descompusă, în regimul deformant, în trei termeni ortogonali care sînt : P puterea activă, Q puterea reactivă şi D *puterea deformantă*.

Mai rezultă de aici, că puterea complementară în regim deformant este egală cu suma geometrică a puterii reactive şi a puterii deformante

$$P_c = \sqrt{Q^2 + D^2}.$$

9.3.2.3. **Puterea deformantă.** Expresia

$$D = \sqrt{\sum_{m,n}^{\infty} (U_m I_n \cos \varphi_n - U_n I_m \cos \varphi_m)^2 + (U_m I_n \sin \varphi_n - U_n I_m \sin \varphi_m)^2} \tag{9.75}$$

a fost introdusă în electrotehnică de Prof. BUDEANU sub denumirea de *putere deformantă*. Numirea este logică. Într-adevăr, D are dimensiunile unei puteri şi ea se datorează deformării undelor de curent şi de tensiune. Noţiunea este azi acceptată de electricienii din toată lumea, iar teoria ei figurează în toate tratatele clasice de electrotehnică. Puterea deformantă nu poate fi măsurată cu aparatele de măsură clasice de care se dispune astăzi. Ea se poate determina deocamdată numai prin calcul din descompunerea în armonici a undelor de curent şi de tensiune ridicate simultan***** sau cu ajutorul *PQD*-metrului.

Nu s-a fixat încă o unitate de măsură pentru această mărime.

Prin analogie cu unitatea de măsură pentru puterea reactivă, Prof. BUDEANU a propus *vad*-ul, al cărui nume provine din iniţialele cuvintelor *Volt-Amper-Deformant*, şi al cărui simbol este VAD.

---

* Vezi [298] pag. 216 ; C.E.I. Comisia electrotehnică internaţională.

** Vezi [23] ; vezi şi [5]

*** Vezi [5]

**** Vezi [23, 24] Aparatul a fost brevetat în ţară şi în străinătate şi la expoziţia internaţională de la Nürnberg, în 1969, a obţinut medalia de aur.

***** Vezi [23] unde se indică un mijloc de măsurare a puterii deformante cu ajutorul unui calculator electronic de tip analogic.

Desfăcînd parantezele de sub semnul sumă în expresia (9.75), expresia puterii deformante poate fi pusă sub forma

$$D = \sqrt{\sum_{m,n}^{\infty} [U_m^2 I_n^2 + U_n^2 I_m^2 - 2U_m U_n I_m I_n \cos(\varphi_m - \varphi_n)]}, \tag{9.76}$$

care este expresia clasică a acestei puteri, sumarea făcîndu-se prin permutarea circulară a indicilor, directă şi inversă.

Pentru a vedea cînd puterea deformantă se anulează, se pune expresia (9.76) sub forma

$$D = \sqrt{\sum_{m,n}^{\infty} \left[(U_m I_a - U_n I_m)^2 + 4\, U_m U_n I_m I_n \sin^2 \frac{\varphi_m - \varphi_n}{2} \right]},$$

care se anulează dacă sînt îndeplinite simultan condiţiile

$$(U_m I_n - U_n I_m)^2 = 0 \text{ şi } \sin^2 \frac{\varphi_m - \varphi_n}{2} = 0$$

şi care sînt satisfăcute atunci cînd

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \ldots = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_n}{I_n} = \ldots$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots \varphi_m = \varphi_n = \ldots,$$

adică, trebuie ca ambele unde să aibă armonicile de curent şi de tensiune de acelaşi ordin, proporţionale, cu alte cuvinte undele nesinusoidale de curent şi de tensiune să fie *asemenea* şi *în fază*.

În practică acest caz nu poate fi realizat, decît atunci cînd receptorul alimentat cu tensiunea nesinusoidală

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \sin(n\,\omega\, t - \varphi_n)$$

este o rezistenţă pură, fără urmă de reactanţă inductivă sau capacitivă. În acest caz

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \ldots = \frac{U_n}{I_n} = \ldots = R,$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \ldots = 0.$$

Un alt caz particular de considerat este acela în care numai unda de curent este deformată, unda de tensiune putînd fi admisă practic sinusoidală. În acest caz

$$U_1 = U;\; U_0 = U_2 = U_3 = \ldots = U_n = \ldots = 0$$

şi relaţia (9.76) devine

$$D = \sqrt{U^2I_0^2 + U^2I_2^2 + \ldots + U^2I_n^2 + \ldots} = U\sqrt{I_0^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots + I_n^2 + \ldots} = U\, I_d \tag{9.77}$$

I_d fiind reziduul deformant al undei de curent.

Relaţia (9.77) poate fi folosită în practică, într-o primă aproximaţie, la determinarea puterii deformante.

Pentru cazul cînd unda de tensiune este practic sinusoidală, calculul puterii deformante cu ajutorul relaţiei (9.77) dă rezultate suficiente. Aproximaţia poate fi considerată suficientă atît timp cît coeficientul de deformaţie al undei tensiunii rămîne mai mic de 20%. Cînd acest coeficient depăşeşte cifra de mai sus, relaţia (9.77) nu mai este suficientă şi puterea deformantă poate fi calculată cu destulă aproximaţie cu relaţia *

$$D = UI_d + U_dI\,; \tag{9.78}$$

ea provine din relaţia precedentă la care s-a adăugat un termen corectiv, prin care se presupune că unda de curent este practic sinusoidală şi numai tensiunea este deformată, U_d fiind reziduul deformant al tensiunii.

O formulă simplificată, dar care permite calculul puterii deformante cu o foarte mare precizie, eroarea de determinare în raport cu puterea calculată cu ajutorul formulei exacte (9.76) fiind practic nulă, este următoarea, propusă de Acad. prof. ing. BUDEANU **

$$D = \sqrt{U_1^2I_d^2 + U_d^2I_1^2 - 2\,U_1I_1\sum_{\substack{m=0\\ m\neq 1}}^{\infty} U_mI_m\cos(\varphi_1 - \varphi_m)}\,.$$

9.3.2.4. Măsurarea puterilor în regim deformant. PQD-metrul. Pentru măsurarea puterilor (sau energiilor) activă, reactivă şi deformantă într-un regim energetic deformant, a fost realizat*** un aparat PQD-metru**** care este capabil să dea simultan măsura acestor mărimi.

În principiu, aparatul este un calculator electronic hibrid specializat, ce cuprinde două părţi principale:

a) o parte care calculează puterile activă şi reactivă, pe baza unei analize spectrale a tensiunii şi curentului şi

b) o parte care calculează puterea deformantă pe baza determinării valorilor efective a undei fundamentale şi a reziduului deformant ale undelor de tensiune şi curent (fig. 9.31).

Prin intermediul a două circuite de intrare, de structură analoagă cu circuitele de acest tip din aparatele electronice de măsură*****, se aplică semnalele de tensiune şi de curent blocului de calcul a puterilor activă şi reactivă şi blocului de calcul a puterii deformante.

---

* Vezi [5] pag. 77

** Vezi [61] pag. 138

*** Vezi [24].

**** P, Q, D sînt simbolurile internaţionale ale celor trei mărimi de puteri.

***** Vezi [2] sau [266].

Analiza armonică a undelor de curent și de tensiune se face prin intermediul a două filtre active analogice cu ieșire digitală. Filtrul activ analogic cu ieșire digitală este alcătuit din două amplificatoare operaționale, funcționînd ca

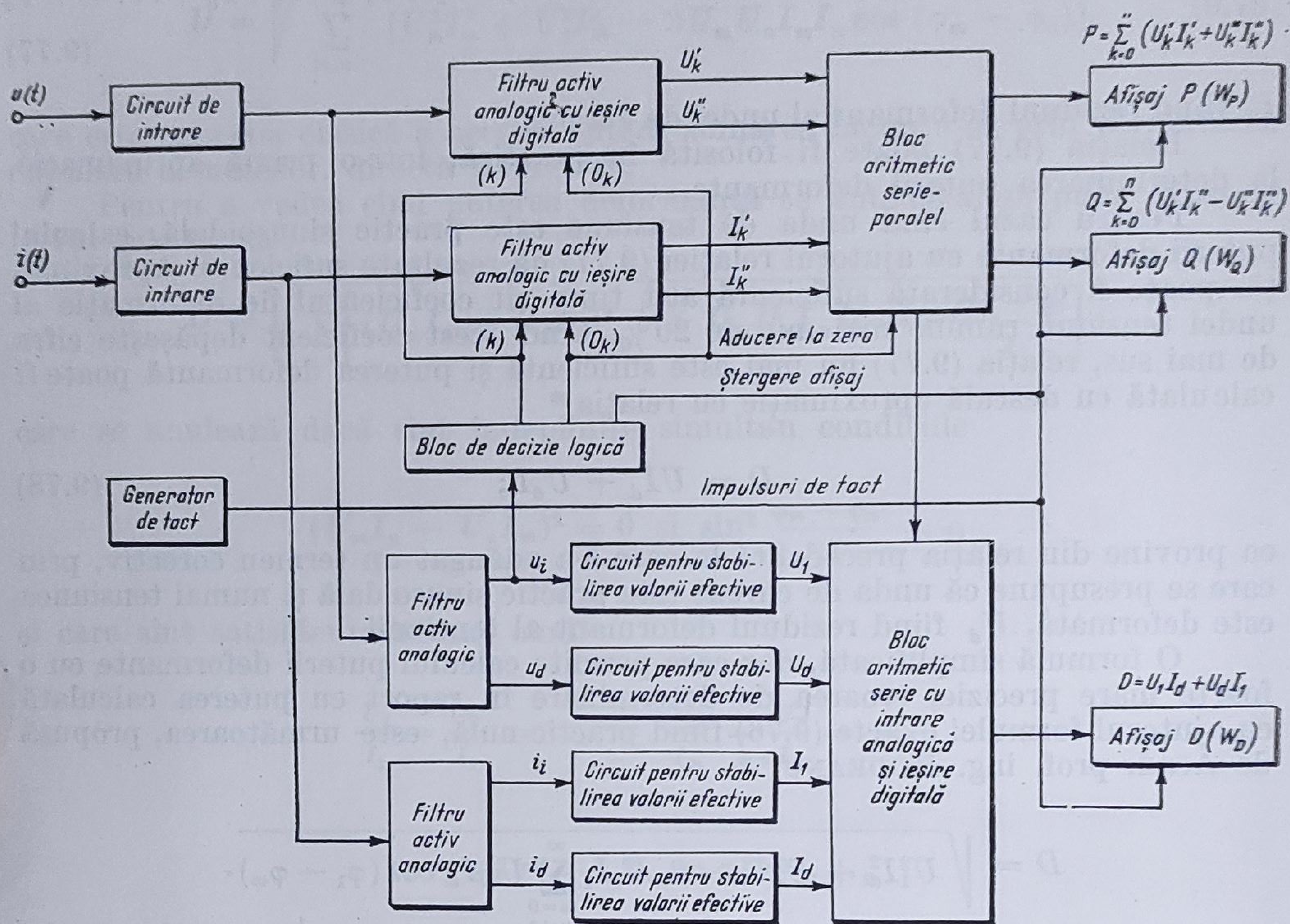


Fig. 9.31. Schema bloc a PQD-metrului.

integratoare, conectate în buclă închisă prin intermediul a două atenuatoare cu rezistență de transfer comandată de blocul de comandă, funcționînd ca multiplicatoare hibride, cu o intrare analogică și o intrare digitală (fig. 9.32). Acest model structural analogic satisface o ecuație diferențială matriceală de forma

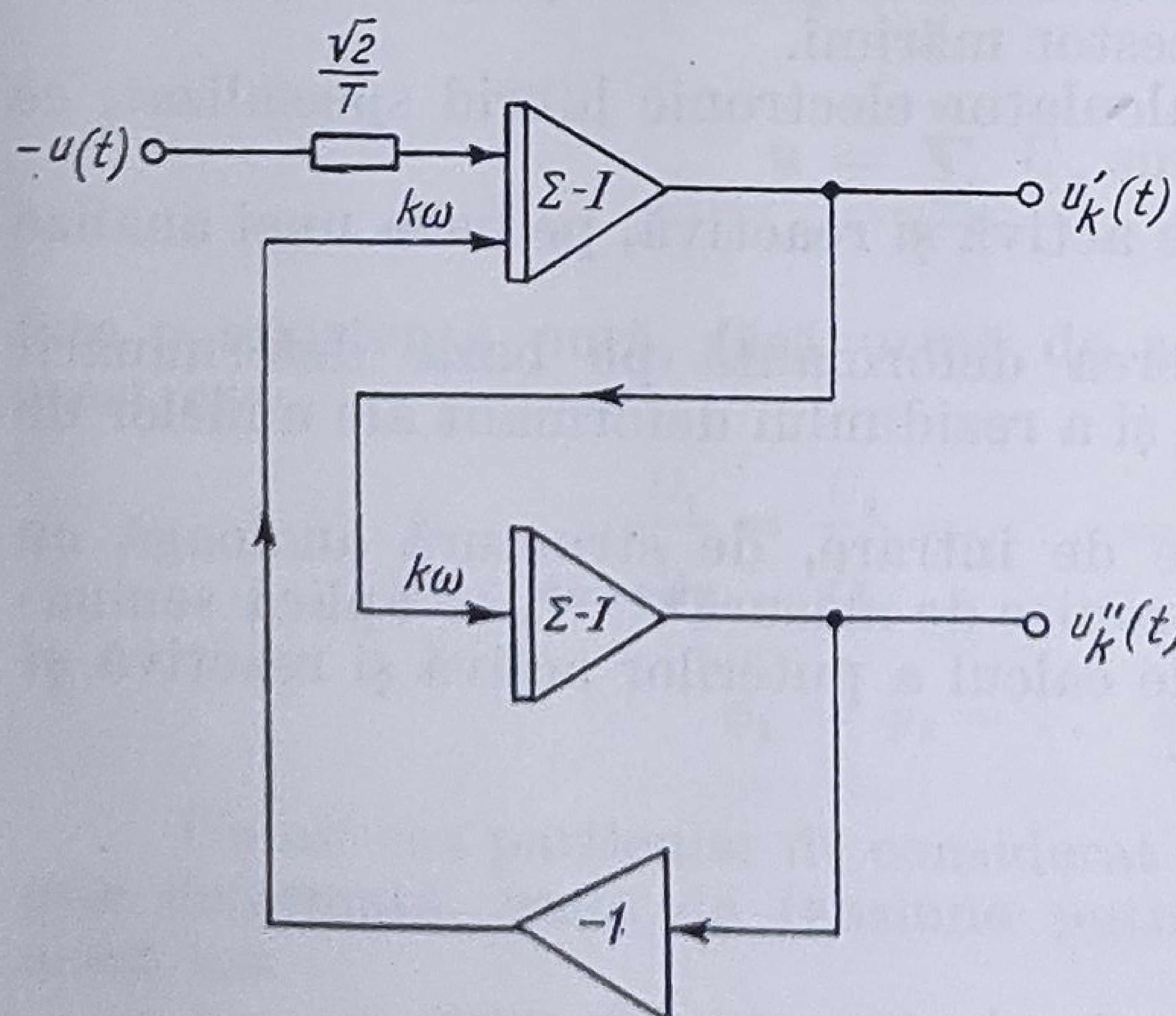


Fig. 9.32. Analizor de armonici.

$$\frac{d}{dt}[u_k(t)] = [A_k]\ [u_k(t)] + [B]\ u(t),$$

unde

$$[u_k(t)] = \begin{bmatrix} u_k'(t) \\ u_k''(t) \end{bmatrix};\ [A_k] = \begin{bmatrix} 0 & k\omega \\ -k\omega & 0 \end{bmatrix};$$

$$[B_k] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{T} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Circuitul realizează analizarea succesiva a armonicilor de ordinul $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ale unei tensiuni periodice nesinusoidale, de frecvență industrială. Analiza fiecărei armonici necesită un interval de două perioade : în prima perioadă — perioada activă a filtrului funcționînd ca integrator — se obțin

— valoarea componentei continue $U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{u}(t)\mathrm{d}t$;

— valoarea efectivă a armonicii în cosinus $U_k' = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^T \mathrm{u}(t)\cos k\omega t\, \mathrm{d}t$;

— valoarea efectivă a armonicii în sinus $U_k'' = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^T \mathrm{u}(t)\sin k\omega t\, \mathrm{d}t$

și se realizează astfel descompunerea semnalului de intrare u(t) sub forma aproximată a unei serii FOURIER

$$\mathrm{u}(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{n} (U_k' \sqrt{2} \cos k\omega t + U_k'' \sqrt{2} \sin k\omega t) ; \quad (9.79)$$

în a doua perioadă — perioada pasivă a filtrului — se realizează convertirea tensiune-durată a celor două semnale obținute, ceea ce permite convertirea analog-numerică a valorilor efective U_k' și U_k''.

În același mod se analizează și semnalul i(t).

Semnalele numerice de la ieșirea celor două filtre active analogice cu ieșire digitală sînt introduse într-un bloc de calcul aritmetic de tip serie-paralel, ce realizează multiplicarea și însumarea mărimilor U_k', I_k', U_k'', I_k'', astfel, încît să se obțină * în final puterea activă

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{n} U_k I_k \cos(\alpha_k - \beta_k) = \sum_{k=0}^{n} (U_k' I_k' + U_k'' I_k'') \quad (9.80)$$

și puterea reactivă

$$Q = \sum_{k=1}^{n} U_k I_k \sin(\alpha_k - \beta_k) = \sum_{k=1}^{n} (U_k' I_k'' - U_k'' I_k'). \quad (9.81)$$

Comenzile necesare succesiunii de operații, de analiză armonică a semnalelor, de convertire analog-numerică și de calcul aritmetic sînt date de blocul de comandă, iar ritmul unitar al întregului sistem este asigurat de un generator de tact.

Semnalele P și Q, calculate în blocul de calcul aritmetic, sau energiile corespunzătoare W_P și W_Q, calculate apoi prin integrare numerică, sînt afișate în sistem zecimal cu ajutorul unui bloc de afișare cu tuburi Nixie.

Partea din aparat ce servește la calculul puterii deformante cuprinde :

— două filtre active analogice, care realizează separarea undei fundamentale de tensiune și de curent $\left[u_1 = U_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_1),\ i_1 = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta_1)\right]$ de restul armonicilor $\left[u_d = \sum_{k=2}^{n} U_k\sqrt{2}\sin(k\omega t + \alpha_k),\ i_d = \sum_{k=2}^{n} I_k\sqrt{2}\sin(k\omega t + \beta_k)\right]$ ale semnalelor de tensiune și curent ;

* Relațiile (9.80) și (9.81) se obțin imediat : expresia tensiunii (sau curentului) sub forma (9.79) se obține din dezvoltarea unei expresii de forma (9.7) și identificare.

— patru circuite de calcul analogic a valorilor efective ale undelor fundamentale ($U_1 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [u_1(t)]^2 dt}$; I_1) și a reziduului deformant (U_d și I_d);

— un bloc de calcul aritmetic de tip serie, cu intrare analogică, care realizează convertirea analog-numerică, multiplicarea și însumarea semnalelor U_1, I_1, U_d, I_d, calculînd puterea deformantă D cu relația (9.78)

$$D = U_1 I_d + U_d I_1.$$

Puterea deformantă D, sau energia deformantă W_D, calculată ca în cazul precedent prin integrare numerică, este afișată în sistem zecimal de un bloc de afișaj analog cu cele utilizate pentru P și Q.

9.3.2.5. Conservarea puterilor în regim deformant. Principiul conservării puterilor, enunțat de P. BOUCHEROT în cazul rețelelor electrice în regimul sinusoidal în care nu există variație de frecvență, poate fi extins și în cazul regimului deformant și aplicat diverselor puteri caracteristice unui atare regim.

Demonstrația acestui principiu în regimul deformant a fost dată de mai mulți autori. *Acad. prof.* C. BUDEANU a dat însă o demonstrație generală, care se aplică atît regimului sinusoidal *, cît și regimului deformant.

În rețelele în care nu există variații de frecvență, principiul conservării puterilor se aplică diverselor puteri caracteristice unui regim deformant.

Fie o rețea complexă constituită din s laturi (fig. 9.33), fiecare din ele fiind străbătută de cîte un curent periodic nesinusoidal de forma

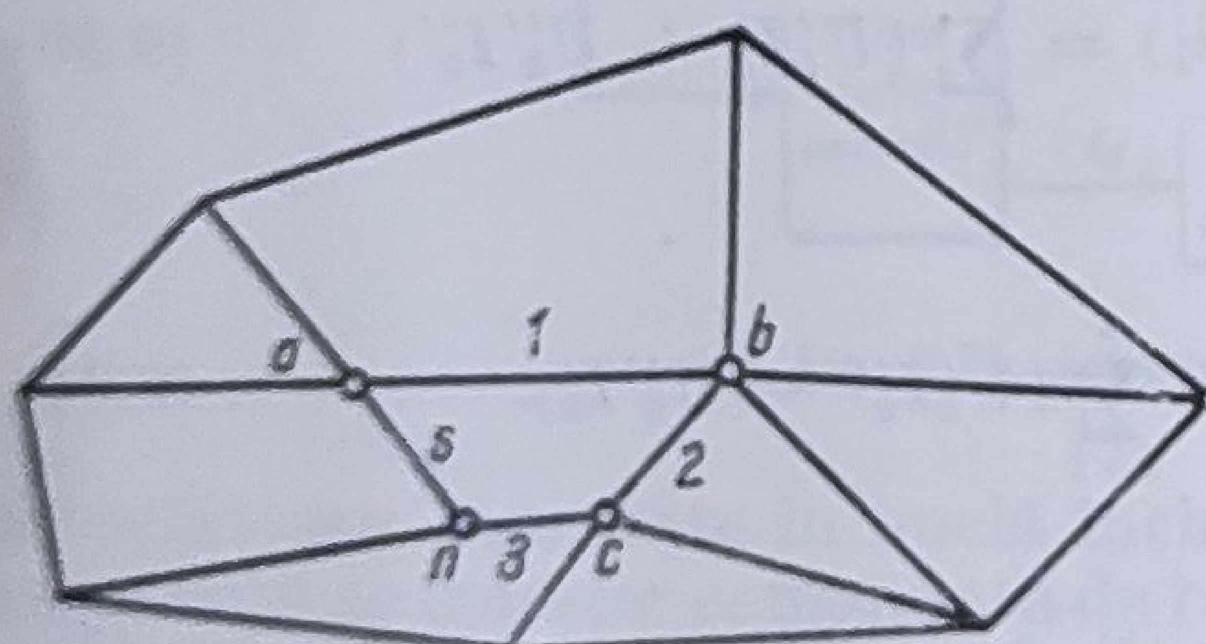


Fig. 9.33. Rețea complexă.

$$i = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sqrt{2} \sin(n\omega t - \beta_n),$$

iar tensiunile u dintre vîrfurile adiacente ale fiecărei laturi fiind de asemenea nesinusoidale, de forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sqrt{2} \sin(n\omega t - \alpha_n).$$

Teorema I a lui KIRCHHOFF se transformă, pentru fiecare nod, în n ecuații de forma $\Sigma\, i'_k = 0$ și în n ecuații de forma $\Sigma\, i''_k = 0$ în care diverșii curenți sînt:

$$\left.\begin{aligned} i'_k &= I_k \sqrt{2} \cos \beta_k \sin k\omega t \\ i''_k &= I_k \sqrt{2} \sin \beta_k \cos k\omega t \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots). \qquad (9.82)$$

Se poate deci considera rețeaua ca fiind formată din suprapunerea a $2n$ rețele, fiecare străbătută de unul din curenții (9.82) și avînd aceleași diferențe de potențial u la vîrfurile adiacente ale aceleiași laturi s a fiecărei rețele elementare.

* Vezi 4.3.7.7.

Pentru fiecare din cele $2n$ rețele, se poate scrie principiul de *conservare a puterilor instantanee*, obținîndu-se

$$\sum_{0}^{s} ui'_k = 0;\ \sum_{0}^{s} ui''_k = 0 \quad (k = 1,2,\ldots). \tag{9.83}$$

Ecuațiile (9.83) trebuind să fie satisfăcute, oricare ar fi timpul t, rezultă că va trebui să existe identic :

— pentru fiecare pereche de unde de ordinul k

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{1}^{s} U_k I_k \sin \alpha_k \sin \beta_k = 0\\
&\sum_{1}^{s} U_k I_k \cos \alpha_k \cos \beta_k = 0\\
&\sum_{1}^{s} U_k I_k \sin \alpha_k \cos \beta_k = 0\\
&\sum_{1}^{s} U_k I_k \cos \alpha_k \sin \beta_k = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{9.84}$$

— pentru fiecare grup de unde de ordinul k și l

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{1}^{s} U_k I_l \sin \alpha_k \sin \beta_l = 0 \qquad &&\sum_{1}^{s} U_l I_k \sin \alpha_l \sin \beta_k = 0\\
&\sum_{1}^{s} U_k I_l \cos \alpha_k \cos \beta_l = 0 &&\sum_{1}^{s} U_l I_k \cos \alpha_l \cos \beta_k = 0\\
&\sum_{1}^{s} U_k I_l \sin \alpha_k \cos \beta_l = 0 &&\sum_{1}^{s} U_l I_k \sin \alpha_l \cos \beta_k = 0\\
&\sum_{1}^{s} U_k I_l \cos \alpha_k \sin \beta_l = 0 &&\sum_{1}^{s} U_l I_k \cos \alpha_l \sin \beta_k = 0
\end{aligned}\right\} \tag{9.85}$$

Din relațiile (9.84), prin adunarea primelor două relații și prin scăderea relației a patra din a treia, sumînd apoi pentru toate armonicele, se deduce conservarea algebrică a următoarelor mărimi

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{1}^{s}\sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos(\alpha_k - \beta_k) = \sum_{1}^{s}\sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = \sum_{1}^{s}\sum_{k=1}^{\infty} P_k = 0\\
&\sum_{1}^{s}\sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin(\alpha_k - \beta_k) = \sum_{1}^{s}\sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k = \sum_{1}^{s}\sum_{k=1}^{\infty} Q_k = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{9.86}$$

adică, conservarea puterilor activă și reactivă în cazul regimului deformant.

Din relaţiile (9.85) se deduce conservarea algebrică în întreaga reţea a mărimilor

$$\left.\begin{aligned} \delta'_{kl} &= U_k I_l \cos(\alpha_k + \beta_l) - U_l I_k \cos(\alpha_l + \beta_k) \\ \delta''_{kl} &= U_k I_l \sin(\alpha_k + \beta_l) - U_l I_k \sin(\alpha_l + \beta_k), \end{aligned}\right\} \tag{9.87}$$

sub forma

$$\sum_1^s \delta'_{kl} = 0 \text{ şi } \sum_1^s \delta''_{kl} = 0, \tag{9.88}$$

a căror deducere din relaţiile (9.85) este evidentă.

Relaţiile (9.87) se numesc *puterile deformante elementare.*

Ecuaţiile (9.88) conduc la *conservarea vectorială* a sumei mărimilor δ'_{kl} şi δ''_{kl} considerate ca vectori ortogonali şi deci a mărimii

$$\sum_1^s \underline{D}_{kl} = \sum_1^s \delta'_{kl} + \mathrm{j} \sum_1^s \delta''_{kl} = \sum_1^s (\delta'_{kl} + \mathrm{j}\, \delta''_{kl}) = 0 \cdot$$

Puterile deformante elementare, extinse la toate armonicile, pot fi considerate componentele unui vector $\underline{D}$ în spaţiul cu n dimensiuni, în care diversele planuri care cuprind aceste puteri deformante elementare sînt toate ortogonale între ele în originea sistemului de referinţă. Modulul acestui vector este

$$|\underline{D}| = \sqrt{\sum_{k,l}^{\infty} \delta'^2_{kl} + \sum_{k,l}^{\infty} \delta''^2_{kl}} = \sqrt{\sum_{k,l}^{\infty} (\delta'^2_{kl} + \delta''^2_{kl})},$$

sau, ţinînd seama de relaţiile (9.83), se obţine în definitiv

$$|\underline{D}| = \sqrt{\sum_{\substack{k,l \\ k \neq l}}^{\infty} [U_k^2 I_l^2 + U_l^2 I_k^2 - 2\, U_k U_l I_k I_l \cos(\varphi_k - \varphi_l)]},$$

adică, tocmai expresia (9.76) a puterii deformante.

Aceasta poate fi arătată şi în alt mod. Într-adevăr, ansamblul grupelor de puteri deformante elementare de ordin $k\, l$, date de relaţia (9.87), pot fi exprimate global sub forma vectorială într-un plan kl

$$\underline{D}_{kl} = U_k I_l \underline{|\alpha_k + \beta_l} - U_l I_k \underline{|\alpha_l + \beta_k},$$

avînd modulul

$$|\underline{D}_{kl}| = D_{kl} = \sqrt{U_k^2 I_l^2 + U_l^2 I_k^2 - 2\, U_k U_l I_k I_l \cos(\varphi_k - \varphi_l)}.$$

Date fiind proprietăţile mărimilor efective ale curenţilor şi tensiunilor, cît şi ale tuturor componentelor armonice, se poate considera că toate planele kl, conţinînd armonicile de curent şi de tensiune de ordin k şi l, sînt normale între ele într-un spaţiu multidimensional.

În consecință, toți vectorii de puteri deformante elementare de ordin $k\,l, \ldots$, sînt normali între ei, avînd ca rezultantă

$$D = \sqrt{\sum_{k,l}^{\infty} D_{kl}^2} = \sqrt{\sum_{k,l}^{\infty} [U_k^2 I_l^2 + U_l^2 I_k^2 - 2\, U_k U_l I_k I_l \cos(\varphi_k - \varphi_l)]},$$

obținîndu-se din nou relația (9.76).

Rezultă dar, că puterea deformantă se conservă vectorial în întreaga rețea.

Din proprietățile de conservare algebrică ale mărimilor P și Q și de conservare vectorială a mărimii D, rezultă conservarea vectorială a mărimii

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2} = U\, I,$$

adică a puterii aparente, precum și a mărimii

$$P_c = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{Q^2 + D^2},$$

adică, a puterii fictive sau complementare.

9.3.2.6. **Factorul de putere în regim deformant.** Factorul de putere în regimul deformant se definește — ca și în regim sinusoidal — ca fiind raportul dintre puterea reală P și puterea aparentă S,

$$K = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}}. \tag{9.89}$$

Cum

$$P < \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2},$$

rezultă

$$K < 1.$$

Din relația (9.89) se vede că, în regimul deformant, chiar atunci cînd nu există o putere reactivă, $Q = 0$, factorul de putere rămîne mai mic decît 1 din cauza puterii deformante care apare în acest regim.

Factorul de putere este egal cu 1 numai în cazul cînd și puterea deformantă este nulă, ceea ce nu se întîmplă decît în cazul cînd undele de curent și tensiune sînt asemenea și au același defazaj *.

În regim deformant, factorul de putere poate fi pus și sub o altă formă.

Se definește expresia

$$\rho = \frac{Q}{P}, \tag{9.90}$$

ca *factorul reactiv* al regimului. El reprezintă raportul dintre puterea reactivă și puterea activă din circuit, în momentul considerat. Acest factor este un număr fără dimensiuni.

---

* Vezi 9.3.2.3.

De asemenea se definește expresia

$$\tau = \frac{D}{\sqrt{P^2 + Q^2}}, \tag{9.91}$$

ca *factorul deformant* al regimului. El reprezintă raportul dintre puterea totală deformantă și puterea totală nedeformantă; el este de asemenea un număr fără dimensiuni.

Dacă se notează

$$\text{tg } \varphi = \rho = \frac{Q}{P}$$

și

$$\text{tg } \xi = \tau = \frac{D}{\sqrt{P^2 + Q^2}},$$

se deduce

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2}} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

$$\cos \xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}} = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}}$$

și rezultă

$$\cos \varphi \cos \xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}} = K. \tag{9.92}$$

9.3.3. CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM DEFORMANT

9.3.3.1. **Legea lui Ohm într-un circuit electric liniar alimentat de o forță electromotoare periodică nesinusoidală.** Fie un circuit compus dintr-o rezistență R, un condensator imperfect de capacitate C și o inductanță L legate în serie, care este alimentat cu o forță electromotoare nesinusoidală e, R, C și L fiind mărimi constante.

Prin aplicarea celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff, între valorile instantanee ale forței electromotoare și ale curentului rezultant se poate scrie întotdeauna relația

$$e = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i \, dt; \tag{9.93}$$

funcția e fiind nesinusoidală, poate fi descompusă în serie Fourier

$$e = e_1 + e_2 + \ldots + e_n = \sum_1^n e_n,$$

n fiind oricît de mare.

Circuitul fiind liniar, dacă fiecare armonică ar fi fost singură, ar fi produs un curent dat de ecuația

$$e_n = Ri_n + L \frac{di_n}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_n \, dt,$$

astfel, că adunînd membru cu membru toate ecuațiile care se obțin pentru fiecare armonică în parte, rezultă

$$e = R\sum_1^n i_n + L\frac{d\sum_1^n i_n}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t \sum_1^n i_n \, dt.$$

Funcția $\sum_1^n i_n$ este deci o soluție a ecuației (9.93); ea poate reprezenta deci curentul produs de forța electromotoare nesinusoidală e. Se poate deci enunța următoarea teoremă:

În cazul cînd o forță electromotoare periodică nesinusoidală acționează într-un circuit liniar format dintr-o rezistență, un condensator și o inductanță în serie, curentul pe care-l produce poate fi considerat ca o suprapunere a tuturor curenților periodici sinusoidali, care ar fi produși separat de fiecare armonică în parte.

Astfel, dacă forța electromotoare este de forma

$$e = E_0 + E_1\sqrt{2}\sin\omega t + E_2\sqrt{2}\sin 2\omega t + \ldots$$

curentul rezultant este de forma

$$i = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi_1) + I_2\sqrt{2}\sin(2\,\omega t - \varphi_2) + \ldots$$

în care

$$\left.\begin{aligned} I_n &= \frac{E_n}{\sqrt{R^2 + \left(Ln\omega - \dfrac{1}{Cn\omega}\right)^2}} \\ \operatorname{tg}\varphi_n &= \frac{Ln\omega - \dfrac{1}{Cn\omega}}{R} \end{aligned}\right\} \tag{9.94}$$

În cazul cînd condensatorul are pierderi, apare și un termen constant de forma

$$I_0 = \frac{E_0}{R_T},$$

în care R_T este rezistența totală a circuitului.

9.3.3.2. Rezonanța în regimul deformant. Din relațiile (9.94) rezultă că, dacă

$$n\omega L = \frac{1}{n\omega C}$$

adică, dacă este satisfăcută condiţia de rezonanţă pentru armonica de ordinul n, intensitatea acesteia va fi maximă şi valoarea relativă a curentului corespunzător în raport cu celelalte armonici va fi cu atît mai mare, cu cît rezistenţa R a circuitului este mai mică. În aceste condiţii, curentul produs de forţa electromotoare nesinusoidală e de perioadă T va fi sensibil sinusoidal şi de perioadă T/n. Valoarea sa efectivă va fi egală cu cîtul dintre valoarea efectivă a armonicii de ordinul n a forţei electromotoare şi rezistenţa ohmică a circuitului.

Diferenţa de potenţial la bornele condensatorului sau ale inductanţei va deveni de asemenea foarte mare în raport cu forţa electromotoare dată, perioada ei fiind tot T/n.

Rezonanţa armonicilor poate explica unele supratensiuni anormale care pot să se producă în reţelele electrice cu cabluri, prezentînd deci o capacitate mare, funcţionînd într-un regim deformant. Este unul dintre efectele supărătoare ale regimului deformant.

9.3.3.3. **Studiul circuitelor electrice în regim deformant.** Studiul circuitelor electrice în regimul deformant prezintă unele particularităţi caracteristice acestui regim. În consecinţă, metodele folosite în regimul sinusoidal nu pot fi aplicate decît cu oarecare precauţie.

În general, metodele de studiu ale regimurilor deformante, utilizate în stadiul actual al cunoştinţelor noastre în această chestiune, pot fi grupate după cum urmează :

a) Metode în care se neglijează complet situaţia nesinusoidală a undelor de tensiune şi curent a regimului energetic respectiv. Această metodă poate fi aplicată în cazul cînd coeficientul de distorsiune al celor două unde de tensiune şi de curent este mai mic sau cel mult egal cu 5%.

În calcule de primă aproximaţie se poate utiliza această metodă şi în cazul cînd aceşti coeficienţi de distorsiune sînt mai mari decît 5%. Trebuie observat însă, că eroarea de calcul creşte odată cu creşterea coeficientului de distorsiune, iar concluziile la care se ajunge pot fi false.

b) Metoda sinusoidelor echivalente. Această metodă constă în a înlocui undele nesinusoidale de tensiune şi curent prin sinusoidele lor echivalente şi a studia circuitul electric corespunzător, ca în regim sinusoidal. Metoda conduce însă, în majoritatea cazurilor, la situaţii total discordante faţă de realitatea fizică.

Fie, de exemplu, regimul energetic deformant definit de

$$u = 200\sqrt{2}\sin\omega t,$$

$$i = 100\sqrt{2}\sin\omega t + 75\sqrt{2}\sin 3\omega t.$$

Pentru a determina sinusoida echivalentă a curentului, trebuie să determinăm puterea activă absorbită de circuit. Avem :

$$I = \sqrt{100^2 + 75^2} = 125\ \text{A};\ S = 200 \times 125 = 25\ \text{kVA};$$

$$D = 200 \times 75 = 15\ \text{kVAD}$$

şi deci,

$$P = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20\ \text{kW}.$$

Factorul de putere al sistemului este

$$k = \frac{P}{S} = 0{,}8.$$

Pentru sinusoida echivalentă, avem deci,

$$\varphi = \arccos 0{,}8 = 36°50'$$

şi în consecinţă, sinusoida echivalentă a curentului este

$$i' = 125\sqrt{2}\sin(\omega t - 36°50').$$

Cele două sisteme sînt caracterizate prin aceeaşi putere aparentă, aceeaşi putere activă şi acelaşi factor de putere. Din punct de vedere fizic însă ele sînt complet diferite între ele. Într-adevăr, puterile instantanee în timpul unei perioade sînt în fiecare moment diferite între ele, fiind

$$p = u\,i$$

în sistemul dat şi

$$p' = u\,i'$$

în cazul utilizării sinusoidei echivalente.

Pe de altă parte, în sistemul dat, factorul de putere este de natură *deformantă*, pe cînd în cazul utilizării sinusoidei echivalente este de natură *reactivă*.

Metoda sinusoidelor echivalente reprezintă deci o simplă operaţie matematică lipsită de bază fizică. Ea poate fi considerată ca o primă aproximaţie, admisibilă numai în cazul cînd regimul deformant poate fi considerat încă sinusoidal (pentru $\delta < 5\%$).

c) Metoda analitică, aplicată la valorile instantanee ale diferitelor mărimi, este singura care corespunde unei situaţii reale; metoda se utilizează folosind descompunerea în serii FOURIER a undelor de tensiune şi curent şi lucrînd cu aceste serii. Este evident că metoda este greoaie şi devine practic imposibil de aplicat în cazul circuitelor complicate.

d) Metoda separării puterilor este o extindere a metodei corespunzătoare din regimul sinusoidal. Ea se utilizează la calculul unor circuite mai complicate, dar la care diversele noţiuni de puteri pot fi uşor determinate. Această metodă este o consecinţă imediată a teoriei fenomenelor deformante.

e) Metoda suprapunerii efectelor. În circuitele *cu caracteristici liniare*, se poate aplica metoda suprapunerii în sensul că, descompunînd unda periodică nesinusoidală în armonicile sale, se aplică circuitului fiecare armonică în parte, determinîndu-se curentul respectiv, după care se sumează curenţii respectivi obţinîndu-se curentul rezultant.

Toate metodele de calcul folosite în regimul sinusoidal, şi în special reprezentarea mărimilor sinusoidale prin fazori sau prin cantităţi complexe şi calculele făcute cu aceste mărimi, pot fi aplicate *fiecărei armonici luată în parte.* Cum fazorii reprezentînd diversele armonici nu se rotesc cu aceeaşi viteză, ei nu

pot fi figurați într-o aceeași epură statică; de asemenea diversele cantități complexe reprezentînd acești fazori nu trebuie să fie combinate între ele într-un același calcul.

După ce s-a terminat calculul *pentru fiecare armonică* în parte, fie prin metoda geometrică, fie prin metoda analitică, pentru a avea rezultatul se procedează în două moduri diferite, după rezultatul ce se caută :

— dacă este necesar să se cunoască numai valoarea efectivă a rezultantei, atunci se calculează rădăcina pătrată a sumei pătratelor valorilor efective ale diverselor armonici ;

— dacă trebuie să se cunoască valoarea instantanee a rezultantei, trebuie să se găsească valoarea instantanee a fiecărui rezultat obținut pentru fiecare armonică în parte și numai după aceea se face suma algebrică a acestora.

f) Cauza fenomenelor deformante fiind existența în circuitele electrice a elementelor neliniare, se pot aplica pentru studiul circuitelor în regim deformant metodele de studiu ale circuitelor neliniare. Metodele respective vor fi expuse în capitolul XI.

9.4. PRODUCEREA REGIMULUI DEFORMANT

9.4.1. GENERALITĂȚI

Aplicarea teoremelor lui KIRCHHOFF unui circuit electric în curent alternativ conduce la ecuații integro-diferențiale de forma

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t i \,\mathrm{d}t - e = u, \tag{9.95}$$

care se rezolvă imediat dacă coeficienții R, L și C sînt mărimi constante. În acest caz, dacă forța electromotoare din circuit și tensiunea aplicată la borne sînt mărimi sinusoidale, soluția ecuației, curentul din circuit, este o mărime sinusoidală de aceeași formă cu a tensiunii aplicate, avînd un defazaj oarecare față de aceasta.

În cazul cînd coeficienții ecuației (9.95) nu sînt mărimi constante, ci sînt funcții de timp, rezolvarea ecuației este mai dificilă și soluția se obține sub forma unei serii armonice. Rezultă dar că, într-un asemenea circuit curentul este întotdeauna periodic nesinusoidal, chiar dacă forța electromotoare din circuit sau tensiunea aplicată la borne sînt perfect sinusoidale.

Asemenea circuite formează aparate deformante de prima categorie și care sînt cauza inițială și unică de producere a regimului deformant *.

Această categorie de circuite aparține clasei de circuite neliniare și se întîlnesc foarte des în practică. Astfel, rețelele electrice, care conțin nenumărate transformatoare cu fier saturat, constituie un exemplu de asemenea circuite neliniare.

În consecință, orice circuit neliniar poate fi considerat ca un generator de regim deformant.

---

* Vezi 9.1.

9.4.2. BOBINA CU MIEZ DE FIER

9.4.2.1. Bobina cu miez de fier alimentată cu o tensiune periodică sinusoidală. În cazul unei bobine cu miez de fier, raportul dintre flux și curent nu mai este constant, chiar dacă fierul nu este saturat. Într-adevăr, din cauza fenomenului de histerezis, acest raport este diferit pentru valorile crescătoare și descrescătoare ale curentului. Legătura dintre flux și curentul de magnetizare, oricare ar fi starea de magnetizare a fierului, este dată de relația

$$N\varphi = Li,$$

din care rezultă

$$L = \frac{N\varphi}{i}.$$

Dacă variația fluxului în raport cu curentul de magnetizare nu este liniară, inductanța L nu mai este o constantă și bobina respectivă este un aparat deformant.

Fie o bobină cu miez de fier, al cărei miez se presupune a fi format din tole subțiri, bine izolate între ele, astfel, încît curenții FOUCAULT să fie complet evitați. Fie μ permeabilitatea fierului. Relația dintre fluxul φ și curentul i nu este liniară, ci are o formă oarecare corespunzînd curbei de magnetizare a fierului. Pe porțiunea rectilinie a caracteristicii de magnetizare, și neglijînd fenomenele de histerezis, se poate scrie

$$N\varphi = Li$$

și dacă fluxul este periodic sinusoidal, atunci și curentul respectiv este periodic sinusoidal și în fază cu fluxul.

Pentru porțiunea neliniară din caracteristică, ecuația generală de funcționare a bobinei se poate scrie

$$u = Ri + N\frac{d\varphi}{dt}, \tag{9.96}$$

N fiind numărul de spire și φ fluxul produs.

Neglijînd căderea de tensiune ohmică Ri față de forța electromotoare de inducție, și dacă se alimentează bobina cu o tensiune periodică sinusoidală

$$u = U\sqrt{2}\sin\omega t,$$

atunci fluxul căutat este dat de relația

$$d\varphi = \frac{u}{N}dt = \frac{U\sqrt{2}}{N}\sin\omega t\, dt,$$

de unde,

$$\varphi = \frac{U\sqrt{2}}{n}\int_0^t \sin\omega t\, dt = -\frac{U\sqrt{2}}{N\omega}\cos\omega t = \frac{U\sqrt{2}}{N\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Rezultă dar, că dacă tensiunea aplicată bobinei cu miez de fier este periodică sinusoidală, fluxul rezultant este şi el periodic sinusoidal, însă este defazat cu $\frac{\pi}{2}$ în urma tensiunii.

Pentru a găsi forma curentului de magnetizare, întrucît nu se cunoaşte ecuaţia curbei de magnetizare

$$\varphi = f(i),$$

se va proceda pe cale grafică. Se face la început ipoteza, că ciclul histerezis este redus la zero, ceea ce este tot una cu a considera curba mediană a ciclului, care coincide cu curba de magnetizare a fierului.

Se construieşte curba de magnetizare dedusă pe cale experimentală, curba tensiunii aplicate şi a fluxului rezultant (fig. 9.34). Fiecărei valori AA'

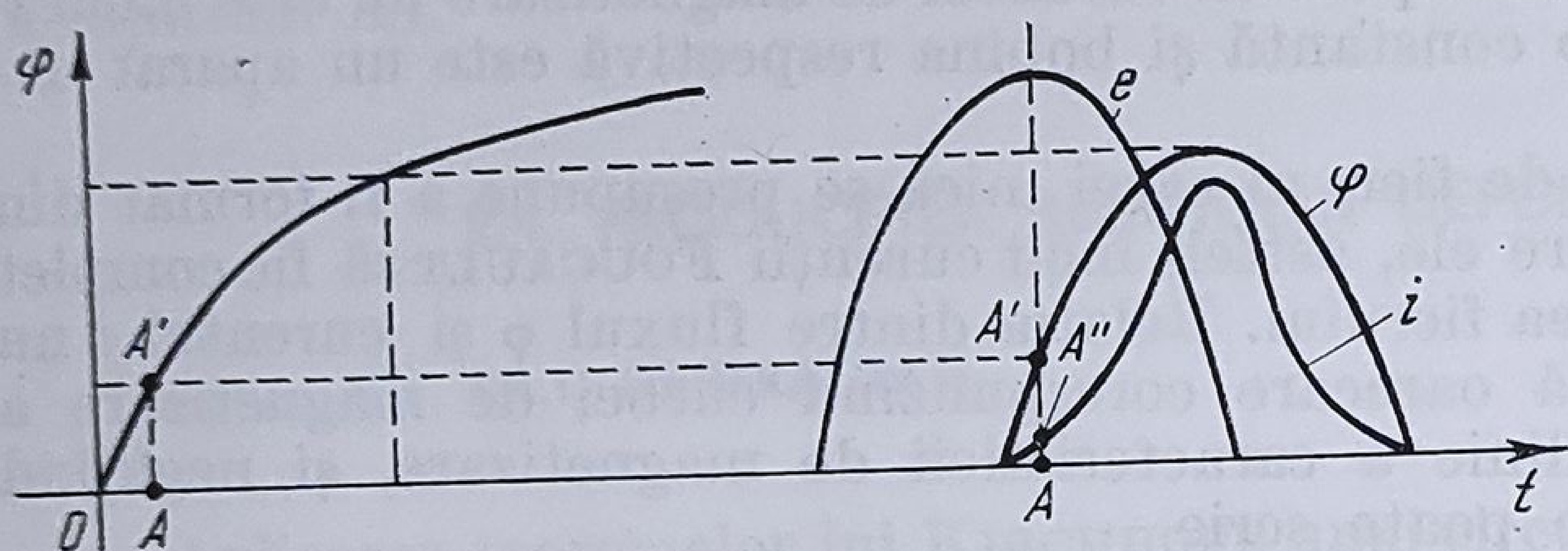


Fig. 9.34. Determinarea formei curentului de magnetizare.

a fluxului, îi corespunde o valoare OA a curentului. Ducînd această valoare pe ordonata punctului A' de pe curba $\varphi = f(t)$, se obţine punctul A'' al curbei $i = f(t)$. Procedînd în acelaşi mod se obţine curba căutată, care este simetrică faţă de ordonata punctului $\frac{T}{4}$ şi în fază cu φ, dar care este deformată.

Făcînd analiza armonică a acestei curbe, se va constata că unda pe care o reprezintă conţine numai armonici impare în sinus şi că dintre acestea, în afară de armonica fundamentală, armonica trei este foarte pronunţată şi în opoziţie cu armonica fundamentală. Luînd ca origine de fază originea de fază a fluxului, ecuaţia curbei curentului este

$$i = I_1 \sqrt{2} \sin \omega t - I_3 \sqrt{2} \sin 3\omega t + \sum_{n=2}^{\infty} I_{2k+1} \sqrt{2} \sin (2k+1) \frac{\pi}{2} \sin (2k+1) \omega t.$$

Calculînd puterea consumată în bobina cu miez de fier, în cazul în care s-a presupus $Ri = 0$, se obţine

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n = U_1 I_1 \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Bobina absoarbe numai putere reactivă

$$Q = U_1 I_1 \sin \frac{\pi}{2} = U_1 I_1$$

şi puterea deformată

$$D = U_1 I_d,$$

tensiunea fiind perfect sinusoidală.

Fie acum cazul cînd ciclul de histerezis nu mai este neglijabil (fig. 9.35). Curba $i = f(t)$ se construieşte în acelaşi mod. Se obţine de data aceasta o curbă deformată, care nu mai este simetrică şi nici în fază cu fluxul, însă maximul său este în acelaşi timp cu maximul fluxului. Valoarea maximă a curentului reprezentat de această curbă se poate determina prin calcul. Fie I_m această valoare. Cîmpul de magnetizare este

$$H_m = \frac{N I_m}{l} \text{ As/m},$$

l fiind lungimea bobinei.

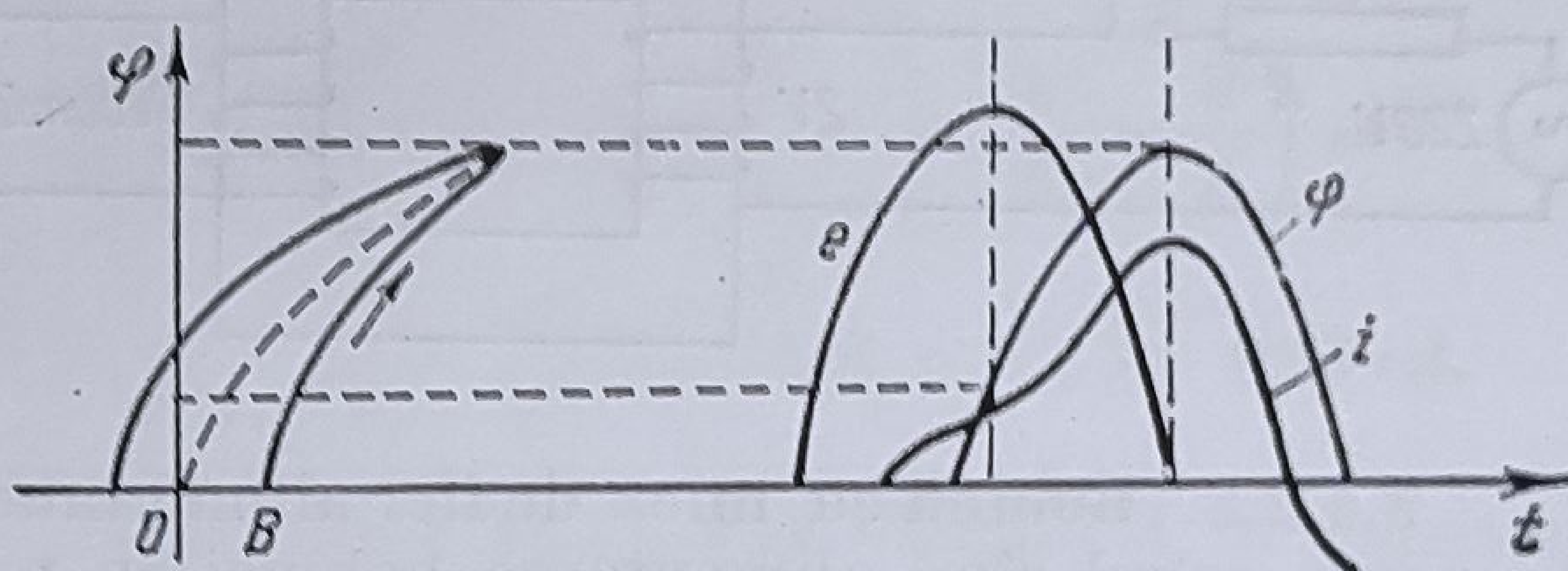


Fig. 9.35. Determinarea formei curentului de magnetizare în cazul cînd există fenomene de histerezis.

Inducţia B_m va fi

$$B_m = \mu \frac{N I_m}{l} \text{ T}$$

şi deci

$$I_m = \frac{l B_m}{\mu N} \text{ A}.$$

Inducţia maximă B_m corespunde vîrfului ciclului de histerezis iar μ este permeabilitatea magnetică a materialului, definită pentru această valoare maximă.

Pentru calcule este util uneori a se determina sinusoida echivalentă a curentului de magnetizare.

În cazul cînd se neglijează fenomenul de histerezis, puterea activă absorbită pe circuit este nulă şi unghiul de defazaj este $\frac{\pi}{2}$; curentul de magnetizare este în fază cu fluxul şi în cuadratură în urma tensiunii.

În cazul cînd nu se neglijează fenomenul de histerezis, curentul de magnetizare este defazat înaintea fluxului cu un unghi α, numit *unghi de avans histerezis*. Rezultă dar că defazajul curentului faţă de tensiune este $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Puterea activă absorbită de circuit este

$$P = UI\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = UI\sin\alpha.$$

Ea corespunde pierderilor în fier prin histerezis, care se calculează fie cu ajutorul relației lui STEINMETZ

$$P = f\, V\, \eta\, B_m^2$$

în care f este frecvența, V volumul de fier, η coeficientul de histerezis al materialului, fie experimental, din curba de histerezis, cu relația *

$$P = f\, V \int_c H\, \mathrm{d}B.$$

În cazul cînd căderea de tensiune Ri nu este neglijabilă, din relația (9.92) rezultă că nici fluxul nu mai este sinusoidal.

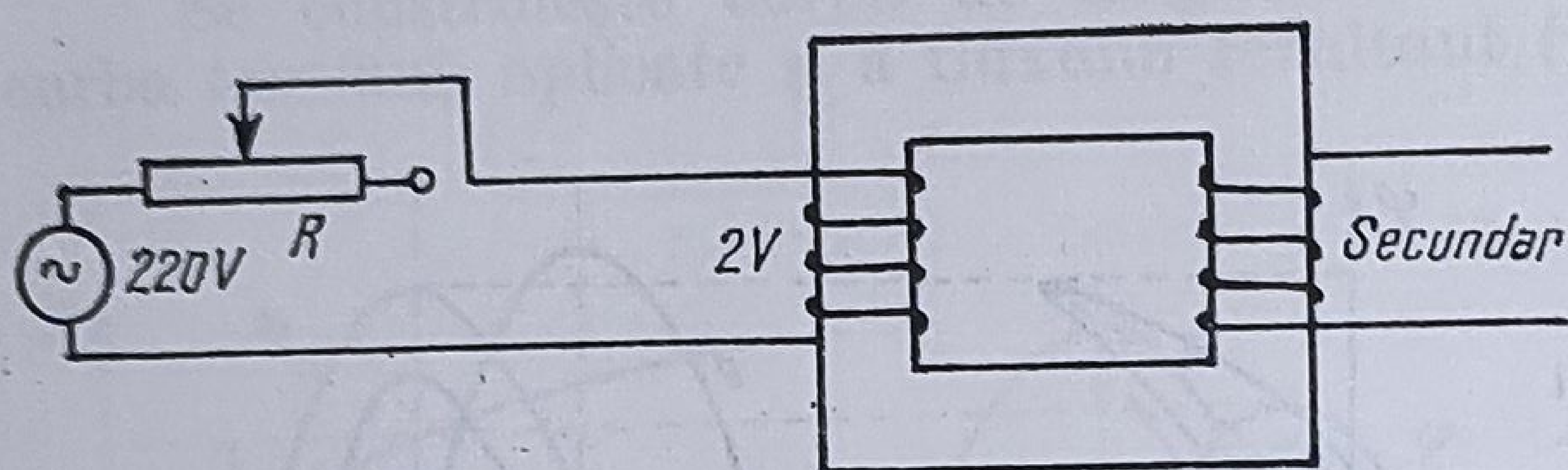


Fig. 9.36. Bobină cu miez de fier alimentată cu curent sinusoidal.

9.4.2.2. **Bobină cu miez de fier alimentată cu un curent periodic sinusoidal.** Fie acum cazul cînd alimentarea bobinei cu miez de fier se face cu un curent periodic perfect sinusoidal. Aceasta se poate obține, dacă în circuitul de alimentare, se intercalează un rezistor de rezistență foarte mare și tensiunea alternatorului este suficientă pentru ca să dea în aceste condiții, curentul de magnetizare necesar (fig. 9.36).

Făcînd și în acest caz ipoteza că ciclul de histerezis este nul, curba fluxului se determină grafic în același mod ca și în cazul precedent (fig. 9.37). Se obține o curbă turtită, a cărei analiză armonică arată că, în afară de armonica fundamentală, cuprinde o armonică de ordinul 3 în fază cu aceasta, foarte pronunțată; ecuația curbei fluxului poate fi scrisă

$$\varphi = \Phi_1 \sin \omega t + \Phi_3 \sin 3\omega t + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \Phi_{2k+1} \sin (2k+1)\, \omega t. \quad (9.97)$$

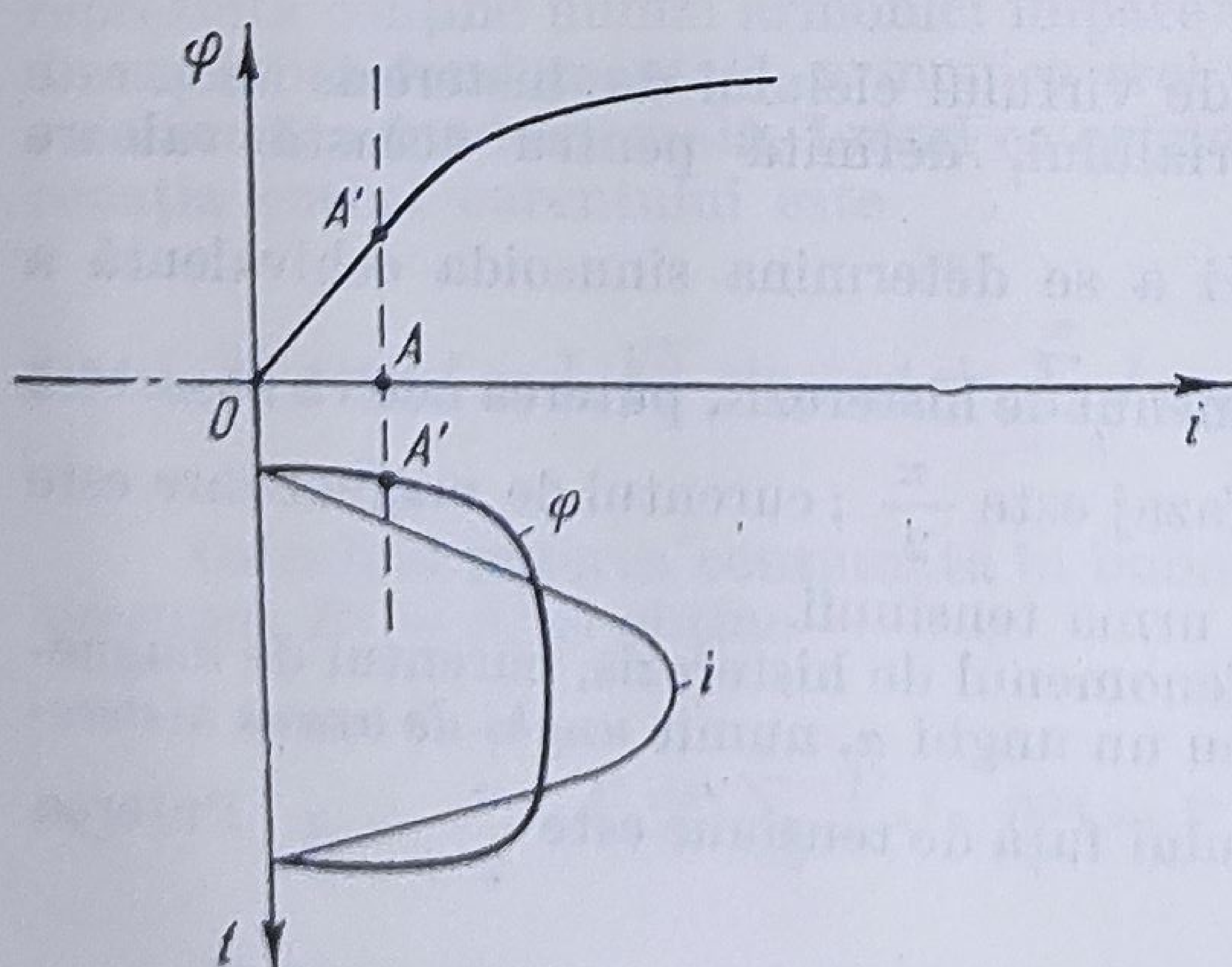


Fig. 9.37. Determinarea fluxului.

Cunoscînd curba fluxului, se poate deduce curba tensiunii la bornele bobinei primare, cu ajutorul relației

$$u = N \frac{d\varphi}{dt}.$$

Această determinare se poate face analitic, dacă se cunoaște ecuația (9.97) a fluxului, dedusă prin analiza armonică sau grafic.

* Vezi 3.7.3.4.

Presupunînd că unda de flux nu conține decît armonica 3, se găsește

$$u = N\ \omega\ \Phi_1 \sqrt{2} \cos \omega t + 3N\ \omega\ \Phi_3 \sqrt{2} \cos 3\omega t =$$

$$= U_1 \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + U_3 \sqrt{2}\ \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

în care s-a notat

$$U_1 = N\omega\Phi, \qquad \text{și} \qquad U_3 = 3N\omega\Phi_3,$$

unda fundamentală a tensiunii fiind defazată cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea undei fundamentale a fluxului.

Luînd ca origine de fază originea de fază a armonicii fundamentale a undei de tensiune, ceea ce înseamnă a defaza toate tensiunile cu unghiul $-\frac{\pi}{2}$, se obține

$$u = U_1 \sqrt{2}\ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + U_3 \sqrt{2}\ \sin\ 3\left(\omega t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= U_1 \sqrt{2}\ \sin\omega t + U_3 \sqrt{2}\ \sin 3\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = U_1 \sqrt{2}\ \sin\omega t - U_3 \sqrt{2}\ \sin 3\ \omega t,$$

adică, se obține o undă de tensiune care are armonica de ordinul 3, în opoziție. Curba aceasta va avea același aspect, ca și curba curentului din cazul precedent.

Pe cale grafică se obține, foarte ușor, același rezultat. Fie curba de flux descompusă în armonica fundamentală și în armonica de ordinul 3 în fază (fig. 9.38). Defazînd armonica fundamentală cu unghiul $-\frac{\pi}{2}$ față de originea O și armonica de ordinul 3 cu unghiul $-\frac{\pi}{6}$ față de aceeași origine, se obține, la altă scară, armonica fundamentală a tensiunii și armonica de ordinul 3 a acesteia *în opoziție* față de armonica fundamentală. Rezultă imediat că unda rezultantă a tensiunii este o undă ascuțită, asemănătoare cu unda curentului din cazul precedent.

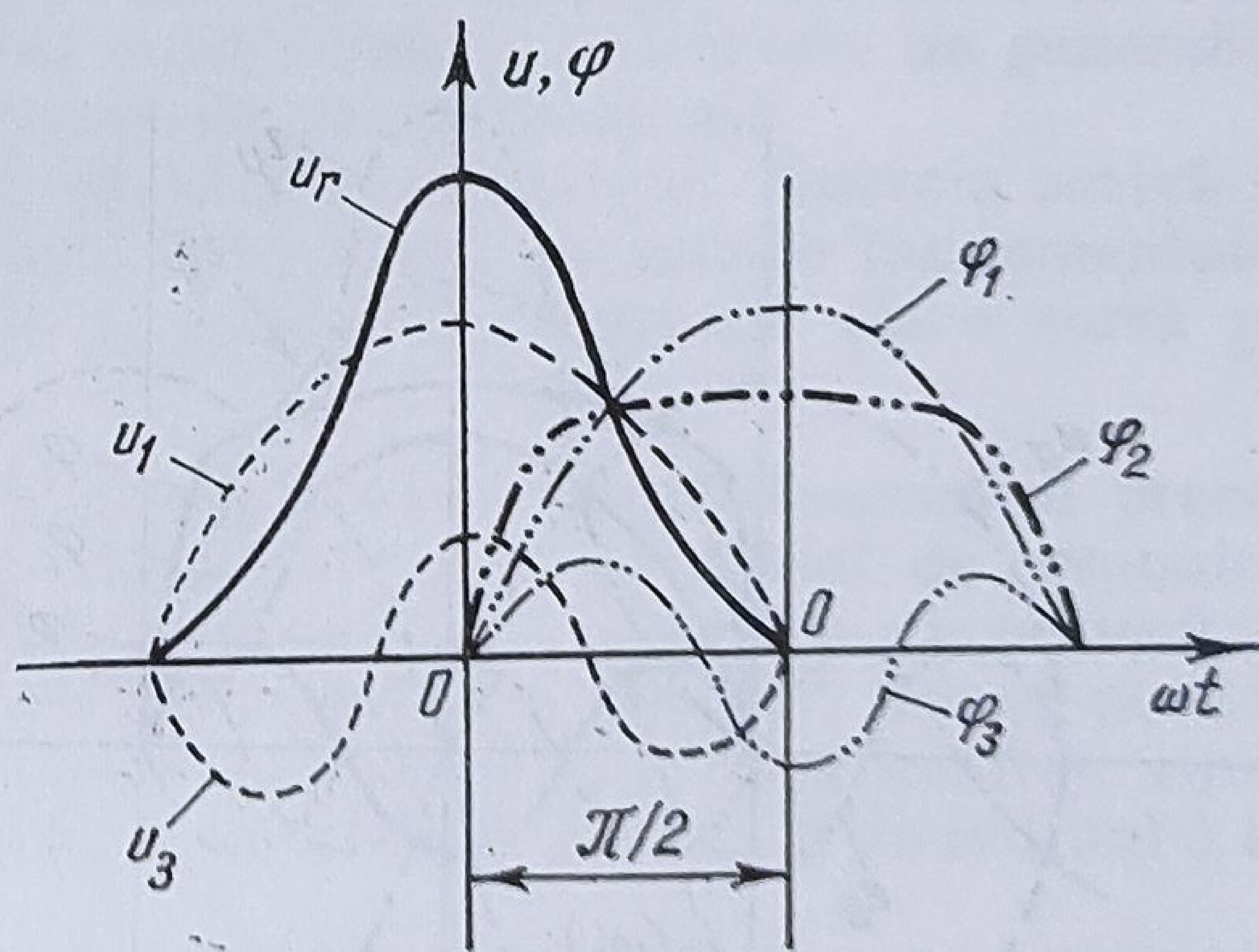


Fig. 9.38. Construcția grafică a curbei tensiunii la bornele bobinei.

Dezvoltarea în serie FOURIER a funcției reprezentînd această undă este de forma

$$u = U_1 \sqrt{2}\ \sin\ \omega t - U_3 \sqrt{2}\ \sin\ 3\omega t + \sum_{n=2}^{\infty} U_{2k+1} \sin\ (2k+1) \frac{\pi}{2} \sin\ (2k+1)\ \omega t.$$

9.4.3. ORIGINEA ARMONICILOR SUPERIOARE

9.4.3.1. Armonica de ordinul 3. Pare paradoxal*, că aplicînd unui circuit o tensiune periodică perfect sinusoidală, curentul rezultant este periodic nesinu-

* Vezi 9.3.3.1.

soidal. Rezultă dar că originea acestor armonici nu este în unda de tensiune şi trebuie căutată în altă parte.

Fie un circuit (fig. 9.39) alimentat de un generator care produce o undă perfect sinusoidală şi care are ca utilizare o singură bobină cu miez de fier saturat. Se presupune că în conductoarele de legătură, nu se produce nici un fenomen deformant. Unda de tensiune a generatorului

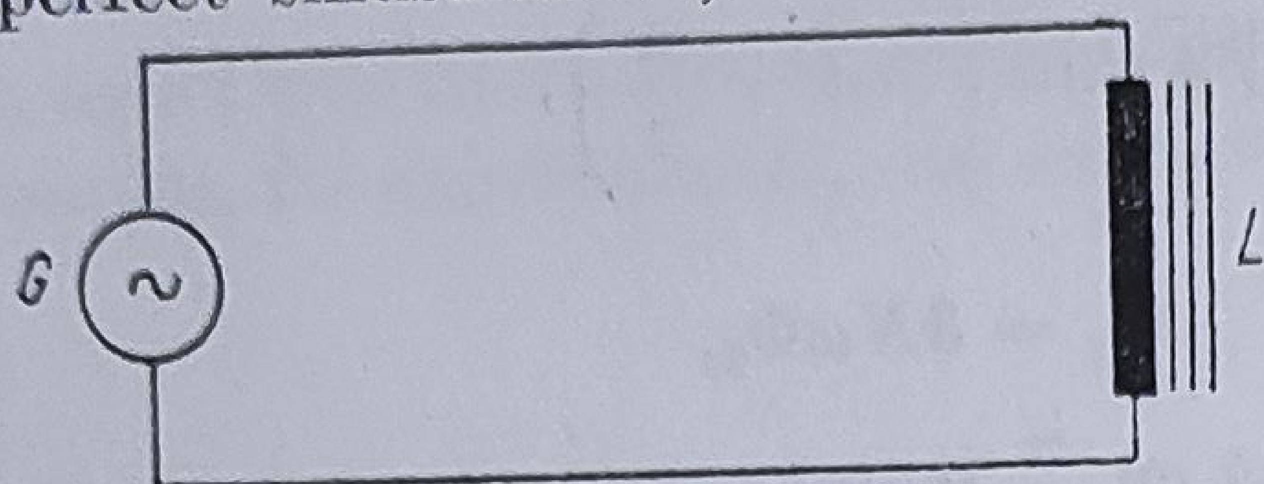


Fig. 9.39. Circuit electric cu bobină cu miez de fier saturat.

$$u_g = U_g \sqrt{2} \sin\omega t,$$

aplicată înfăşurării bobinei cu fier, conform legii lui OHM, produce un curent magnetizant i_g, perfect sinusoidal şi defazat cu 90° în urmă (fig. 9.40), a cărui ecuaţie este

$$i_g = I_g \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Conform celor ce preced, acesta dă naştere unui flux în fază cu curentul i_g, dar a cărui undă este turtită. Se presupune, pentru simplificarea expunerii, că unda fluxului nu conţine decît armonica de ordinul 3 în fază. Ecuaţia sa va fi deci de forma

$$\varphi = \Phi_1 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \Phi_3 \sin 3\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

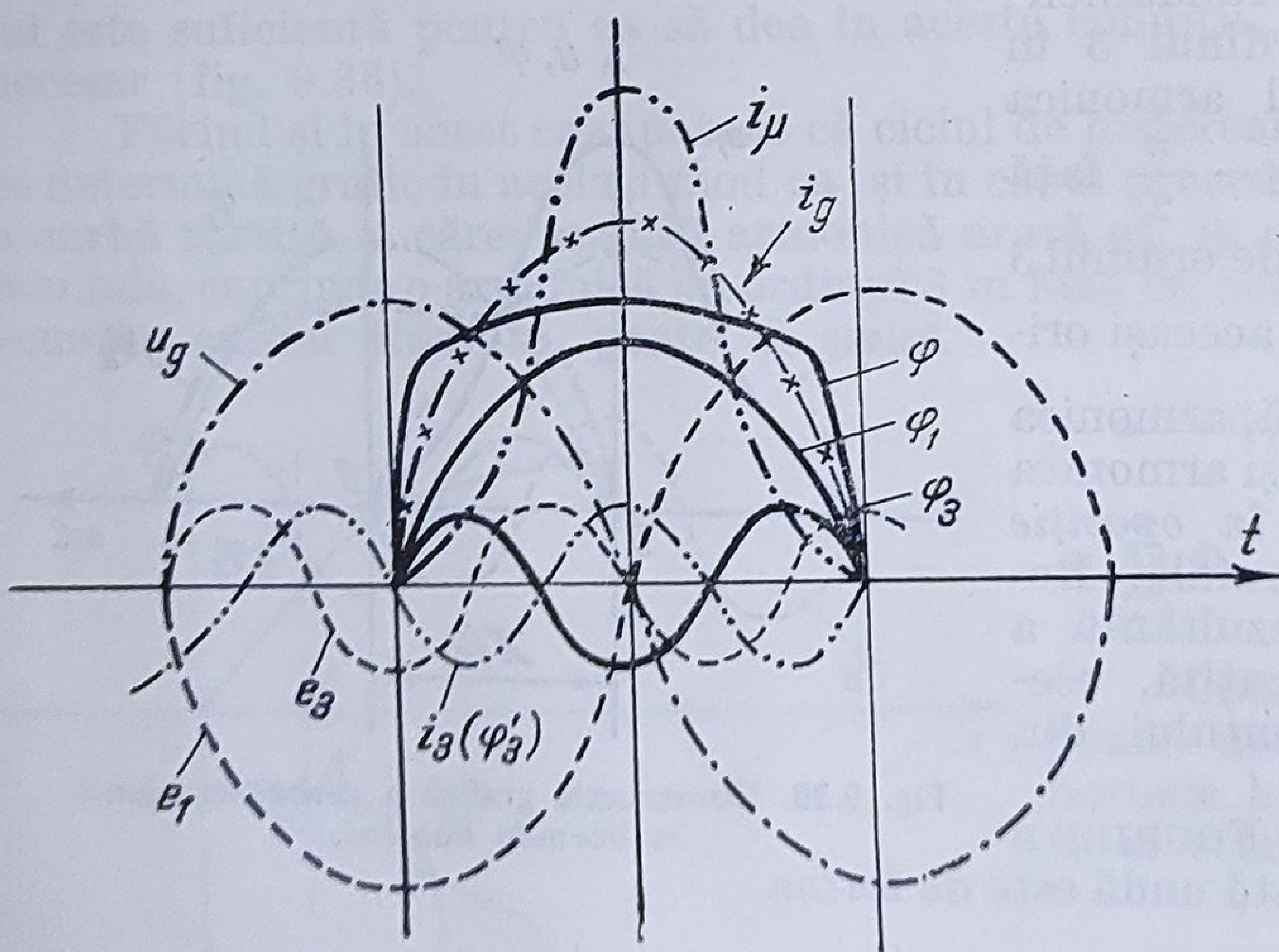


Fig. 9.40. Mecanismul producerii armonicii de ordinul 3.

Fluxul periodic nesinusoidal induce în bobina cu fier, o forţă contraelectromotoare de inducţie dată de relaţia

$$e = -N\frac{d\varphi}{dt} = -N\omega\Phi_1 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - 3N\omega\Phi_3 \cos\left(3\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) =$$

$$= -E_1\sqrt{2} \sin\omega t + E_3\sqrt{2} \sin 3\omega t.$$

Armonica fundamentală a acestei forțe contraelectromotoare este în opoziție cu unda de tensiune u_g a generatorului, aceste două tensiuni compensîndu-se.

Armonica de ordinul 3 a acestei forțe electromotoare produce în înfășurarea bobinei cu fier un curent de magnetizare de frecvență triplă, defazat în urma ei cu unghiul $\frac{\pi}{6}$.

$$i_3 = - I_3 \sqrt{2} \sin 3 \left(\omega t - \frac{\pi}{6} \right)$$

și care produce un flux în fază cu el

$$\varphi_3' = - \Phi_3' \sin 3 \left(\omega t - \frac{\pi}{6} \right).$$

Acest flux este deci în opoziție cu armonica de ordinul 3 a fluxului principal, pe care o anulează.

Fluxul principal rămîne astfel perfect sinusoidal, în schimb curentul de magnetizare va fi egal cu suma $i_s + i_3$ a curenților, fiind astfel un curent deformat ascuțit.

Rezultatul coincide astfel cu cele stabilite mai înainte.

Din cele ce preced rezultă că alternatorul furnizează numai armonica fundamentală a curentului de magnetizare precum și curentul necesar pentru acoperirea diverselor pierderi (neglijate în cazul raționamentului de față). Inductanța își produce singură armonicile de curent necesare propriei sale magnetizări; înfășurarea alternatorului face parte însă din circuitul în care circulă acest curent deformant. În acest mod o bobină cu fier este un generator de regim deformant, un aparat deformant de prima categorie.

Se poate vedea de aici și sensul de curgere a energiei. Energia activă și reactivă circulă de la sursă către aparatul deformant, pe undele fundamentale, pe cînd energia deformantă circulă de la aparatul deformant către sursă pe armonicile superioare.

9.4.3.2. **Armonica de ordinul 5 și următoarele.** În raționamentul precedent, s-a făcut aproximația că acest curent periodic sinusoidal de armonică de ordinul 3 produce în circuit un flux *sinusoidal* de armonică de ordinul 3, ceea ce este în contradicție cu cele stabilite anterior. De fapt fluxul produs de acest curent este un flux turtit, care poate fi descompus într-un flux sinusoidal de armonică de ordinul 3 și un flux sinusoidal de armonică de ordinul 5 în opoziție cu acesta.

Raționamentul se face la fel ca și pentru armonica trei și se ajunge astfel, din aproape în aproape, la găsirea originii tuturor armonicilor care compun unda de curent.

9.4.3.3. **Rolul general al saturației fierului și al fenomenului de histerezis.** Modul de generare a armonicilor de ordin superior într-un circuit conținînd o bobină cu miez de fier saturat poate fi arătat și pe o altă cale.

Fie o bobină de inducție cu miez de fier, avînd o rezistență R și o inductanță de dispersiuni λ. Se alimentează această bobină cu o forță electromotoare periodică e și fie $N\varphi$ fluxul total produs de cele N spire ale bobinei; ecuația de funcționare a bobinei este

$$e = Ri + \lambda \frac{di}{dt} + N \frac{dt}{dt}. \qquad (9.94)$$

Curba de magnetizare a bobinei corespunde relației

$$N\varphi = f\ (i).$$

Dacă nu ar fi existat saturație sau histerezis, această curbă ar fi fost dreapta OA (fig. 9.41), avînd coeficientul unghiular L, L fiind inductanța totală a circuitului. Într-un punct oarecare al caracteristicii reale, curentul poate fi descompus în două părți : o parte $M'M'' = N\varphi/L$, corespunzînd prelungirii dreptei OA și a doua $M''M = \mathfrak{I}$. Curentul total va fi deci

$$i = \frac{N\varphi}{L} + \mathfrak{I}.$$

Ecuația (9.94) poate fi deci, scrisă

$$e = Ri + (\lambda + L)\frac{di}{dt} - L\frac{d\mathfrak{I}}{dt}.$$

Dacă fluxul *sau* curentul sînt periodici sinusoidali, $\mathfrak{I}$ nu poate fi sinusoidal; totul se petrece ca și cum saturația fierului și fenomenul de histerezis introduc în circuit o forță contraelectromotoare periodică nesinusoidală

$$e' = -L\frac{d\mathfrak{I}}{dt};$$

rezultat analog cu precedentul.

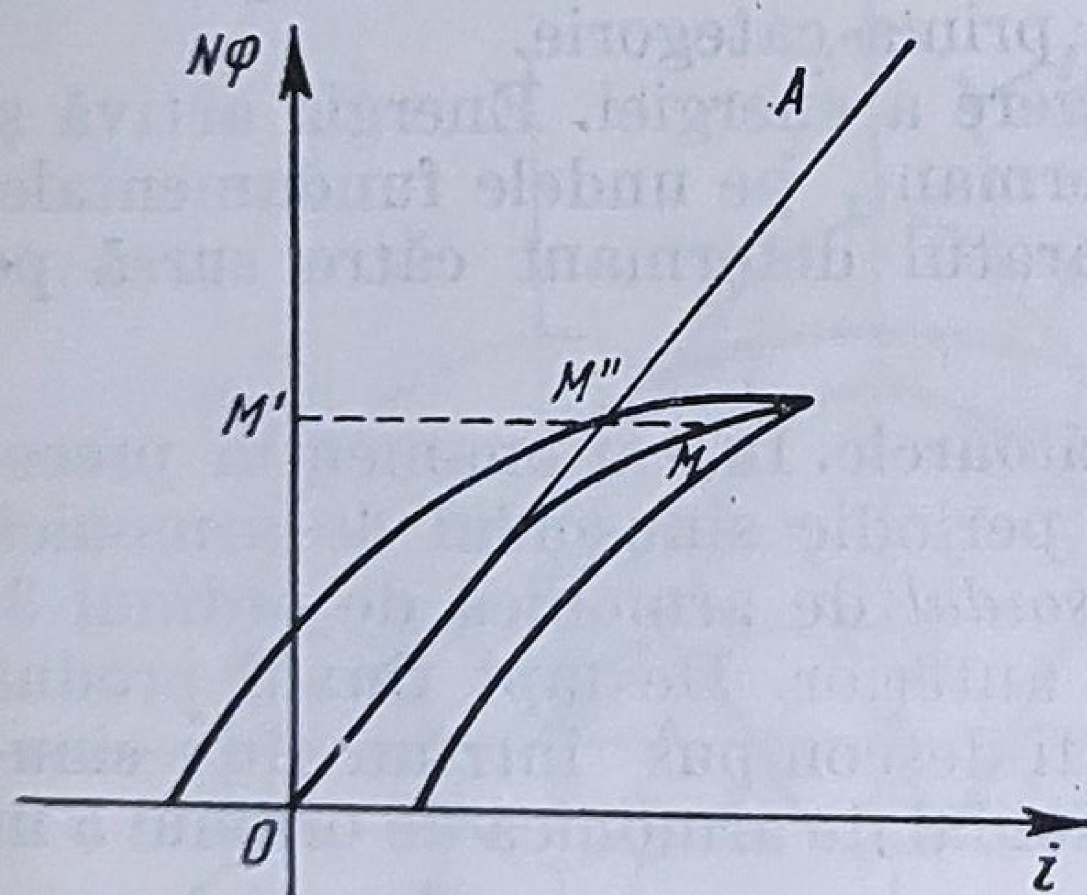


Fig. 9.41. Curba de magnetizare a fierului.

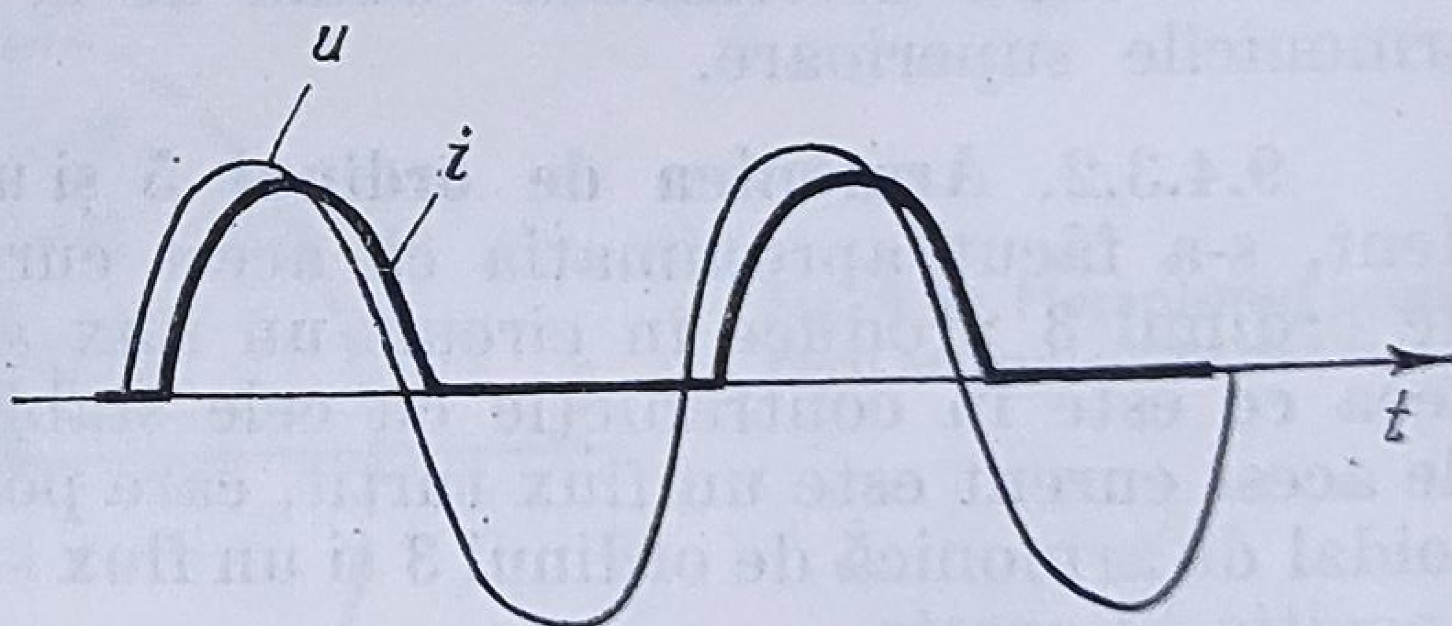


Fig. 9.42. Unda de curent redresat.

9.4.4. ALTE SURSE DE ARMONICI

9.4.4.1. Supapele electronice. O supapă electronică este un aparat deformant prin excelență. Se cunoaște funcționarea sa : dacă i se aplică la borne o diferență de potențial sinusoidală, ea nu lasă să treacă decît curentul avînd un anumit sens. Unda de curent va fi formată deci numai din jumătăți de undă, avînd aceeași formă cu unda de tensiune pentru prima jumătate de perioadă și confundîndu-se cu axa timpurilor pentru cealaltă jumătate de perioadă (fig. 9.42). O supapă electronică poate fi considerată ca un circuit format cu o rezistență neliniară, variabilă în timp și anume, pentru o jumătate de perioadă $R = Const.$ și pentru cealaltă jumătate de perioadă $R = \infty$.

Teoretic curba curentului este în fază cu curba tensiunii. Din cauza montajului însă, şi anume din cauza transformatorului care se foloseşte, ea va avea un defazaj oarecare, în general inductiv. Descompunerea în armonici a acestei unde dă o serie FOURIER completă, adică cu termen liber şi cu armonici pare şi impare.

9.4.4.2. Fenomenul corona. La liniile de transmitere de energie electrică de mare tensiune se observă în jurul izolatoarelor, la locul de legare a conductorului şi chiar în jurul conductorului, efluvii de culoare violacee. Aceste descărcări se produc mai ales, atunci cînd aerul este umed; ele apar totuşi şi pe vreme uscată. Fenomenul, deşi foarte mult studiat, nu este definitiv cunoscut. El se produce în felul următor: din cauza cîmpului electric din jurul conductorului aerul se ionizează şi la un moment dat dielectricul format din aer este străpuns. Efectul corona produce pierderi de energie care pot ajunge la valori destul de mari şi produce, prin fenomenele deformante, efecte supărătoare mai ales asupra liniilor de telecomunicaţie învecinate.

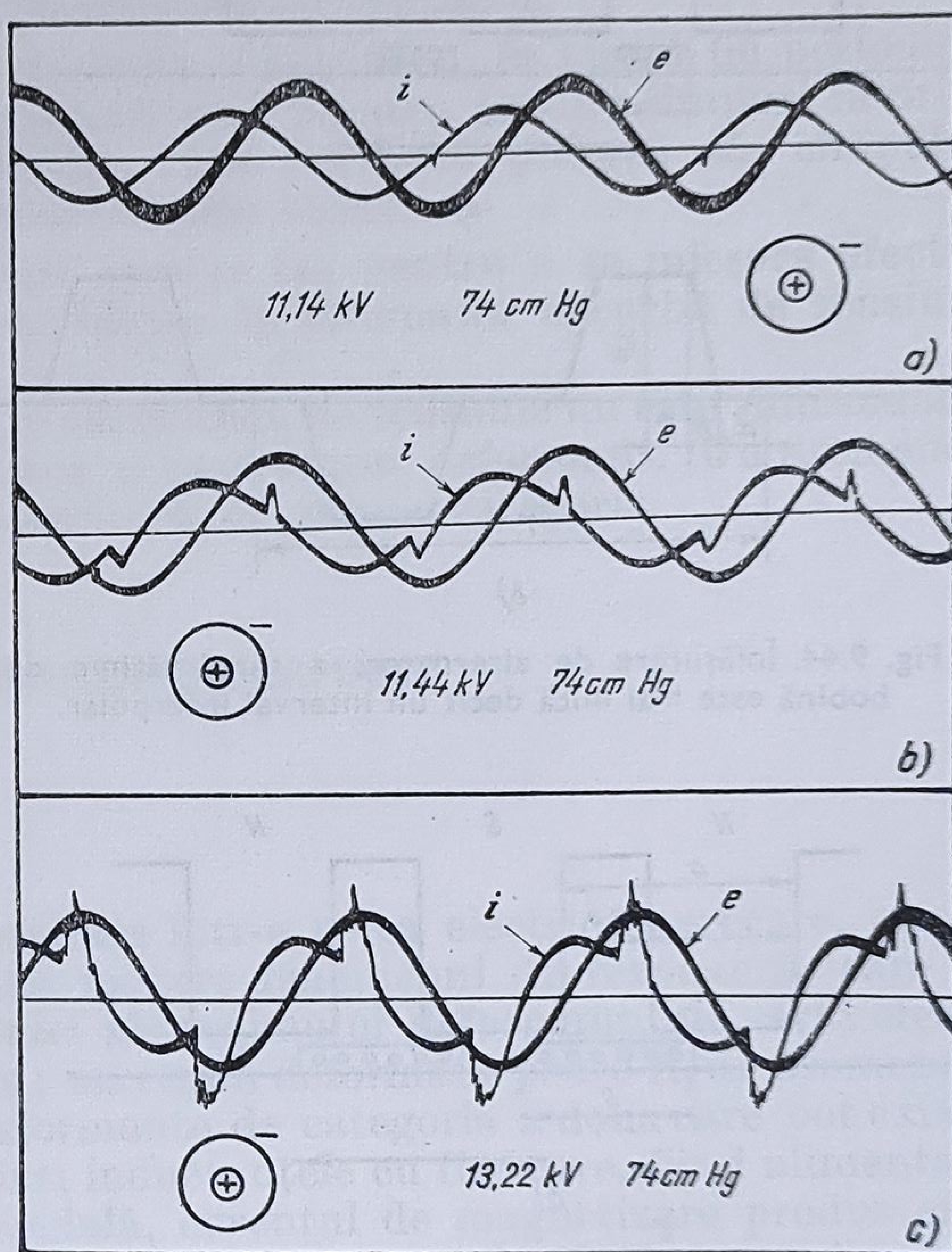


Fig. 9.43. Undele de tensiune şi curent în efectul corona; *a*) înainte de ionizarea aerului; *b*) şi *c*) după ionizarea aerului

Efectul deformant poate fi atribuit variaţiei capacităţii sistemului care variază ciclic după o relaţie de forma

$$C = C_1 (1 + \alpha \cos 2\omega t).$$

Pînă la ionizarea aerului capacitatea sistemului este constantă şi aplicîndu-i o tensiune sinusoidală se obţine un curent sinusoidal (fig. 9.43, *a*). La tensiunea critică, şi în momentul producerii descărcării, capacitatea nu mai este constantă, ea urmînd legea indicată mai sus, curentul rezultant va fi deformat (fig. 9.43, *b* şi *c*).

9.4.4.3. Alternatorul cu unda de tensiune periodică nesinusoidală. Prin însăşi construcţia lui, unda de tensiune a unui alternator este periodică nesinusoidală.

Eforturile constructorilor de maşini electrice se concentrează în special în a obţine o undă periodică de tensiune cît mai sinusoidală, întrebuinţînd pentru aceasta diverse artificii constructive.

Armonicile undei de tensiune la bornele unui alternator pot avea trei surse:

a) armonicile undei cîmpului;
b) armonicile de dantură;
c) armonicile reacţiei indusului.

Nu vom intra în amănunte, aceste chestiuni ieşind din cadrul lucrării de faţă*.

De asemenea, felul înfăşurării induse a alternatorului poate fi o cauză importantă a producerii undei nesinusoidale a alternatorului. Fie un alternator cu indusul presupus fără crestături**, la care lăţimea c a bobinei poate fi mai mică sau mai mare decît distanţa dintre doi poli succesivi (fig. 9.44 şi 9.45). Fie $a-b$ această distanţă. Dacă $c<(a-b)$, este evident că unda de tensiune va fi nulă pe o porţiune de perioadă; ea va începe să crească liniar pe măsură ce bobina pătrunde sub piesa polară, rămînînd constantă atît timp, cît numărul de conductoare rămîne constant sub acţiunea fluxului emis de pol. Fenomenul se produce apoi în sens invers (fig. 9.44,b).

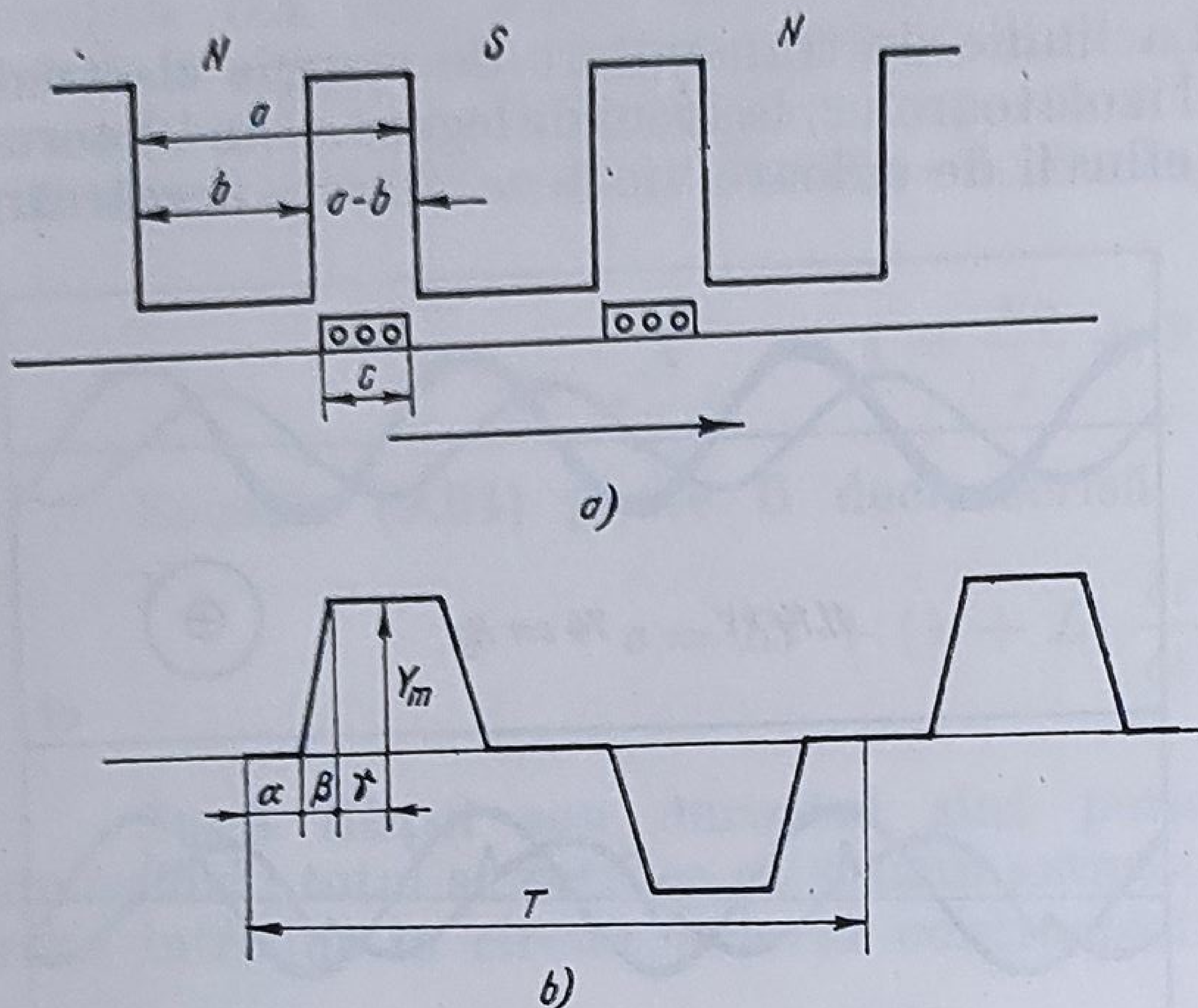


Fig. 9.44. Înfăşurare de alternator, a cărui lăţime de bobină este mai mică decît un interval interpolar.

Dacă $c>(a-b)$, bobina este în permanenţă sub acţiunea polului (fig. 9.45). De data aceasta tensiunea va fi nulă, numai în momentul în care axa bobinei coincide cu axa neutră a polilor. După aceea ea creşte liniar, din două motive: mai întîi, deoarece numărul de conductoare care este supus acţiunii polului către care se mişcă bobina creşte şi apoi, deoarece numărul de conductoare, care sînt supuse influenţei polului pe care bobina îl părăseşte, scade. Cînd bobina a părăsit complet ultimul pol, forţa electromotoare creşte numai din prima din aceste cauze: ea va creşte deci de două ori mai încet decît în cazul precedent; în sfîrşit, forţa electromotoare rămîne constantă atunci cînd numărul de conductoare supuse acţiunii unui pol rămîne constant. Aspectul undei de tensiune este arătat în figura 9.45, b.

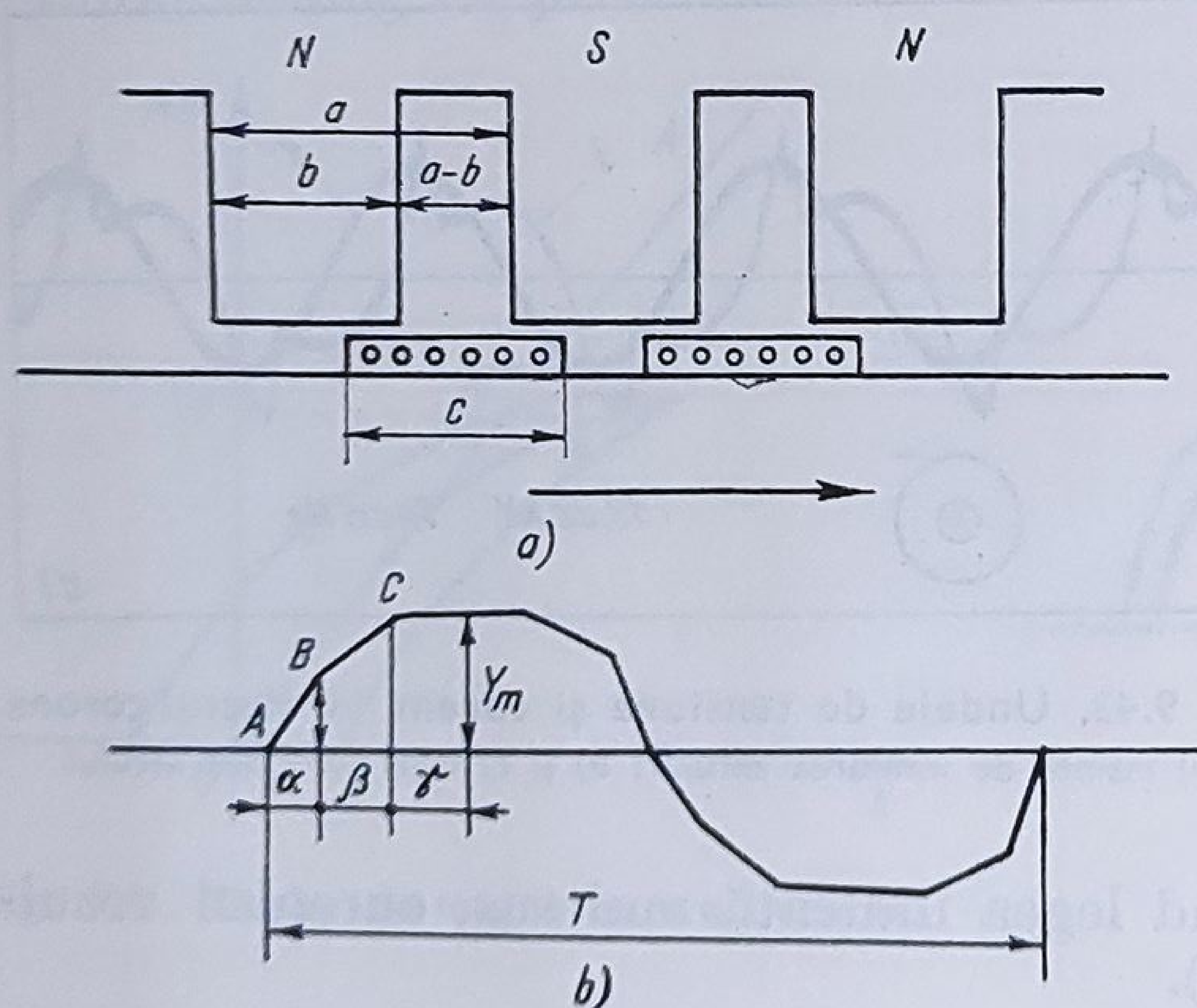


Fig. 9.45. Înfăşurare de alternator, a cărui lăţime de bobină este mai mare decît un interval interpolar.

Dezvoltînd în serie FOURIER aceste unde, se obţine

$$e = \frac{16\, Nf\, \Phi a^2}{\pi^2 bc} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi b}{2a} \sin \frac{(2k+1)\pi c}{2a} \sin (2k+1)\, \omega t.$$

* Vezi [41] pag. 293.

** Un asemenea alternator nu se mai construieşte astăzi.

După A. POTIER [41] tensiunea unui asemenea alternator cu indusul fără crestături şi cu poli alternaţi este indepedentă de lărgimea polului, de lărgimea intervalului interpolar şi de lăţimea bobinei.

În acelaşi mod se arată că şi în cazul alternatorului la care bobinajul este aşezat în crestăturile indusului, unda de tensiune obţinută este periodică nesinusoidală şi are curba formată din unul sau mai multe dreptunghiuri cu regiune de ordonată nulă.

În afară de armonicile provenite din cauza cîmpului, se mai produc armonici datorite faptului că aceste crestături sînt deschise şi deci se produce o variaţie a fluxului, precum şi din cauza saturaţiei dinţilor.

În sfîrşit, dacă forţa magnetomotoare a indusului, în loc să fie periodică sinusoidală de-a lungul indusului, are armonici, acestea produc cîmpuri învîrtitoare cu viteze de sincronism diferite, care provoacă pulsaţii ale cîmpului principal şi armonici ale forţei electromotoare induse.

Sînt o serie întreagă de măsuri care se iau pentru a se micşora efectul tuturor acestor cauze şi pentru a se obţine la alternator o curbă de tensiuni cît mai sinusoidală posibil.

Este evident că un alternator, a cărui undă de tensiune nu este sinusoidală, este o cauză principală de producere a unui regim deformant. Un asemenea alternator constituie un aparat deformant de prima categorie.

9.5. EFECTELE REGIMULUI DEFORMANT

9.5.1. GENERALITĂŢI

Un regim deformant poate produce într-o reţea electrică oarecare, efecte de diferite naturi. Astfel, poate lua naştere fenomenul de rezonanţă, care se poate produce pentru unele armonici ale regimului deformant, ale cărui efecte pot fi mai mult sau mai puţin grave ; un regim deformant poate fi, de asemenea, amplificat din cauza aparatelor deformante de categoria a doua care pot exista într-o reţea. Este suficient a reaminti inductanţele cu fier care, fiind alimentate cu o tensiune periodică pur sinusoidală, curentul de magnetizare produs este deformat, pentru a se vedea cît de importantă poate fi deformaţia acestui curent dacă însăşi tensiunea respectivă este deformată.

Prezenţa în circuit a aparatelor deformante de categoria a doua poate agrava efectele pe care le produce un regim deformant.

Cunoaşterea acestor efecte este necesară pentru a preîntîmpina eventuala lor agravare sau pentru a găsi mijloacele de îndreptare.

9.5.2. CONDENSATOR ALIMENTAT CU O TENSIUNE DEFORMATĂ

Fie un condensator avînd o capacitate de C farazi, care este alimentat cu tensiunea

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} (U'_k \sqrt{2} \sin k\omega t + U''_k \sqrt{2} \cos k\omega t). \tag{9.99}$$

Presupunînd că acest condensator este perfect, adică nu are pierderi prin dielectric, curentul ce-l străbate este dat de relația (4.59) de unde, ținînd seama de expresia tensiunii, se obține

$$i = C\omega \sum_{k=0}^{\infty} k\sqrt{2}\,(U_k' \cos k\omega t - U_k'' \sin k\omega t) =$$

$$= C\omega \sum_{k=0}^{\infty} k\sqrt{2}\left[U_k' \sin\left(k\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + U_k'' \cos\left(k\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

În consecință, curentul rezultant este mult mai deformat decît tensiunea care i-a dat naștere, fiecare armonică fiind amplificată de un număr de ori egal cu ordinul său. De asemenea, curentul rezultant este defazat cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea tensiunii.

Exemple : 1. Fie un condensator de 32 μF alimentat cu o tensiune nesinusoidală compusă numai din armonica fundamentală și armonica de ordinul 5,

$$u = 100 \sin\omega t + 2 \sin 5\omega t,$$

amplitudinea armonicii 5 fiind 2% din armonica fundamentală.

Se găsește

$$i = 10 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + 1 \sin\left(5\,\omega\,t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ A}.$$

Se vede că în acest caz amplitudinea armonicii de ordinul 5 a undei de curent a devenit 10% din amplitudinea undei fundamentale. De asemenea, curentul rezultant este defazat cu $(\pi/2)$ înaintea tensiunii.

2. Se aplică unui condensator o tensiune a cărei undă este reprezentată printr-o curbă formată din triunghiuri și a cărei ecuație este

$$u = \frac{8U}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} \sin(2k+1)\omega t\,; \tag{9.100}$$

curentul rezultant va fi

$$i = C\frac{du}{dt} = \frac{8C\,\omega\,U}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} \cos(2k+1)\,\omega\,t =$$

$$= \frac{8C\omega U}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} \sin\left[(2k+1)\,\omega\,t + \frac{\pi}{2}\right].$$

Se observă ușor că ecuația curentului se aseamănă foarte mult cu ecuația undei formată din dreptunghiuri*, cu deosebirea că unda curentului obținut este mai deformată, avînd unii termeni negativi, — acei corespunzători lui k impar. Rezultă dar, că aplicînd unui condensator o tensiune deformată triunghiulară,

---

* Vezi [10] pag. 202.

aceasta amplifică deformaţia şi unda curentului respectiv este mai deformată. De asemenea, acest curent este defazat cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea tensiunii respective.

Acest lucru se poate arăta calculînd coeficientul de distorsiune al celor două curbe *. Pentru curba de tensiune

$$U = 0,577\ U.$$

Reziduul deformant al curbei de tensiune este

$$U_d = \sqrt{U^2 - \frac{1}{2} U_1^2} = 0,0665\ U,$$

de unde, rezultă coeficientul de distorsiune

$$\delta_T = \frac{0,665}{0,577} = 11,5\,\%.$$

Pentru curba de curent se obţine la fel valoarea efectivă

$$I = \frac{8C\omega\ U}{\pi^2 \sqrt{2}} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin^2 (2k+1) \frac{\pi}{2}} = \frac{2\ C\omega\ U}{\pi^2} \sqrt{\pi^2 + 4}$$

şi reziduul deformant al undei de curent

$$I_d = \frac{2C\,\omega U}{\pi^2} \sqrt{\pi^2 - 4}\,,$$

de unde rezultă coeficientul de distorsiune corespunzător

$$\delta_I = 65,47\,\%.$$

Se vede imediat că $\delta_I > \delta_T$ şi anume cam de 5,7 ori mai mare. Curentul rezultant este deci mai deformat decît tensiunea.

9.5.3. BOBINĂ DE INDUCTANŢĂ ALIMENTATĂ CU O TENSIUNE DEFORMATĂ

Fie cazul unei inductanţe la bornele căreia se aplică tensiunea deformată a cărei undă este reprezentată de o curbă a cărei ecuaţie este dată de relaţia (9.99).

Neglijînd căderea de tensiune ohmică în această inductanţă, curentul rezultant se calculează cu ajutorul relaţiei (4.58) şi este

$$i = \frac{1}{L}\int_0^t u\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega L}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k}\,U_k'\sqrt{2}\,\cos k\omega\,t + \frac{1}{k}\,U_k''\sqrt{2}\,\sin k\omega\,t\right) =$$

$$= \frac{1}{L\omega}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}\,U_k'\sqrt{2}\sin\left(k\omega\,t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{k}\,U_k''\sqrt{2}\cos\left(k\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

* Pentru calcule s-au folosit tabelele lui RÎJIK şi GRADSTEIN; vezi [244].

Rezultă din această relaţie, că o inductanţă introdusă într-un circuit funcţionînd în regim deformant *îmbunătăţeşte* regimul deformant, întrucît diversele aromnici de curent sînt împărţite prin ordinul lor, ceea ce le micşorează importanţa.

Pentru a vedea calitativ importanţa acestei îmbunătăţiri, să aplicăm unei bobine de inductanţă L aceeaşi tensiune deformată, a cărei undă este formată din triunghiuri (9.100). Rezultă un curent a cărui undă are ecuaţia

$$i = \frac{8U}{\pi^2 L\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} \sin\left[(2k+1)\ \omega t - \frac{\pi}{2}\right].$$

Se observă uşor că, în acest caz, ecuaţia undei de curent se aseamănă foarte mult cu ecuaţia undei formată din arce de parabolă * , unda de curent fiind însă mai deformată, întrucît termenii seriei pentru care k este impar sînt negativi.

Dacă se procedează ca mai sus şi se calculează coeficientul de distorsiune al curbei curentului obţinut, se găseşte

$$I = \frac{8U}{\pi^2 L\omega\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} \sin^2(2k+1)\frac{\pi}{2}} = 1{,}000396\ \frac{8\,U}{\pi^2 L\omega\sqrt{2}}\ \text{A},$$

$$I_d = \frac{8\,U}{\pi^2\sqrt{2}\,L\omega} \times 0{,}019903\ \text{A}$$

şi deci,

$$\delta_I = 1{,}99\,\%\,;$$

în acest caz

$$\delta_I < \delta_T$$

şi anume de 5,77 ori mai mic.

OBSERVAŢIE IMPORTANTĂ: Dacă pentru îmbunătăţirea factorului de putere al unei reţele se folosesc condensatoare, fără a se fi examinat în prealabil regimul de funcţionare al reţelei, regimul deformant se va accentua şi în loc să se îmbunătăţească factorul de putere, acesta poate fi înrăutăţit.

9.5.4. EFECTE DIVERSE ALE FENOMENELOR DEFORMANTE

În afară de efectele arătate mai sus, fenomenele deformante mai pot produce şi alte fenomene, tot atît de supărătoare. Printre acestea se citează *creşterea puterii aparente, creşterea pierderilor de putere activă pe liniile electrice, creşterea impedanţei aparente* etc.

9.5.4.1. Creşterea puterii aparente. Dacă se notează cu S puterea aparentă datorită numai armonicii fundamentale şi cu S' puterea aparentă totală din circuit, atunci creşterea de putere aparentă este dată de relaţia

$$\zeta = \frac{S' - S}{S}. \tag{9.101}$$

---

* Vezi [10] pag. 205.

Ținînd seama, că

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ și } S' = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2},$$

relația (9.97) poate fi scrisă

$$\zeta = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2} - \sqrt{P^2 + Q^2}}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \sqrt{1 + \frac{D^2}{P^2 + Q^2}} - 1 = \sqrt{1 + \tau^2} - 1,$$

în care τ este factorul deformant al regimului* .

Dezvoltînd în serie radicalul și oprind numai primii doi termeni ai dezvoltării, întrucît valoarea lui τ^2 este în general mică, se obține

$$\zeta' \cong \frac{1}{2} \tau^2.$$

Fie, de exemplu, cazul unei distribuții trifazate ** pentru care tensiunea periodică este practic sinusoidală, cu $U_{ef} = 5{,}2$ kV și un curent periodic nesinusoidal, avînd amplitudinea armonicii fundamentale de 122,85 A. Pentru acest caz s-a determinat, prin calcul, din oscilograma obținută: $P = 750$ kW; $Q = 180$ kVAR; $D = 212$ kVAD.

Calculînd factorul deformant al regimului, se găsește

$$\tau^2 = \frac{212^2}{750^2 + 180^2} = 0{,}076$$

de unde, rezultă

$$\zeta = 3{,}7\%,$$

calculul fiind făcut cu formula exactă, sau

$$\zeta' = 3{,}8\%$$

calculul fiind făcut cu formula aproximativă.

9.5.4.2. Creșterea pierderilor de putere activă pe linie. În ceea ce privește pierderile de putere activă pe linie, dacă R este rezistența conductorului, atunci acestea sînt date de relația

$$p' = 3R \frac{P^2 + Q^2 + D^2}{3U^2} \text{ W};$$

în regimul sinusoidal ele se reduc la

$$p = 3R \frac{P^2 + Q^2}{3U^2} \text{ W};$$

---

* Vezi 9.3.2.6.

** Vezi [40].

deci, creşterea de pierderi de putere activă este dată de relaţia *

$$\xi = \frac{p' - p}{p} = \frac{D^2}{P^2 + Q^2} = \tau^2.$$

În cazul exemplului precedent se găseşte

$$\xi = \frac{212^2}{750^2 + 180^2} = 7{,}60\,\%.$$

9.5.4.3. **Creşterea impedanţei aparente.** Fie un circuit electric format dintr-un rezistor de rezistenţă R, o bobină de reactanţă X_L şi un condensator de reactanţă X_c în serie. Dacă se măsoară impedanţa corespunzătoare în regim sinusoidal, se găseşte

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\,.$$

Dacă se măsoară aceeaşi impedanţă în regim deformant, se va găsi o valoare Z' care, în general, va fi diferită de Z.

Se presupune că măsurătorile se fac cu aparate termice, astfel ca să nu se introducă erori prin măsurătoare.

Să vedem care este sporul de impedanţă datorit regimului deformant.

Fie acest regim deformant, definit de unda de tensiune

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sqrt{2} \sin k\,\omega\, t$$

şi de unda de curent

$$i = \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sqrt{2} \sin (k\omega\, t - \varphi_k).$$

Impedanţa corespunzătoare este

$$Z' = \frac{U}{I},$$

dar,

$$U = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}$$

---

* S-a presupus că tensiunea în regim deformant este sinusoidală; în cazul real,

$$\xi = \left(\frac{D^2}{P^2+Q^2} + 1\right)\frac{1}{1 + \delta_u^2} - 1,$$

în care δ_u este coeficientul de distorsiune al tensiunii şi în general, $\delta_u^2 \ll 1$.

şi

$$I = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2}{R^2 + \left(kX_L - \frac{1}{k} X_C\right)^2}}$$

de unde, rezultă

$$Z' = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2}{R^2 + \left(kX_L - \frac{1}{k} X_C\right)^2}}},$$

sau

$$Z' = Z \sqrt{\frac{U_1^2 + \sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}{U^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{R^2 + (X_L - X_C)^2}{R^2 + \left(kX_L - \frac{1}{k} X_C\right)^2}}} = Z\,K,$$

K fiind o constantă.

Se vede imediat că Z' depinde atît de regimul deformant, cît şi de constituţia circuitului, raportul $Z'/Z = K$ putînd fi mai mare sau mai mic decît 1, după cum circuitul este mai inductiv sau mai capacitiv.

9.5.4.4. Creşterea erorii aparatelor de măsură. În general, prezenţa unui regim deformant influenţează condiţiile de funcţionare ale aparatelor de măsură şi în special precizia acestora *.

Această influenţă este mai puţin importantă la ampermetrele şi voltmetrele electromagnetice, electrodinamice şi electrostatice, cu condiţia ca echipajele mobile să fie practic lipsite de piese magnetice saturate.

Pentru aparatele de inducţie această concluzie este valabilă, numai dacă unda de curent sau de tensiune nu conţine termenul constant. În cazul cînd acest termen există, aparatul va înregistra întotdeauna în minus. Eroarea corespunzătoare, avînd caracterul unei erori sistematice, va fi dată de relaţia

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{Y^2 - Y_0^2} - Y}{Y}.$$

Influenţa este mai mare asupra wattmetrelor electrodinamice şi asupra contoarelor de aceeaşi clasă (de tipul contorului THOMSON). Un regim deformant produce o mărire a erorilor acestor aparate. Aceste erori pot atinge în practică o valoare *negativă* de ordinul 7% pentru regimurile inductive.

Experienţa ne-a arătat că aceste erori devin *pozitive* pentru regimurile capacitive **.

---

* Vezi [5] pag. 75.
** Vezi [5] pag. 76.

Aceste situații sînt teoretic explicabile, dat fiind că erorile acestor aparate sînt datorite, în primul rînd, reactanței circuitului derivație. Astfel, pentru armonicile de ordinul k, ar trebui să acționeze asupra wattmetrului un cuplu proporțional cu puterea dată de aceste armonici,

$$P_k = U_k I_k \cos\varphi_k.$$

În realitate, curentul care traversează bobina voltmetrică a wattmetrului și care este proporțional cu tensiunea U_k este mai mic decît curentul normal, deoarece impedanța circuitului de tensiune

$$Z_k = \sqrt{R^2 + L^2 k^2 \omega^2}$$

este, în acest caz, mai mare decît impedanța normală din cauza frecvenței corespunzătoare.

Rezultă deci, că puterea dată de fiecare grupă de armonici contribuie la formarea cuplului activ total al wattmetrului cu cantități mai mici decît acelea care contribuie la formarea puterii totale în circuit.

Pentru contoarele de inducție, regimul deformant poate să mărească erorile pînă la aproximativ 30% în minus.

Măsura energiei electrice cu un contor electric este egală cu numărul total de rotații efectuat de disc într-un anumit timp

$$W_t = \int_{t_1}^{t_2} \omega' \, dt.$$

În cazul unui regim deformant, viteza de rotație a discului este dată de relația*

$$\omega' = (K_1 - K_2)\, P + K_2 \sum_{k=1}^{\infty} (1 - k^2)\, P_k + K_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2}{k} - \frac{F}{B^2}$$

în care K_1, K_2 și K_3 sînt factori depinzînd de elementele constructive ale contorului, F un factor ce caracterizează frecările în contor, B inducția magnetică a magnetului permanent, k ordinul armonicii, P puterea totală din circuit, P_k puterea produsă de o pereche de armonici și U_k valoarea efectivă a armonicii de tensiune de ordinul k.

Ținînd seama că un contor nu poate fi reglat decît pentru o singură armonică, funcționînd într-un regim deformant, indicațiile sale vor fi întotdeauna eronate.

Neglijînd diferența

$$K_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2}{k} - \frac{F}{B^2},$$

care, în general, este mică, eroarea unui contor de inducție funcționînd în regim deformant este dată de relația

$$\varepsilon = \frac{K_2}{K_1 - K_2} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - k^2) \frac{P_k}{P}.$$

---

* Vezi [11].

Nu se poate spune nimic apriori asupra acestei expresii a erorii contorului. Într-adevăr, ea poate avea termeni pozitivi sau negativi, în raport cu puterea P_k al cărei semn depinde de defazajul dintre undele de curent şi de tensiune corespunzătoare ; ea mai depinde şi de semnul expresiei $K_1 - K_2$, care depinde numai de elementele constructive ale contorului şi deci este independentă de regimul deformant corespunzător. Ţinînd însă seama de faptul că ordinul unei armonici superioare este un număr întreg, întotdeauna mai mare ca unitatea ($k > 1$), este foarte probabil ca, în general, eroarea contorului să fie negativă şi, deci, un contor reglat în regim sinusoidal şi funcţionînd în regim deformant va indica în *minus* * .

Dacă în regimul deformant ambele curbe — de curent şi de tensiune — au termeni constanţi, contoarele de inducţie nu vor înregistra energia corespunzătoare şi eroarea suplimentară, avînd caracterul unei erori sistematice, va fi

$$\varepsilon' = -\frac{U_0 I_0}{U_0 I_0 + P}.$$

Aparatele termice cu fir cald sînt singurele aparate a căror funcţionare nu este influenţată de regimul deformant ** .

9.6. REGIMUL DEFORMANT ÎN SISTEMELE TRIFAZATE ECHILIBRATE

9.6.1. FORŢA ELECTROMOTOARE PE FAZĂ A UNUI ALTERNATOR

Într-un sistem trifazat echilibrat cele trei tensiuni produse de un alternator sînt identice, însă defazate între ele în timp cu $\frac{T}{3}$ din perioadă. Diagrama fazorială a acestor trei tensiuni se reprezintă prin trei fazori egali, avînd aceeaşi origine şi defazaţi între ei cu 120°. Aceşti fazori se rotesc cu viteza de sincronism ω, şi succesiunea lor normală este aceea a acelor unui ceasornic.

Forţa electromotoare produsă de alternator este în general periodică nesinusoidală. Dacă se dezvoltă în serie Fourier fiecare curbă de forţă electromotoare produsă pe cele trei faze, se obţine :

— pentru faza I $$e_{\mathrm{I}} = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sqrt{2} \sin k\omega t,$$

— pentru faza II $$e_{\mathrm{II}} = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sqrt{2} \sin k\omega \left(t - \frac{2\pi}{3\omega}\right),$$

— pentru faza III $$e_{\mathrm{III}} = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sqrt{2} \sin k\omega \left(t + \frac{2\pi}{3\omega}\right).$$

în care k este un număr oarecare întreg şi pozitiv.

---

* Fapt confirmat de experienţă; vezi [11].
** Vezi [5] pag. 12.

Introducînd pe $k\omega$ în interiorul parantezelor, se obține

$$e_{\mathrm{I}} = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sqrt{2} \sin k\omega t,$$

$$e_{\mathrm{II}} = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sqrt{2} \sin\left(k\omega t - k\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$e_{\mathrm{III}} = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sqrt{2} \sin\left(k\omega t + k\frac{2\pi}{3}\right).$$

Valoarea acestor expresii diferă după valoarea lui k.

a) Fie k de forma

$$k = 3\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots)$$

Se obține:

$$e_{\mathrm{I}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha} \sqrt{2} \sin 3\alpha\omega t,$$

$$e_{\mathrm{II}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha} \sqrt{2} \sin(3\alpha\omega t - 2\alpha\pi) = \sum_{0}^{\infty} E_{3\alpha} \sqrt{2} \sin 3\alpha\omega t,$$

$$e_{\mathrm{III}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha} \sqrt{2} \sin(3\alpha\omega t + 2\alpha\pi) = \sum_{0}^{\infty} E_{3\alpha} \sqrt{2} \sin 3\alpha\omega t.$$

Rezultă dar că toate armonicile de ordinul 3, sau multiplu de 3, pe toate cele trei faze, *sînt în fază*. Ele formează un sistem *homopolar*.

b) Fie acum k de forma

$$k = 3\alpha + 1 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots).$$

Se obține:

$$e_{\mathrm{I}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha+1} \sqrt{2} \sin(3\alpha + 1)\omega t,$$

$$e_{\mathrm{II}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha+1} \sqrt{2} \sin\left[(3\alpha + 1)\omega t - \frac{2\pi}{3}\right],$$

$$e_{\mathrm{III}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha+1} \sqrt{2} \sin\left[(3\alpha + 1)\omega t + \frac{2\pi}{3}\right].$$

De aici rezultă că toate armonicile de ordinul $k = 3\alpha + 1$ ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) vor avea succesiunea fazelor normală, adică aceea a mișcării acelor unui ceasornic; ele formează sisteme *directe*.

Dînd lui α diverse valori particulare, se va găsi că armonicile de ordinul 1, 7, 13, 19, ... (luînd în considerare numai armonicile impare care se întîlnesc în electrotehnică) satisfac acestei condiţii, deci formează sisteme directe.

c) Fie acum cazul cînd

$$k = 3\alpha - 1 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots).$$

Se obţine

$$e_{I} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha-1}\sqrt{2}\,\sin\,(3\alpha-1)\omega t,$$

$$e_{II} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha-1}\sqrt{2}\,\sin\left[(3\alpha-1)\,\omega t + \frac{2\pi}{3}\right],$$

$$e_{III} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha-1}\sqrt{2}\,\sin\left[(3\alpha-1)\,\omega t - \frac{2\pi}{3}\right].$$

Din aceste expresii rezultă că armonicile de ordinul $k = 3\alpha - 1$ ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots$), adică de ordinul 5, 11, 17, ... (luînd în considerare, ca mai sus, numai armonicile impare) formează sisteme trifazate a căror succesiune de faze este *inversă* decît aceea a undei fundamentale, sau aceea a sistemului trifazat considerat. Aceste armonici formează un sistem *invers*.

Cele de mai sus pot fi rezumate în următoarea schemă în care nu se iau în considerare decît armonicile impare, singurele care apar în sistemele de tensiuni produse de alternatoarele trifazate:

Ordinul armonicii	Ordinul sistemului trifazat
1 ~~4~~ 7 ~~10~~ 13 ~~16~~ ... $(3\alpha + 1)$	direct
~~2~~ 5 ~~8~~ 11 ~~14~~ 17 ... $(3\alpha - 1)$	invers
3 ~~6~~ 9 ~~12~~ 15 ~~18~~ ... 3α	homopolar

9.6.2. TENSIUNEA DE LINIE LA BORNELE UNUI ALTERNATOR CU FORŢA ELECTROMOTOARE PE FAZĂ NESINUSOIDALĂ

Dacă

$$e_{I} = e_{II} = e_{III} = e$$

este forţa electromotoare pe fază, atunci tensiunea de linie este dată de relaţia

$$e_{I} - e_{II} = e_{I-III} = e\sqrt{3}.$$

Fie de calculat expresia acestei tensiuni în cazul regimului nesinusoidal. Se obţine

$$e_{I} - e_{II} = \sum_{k=1}^{n} E_k\sqrt{2}\sin k\,\omega\,t - \sum_{k=1}^{n} E_k\sqrt{2}\,\sin\left(k\omega\,t - k\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E_k\sqrt{2}\cdot 2\sin\left(k\omega t - k\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\sin k\frac{\pi}{3}.$$

Valoarea acestei expresii este diferită pentru diversele armonici. Astfel:

a) Pentru armonicile de ordinul

$$k = 3\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots)$$

se obţine

$$e_{\mathrm{I}} - e_{\mathrm{II}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha}\ 2 \cdot 2 \sin\left(3\alpha\ \omega t - \alpha\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin \alpha\pi = 0.$$

b) Pentru armonicile de ordinul

$$k = 3\alpha + 1 \quad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

se obţine

$$e_{\mathrm{I}} - e_{\mathrm{II}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha+1} \sqrt{2}. \sqrt{3} \sin\left[(3\alpha + 1)\,\omega\, t + \frac{\pi}{6}\right].$$

c) Pentru armonicile de ordinul

$$k = 3\alpha - 1 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots)$$

se obţine

$$e_{\mathrm{I}} - e_{\mathrm{II}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha-1} \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \sin\left[(3\alpha - 1)\,\omega\, t - \frac{\pi}{6}\right].$$

Din examinarea expresiilor de mai sus rezultă:

a) Curba tensiunii între faze (tensiunea de linie) nu cuprinde armonica 3 sau multiplu de 3.

b) Armonicile de ordinul $3\alpha + 1$ (armonicile 1, 7, 13, ...) sînt defazate *înaintea* armonicii corespunzătoare pe fază cu unghiul $\frac{\pi}{6}$.

c) Armonicile de ordinul $3\alpha - 1$ (armonicile 5, 11, 17, ...) sînt defazate *în urma* armonicii corespunzătoare pe fază cu acelaşi unghi $\frac{\pi}{6}$.

În regim deformant, raportul dintre valorile efective ale tensiunii de linie şi ale tensiunii pe fază este diferit de acela din regimul sinusoidal, pentru care acest raport este egal cu $\sqrt{3}$.

În cazul unui regim nesinusoidal, valoarea efectivă a tensiunii pe fază este

$$E_{\mathrm{I}} = \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + E_7^2 + \ldots},$$

iar valoarea efectivă a tensiunii de linie este

$$E_{\mathrm{I-II}} =$$

$$= \sqrt{(E_1\sqrt{3})^2 + (E_5\sqrt{3})^2 + (E_7\sqrt{3})^2 + (E_{11}\sqrt{3})^2 + \ldots} = \sqrt{3}\sqrt{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + E_{11}^2 + \ldots}.$$

Rezultă

$$\frac{E_{\mathrm{I-II}}}{E_{\mathrm{I}}} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + E_{11}^2 + \ldots}{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + E_7^2 + E_9^2 + E_{11}^2 + \ldots}},$$

de unde, se vede că în cazul regimului deformant, raportul dintre tensiunea compusă și tensiunea stelată este egal cu $\sqrt{3}$ numai dacă alternatorul nu conține armonici 3 sau multiplu de 3 pe nici una din faze. În caz contrar, acest raport este mai mic decît $\sqrt{3}$.

Cazul examinat în cele ce preced corespunde la cuplarea în stea a înfășurărilor unui alternator.

9.6.3. CUPLAREA ÎN TRIUNGHI A ÎNFĂȘURĂRILOR UNUI ALTERNATOR TRIFAZAT.

Dacă se leagă în serie cele trei înfășurări ale alternatorului, ca și cum s-ar face o conectare în triunghi a celor trei înfășurări fără însă a închide triunghiul, se va obține la cele două extremități libere o diferență de potențial u egală cu suma forțelor electromotoare dată de cele trei înfășurări :

$$u = e_{\mathrm{I}} + e_{\mathrm{II}} + e_{\mathrm{III}} = \sum_{k=1}^{n} E_k \sqrt{2} \sin k\,\omega\, t \left(1 + 2 \cos k\omega \frac{2\pi}{3}\right).$$

Este ușor de văzut că pentru

$$k = 3\alpha \pm 1 \qquad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

suma

$$1 + 2\cos(3\alpha \pm 1)\frac{2\pi}{3} = 0,$$

iar pentru $k = 3\,\alpha$, paranteza este egală cu 3. Obținem deci

$$u = 3 \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha} \sqrt{2} \sin 3\,\alpha\omega t,$$

adică o undă formată numai din armonici de ordinul 3 sau multiplu de 3.

Dacă se închide triunghiul, aceste armonici de ordinul 3 sau multiplu de 3 se vor găsi închise în scurtcircuit, însă nu vor produce o intensitate de curent prea mare din cauza reactanței interioare a alternatorului, care pentru aceste frecvențe, este cel puțin de trei ori mai mare decît pentru armonica fundamentală.

Pentru a se evita această circulație parazită de curent, care are ca efect o mărire a pierderilor prin efect JOULE, alternatoarele se leagă în general în stea, astfel încît armonicile de ordinul 3 sau multiplu de 3 să se anuleze.

În cazul transformatoarelor mari, se folosește această proprietate a legării în triunghi a înfășurărilor unei armături tocmai pentru ca, prin producerea armonicilor de ordinul 3 sau multiplu de 3, să se creeze un flux care să distrugă armonicile 3 sau multiplu de 3 ce ar putea apărea în înfășurările transformatorului. În acest scop transformatorul se construiește cu o înfășurare terțiară, legată în triunghi, fie direct, fie prin intermediul unui aparat de măsură, iar transformatoarele cu trei înfășurări au întotdeauna o înfășurare în triunghi.

9.6.4. EFECTELE FIERULUI ÎN REȚELELE ELECTRICE TRIFAZATE

Fie un alternator legat direct cu un transformator trifazat cu conexiunea în stea pe ambele înfășurări (fig. 9.46). Fie v_A, v_B, v_C potențialul la bornele de intrare ale transformatorului și v_N potențialul punctului neutru. Tensiunea pe fiecare fază a transformatorului este

$$v_{A_1} - v_N = v_1;\; v_{B_1} - v_N = v_2;\; v_{C_1} - v_N = v_3\,.$$

Presupunînd că între alternator și transformator nu există nici o cădere de tensiune și că sarcina este echilibrată pe toate fazele, deci,

$$v_N = v_0\,;$$

rezultă

$$v_1 = e_1\,;\; v_2 = e_2\,;\; v_3 = e_3\,;$$

ceea ce înseamnă, că dacă tensiunile e_1, e_2 și e_3 ale alternatorului sînt periodice sinusoidale și tensiunile v_1, v_2 și v_3 de pe fazele transformatorului sînt periodice sinusoidale. În acest caz, fluxurile produse Φ_1, Φ_2, Φ_3, sînt periodic sinusoidale.

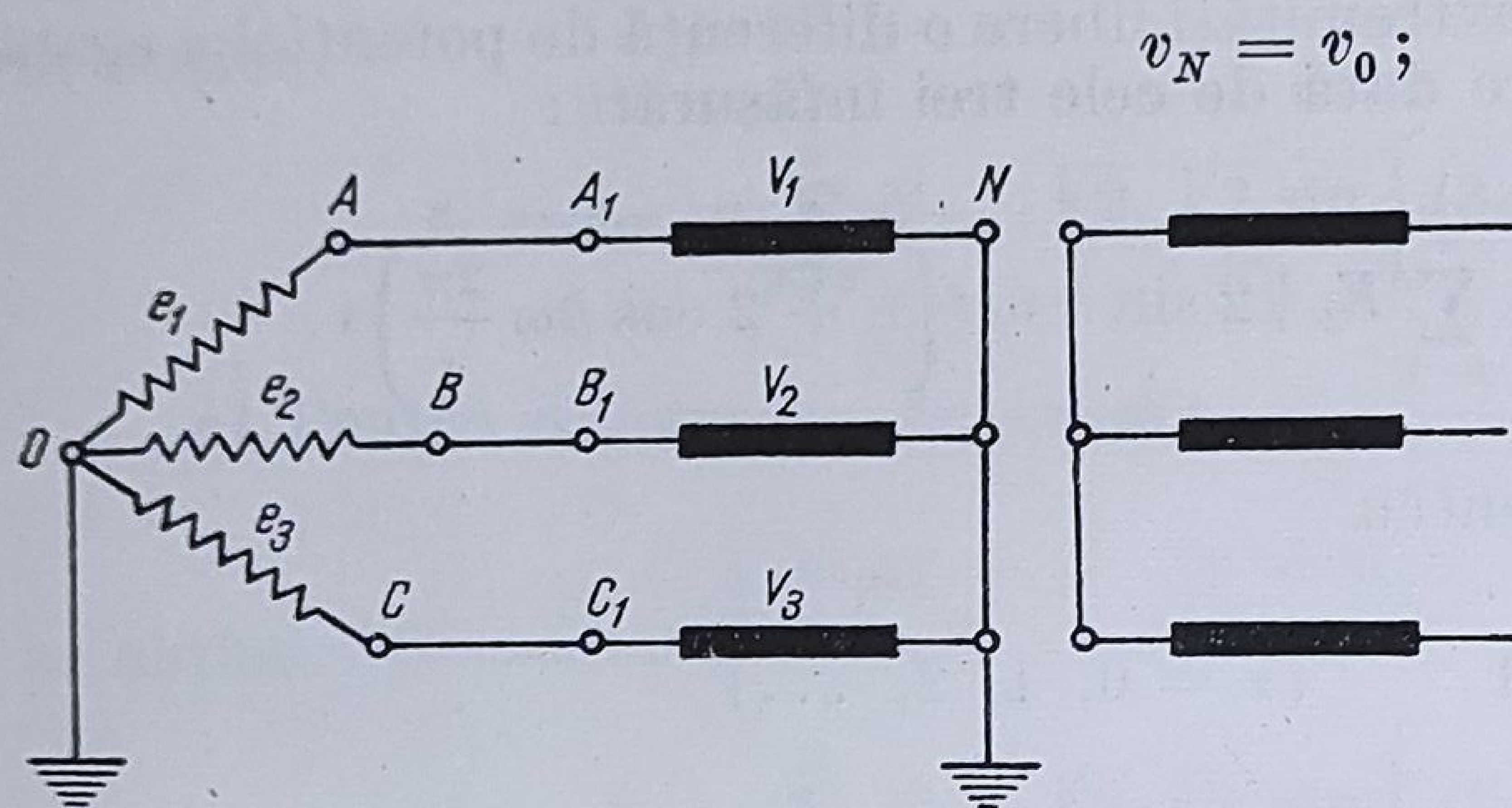


Fig. 9.46. Sistem trifazat.

Din cauza magnetizării fierului, curenții i_1, i_2 și i_3 sînt deformați *, în undele respective predominînd armonica de ordinul 3. În sistemul trifazat, echilibrat însă, aceste armonici formează un sistem homopolar

$$(i_3)_{\text{I}} = (i_3)_{\text{II}} = (i_3)_{\text{III}} = i_3\sqrt{2}\,\sin 3\omega t.$$

Teorema I a lui KIRCHHOFF, aplicată punctului neutru al transformatorului, trebuie să dea

$$(i_3)_{\text{I}} + (i_3)_{\text{II}} + (i_3)_{\text{III}} = 0$$

ceea ce, în acest caz, nu este îndeplinit. Rezultă dar că ipoteza care a fost făcută nu este exactă și deci

$$v_0 \neq v_N.$$

Pentru ca ipoteza făcută să fie satisfăcută, este necesar ca undele de curent pe cele trei faze să nu conțină armonica de ordinul 3 sau multiplu de 3, ceea ce nu este posibil.

Să presupunem atunci curenții i ca fiind periodici sinusoidali. Va rezulta pentru flux o curbă turtită și tensiunea rezultantă va fi deformată**.

Tensiunea între faze este

$$v_{\text{I}} - v_{\text{II}} = e_{\text{I}} - e_{\text{II}}\,; \tag{9.102}$$

* Vezi 9.4.2.1.
** Vezi 9.4.2.2.

rezultă că ea trebuie să fie periodică sinusoidală, căci s-a presupus că forța electromotoare a alternatorului este periodică sinusoidală. Tensiunile pe fază la transformator însă nu sînt sinusoidale. Rezultă de aici că v_I este diferit de e_I. Luînd

$$v_I = V_1 \sqrt{2} \sin \omega t - V_3 \sqrt{2} \sin 3\omega t$$

şi

$$v_{II} = V_1 \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{2}\right) - V_3 \sqrt{2} \sin 3\omega t,$$

se va obţine

$$v_I - v_{II} = V_1 \sqrt{2} \sqrt{3} \sin (\omega t + 30°);$$

cum

$$e_I - e_{II} = E \sqrt{2} \sqrt{3} \sin (\omega t + 30°),$$

din relaţia (9.102) rezultă

$$V_1 = E,$$

adică, armonicile fundamentale de tensiune sînt aceleaşi şi deci,

$$V_1 = E \sqrt{2} \sin \omega t - V_3 \sqrt{2} \sin 3\omega t.$$

Diferenţa de potenţial între punctele neutre ale alternatorului şi transformatorului, $(v_0 - v_N)$, se obţine aplicînd teorema a II-a a lui KIRCHHOFF circuitului $OAA'NO$ (fig. 9.46) şi este

$$(v_0 - v_A) + (v_{A_1} - v_N) + (v_N - v_0) = 0;$$

rezultă, că

$$(v_0 - v_N) = (v_0 - v_A) + (v_{A_1} - v_N) = -e + v = -V_3 \sqrt{2} \sin 3\omega t.$$

În consecinţă, punctul neutru al transformatorului nu se mai află la acelaşi potenţial cu punctul neutru al alternatorului şi nici la un potenţial constant; el se găseşte la un potenţial oscilant nesinusoidal datorit armonicilor de ordinul 3 sau multiplu de 3.

Din cauza acestei diferenţe de potenţial, în cazul cînd între cele două puncte neutre există o legătură galvanică oarecare, între alternator şi transformator se va produce o circulaţie de curent cu undă nesinusoidală, formată numai din armonici de ordinul 3 şi multiplu de 3, care va avea ca efect, printre altele, perturbarea liniilor de telecomunicaţie vecine. În afară de aceasta, se va produce un surplus de pierderi pe linia de transmitere a energiei electrice.

De asemenea, aceşti curenţi parazitari care circulă în mod permanent pot produce declanşarea intempestivă şi dezordonată a releelor de punere la pămînt a liniei.

Suprimarea armonicii de ordinul 3 și multiplu de 3 se face adăugînd transformatorului un bobinaj terțiar legat în triunghi deschis (fig. 9.47).

Să presupunem, pentru simplificare, că tensiunile nesinusoidale de pe fazele alternatorului nu conțin decît armonicile de ordinul 1 și 3. Tensiunile fiind deformate, rezultă că și fluxurile induse vor fi deformate. Aceste fluxuri vor induce în bobinajul terțiar, pe fiecare fază, tensiunile v_1', v_2' și v_3' de aceeași formă cu tensiunile primare v_1, v_2, v_3, deci deformate și defazate între ele cu 1/3 din perioadă. În înfășurarea specială (terțiară) va rezulta tensiunea

$$v_1' + v_2' + v_3' = 3V' \sqrt{2} \sin 3\omega t.$$

Cînd se închide întreruptorul K în bobinaj se va produce un curent care, în virtutea legii lui LENZ, se va opune cauzei care i-a dat naștere: tensiunea v_3'

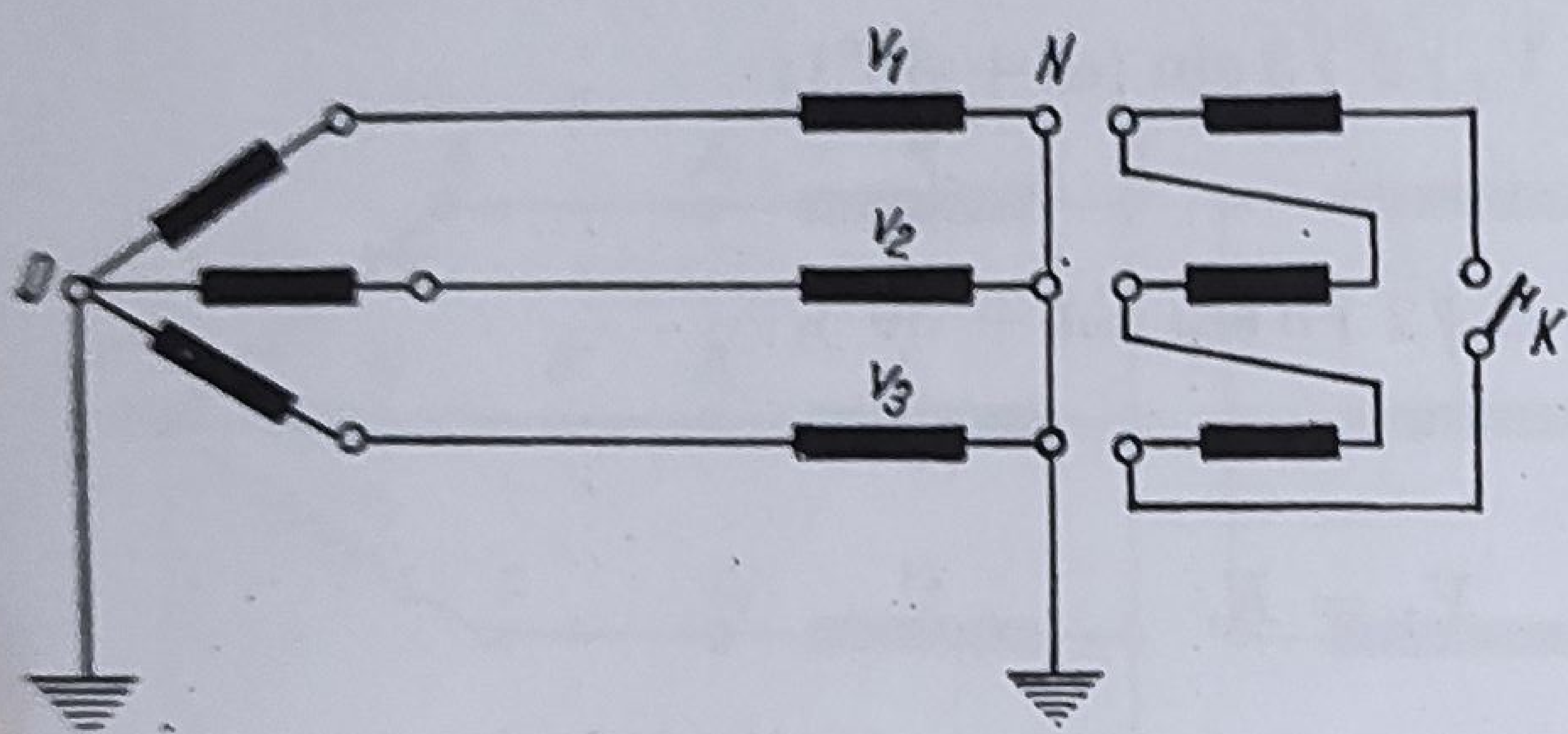


Fig. 9.47. Suprimarea armonicii trei la transformatoare.

și deci fluxul Φ_3 va produce un flux Φ_3' de sens contrar cu Φ_3. În cazul cînd funcționarea transformatorului este perfect echilibrată, aceste fluxuri se vor anula și în consecință vor dispărea armonicile de ordinul 3.

În acest caz tensiunile v_1, v_2, v_3, și deci și curenții respectivi, vor fi practic sinusoidali, iar efectele perturbatoare datorite acestor armonici vor fi aproape complet anihilate.

Raționamentul făcut pentru simplificare, pentru unde de tensiune avînd numai armonicile de ordinul 1 și 3, poate fi extins pentru orice undă periodică nesinusoidală, care conține armonici de ordin multiplu de 3.

Capitolul X

METODE SPECIALE DE CALCUL ALE REGIMULUI TRANZITORIU

10.1. GENERALITĂȚI

Problema rezolvării circuitelor electrice, în special în regimul tranzitoriu, prezintă dificultăți care sînt cu atît mai mari cu cît configurația circuitelor este mai complicată. Într-adevăr, rezolvarea acestor probleme constă în găsirea curentului electric în diversele elemente ale unui circuit electric — *răspunsul circuitului* — atunci cînd la un moment dat — momentul inițial, considerat la timpul $t = 0$ se aplică circuitului un *semnal* constînd fie din modificarea structurii acestuia, fie din modificarea forțelor electromotoare care acționează în circuit, fie din ambele simultan.

Pentru aceasta este necesar a se rezolva un sistem de ecuații diferențiale, de ordinul doi, liniare sau neliniare, care se scriu aplicînd circuitului cele două teoreme ale lui KIRCHHOFF, sau teoremele derivate, teorema circuitelor independente (curenții ciclici) sau teorema perechilor de noduri (potențialele la noduri), alegerea metodei depinzînd de simplificările care pot fi aduse calculului. Găsirea soluțiilor acestor ecuații diferențiale și mai ales problema economiei de timp pentru rezolvarea lor, a făcut ca matematicienii — și în special inginerii — să caute metode de rezolvare cît mai expeditive.

Dintre primele lucrări în acest sens trebuie menționate acelea ale lui LAPLACE, care stau la baza calculului operațional modern, și pe acelea ale lui FOURIER.

Introducerea calculului operațional în electrotehnică se datorează lui HEAVISIDE, care l-a expus pentru prima oară în lucrarea sa „Electromagnetic Theory" publicată în 1889 [130]. HEAVISIDE reducea orice problemă de circuit electric în care trebuia rezolvată o ecuație diferențială, la rezolvarea unei ecuații algebrice prin înlocuirea simbolului de derivare $\frac{d}{dt}$ prin litera p și acela de integrare prin $1/p$; ecuația algebrică se rezolva în raport cu această literă după care se trece apoi, prin anumite procedee, la variabila inițială t.

HEAVISIDE s-a mulțumit să dea numai procedeele de calcul fără a arăta justificarea lor și nici sursa de inspirație.

Numeroși au fost cercetătorii care au căutat să dea o justificare matematică a metodei lui HEAVISIDE*. În 1917 J. CARSON [75] reușește să dea justificarea matematică completă a acestei metode operaționale care se bazează pe transformata LAPLACE

$$\varphi(p) = \int_0^\infty \varepsilon^{-pt} f(t)\, dt,$$

* Vezi [130]

care constă în transformarea unei funcţii de variabilă reală $f(t)$ — funcţie ce trebuie să îndeplinească anumite condiţii — într-o funcţie de variabilă complexă $\varphi(p)$.

Tot o consecinţă a căutării unei justificări a metodei lui HEAVISIDE a fost şi introducerea mărimilor complexe generalizate şi aplicarea lor la studiul circuitelor electrice în regim tranzitoriu.*.

Utilizarea calculatoarelor electronice în rezolvarea problemelor complexe puse de funcţionarea circuitelor electrice a necesitat realizarea de programări pentru întocmirea cărora calculul operaţional sub diverse forme constituie elementele de bază. În afară de utilizarea calculului operaţional sub forma dată de HEAVISIDE, a transformării LAPLACE sau FOURIER, a integralelor FOURIER sau DUHAMEL, au mai apărut şi alte transformări — bazate în special pe transformarea LAPLACE—care au dat naştere la calcule operaţionale sau cu operatori, printre care metoda prof. JAN MIKUSINSKI de la Universitatea din Varşovia**.

Expunerea completă a diverselor metode iese din cadrul acestui tratat şi ne vom rezuma a da numai principiile de bază şi metodele de lucru respective.

10.2 STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU CU AJUTORUL CALCULULUI SIMBOLIC AL LUI HEAVISIDE

10.2.1. GENERALITĂŢI ASUPRA CALCULULUI SIMBOLIC AL LUI HEAVISIDE

10.2.1.1. Simbolismul lui HEAVISIDE. Rezolvarea oricărei probleme de circuit electric constă în rezolvarea sistemului de ecuaţii (3.194).

În studiul regimului permanent, în cazul curenţilor periodici alternativi sinusoidali, rezolvarea acestor ecuaţii se face de obicei folosind fazorii. Transformarea ecuaţiilor scrise între valori instantanee în ecuaţii scrise între fazori constă*** în a înlocui în ecuaţia dată simbolul de derivare $\frac{dt}{d}$ prin $j\omega$ şi simbolul de integrare $\int(\ )dt$ prin $(j\omega)^{-1}$; sistemul de ecuaţii integro-diferenţiale se transformă într-un sistem de ecuaţii algebrice ce se rezolvă apoi în raport cu necunoscutele căutate, obţinîndu-se soluţiile sub forma

$$\underline{I}_k = f_k(j\omega) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

de unde, prin transformarea inversă**** se găseşte expresia curentului căutat ca funcţie de timp.

HEAVISIDE, înainte chiar de a apărea aplicarea calculului cu cantităţi complexe în electrotehnică***** a propus o metodă de rezolvare a sistemelor de ecuaţii diferenţiate prin „algebrizarea" lor cu ajutorul operatorilor p, care reprezintă simbolul de derivare şi p^{-1}, care reprezintă simbolul de integrare, această operaţie fiind inversă precedentei; prin înlocuirea simbolurilor respective, ca şi în studiul regimului permanent cu ajutorul cantităţilor complexe, sistemul de ecuaţii diferenţiale devine un sistem liniar de ecuaţii algebrice în

---

* Vezi 7.4

** Vezi [187].

*** Vezi 4.2.5.5.

**** Vezi [130].

***** Metoda HEAVISIDE a fost publicată în 1889, iar metoda cantităţilor complexe a fost publicată de *KENNELLY* în 1893.

raport cu necunoscuta ce trebuie determinată, soluţiile căutate obţinîndu-se apoi sub forma

$$i_k = F_k(p) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Din această formă, prin regulile relativ simple date de HEAVISIDE, fără nici un fel de justificare, se trece la funcţiile de timp căutate.

Trebuie observat că prin metoda lui HEAVISIDE soluţia obţinută pentru problema de regim tranzitoriu studiată este completă, conţinînd atît regimul liber cît şi regimul permanent de funcţionare, constantele de integrare fiind perfect determinate; metoda însă nu este aplicabilă decît dacă sistemul are condiţii iniţiale de funcţionare nule.

O metodă operaţională pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale liniare, analoagă cu aceea a lui HEAVISIDE, a fost expusă de matematicianul rus M. VAŞCENKO-ZAHARCENCO în anul 1862, în lucrarea sa „Calculul simbolic şi aplicarea lui la integrarea ecuaţiilor diferenţiale liniare".

Este foarte posibil ca HEAVISIDE să fi avut cunoştinţă de aceste lucrări cînd a elaborat metoda sa de studiu ale regimurilor tranzitorii.

Utilizînd simbolismul lui HEAVISIDE, sistemul de ecuaţii (3.194) se scrie

$$\sum_{k=1}^{n}\left(R_{jk}\, i_k + p\, L_{jk}\, i_k + \frac{i_k}{p\, C_{jk}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(R_{jk} + pL_{jk} + \frac{1}{pC_{jk}}\right) i_k = e_j - \sum_{k=1}^{n}\frac{q_{jk}}{C_{jk}} = E_j$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

10.2.1.2. **Cîteva relaţii fundamentale ale calculului simbolic a lui HEAVISIDE.** Pentru a se putea aplica metoda dată de HEAVISIDE şi a determina expresia în funcţie de timp a soluţiei găsite în funcţie de p, este necesar să se stabilească unele relaţii fundamentale.

a) Aplicarea operatorului p^{-n} funcţiei unitate, pentru n întreg şi pozitiv.* Avem succesiv

$$\frac{1}{p}\Upsilon(t) = \int_0^t dt = \frac{t}{1!};$$

$$\frac{1}{p^2}\Upsilon(t) = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p}\Upsilon(t)\right] = \frac{1}{1!}\int_0^t t\, dt = \frac{t^2}{2!};$$

$$\frac{1}{p^3}\Upsilon(t) = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p^2}\Upsilon(t)\right] = \frac{1}{2!}\int_0^t t^2\, dt = \frac{t^3}{3!};$$

în general, se poate scrie deci

$$\frac{1}{p^n}\Upsilon(t) = \frac{t^n}{n!}. \tag{10 1}$$

* Vezi 3.6.2.3.

b) Aplicarea operatorului p^{-n} funcției unitate, pentru n oarecare. Pentru generalizarea cazului precedent se folosește funcția gama* definită de relația

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}\, \varepsilon^{-x}\, dx,$$

avînd proprietatea funcțională

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

Pentru n întreg și pozitiv, funcția gama devine funcția factorială

$$\Gamma(n+1) = f(n) = n!,$$

cu

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1.$$

Pentru n întreg și negativ, funcția gama ia valoarea infinită. Pentru n fracționar, funcția gama ia valori finite bine determinate.

În aceste condiții se găsește, pentru n oarecare

$$\frac{1}{p^n}\Upsilon(t) = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \tag{10.2}$$

c) Aplicarea operatorului $\frac{p}{p+a}$ funcției unitate. Ținînd seama că

$$\frac{p}{p+a} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{a^k}{p^k}$$

și de relația (10.1), rezultă

$$\frac{p}{p+a}\cdot\Upsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{a^k}{p^k}\cdot\Upsilon(t) = \varepsilon^{-at}. \tag{10.3}$$

Din relațiile lui EULER

$$\varepsilon^{\pm at} = \text{ch}\, at \pm \text{sh}\, at,$$

rezultă imediat

$$\left.\begin{aligned} \frac{p^2}{p^2-a^2}\cdot\Upsilon(t) &= \text{ch}\, at,\\ \frac{pa}{p^2-a^2}\cdot\Upsilon(t) &= \text{sh}\, at. \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

Punînd în relația (10.3)

$$a = j\omega,$$

* Vezi exemplu, [244] p. 329.

se deduce

$$\frac{p}{p \pm j\omega} \cdot \Upsilon(t) = \varepsilon^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t,$$

de unde rezultă*

$$\left.\begin{aligned} \frac{p^2}{p^2+\omega^2} \cdot \Upsilon(t) = \cos \omega t. \\ \frac{p\omega}{p^2+\omega^2} \cdot \Upsilon(t) = \sin \omega t. \end{aligned}\right\} \tag{10.5}$$

Ținînd seama de relația (10.3) se poate calcula expresia $\frac{1}{p+a} \cdot \Upsilon(t)$.
Într-adevăr avem

$$\frac{1}{p+a} \cdot \Upsilon(t) = p^{-1} \frac{p}{p+a} \cdot \Upsilon(t) = p^{-1} \cdot \varepsilon^{-at} = \frac{1-\varepsilon^{-at}}{a} \tag{10.6}$$

În același mod, oricare ar fi expresia lui $F(p)$ la care se ajunge, descompunînd-o în elemente simple și aplicînd simbolismul lui HEAVISIDE se poate deduce funcția de timp corespunzătoare problemei rezolvate.

10.2.1.3. **Teorema dezvoltării a lui HEAVISIDE.** Fie expresia

$$\frac{1}{Z(p)}$$

în care $Z(p)$ este un polinom în p, avînd rădăcinile p_k ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$). Presupunînd că termenul cu gradul cel mai ridicat are coeficientul egal cu 1, se poate scrie

$$Z(p) = (p - p_1)(p - p_2)\ldots(p - p_k)\ldots(p - p_n).$$

Expresia dată poate fi descompusă în factori simpli

$$\frac{1}{Z(p)} = \frac{A}{p-p_1} + \frac{B}{p-p_2} + \ldots + \frac{K}{p-p_k} + \ldots + \frac{N}{p-p_n}, \tag{10.7}$$

coeficienții respectivi determinîndu-se prin regulile binecunoscute**; se găsește astfel

$$K = \frac{1}{Z'(p_k)},$$

* La aceleași relații se ajunge și dacă substituția indicată se face în relațiile (10.4).
** Aceeași demonstrație se poate face și pentru cazul cînd Z(p) are rădăcini multiple.

$Z'(p_k)$ fiind valoarea derivatei funcţiei $Z(p)$ pentru $p = p_k$. Expresia (10.7) se poate scrie deci

$$\frac{1}{Z(p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{Z'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k}. \tag{10.8}$$

Să presupunem acum că $\frac{1}{Z(p)}$ este un operator, pe care să-l aplicăm funcţiei unitate; ţinînd seama de relaţia (10.6) rezultă

$$\frac{1}{Z(p)} \cdot \Upsilon(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon^{p_k t}}{p_k Z'(p_k)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k Z'(p_k)}. \tag{10.9}$$

Făcînd în relaţia (10.8) $p = 0$, rezultă

$$\frac{1}{Z(0)} = - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k Z'(p_k)},$$

astfel că relaţia (10.9) devine

$$\frac{1}{Z(p)} \cdot \Upsilon(t) = \frac{1}{Z(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon^{p_k t}}{p_k Z'(p_k)}, \tag{10.10}$$

care constituie teorema dezvoltării lui HEAVISIDE.

Derivînd expresia (10.10) rezultă

$$\frac{p}{Z(p)} \cdot \Upsilon(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon^{p_k t}}{Z'(p_k)}. \tag{10.11}$$

În practică se aplică relaţia (10.10) atunci cînd polinomul $Z(p)$ are o rădăcină nulă; în caz contrar se aplică relaţia (10.11).

10.2.2. EXEMPLE DE APLICAŢIE

10.2.2.1. Stabilirea unui curent electric continuu într-un circuit electric inductiv. Considerînd un circuit electric format dintr-un rezistor de rezistenţă R legată în serie cu o bobină de inductanţă L şi alimentat de o sursă avînd forţa electromotoare continuă E, ecuaţia de funcţionare a acestui circuit, scrisă sub forma simbolică, este

$$(R + Lp)i = E,$$

de unde se deduce

$$i = \frac{E}{R + Lp} \cdot \Upsilon(t) = \frac{E}{Lp\left(1 + \frac{R}{Lp}\right)} \Upsilon(t) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R}{Lp}} \cdot \Upsilon(t).$$

Ţinînd seama că

$$\frac{1}{1+\frac{R}{Lp}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{R^k}{L^k} \cdot \frac{1}{p^k}$$

şi de relaţia (10.1), se obţine

$$\frac{1}{1+\frac{R}{Lp}} \cdot \Upsilon(t) = 1 - \frac{R}{L}\frac{t}{1} + \frac{R^2}{L^2} \cdot \frac{t^2}{2!} - \frac{R^3}{L^3}\frac{t^3}{3!} + \ldots = \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}.$$

Se obţine apoi

$$i = \frac{E}{L}\int_0^t \varepsilon^{-\frac{R}{L}t} \cdot dt = \frac{E}{R}(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}),$$

relaţie binecunoscută şi dedusă direct pe altă cale*.

10.2.2.2. **Stabilirea unui curent alternativ sinusoidal într-un circuit inductiv.** *Calculul direct.* Fie un circuit format dintr-un rezistor de rezistenţă R şi o bobină de inductanţă L legate în serie şi care se închide pe o sursă de forţă electromotoare alternativă sinusoidală**.

$$e = E\sqrt{2}\sin\omega t.$$

Ecuaţia de funcţionare a circuitului este

$$R\,i + L\frac{di}{dt} = E\sqrt{2}\sin\omega t,$$

sau aplicînd simbolismul lui HEAVISIDE, rezultă

$$(R + Lp)i = E\sqrt{2}\sin\omega t. \tag{10.12}$$

Punînd $\sin\omega t = \frac{1}{2j}(\varepsilon^{j\omega t} - \varepsilon^{-j\omega t})$, cum în paranteză avem diferenţa a două mărimi complex conjugate, se poate găsi soluţia ecuaţiei (10.12) dacă se rezolvă ecuaţia

$$(R + Lp)\,i = \frac{E}{2j}\varepsilon^{j\omega t} \tag{10.13}$$

şi se ia, din soluţia obţinută, de două ori partea complexă.

---

* Vezi 3.6.2.1.

** Problema se rezolvă în acelaşi mod şi dacă $e = E\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi)$, prin descompunerea lui e în doi termeni, după care se aplică principiul superpoziţiei.

Din ecuația (10.13) se deduce

$$i = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R}{L} \cdot \frac{1}{p}} \varepsilon^{j\omega t}.$$

Punînd $\frac{E}{L} \cdot \frac{1}{2j} = A$, $\frac{R}{L} = a$, $j\omega = \lambda$ și ținînd seama că

$$\frac{1}{1 + \frac{a}{p}} = 1 - \frac{a}{p} + \frac{a^2}{p^2} - \frac{a^3}{p^3} + \frac{a^4}{a^4} - \dots,$$

se găsește succesiv*

$$\frac{1}{1 + \frac{a}{p}} \cdot \varepsilon^{\lambda t} = \frac{\lambda}{a + \lambda} \varepsilon^{\lambda t} + \frac{a}{a + \lambda} \varepsilon^{-at},$$

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{p}} \varepsilon^{\lambda t} = \frac{1}{a + \lambda} [\varepsilon^{\lambda t} - \varepsilon^{-at}]$$

și deci:

$$i_1 = \frac{1}{2j} \frac{E\sqrt{2}}{L} \cdot \frac{1}{\frac{R}{L} + j\omega} [\varepsilon^{j\omega t} - \varepsilon^{-\frac{R}{L} t}] =$$

$$= \frac{1}{2j} \frac{E\sqrt{2}}{L} \frac{L(R - jL\omega)}{R^2 + L^2\omega^2} [\cos \omega t + j \sin \omega t - \varepsilon^{-\frac{R}{L} t}],$$

---

* Avem $-\frac{a}{p} \varepsilon^{\lambda t} = -\frac{a}{\lambda} (\varepsilon^{\lambda t} - 1)$,

$$\frac{a^2}{p} \varepsilon^{\lambda t} = \frac{a^2}{\lambda^2} (\varepsilon^{\lambda t} - 1) - \frac{a^2}{\lambda} \frac{t}{1!} \cdot$$

$$-\frac{a^3}{p^3} \varepsilon^{\lambda t} = -\frac{a^3}{\lambda^3} (\varepsilon^{\lambda t} - 1) + \frac{a^3}{\lambda^2} \frac{t}{1!} + \frac{a^3}{\lambda} \frac{t^2}{2!},$$

. . . .

de unde

$$\frac{1}{1 + \frac{a}{p}} \cdot \varepsilon^{\lambda t} = \varepsilon^{\lambda t} \left[1 - \frac{a}{\lambda} + \frac{a^2}{\lambda^2} - \dots\right] + \left[\frac{a}{\lambda} - \frac{a^2}{\lambda^2} + \dots\right] -$$

$$-\frac{at}{1!} \left[\frac{a}{\lambda} - \frac{a^2}{\lambda^2} + \frac{a^3}{\lambda^3} \dots\right] + \dots = \varepsilon^{\lambda t} \frac{1}{1 + \frac{a}{\lambda}} + \varepsilon^{-at} \cdot \frac{a}{\lambda} \frac{1}{1 + \frac{a}{\lambda}} = \frac{\lambda}{a + \lambda} \varepsilon^{\lambda t} + \frac{a}{a + \lambda} \varepsilon^{-at}$$

de unde efectuînd produsul şi luînd de două ori partea complexă, rezultă*

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \sin\left[(\omega t - \varphi) + \sin\varphi\, \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right],$$

adică tocmai relaţia (7.1).

10.2.2.3. Stabilirea unui curent alternativ sinusoidal într-un circuit inductiv. Calculul cu ajutorul teoremei dezvoltării. Ecuaţia operaţională care dă curentul este tot (10.12); pe de altă parte, din relaţiile (10.5) rezultă

$$\sin \omega t = \frac{p\,\omega}{p^2 + \omega^2} \cdot \Upsilon(t),$$

astfel încît relaţia (10.12) devine

$$(R + Lp)\, i = E\sqrt{2}\, \frac{p\omega}{p^2 + \omega^2} \cdot \Upsilon(t),$$

de unde rezultă

$$i = E\sqrt{2}\, \frac{p\omega}{(p^2 + \omega^2)(R + Lp)} \cdot \Upsilon(t).$$

Membrul al doilea al acestei relaţii este de forma (10.11) aşa că i se poate aplica teorema dezvoltării.

Rădăcinile polinomului de la numitor sînt

$$p_1 = +\,j\omega, \qquad p_2 = -\,j\omega, \qquad p_3 = -\frac{R}{L}$$

iar derivata sa

$$Z'(p) = 2p(R + Lp) + L(p^2 + \omega^2).$$

Se găseşte astfel,

$$Z'(p_1) = 2j\omega(R + j\,L\omega), \quad Z'(p_2) = -\,2\,j\omega(R - jL\omega),$$

$$Z'\,(p_3) = L\left(\frac{R^2}{L^2} + \omega^2\right) = \frac{1}{L}(R^2 + L^2\omega^2).$$

Cu aceste elemente relaţia (10.11) ne dă

$$i = E\sqrt{2}\left[\frac{\varepsilon^{j\omega t}}{2j(R + jL\omega)} + \frac{\varepsilon^{-j\omega t}}{-\,2\,j(R - jL\omega)} + \frac{L\omega\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}}{R^2 + L^2\omega^2}\right] =$$

$$= \frac{E\sqrt{2}}{R^2 + L^2\omega^2}\left[R\,\frac{\varepsilon^{j\omega t} - \varepsilon^{-j\omega t}}{2j} - L\omega\,\frac{\varepsilon^{j\omega t} + \varepsilon^{-j\omega t}}{2} + L\omega\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right] =$$

$$= \frac{E\sqrt{2}}{Z}\left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin\varphi\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right].$$

adică aceeaşi relaţie ca mai sus.

* S-a notat $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{L\omega}{R}$, $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$.

OBSERVAȚIE: Calculul operațional al lui HEAVISIDE nu mai este astăzi utilizat; el nu mai are decît o importanță istorică. Există totuși cazuri în care formulele date de HEAVISIDE sînt încă utilizate, ca de exemplu în programarea matematică a unor procese electrotehnice.

10.3. UTILIZAREA CALCULULUI OPERAȚIONAL LA STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE ÎN REGIM TRANZITORIU

10.3.1. TEORIA CIRCUITULUI ELECTRIC AL LUI HEAVISIDE

10.3.1.1. **Definirea răspunsului tranzitoriu.** Problema fundamentală care urmează a fi rezolvată se poate enunța astfel:

Fiind dată o rețea pasivă și disipativă, în echilibru* în orice moment *înainte* de momentul $t = 0$, dacă la momentul $t = 0$ i se aplică o forță electromotoare oarecare, se caută distribuția curenților și potențialelor în rețea la un moment $t > 0$ oarecare.

Fie o rețea buclată oarecare, îndeplinind condițiile indicate, avînd n bucle. La momentul $t = 0$ se introduce brusc în circuitul buclei k o forță electromotoare unitate $\Upsilon(t)$. Curentul care va circula în circuitul buclei l la momentul $t > 0$ va fi o anumită funcție de timp $A_{kl}(t)$. Acest curent se numește** *răspunsul tranzitoriu* al circuitului l în raport cu circuitul k.

Aplicînd teorema reciprocității, este ușor de arătat că $A_{kl}(t) = A_{lk}(t)$.

Cei n curenți independenți, constituind răspunsurile tranzitorii ale rețelei sînt de forma

$$A_{kl} = \sum_m \alpha_{km}\, p_m\, \varepsilon^{p_m t} \quad [\mathrm{Re}(p_m) < 0] \tag{10.14}$$

și se vede că aceste răspunsuri tranzitorii tind către zero cînd t tinde către $+\infty$; pentru aceasta este necesar și suficient ca determinantul coeficienților necunoscutelor sistemului de ecuații (3.194) să fie diferit de zero.

10.3.1.2. **Teorema lui POMPEY.** Cunoașterea răspunsurilor tranzitorii ale unei rețele date este suficientă pentru determinarea curenților care apar în buclele rețelei dacă forța electromotore aplicată în bucla k este o funcție de timp oarecare $e(t)$.

Funcționarea rețelei fiind liniară, dacă la timpul $t = 0$ se aplică buclei k forța electromotoare constantă E, atunci curentul care apare în bucla l va fi $EA_{kl}(t)$; dacă însă forța electromotoare constantă se aplică la timpul $t = \theta$, atunci curentul corespunzător este $E\,A_{kl}(t - \theta)$.

Acestea fiind stabilite, să presupunem acum că, în locul forței electromotoare constante se aplică o forță electromotoare oarecare $E(\theta)$, care acționează în circuit în intervalul de timp $\theta \in [0, t)$. Să considerăm curba sa reprezentativă în funcție de timp (fig. 10.1) și să împărțim intervalul de timp $(0, t)$ în intervalele parțiale Δ_i

$$(0,\ t_1),\ (t_1,\ t_2), \ldots, (t_n,\ t)$$

---

* Ceea ce înseamnă că în rețea curenții și sarcinile electrice sînt nule pentru tot intervalul de timp $t \in (-\infty, 0)$; această ipoteză este de rigoare.

** CARSON numește acest curent *admitanța indicială de transfer* a buclei l în raport cu bucla k; dimensional este un curent și nu o admitanță.

şi fie

$$E(0) = E_0, \quad E(t_1) = E_1 \ldots, E(t_n) = E_n.$$

Intervalele de timp considerate fiind suficient de mici, se poate considera că forţa electromotoare $E(\theta)$ care acţionează în circuit în intervalul $(0, t)$ este egală, între aceste limite, cu suma forţelor electromotoare, sensibil constante E_0 acţionînd de la 0 la ∞, nulă pentru $\theta < 0$,

$\Delta_1 E = E_1 - E_0$ acţionînd de la t_1 la ∞, nulă pentru $\theta < t_1$,

. . . .

$\Delta_n E = E_n - E_{n-1}$ acţionînd de la t_n la ∞, nulă pentru $\theta < t_n$.

În intervalele de timp de la t_i la t_{i+1}, numai primele $i + 1$ forţe electromotoare sînt diferite de zero şi suma lor este

$$E_0 + (E_1 - E_0) + \ldots + (E_i - E_{i-1}) = E_i = E(t_i).$$

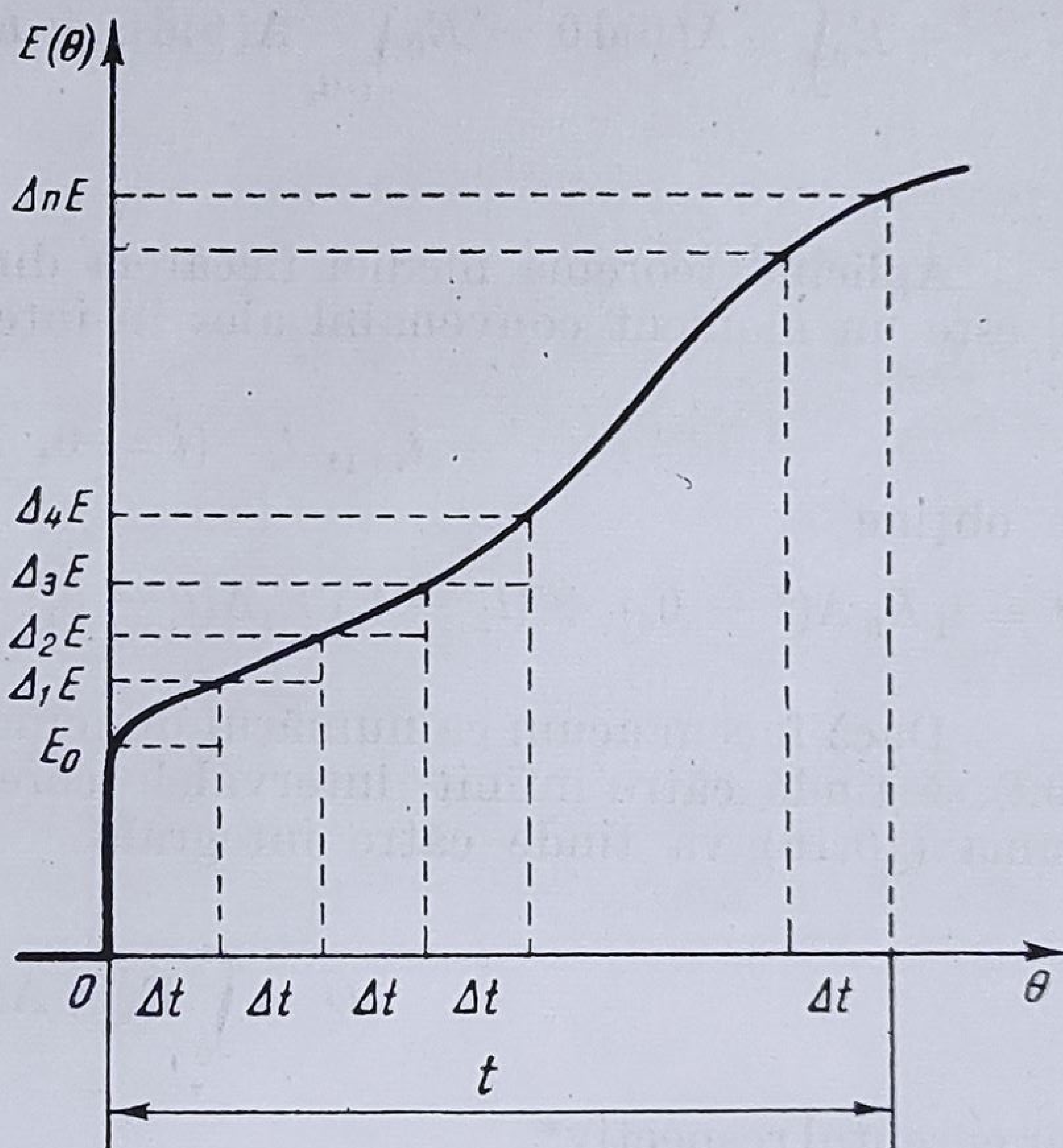


Fig. 10.1. Curba tensiunii aplicate.

În fiecare moment θ, cuprins între zero şi t, forţa electromotoare E_0 produce un curent* $E_0 A(\theta)$ şi trimite în circuit, în intervalul de timp de la zero la t o sarcină electrică

$$E_0 \int_0^t A(\theta) d\theta.$$

A doua forţă electromotoare $E_1 - E_0$, acţionînd numai de la momentul t_1 înainte, produce în fiecare moment θ din intervalul de timp (t_1, t), un curent

$$(E_1 - E_0) A(\theta - t_1)$$

şi, în acelaşi interval de timp, trimite în circuit cantitatea de electricitate

$$(E_1 - E_0) \int_{t_1}^t A(\theta - t_1) d\theta,$$

sau făcînd schimbarea de variabilă $\theta - t_1 = u$,

$$(E_1 - E_0) \int_0^{t-t_1} A(u) du = (E_1 - E_0) \int_0^{t-t_1} A(\theta) d\theta.$$

* Au fost suprimaţi indicii pentru a simplifica scrierea.

Procedînd în acelaşi mod, se găseşte expresia cantităţii de electricitate trimisă în reţea de fiecare dintre forţele electromotoare aplicate. Cantitatea de electricitate pe care o primeşte reţeaua va fi deci

$$Q = E_0 \int_0^t A(\theta)d\theta + (E_1 - E_0) \int_0^{t-t_1} A(\theta)d\theta + \ldots + (E_n - E_{n-1}) \int_0^{t-t_n} A(\theta)\, d\theta,$$

care poate fi pusă sub forma

$$Q = E_0 \left[\int_0^t A(\theta)d\theta - \int_0^{t-t_1} A(\theta)\, d\theta \right] + E_1 \left[\int_0^{t-t_1} A(\theta)d\theta - \int_0^{t-t_2} A(\theta)\, d\theta \right] + \ldots +$$

$$+ \ldots + E_n \int_0^{t-t_n} A(\theta)d\theta = E_0 \int_{t-t_1}^t A(\theta)d\theta + E_1 \int_{t-t_2}^{t-t_1} A(\theta)d\theta + \ldots + E_n \int_0^{t-t_n} A(\theta)d\theta. \quad (10.15)$$

Aplicînd teorema mediei fiecăreia din integralele expresiei (10.15), dacă θ_i este un moment convenabil ales în intervalul de timp

$$t_{i+1},\ t_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

se obţine

$$Q = t_1 E_0 A(t - \theta_0) + (t_2 - t_1) E_1 A(t - \theta_1) + \ldots + (t - t_n) E_n A(t - \theta_n). \quad (10.16)$$

Dacă facem acum ca numărul de puncte t_i, în care am împărţit intervalul $(0,t)$ să tindă către infinit, intervalele corespunzătoare vor tinde către zero şi suma (10.16) va tinde către integrala

$$Q = \int_0^t E(\theta)\, A(t - \theta)d\theta \quad (10.17)$$

iar curentul respectiv*

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^t E(\theta)\, A\, (t - \theta)d\theta. \quad (10.18)$$

Făcînd schimbarea de variabilă $t - \theta = \tau$, relaţia (10.18) se poate scrie

$$i = \frac{d}{dt} \int_t^0 E(t - \tau) A(\tau)\, (d\tau)$$

sau, trecînd la vechile variabile

$$i = \frac{d}{dt} \int_0^t E(t - \theta)\, A(\theta)\, d\theta. \quad (10.19)$$

Relaţiile (10.18) şi (10.19) constituie teorema lui POMEY.

* Este vorba de curentul produs în bucla l de forţa electromotoare inserată în bucla k.

10.3.1.3. **Alte expresii ale curentului i.** Efectuînd derivarea relațiilor (10.18) și (10.19) se obține

$$i = A(0)E(t) + \int_0^t E(\theta)A'(t - \theta)d\theta, \tag{10.20}$$

$$i = E(0)A(t) + \int_0^t A(\theta)E'(t - \theta)d\theta. \tag{10.21}$$

Făcînd schimbarea de variabilă $t - \theta = \tau$, ca mai sus, după revenirea la vechea variabilă, se obține

$$i = A(0)E(t) + \int_0^t E(t - \theta)\, A'(\theta)d\theta \tag{10.22}$$

$$i = E(0)A(t) + \int_0^t A(t - \theta)\, E'(\theta)d\theta. \tag{10.23}$$

OBSERVAȚIE: Relațiile (10.20) — (10.23) pot fi deduse direct, pe o cale analoagă aceleia care a condus la stabilirea relațiilor (10.18) și (10.19), pornind însă direct de la curenți*.

10.3.1.4. **Calculul răspunsului tranzitoriu.** Relațiile (10.18), (10.19), (10.20), (10.21), (10.22) și (10.23) arată că pentru determinarea curentului i(t) este suficientă cunoașterea răspunsului tranzitoriu.

Să considerăm în rețeaua dată circuitele k și l; dacă în circuitul k se aplică forța electromotoare ε^{pt} [p fiind un număr real sau complex, în ultimul caz îndeplinind condiția Re (p) > 0], *curentul permanent* care va circula în circuitul l va fi**

$$i_{kl} = \frac{\varepsilon^{pt}}{Z_{kl}(p)}. \tag{10.24}$$

În această relație

$$Z_{kl}(p) = \frac{\Delta(p)}{M_{kl}(p)}$$

este *impedanța de transfer* de la circuitul k la circuitul l, unde Δ (p) este determinantul impedanțelor rețelei date, M_{kl}(p), minorul corespunzător elementului Z_{kl}, iar impedanțele

$$Z_{kl} = R_{kl} + pL_{kl} + \frac{1}{pC_{kl}}$$

sînt impedanțele proprii și mutuale (de cuplaj) ale circuitelor***.

---

* Vezi [4], pag. 454.
** Vezi 4.3.6.1.
*** Se presupune rețeaua rezolvată prin metoda buclelor, vezi 2.3.6.

În cazul cînd forța electromotoare este aplicată circuitului la un moment dat, atunci în circuitul respectiv va apărea un curent tranzitoriu, a cărui expresie se obține adăugînd curentului permanent, dat de relația (10.24), un curent liber dat de relația (10.14); vom avea deci

$$i = \frac{\varepsilon^{pt}}{Z(p)} + \sum_m \alpha_{km} p_m \varepsilon^{p_m t}. \tag{10.25}$$

Pe de altă parte, relația (10.21) ne dă direct curentul din circuit, cînd se aplică forța electromotoare $E(t) = \varepsilon^{pt}$.

Se găsește astfel

$$i = A(t) + \int_0^t \frac{d\varepsilon^{p(t-\theta)}}{dt} A(\theta)\, d\theta = A(t) + p\varepsilon^{pt} \int_0^t \varepsilon^{-p\theta} A(\theta)\, d\theta.$$

Cum acest curent trebuie să fie identic cu curentul dat de relația (10.25), rezultă

$$\frac{\varepsilon^{pt}}{Z(p)} + \sum_m \alpha_{km} p_m \varepsilon^{p_m t} = A(t) + p\varepsilon^{pt} \int_0^t \varepsilon^{-p\theta} A(\theta)\, d\theta,$$

sau, împărțind ambii membri ai acestei expresii cu ε^{pt},

$$\frac{1}{Z(p)} + \sum_m \alpha_{km} p_m \varepsilon^{(p_m - p)t} = A(t)\varepsilon^{-pt} + p \int_0^t \varepsilon^{-p\theta} A(\theta)\, d\theta.$$

Făcînd acum ca t să tindă către $+\infty$, cum $\mathcal{Re}(p) > 0$ și $\mathcal{Re}(p_m) < 0$, se obține

$$\frac{1}{Z(p)} = p \int_0^\infty \varepsilon^{-p\theta} A(\theta)\, d\theta. \tag{10.26}$$

Rezultă dar, că *răspunsul tranzitoriu*, a cărui cunoaștere este necesară și suficientă pentru determinarea curentului corespunzător aplicării unui circuit o forță electromotoare de o formă oarecare, este legat de impedanța de transfer printr-o ecuație integrală. Această ecuație integrală, numită *integrala lui* CARSON, dă o corespondență între funcția $A(t)$ și funcția $\psi(p) = \dfrac{1}{Z(p)}$. Funcția $\psi(p)$ se numește *imaginea* funcției $A(\theta)$, în sensul lui CARSON, $A(\theta)$ fiind *originalul* funcției $\psi(p)$.

Integrala CARSON reușește să justifice întregul procedeu de calcul al lui HEAVISIDE.

Formula (10.26) este dedusă din formula

$$\varphi(p) = \int_0^\infty f(t)\varepsilon^{-pt}\, dt \tag{10.27}$$

numită *transformarea lui* LAPLACE și care efectuează aceeași transformare ca și formula (10.26). Bineînțeles că existența transformărilor de mai sus este

condiţionată de anumite proprietăţi ale funcţiei f(t), condiţii ce sînt în general îndeplinite de funcţiile din fizică şi în special de acelea întîlnite în electrotehnică.

Între formulele (10.26) şi (10.27) există relaţia de legătură evidentă

$$\psi(p) = p\,\varphi(p). \tag{10.28}$$

Transformarea lui CARSON nu diferă deci de transformarea lui LAPLACE decît prin factorul p, care a fost introdus de CARSON pentru ca justificarea matematică a regulilor date de HEAVISIDE să fie cît mai corespunzătoare. În special pentru a se obţine pentru imaginea funcţiei unitate a lui HEAVISIDE chiar unitatea.

La început, şi mult timp după aceea, s-a utilizat în calculul operaţional numai formula de transformare (10.26) a lui CARSON.

În ultimii 20 de ani, foarte mulţi autori* utilizează şi recomandă folosirea formulei de transformare (10.27) a lui LAPLACE. În afară de aceasta, secţia a 5-a** a Societăţii electricienilor francezi, după o anchetă susţinută, în şedinţa din 6 iunie 1944, a făcut de asemenea recomandarea utilizării în problemele de electrotehnică a formulei de transformare (10.27). Această recomandare a fost adoptată ulterior şi de *Comitetul Electrotehnic Internaţional*.

10.4. UTILIZAREA TRANSFORMĂRII LAPLACE ÎN STUDIUL REGIMURILOR TRANZITORII

10.4.1. DEFINIŢII ŞI TEOREME FUNDAMENTALE

Fără a da demonstraţiile matematice corespunzătoare şi metodele de stabilire, transformarea lui LAPLACE se bazează pe următoarele definiţii şi teoreme :***

Definiţia 1. Fie o funcţie reală**** f(t) de variabilă reală t definită pentru t pozitiv astfel, încît dacă

a) f(t) este integrabilă în orice interval finit cuprins între două valori pozitive ale variabilei şi dacă

b) integrala $\int_a^b f(t)\,dt$ tinde către o limită cînd a tinde către zero, atunci există integrala

$$\int_0^\infty \varepsilon^{-\tau t} f(t)\,dt = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to 0}} \int_a^b \varepsilon^{-\tau t} f(t)\,dt < \infty \tag{10.29}$$

în care σ este un număr real.

Oricare ar fi funcţia f (t) limita inferioară a numerelor reale σ care satisface ecuaţia (10.29) se numeşte *abscisa de convergenţă absolută* a funcţiei f(t). Ea se notează cu σ_a.

Integrala (10.29) se numeşte integrala lui LEBESGUE şi funcţia f (t) se zice că este transformabilă prin transformarea lui LAPLACE.

---

* Printre aceştia citàm pe Mc. LACHLAN, HUMBERT, PARODI, ANGOT, DOETSCH, PIPES, CHURCHILL, WAGNER, KONTOROVICI, GARDNER şi BURNS etc.

** Care se ocupă cu problemele de telegrafie, telefonie şi radiocomunicaţii.

*** Vezi [116].

**** În cazul cînd f(t) este o funcţie complexă, aceasta se descompune în cele două componente ale sale care pot fi tratate separat ca funcţii reale.

Teorema 1. Dacă funcția f(t) satisface ecuația (10.29) integrala

$$\int_0^\infty \varepsilon^{-st} f(t)\, dt = \lim_{\substack{b \to \infty \\ a \to \infty}} \int_a^b \varepsilon^{-st} f(t)\, dt, \tag{10.30}$$

în care s este o variabilă complexă de forma $\sigma + j\omega$, pentru orice valoare $\sigma > \sigma_a$, se transformă într-o funcție φ (s), care este analitică în semiplanul $\sigma_a < \sigma$.

Integrala (10.30) constituie transformarea lui LAPLACE. Ea asociază funcției f(t), de variabilă reală t, o funcție φ (s), de variabilă complexă s. Funcția φ (s) se numește *imaginea* funcției f (t), care se numește *originalul* funcției φ (s).

Transformarea LAPLACE se notează simbolic prin relația

$$\varphi(s) = \mathfrak{L}[f(t)] \quad (\sigma_a < \sigma) \tag{10.31}$$

și care se citește φ (s) este *imaginea* funcției f(t), $\mathfrak{L}$ fiind simbolul care indică acest fapt.

Funcția φ (s) este o funcție *asociată* funcției f(t) și nicidecum o funcție care să reprezinte aceeași mărime.

Definiția 2. Inversa transformării lui LAPLACE este definită prin relația

$$\mathfrak{L}^{-1}\{\mathfrak{L}[f(t)]\} = f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[\varphi(s)], \quad (0 \leqslant t) \tag{10.32}$$

și care se citește, funcția f(t) este *originalul* funcției φ (s).

Teorema 2. Dacă φ (s) este imaginea unei funcții f (t) atunci

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \varepsilon^{st} \varphi(s)\, ds = f(t) \quad (0 \leqslant t) \tag{10.33}$$

în care $\sigma \geqslant \sigma_a$ și $j = \sqrt{-1}$.

Ecuația (10.33) constituie reprezentarea explicită a relației (10.32). Ea poartă denumirea de formula lui MELLIN-FOURIER.

Teorema 3: *Unicitatea transformării* $\mathfrak{L}$. Dacă f (t) satisface ecuația (10.29) și $\mathfrak{L}$ [f (t)] = φ (s), $\sigma_a < \sigma$, imaginea φ (s) a funcției f (t) este unică.

Această teoremă rezultă din proprietățile integralei definită (10.30).

Teorema 4. *Unicitatea transformării* $\mathfrak{L}^{-1}$. Dacă f(t) este originalul funcției φ(s), atunci f(t) satisface integrala (10.29) și transformarea $\mathfrak{L}^{-1}$ este unică, adică, orice transformare $\mathfrak{L}^{-1}$ a funcției φ(s) este egală cu f(t) pentru orice valoare a variabilei $t \geqslant 0$.

Teorema 5. *Transformarea lui* LAPLACE *este liniară*. Dacă funcțiile f(t), $f_1(t)$ și $f_2(t)$ satisfac ecuația (10.29) și au respectiv imaginile φ(s), φ_1(s) și φ_2(s), dacă a și b sînt constante sau variabile diferite de t și s, atunci

$$\mathfrak{L}[a\, f(t)] = a\, \varphi(s)$$

și

$$\mathfrak{L}[a\, f_1(t) \pm b\, f_2(t)] = a\varphi_1(s) \pm b\, \varphi_2(s).$$

De asemenea, dacă $\varphi(s)$, $\varphi_1(s)$ şi $\varphi_2(s)$ sînt respectiv imaginile funcţiilor $f(t)$, $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ şi dacă a şi b sînt constante sau variabile diferite de s sau t, atunci

$$\mathcal{L}^{-1}[a\varphi(s)] = a\,f(t) \qquad (0 \leqslant t),$$

$$\mathcal{L}^{-1}[a\,\varphi_1(s) \pm b\varphi_2(s)] = af_1(t) \pm bf_2(t) \qquad (0 < t).$$

Această teoremă stabileşte caracterul de liniaritate a transformării lui LAPLACE şi a inversei sale şi se deduce din proprietatea de liniaritate a integralelor definite.

Teorema 6. *Imaginea unei derivate.* Dacă funcţia $f(t)$ şi derivata sa $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ satisfac ecuaţia (10.29), şi dacă $\varphi(s)$ este imaginea funcţiei $f(t)$, atunci

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\varphi(s) - f(0). \tag{10.34}$$

Pentru demonstrarea acestei teoreme se aplică funcţiei $f'(t)$ ecuaţia (10.30) obţinîndu-se

$$\psi(s) = \int_0^\infty \varepsilon^{-st} f'(t)\,dt,$$

sau, integrînd prin părţi, rezultă

$$\psi(s) = \Big|\varepsilon^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty \varepsilon^{-st} f(t)\,dt.$$

Primul termen se reduce la $-f(0)$, iar al doilea este egal cu $s\varphi(s)$ şi se obţine astfel relaţia (10.34).

Teorema poate fi extinsă şi la calculul imaginilor derivatelor de ordin superior, dacă acestea satisfac ecuaţiei (10.29). Rezultatul se obţine aplicînd succesiv relaţia (10.34).

Se găseşte astfel

$$\mathcal{L}f''(t) = s^2\mathcal{L}f(t) - sf(0) - f'(0) = s^2\varphi(s) - sf(0) - f'(0);$$

în general se găseşte

$$\mathcal{L}f^{(n)}(t) = s^n\varphi(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \tag{10.35}$$

OBSERVAŢII. 1. Dacă

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

atunci relaţia (10.35) se poate scrie

$$\mathcal{L}f^{(n)}(t) = s^n\varphi(s).$$

2. Relația (10.35) se poate scrie în general

$$\mathfrak{L}\, f^{(n)} = s^n \varphi(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$

în care $f^0(t) = f(t)$.

Teorema 7. *Imaginea unei integrale.* Dacă funcția $f(t)$ satisface ecuația (10.29) și imaginea sa este $\varphi(s)$, atunci integrala sa

$$f^{(-1)}(t) = \int f(t)\, dt$$

satisface de asemenea ecuația (10.29) și

$$\mathfrak{L}\left[\int f(t)\, dt\right] = \frac{1}{s} \mathfrak{L}\, f(t) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0), \tag{10.36}$$

unde $f^{(-1)}(0)$ este valoarea pentru $t = 0$ a funcției primitive a lui $f(t)$.

Pentru demonstrarea teoremei, se aplică funcției $\int f(t)dt$ ecuația (10.30) și se integrează prin părți.

În general dacă

$$f^{(-k)}(t) = \int\int\int \ldots \int f(t)\, (dt)^k$$

atunci

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{L}\left[f^{(-1)}(t)\right] &= \frac{1}{s}\varphi(s) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0)\\
\mathfrak{L}\left[f^{(-2)}(t)\right] &= \frac{1}{s^2}\varphi(s) + \frac{1}{s^2} f^{(-1)}(0) + \frac{1}{s} f^{(-2)}(0)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathfrak{L}\left[f^{(-n)}(t)\right] &= \frac{1}{s^n}\varphi(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s^{n-k+1}} f^{(-k)}(0).
\end{aligned}\right\}$$

În cazul unei integrale definită

$$\int_0^t f(t)\, dt,$$

aplicînd ecuația (10.30) se obține

$$\mathfrak{L}\int_0^t f(t)dt = \int_0^\infty \varepsilon^{-st}\left[\int_0^t f(t)\, dt\right]dt = \frac{1}{s}\mathfrak{L}\, f(t) \tag{10.37}$$

În general se găsește

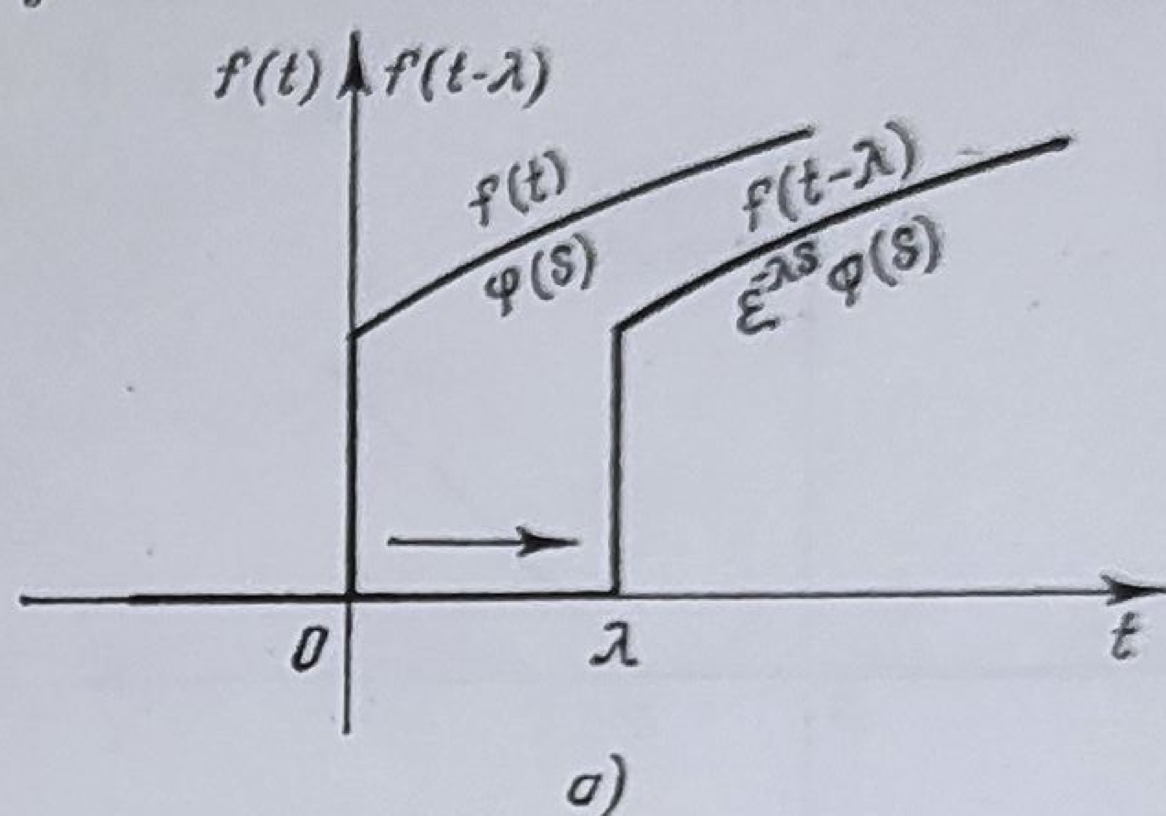
$$\mathcal{L}\left[\int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \ldots \int_0^{t_1} f(t)dt\right] = \frac{\varphi(s)}{s^n}.$$

Din cele ce preced rezultă că transformarea lui LAPLACE transformă, în esență, operațiile de derivare și de integrare în simple înmulțiri și împărțiri asupra variabilei s. În aceste condiții, cu ajutorul transformării lui LAPLACE, foarte multe probleme de analiză pot fi transformate în probleme de algebră.

Se ajunge astfel, pe cale riguroasă matematică, la principiile calculului operațional enunțat de HEAVISIDE.

Teorema 8. *Translația variabilei s.* Dacă se dă o creștere $\pm\lambda$ variabilei s și dacă $\varphi(s) = \mathcal{L}\, f(t)$, atunci

$$\varphi(s \pm \lambda) = \mathcal{L}\, \varepsilon^{\mp\lambda t} f(t). \tag{10.38}$$



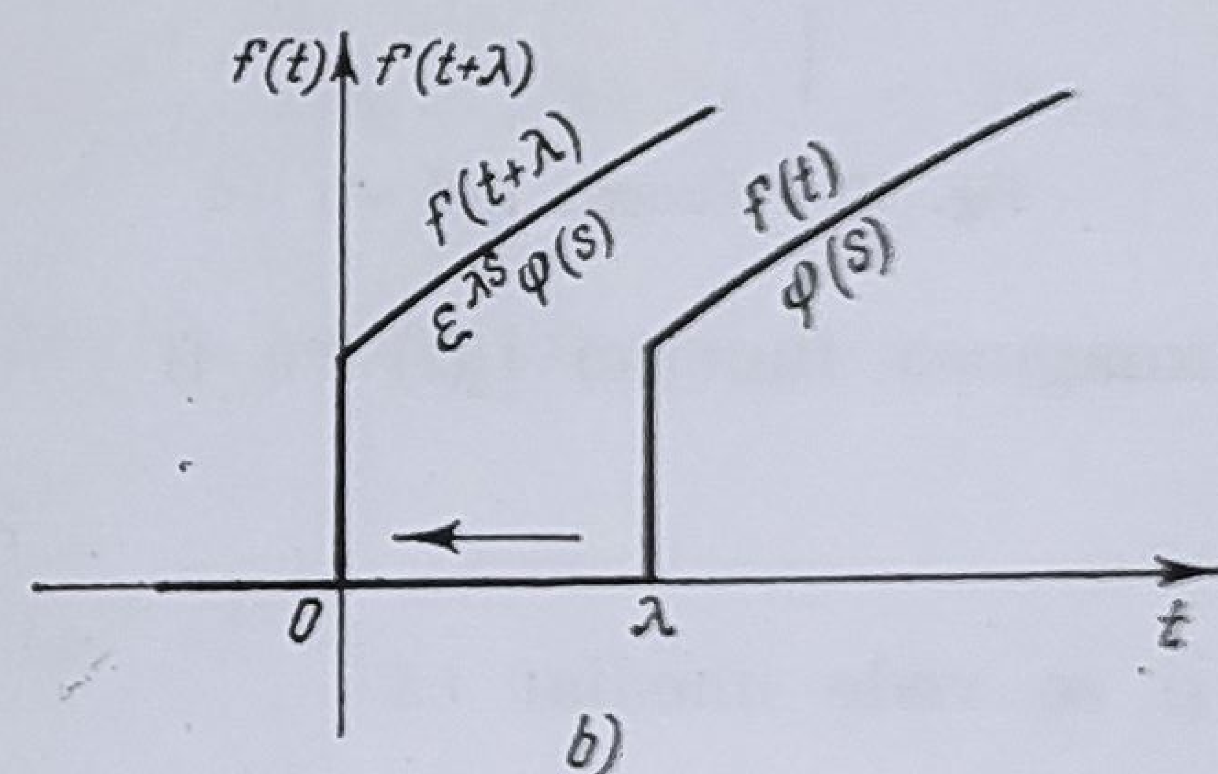


Fig. 10.2. Translația variabilei t:
a) spre dreapta ($\lambda<0$);
b) spre stînga ($\lambda>0$).

Teorema 9. *Translația variabilei t* (fig.10.2). Fie $f(t)$ o funcție care îndeplinește condițiile (10.29) astfel că

$$f(t) = 0 \qquad \text{pentru } t < \lambda$$

$$f(t) \neq 0 \qquad \text{pentru } t \geqslant \lambda$$

și fie $\varphi(s) = \mathcal{L}\, f(t)$. Dacă se dă o creștere $\pm\lambda$ variabilei t, atunci

$$\mathcal{L}\, f(t \pm \lambda) = \varepsilon^{\pm\lambda s}\, \varphi(s). \tag{10.39}$$

În aplicarea teoremelor 8 și 9 se comit de multe ori erori și anume, se confundă funcțiile

$$f(t - a) \text{ nulă pentru } t < 0$$

și

$$f(t - a) \text{ nulă pentru } t < a,$$

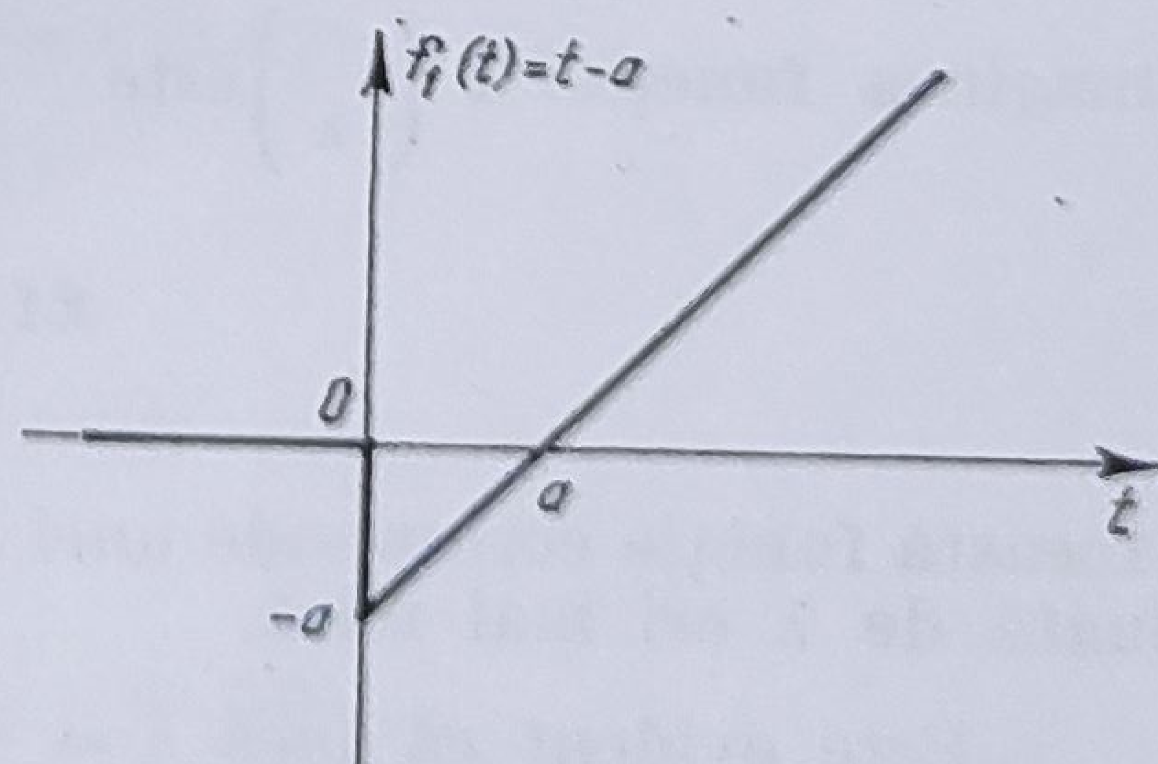


Fig. 10.3. Funcția $f(t) = t - a$

care nu au aceeași imagine. Într-adevăr, fie funcția (fig. 10.3)

$$f_1(t) = t - a \qquad \text{pentru } t > 0$$

$$f_1(t) = 0 \qquad \text{pentru } t < 0.$$

Imaginea acestei funcţii este

$$\varphi_1 (s) = \int_0^\infty \varepsilon^{-st} (t - a)\, dt = \frac{1}{s^2} - \frac{a}{s} .$$

Să considerăm acum funcţia (fig. 10.4)

$$f_2(t) = t - a \qquad \text{pentru } t > a$$

$$f_2(t) = 0 \qquad \text{pentru } t < a.$$

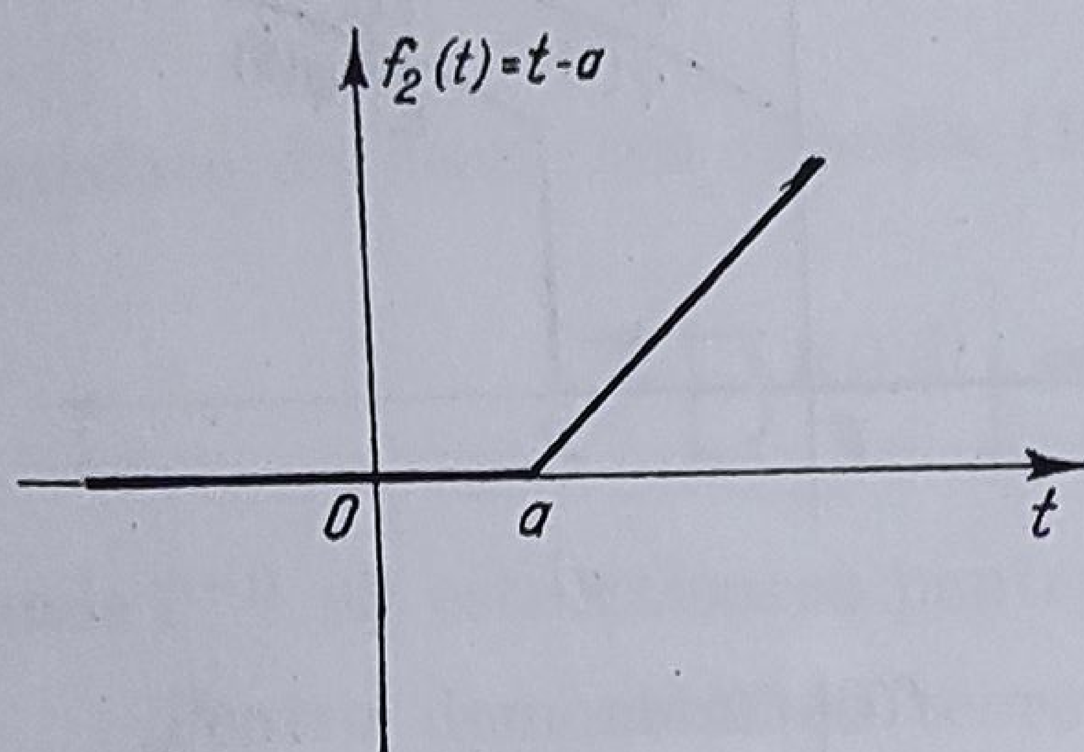


Fig. 10.4. Funcţia $f_2(t) = t - a$

Această funcţie nu este alta decît funcţia

$$f(t) = t \qquad \text{pentru } t > 0$$

$$f(t) = 0 \qquad \text{pentru } t < 0$$

căreia i s-a dat o translaţie către dreapta. Imaginea acestei funcţii fiind

$$\varphi (s) = \int_0^\infty \varepsilon^{-st}\, t\, dt = \frac{1}{s^2},$$

imaginea funcţiei $f_2(t)$ va fi

$$\varphi_2 (s) = \frac{\varepsilon^{-as}}{s^2}$$

şi se vede imediat că

$$\varphi_1(s) \neq \varphi_2(s).$$

Teorema 10. *Schimbarea scării timpurilor.* În ipoteza că $\mathfrak{L}\, f(t) = \varphi(s)$, imaginea funcţiei $f\left(\frac{t}{\lambda}\right)$ este

$$\mathfrak{L} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) = \lambda\, \varphi\, (\lambda s). \tag{10.40}$$

Această funcţie corespunde unei funcţii de timp la care unitatea de timp a fost luată de λ ori mai mică.

Este evident că dacă $\lambda = \frac{1}{k}$, atunci relaţia (10.40) devine

$$\mathfrak{L}\, f(kt) = \frac{1}{k}\, \varphi\left(\frac{s}{k}\right).$$

Teorema 11. *Derivarea funcţiei imagine.* Dacă $\varphi(s) = \mathfrak{L}\, f(t)$, atunci

$$\frac{d\,\varphi(s)}{ds} = -\,\mathfrak{L}\, tf(t)$$

În general

$$\frac{d^n \varphi(s)}{ds^n} = (-1)^n \mathfrak{L} t^n f(t).$$

Teorema 12. *Integrarea funcției imagine.* Dacă $\varphi(s) = \mathfrak{L}f(t)$, atunci

$$\int_s^\infty \varphi(s)\, ds = \mathfrak{L}\frac{f(t)}{t}. \tag{10.41}$$

Integrînd de n ori în raport cu s și între aceleași limite, se obține

$$\int_s^\infty ds \int_s^\infty ds \int_s^\infty ds \ldots \int_s^\infty \varphi(s)\, ds = \mathfrak{L}\frac{f(t)}{t^n}.$$

Teorema 13. *Teorema produsului sau teorema lui* BOREL. Dacă $\varphi_1(s) = \mathfrak{L}f_1(t)$ și $\varphi_2(s) = \mathfrak{L}f_2(t)$, atunci

$$\varphi_1(s)\cdot\varphi_2(s) = \mathfrak{L}\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau = \mathfrak{L}\int_0^t f_1(t-\tau)\,f_2(\tau)\,d\tau \quad (t > \tau). \tag{10.42}$$

Se obișnuiește a se numi operația (10.24) un *produs de compoziție* sau o *convoluție* și să se noteze

$$\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)dt = f_1(t) * f_2(t)$$

și deci relația (10.42) poate fi scrisă simbolic

$$\varphi_1(s)\cdot\varphi_2(s) = \mathfrak{L}\,[f_1(t) * f_2(t)] = \mathfrak{L}\,[f_2(t) * f_1(t)].$$

Teorema 14. Dacă $\varphi(s) = \mathfrak{L}f(t)$, atunci

$$\mathfrak{L}t\frac{df(t)}{dt} = -\frac{d}{ds}[s\varphi(s)],$$

$$\mathfrak{L}t\frac{d^2f(t)}{dt^2} = -\frac{d}{ds}[s^2\varphi(s) - s\, f(0)],$$

. . . .

$$\mathfrak{L}t\frac{d^nf(t)}{dt^n} = -\frac{d}{ds}\left[s^n\varphi(s) - \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)\right],$$

în care s-a notat $f^{(0)}(0) = f(0)$.

De asemenea

$$\mathfrak{L}t^2 \frac{df(t)}{dt} = \frac{d^2}{ds^2}[s\,\varphi(s)],$$

. . . .

$$\mathfrak{L}t^n \frac{df(t)}{dt} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[s\,\varphi(s)].$$

În general

$$\mathfrak{L}t^n \frac{d^n f(t)}{dt^n} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left[s^n \varphi(s) = \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)\right].$$

Această teoremă este utilizată la rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili.

10.4.2. TRANSFORMAREA ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE ŞI INTEGRO-DIFERENŢIALE

10.4.2.1. Transformarea ecuaţiei diferenţiale de ordinul doi. Fie ecuaţia diferenţială

$$A\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Cy = f(t) \qquad (10.43)$$

în care A, B, C sînt constante cunoscute. Funcţia necunoscută y este o funcţie de variabilă t, ca şi funcţia cunoscută $f(t)$. Funcţia necunoscută y se numeşte *funcţia răspuns*, iar funcţia cunoscută se numeşte *funcţia semnal*.

Presupunînd că toate funcţiile ecuaţiei (10.43) satisfac ecuaţia (10.29) şi aplicînd transformarea lui LAPLACE se obţine

$$\mathfrak{L}\left[A\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Cy\right] = A\,\mathfrak{L}\frac{d^2y}{dt^2} + B\,\mathfrak{L}\frac{dy}{dt} + C\,\mathfrak{L}\,y = \mathfrak{L}\,f(t).$$

Punînd*

$$\mathfrak{L}f(t) = \varphi(s) \qquad \text{şi} \qquad \mathfrak{L}y(t) = \eta(s),$$

şi ţinînd seama de teorema 6, relaţia (10.43) devine

$$A[s^2\eta(s) - sy(0) - y'(0)] + B[s\eta(s) - y(0)] + C\eta(s) = \varphi(s). \qquad (10.44)$$

În această expresie $y(0)$ şi $y'(0)$ reprezintă condiţiile iniţiale pe care trebuie să le îndeplinească funcţia $y(t)$ şi se vede de aici cum se ţine seama de aceste condiţii chiar în timpul operaţiilor de transformare.

---

* $\varphi(s)$ se numeşte imaginea funcţiei semnal sau *imaginea semnal* şi $\eta(s)$ se numeşte imaginea funcţiei răspuns sau *imaginea răspuns*.

Ecuaţia (10.44) poate fi scrisă

$$(As^2 + Bs + C)\,\eta(s) = \varphi(s) + (As + B)\,y(0) + Ay'(0), \qquad (10.45)$$

care este o ecuaţie *algebrică* în s şi se numeşte *ecuaţia transformată* a ecuaţiei diferenţiale (10.43).

Rezolvînd ecuaţia (10.45) în raport cu $\eta(s)$ se obţine

$$\eta(s) = \frac{1}{As^2+Bs+C}\,[\varphi(s) + (As+B)y(0) + Ay'(0)]\,\cdot \qquad (10.46)$$

Funcţia $\eta(s)$ este prin definiţie *funcţia imagine* a funcţiei $y(t)$. Coeficientul funcţiei $\eta(s)$ din ecuaţia (10.45) se numeşte *funcţia caracteristică*, deoarece ea caracterizează complet, fenomenul fizic exprimat prin ecuaţia diferenţială. Egalînd cu zero această funcţie, se obţine *ecuaţia caracteristică* a ecuaţiei diferenţiale.

Inversul funcţiei caracteristice se numeşte *funcţia sistemului*; în general această funcţie poate fi o fracţie la care numitorul este funcţia caracteristică. Funcţia sistemului cuprinde într-o singură funcţie toate mărimile care caracterizează sistemul fizic.

Funcţia din membrul al doilea al ecuaţiei (10.45) se numeşte *funcţia de excitaţie*. Ea cuprinde imaginea funcţiei semnal şi condiţiile iniţiale, acestea din urmă formînd *funcţia iniţială de excitaţie*. Funcţia de excitaţie conţine toate elementele de excitaţie aplicate sistemului. Ecuaţia (10.46) se poate exprima astfel

(imaginea funcţiei răspuns) = (funcţia sistemului) · (funcţia de excitaţie).

Cunoscînd funcţia imagine $\eta(s)$, prin operaţia inversă se poate găsi funcţia original $y(t)$ aplicîndu-se transformarea

$$\mathfrak{L}^{-1}\eta(s) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\varphi(s) + (As + B)\,y(0) + Ay'(0)}{As^2 + Bs + C}\right] = y(t),$$

cu condiţia $0 \leqslant t$.

10.4.2.2. Transformarea ecuaţiei integro-diferenţială de primul ordin. Fie ecuaţia integrodiferenţială

$$A\,\frac{dy}{dt} + By + C\int y\,dt = f(t) \qquad (10.47)$$

în care y este o funcţie de timp, $y(0)$ şi $y^{(-1)}(0)$ fiind valorile iniţiale ale sale şi ale primei sale integrale.

Presupunînd că toate condiţiile de posibilitate a transformării lui LAPLACE sînt îndeplinite şi procedînd ca în cazul precedent, se găseşte succesiv

$$\mathfrak{L}\left[A\,\frac{dy}{dt} + By + C\int y\,dt\right] = A\,\mathfrak{L}\frac{dy}{dt} + B\,\mathfrak{L}\,y + C\,\mathfrak{L}\left[\int y\,dt\right] = \mathfrak{L}\,f(t)$$

sau

$$A\,[s\eta(s) - y(0)] + B\,\eta(s) + C\left[\frac{1}{s}\,\eta(s) + \frac{1}{s}\,y^{(-1)}(0)\right] = \varphi(s),$$

de unde

$$\left(As + B + \frac{C}{s}\right) \eta (s) = \varphi (s) + A\, y (0) + \frac{Cy^{(-1)} (0)}{s}.$$

Din această ecuaţie se deduce imaginea funcţiei răspuns

$$\eta (s) = \frac{\varphi (s)\, Ay (0) + \dfrac{Cy^{(-1)} (0)}{s}}{As + B + \dfrac{C}{s}},$$

care poate fi scrisă şi în acest caz :
(imaginea funcţiei răspuns) = (funcţia sistemului)·(funcţia de excitaţie).
Cunoscînd funcţia imagine η (s), se poate găsi funcţia original y (t) prin operaţia inversă

$$\mathfrak{L}^{-1} \eta (s) = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{\varphi (s) + Ay (0) + \dfrac{Cy^{(-1)}(0)}{s}}{As + B + \dfrac{C}{s}}\right],$$

cu condiţia $0 < t$.

10.4.3. IMAGINEA UNOR FUNCŢII UZUALE

Găsirea imaginii unei funcţii oarecare se face aplicînd ecuaţia (10.30) şi calculînd integrala corespunzătoare.

10.4.3.1. Imaginea unei constante. Fie

$$f (t) = k.$$

Ecuaţia (10.30) dă imediat

$$\varphi (p) = \int_0^\infty \varepsilon^{-st}\, k\, dt = \frac{k}{s}$$

deci

$$\mathfrak{L} k = \frac{k}{s}.$$

În cazul cînd $k = 1$ se obţine

$$\mathfrak{L} 1 = \mathfrak{L}\, \Upsilon (t) = \frac{1}{s},$$

imaginea funcţiei unitate *.

* Vezi şi 10.4.3.5.

10.4.3.2. Imaginea funcţiei exponenţiale. Fie funcţia

$$f(t) = \varepsilon^{\pm\lambda t},$$

în care λ este o mărime oarecare, reală sau complexă.

Introducînd-o în ecuaţia (10.30) se obţine

$$\mathcal{L}[\varepsilon^{\pm\lambda t}] = \frac{1}{s \mp \lambda} \tag{10.48}$$

Pentru aceste transformări, imaginile corespunzătoare au un sens în planul s numai în cazul cînd partea reală a mărimilor $s \pm \lambda$ este pozitivă.

10.4.3.3. Imaginea funcţiilor circulare şi hiperbolice. Ţinînd seama că transformarea lui LAPLACE este liniară, imaginea funcţiilor circulare şi hiperbolice se obţine scriind expresia lui EULER a acestora. Astfel, pentru funcţia $\cos \alpha t$, în care α este un număr real şi pozitiv, se obţine

$$\mathcal{L} \cos \alpha t = \frac{1}{2} \mathcal{L}\varepsilon^{j\alpha t} + \frac{1}{2} \mathcal{L}\varepsilon^{-j\alpha t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\alpha} + \frac{1}{s + j\alpha}\right) = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}. \tag{10.49}$$

În acelaşi mod se găseşte

$$\mathcal{L} \sin \alpha t = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}, \tag{10.50}$$

$$\mathcal{L} \cos(\alpha t + \psi) = \cos\psi\, \mathcal{L} \cos \alpha t - \sin\psi\, \mathcal{L} \sin \alpha t = \frac{s \cos\psi - \alpha \sin\psi}{s^2 + \alpha^2} = \frac{a_1 s + a_0}{s^2 + \alpha^2}$$

$$\mathcal{L} \sin(\alpha t + \psi) = \frac{p \sin\psi + \alpha \cos\psi}{s^2 + \alpha^2} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + \alpha^2},$$

în care s-a notat

$$a_1 = \cos\psi,\ b_1 = \sin\psi,\ a_0 = -\alpha \sin\psi,\ b_0 = \alpha\cos\psi,$$

$$\mathcal{L}\, \varepsilon^{-\alpha t} \cos \beta t = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}, \qquad \mathcal{L}\, \varepsilon^{-\alpha t} \sin \beta t = \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}.$$

OBSERVAŢIE. Aceste relaţii se obţin imediat aplicînd teorema 8 a translaţiei variabilei s.

$$\mathcal{L} \operatorname{ch} \alpha t = \frac{s}{s^2 - \alpha^2}, \tag{10.51}$$

$$\mathcal{L} \operatorname{sh} \alpha t = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}. \tag{10.52}$$

10.4.3.4. **Imaginea funcţiei puteri a lui t.** Fie funcţia

$$f(t) = t$$

care, introdusă în ecuaţia (10.30) şi efectuînd calculul, dă

$$\mathfrak{L}\, t = \frac{1}{s^2}. \tag{10.53}$$

În cazul general, pentru $f(t) = t^n$, procedînd ca mai sus şi integrînd prin părţi, se obţine relaţia de recurenţă

$$\mathfrak{L} t^k = \frac{k}{s}\, \mathfrak{L}\, t^{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

din care rezultă uşor

$$\mathfrak{L} t^n = \frac{n!}{s^{n+1}}. \tag{10.54}$$

Aplicînd teorema 8 a translaţiei variabilei s se găseşte

$$\mathfrak{L}\, t^n\, \varepsilon^{-\alpha t} = \frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}. \tag{10.55}$$

10.4.3.5. **Imaginea funcţiei unitate.** Funcţia $\Upsilon(t)$ definită astfel încît*

pentru $t < 0$ $\quad \Upsilon(t) = 0$

pentru $t \geqslant 0$ $\quad \Upsilon(t) = 1$

se numeşte *funcţia unitate* a lui HEAVISIDE.

Aplicînd ecuaţia (10.30) se găseşte imediat imaginea acestei funcţii

$$\mathfrak{L}\, \Upsilon(t) = \frac{1}{s}. \tag{10.56}$$

Funcţia unitate poate fi definită în raport cu o altă origine. Astfel, de exemplu, ea poate fi definită ca fiind nulă pentru $t < t_0$ şi avînd valoarea egală cu unitatea pentru $t \geqslant t_0$. În acest caz, imaginea ei se obţine fie direct, aplicînd ecuaţia (10.30) cu limitele de integrare t_0 şi ∞, fie aplicînd relaţia (10.39) a teoremei 9. Se obţine

$$\mathfrak{L}\, \Upsilon_1(t) = \frac{\varepsilon^{-t_0 s}}{s}. \tag{10.57}$$

---

* Vezi 3.6.2.3.

Funcţia unitate este folosită pentru a se exprima că o funcţie f (t), reprezentînd o anumită excitaţie este aplicată sistemului la momentul $t = 0$, ea fiind nulă înaintea acestui moment. O astfel de funcţie se va scrie

$$f(t)\,\Upsilon(t).$$

În general, funcţia $\Upsilon(t)$ este subînţeleasă şi nu se mai scrie, însă trebuie ţinut seama că, întotdeauna funcţiile care reprezintă anumitele excitaţii ce se aplică sistemului trebuie să fie nule înainte de momentul aplicării lor, adică pentru $t < 0$.

10.4.3.6. Funcţia impuls şi imaginea ei. Funcţia $\Upsilon'(t)$, nulă pentru orice valoare a lui t în afara intervalului

$$0 < t < \xi,$$

ξ fiind oricît de mic voim, se numeşte *funcţia impuls* (fig. 10.5). În afară de aceasta, în intervalul de timp considerat ea are o valoare astfel încît

$$\lim_{\xi \to 0} \int_0^{\xi} \Upsilon'(t)\,dt = 1.$$

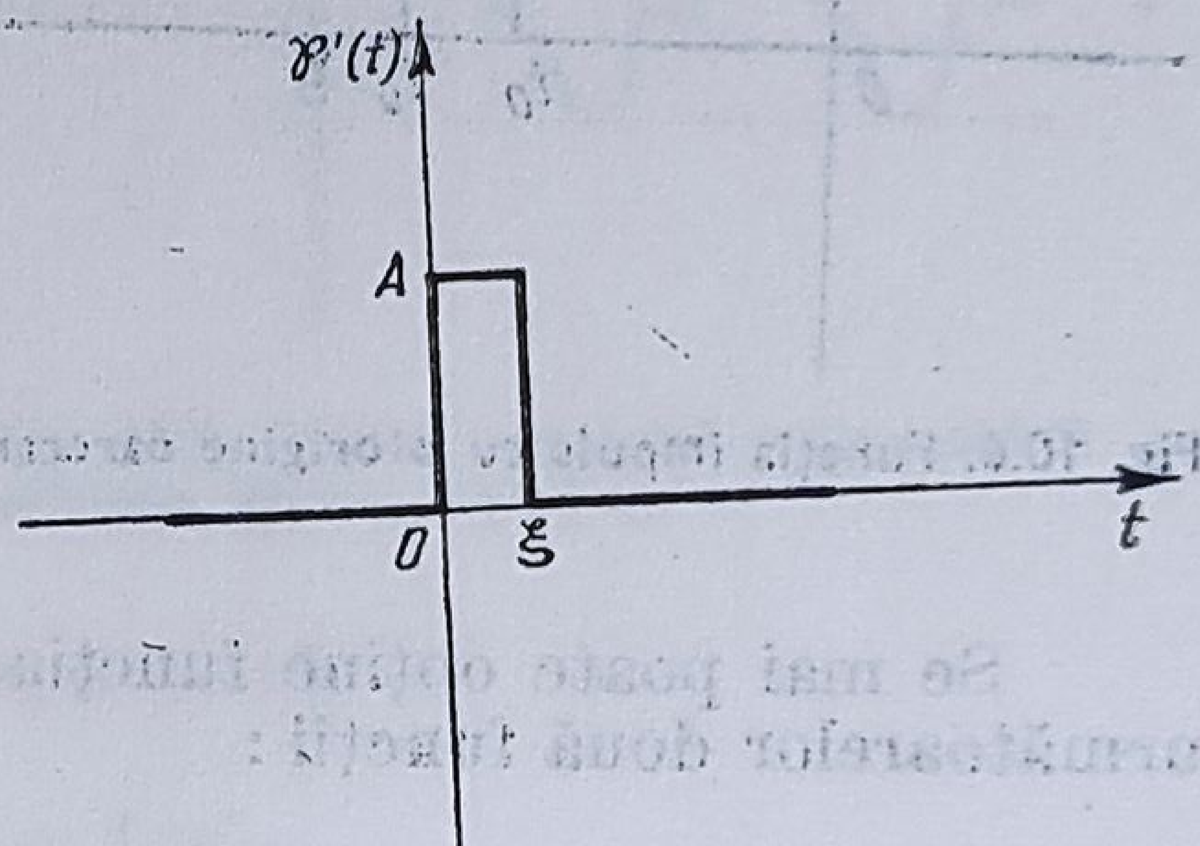


Fig. 10.5. Funcţia impuls.

Este vorba deci de o funcţie care este foarte mare într-un interval de timp foarte mic şi care determină, cu axa absciselor o suprafaţă a cărei arie este egală cu 1.

Pentru a găsi imaginea acestei funcţii să presupunem că în intervalul considerat ea are valoarea A, astfel încît $A\xi = 1$.

Aplicînd ecuaţia (10.30) se obţine

$$\mathfrak{L}\Upsilon'(t) = \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st}\,\Upsilon'(t)\,dt = \lim_{\xi \to 0}\int_0^{\xi} \varepsilon^{-st}\,\Upsilon'(t)\,dt = \lim_{\xi \to 0}\int_0^{\xi} \varepsilon^{-st} A\,dt =$$

$$= \lim_{\xi \to 0} \frac{1}{s\xi}(1 - \varepsilon^{-s\xi}) = 1$$

şi deci

$$\mathfrak{L}\Upsilon'(t) = 1. \tag{10.58}$$

Dacă se compară relaţia (10.58) cu relaţia (10.56) se vede că

$$\mathfrak{L}\Upsilon'(t) = s\,\mathfrak{L}\Upsilon(t).$$

Rezultă deci că funcţia impuls poate fi considerată ca derivata funcţiei unitate. Pentru aceste motive ea se notează cu $\Upsilon'(t)$. Funcţia impuls se mai numeşte şi *funcţia impuls a lui* DIRAC.

Ca şi funcţia unitate, funcţia impuls poate fi definită în raport cu o altă origine. Spre exemplu, ea poate fi definită ca fiind nulă pentru $t < t_0$ şi $t > t_0 + \xi$ şi ca avînd o valoare constantă A în intervalul t_0 şi $t_0 + \xi$, astfel încît $A\xi = 1$ (fig. 10.6).

Imaginea ei se găseşte aplicînd transformarea lui LAPLACE (10.30) între limitele t_0 şi $t_0 + \xi$ şi calculînd limita cînd ξ tinde către zero, sau aplicînd relaţia (10.39) a teoremei 9. Se obţine

$$\mathfrak{L}\,\Upsilon'(t) = \varepsilon^{-st_0}$$

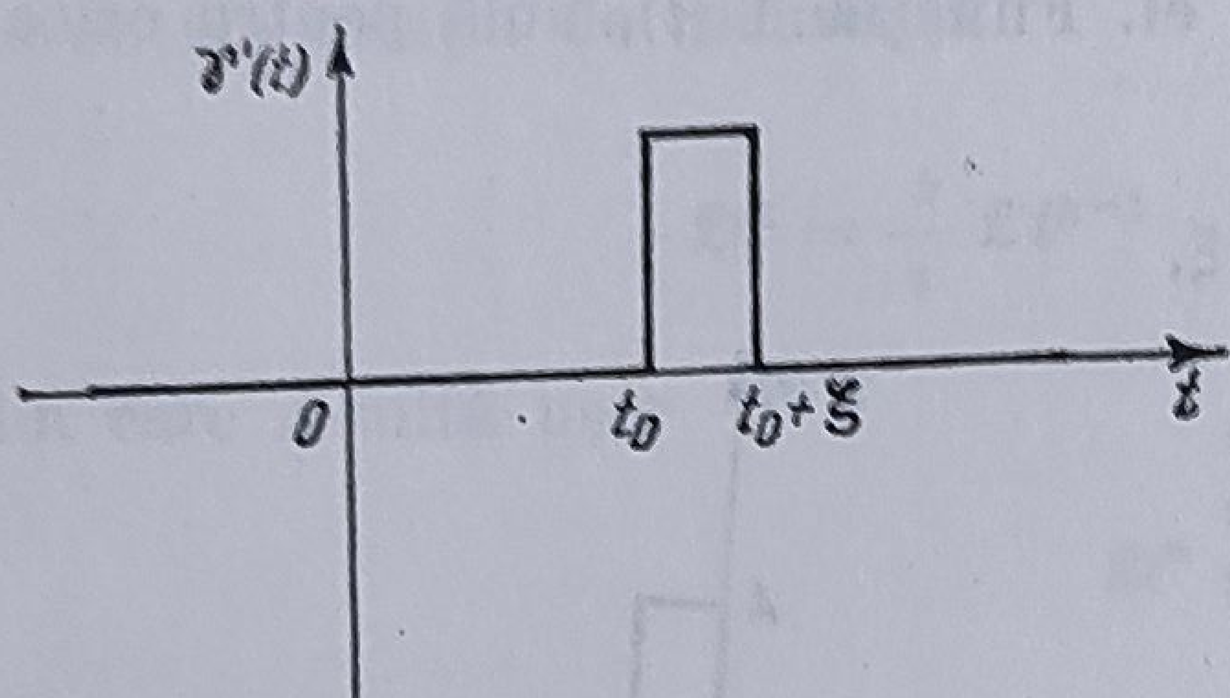


Fig. 10.6. Funcţia impuls cu o origine oarecare.

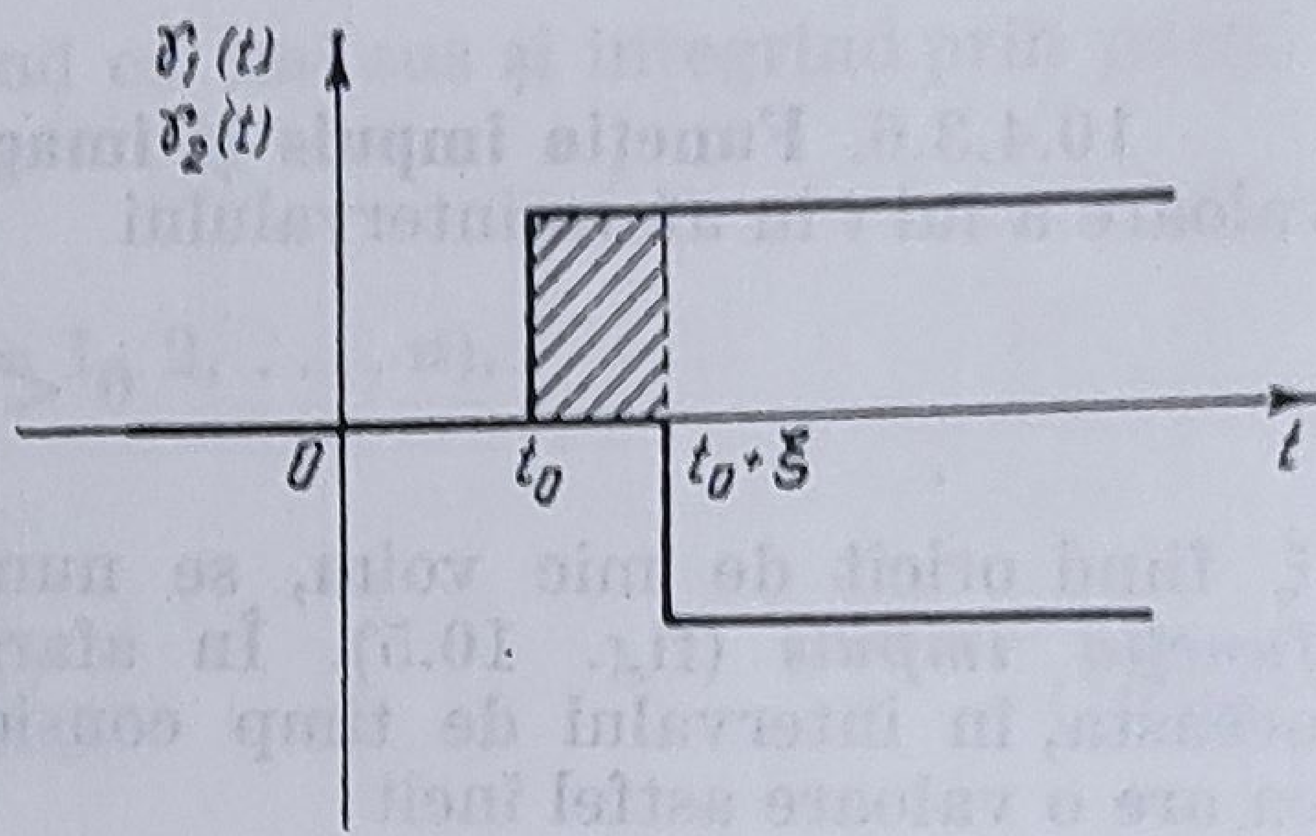


Fig. 10.7. Funcţia impuls dedusă din două funcţii unitate.

Se mai poate obţine funcţia impuls definită de figura 10.6 făcînd suma următoarelor două funcţii :

$$f_1(t) = 0 \qquad \text{pentru} \quad 0 < t < t_0$$

$$f_1(t) = A \qquad \text{pentru} \quad t > t_0$$

$$f_2(t) = 0 \qquad \text{pentru} \quad 0 < t < t_0 + \xi$$

$$f_2(t) = -A \qquad \text{pentru} \quad t > t_0 + \xi$$

se obţine curba din figura 10.7, a cărei imagine este egală cu suma celor două imagini. Ţinînd seama de relaţia (10.39) rezultă

$$\mathfrak{L}\,f_1(t) = \frac{A\varepsilon^{-t_0 s}}{s}$$

$$\mathfrak{L}\,f_2(t) = -\frac{A\varepsilon^{-(t_0+\xi)s}}{s}.$$

De unde,

$$\mathfrak{L}\,f(t) = \mathfrak{L}\,f_1(t) + \mathfrak{L}\,f_2(t) = \frac{A}{s}\,\varepsilon^{-t_0 s}\,(1 - \varepsilon^{-\xi s});$$

ţinînd seama că $A\xi = 1$ şi trecînd la limită, se obţine

$$\lim_{\xi \to 0} \mathfrak{L}\,f(t) = \varepsilon^{-st_0} = \mathfrak{L}\,\Upsilon'(t).$$

10.4.3.7. Imaginea funcţiilor periodice nesinusoidale. Fie

$$f(t) = f(t + 2a) = f(t + 2ka), \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

o funcţie periodică de perioada 2a (fig. 10.8). Pentru a-i găsi imaginea, va trebui să aplicăm relaţia (10.30); funcţia fiind periodică se poate scrie

$$\mathfrak{L} f(t) = \int_0^\infty \varepsilon^{-st} f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2ka}^{2(k+1)a} \varepsilon^{-st} f(t)\, dt.$$

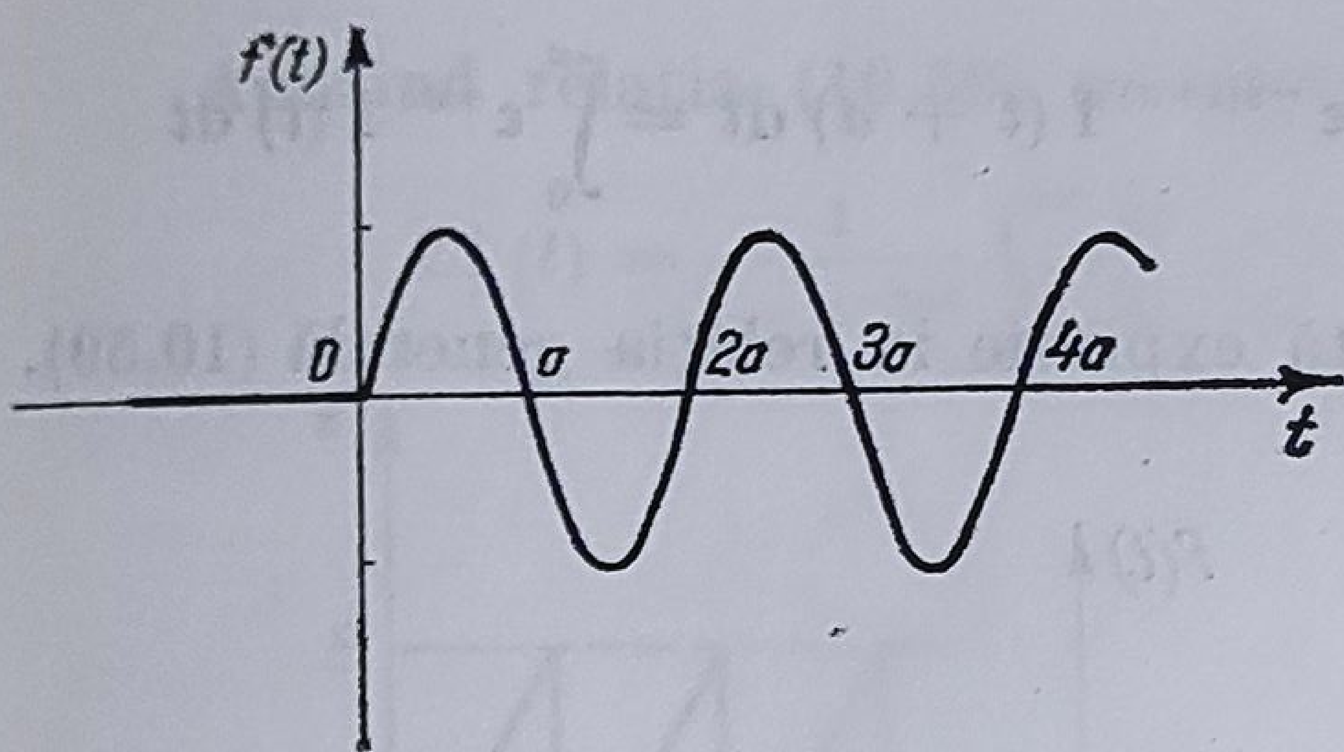


Fig. 10.8. Funcţia periodică nesinusoidală.

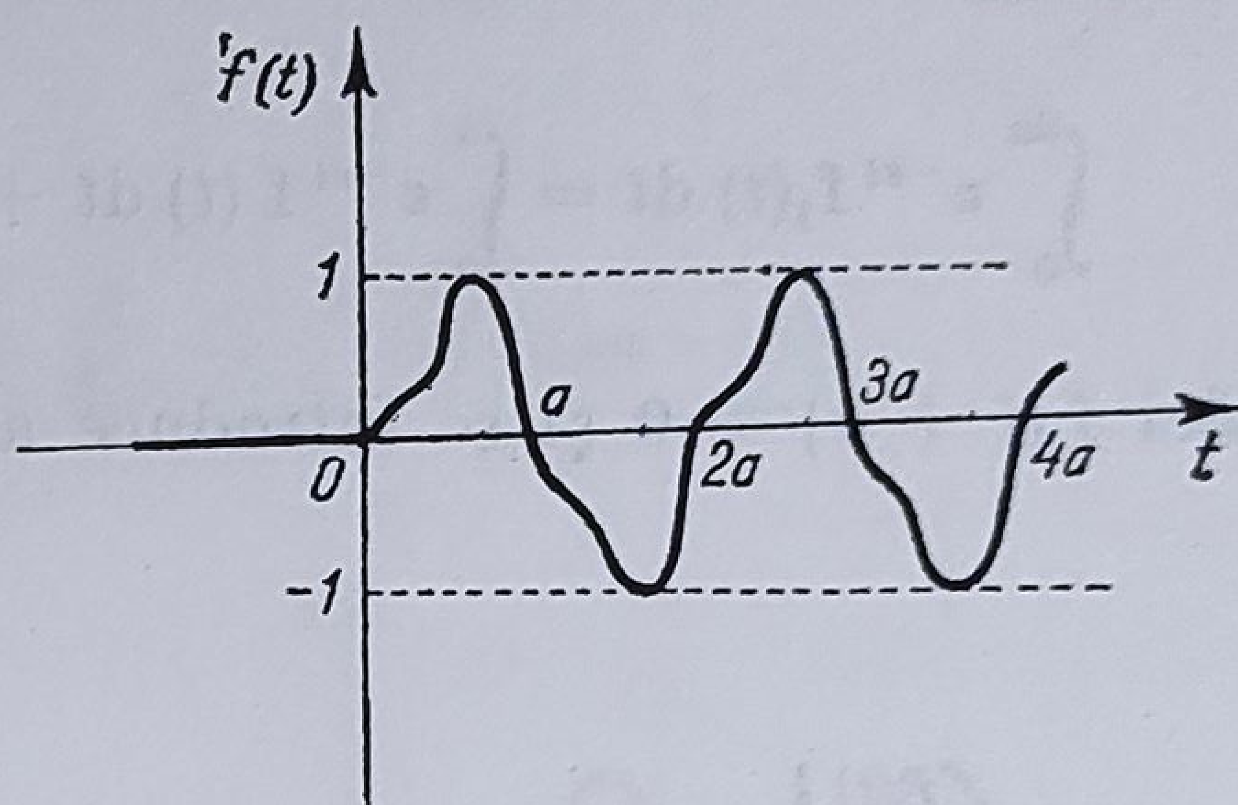


Fig. 10.9. Funcţia periodică nesinusoidală cu simetria $f(t) = -f(t + a)$.

Făcînd schimbarea de variabilă $t = u + 2ka$, rezultă

$$f(t) = f(u + 2ka) = f(u),$$

şi deci

$$\mathfrak{L} f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{2a} \varepsilon^{-s(u+2ka)} f(u)\, du = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{-2ska}\right] \int_0^{2a} \varepsilon^{-su} f(u)\, du.$$

Dar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{-2ska} = \frac{1}{1 - \varepsilon^{-2sa}};$$

trecînd la vechea variabilă, se obţine

$$\mathfrak{L} f(t) = \frac{1}{1 - \varepsilon^{-2sa}} \int_0^{2a} \varepsilon^{-st} f(t)\, dt. \tag{10.59}$$

În cazul cînd funcţia periodică nesinusoidală prezintă simetria $f(t) = -f(t + a)$, cele două alternanţe fiind identice (fig. 10.9), imaginea funcţiei devine

$$\mathfrak{L} f(t) = \frac{1 - \varepsilon^{-sa}}{1 - \varepsilon^{-2sa}} \int_0^a \varepsilon^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{1 + \varepsilon^{-sa}} \int_0^a \varepsilon^{-st} f(t) dt. \tag{10.60}$$

În adevăr, în acest caz se poate scrie

$$\int_0^{2a} \varepsilon^{-st} f(t)\, dt = \int_0^a \varepsilon^{-st} f(t)\, dt + \int_a^{2a} \varepsilon^{-s(t+a)} f(t + a)\, dt = (1 - \varepsilon^{-sa}) \int_0^a \varepsilon^{-st} f(t)\, dt.$$

În cazul cînd din funcţia periodică nesinusoidală, cu simetria $f(t) = -f(t+a)$, se iau numai o parte din alternanţe, numai cele pozitive sau numai cele negative, se obţine o curbă „parţial redresată" (fig. 10.10). Imaginea acestei curbe este

$$\mathfrak{L} f_1(t) = \frac{\mathfrak{L} f(t)}{1 - \varepsilon^{-sa}}, \tag{10.61}$$

în care $\mathfrak{L} f(t)$ e dată de relaţia (10.60); demonstraţia este imediată dacă se observă că

$$\int_0^{2a} \varepsilon^{-st} f_1(t)\, dt = \int_0^a \varepsilon^{-st} f(t)\, dt + \int_a^{2a} \varepsilon^{-s(t+a)} f(t+a)\, dt = \int_0^a \varepsilon^{-st} f(t)\, dt$$

căci $f(t+a) = 0$ şi se introduce această expresie în relaţia generală (10.59).

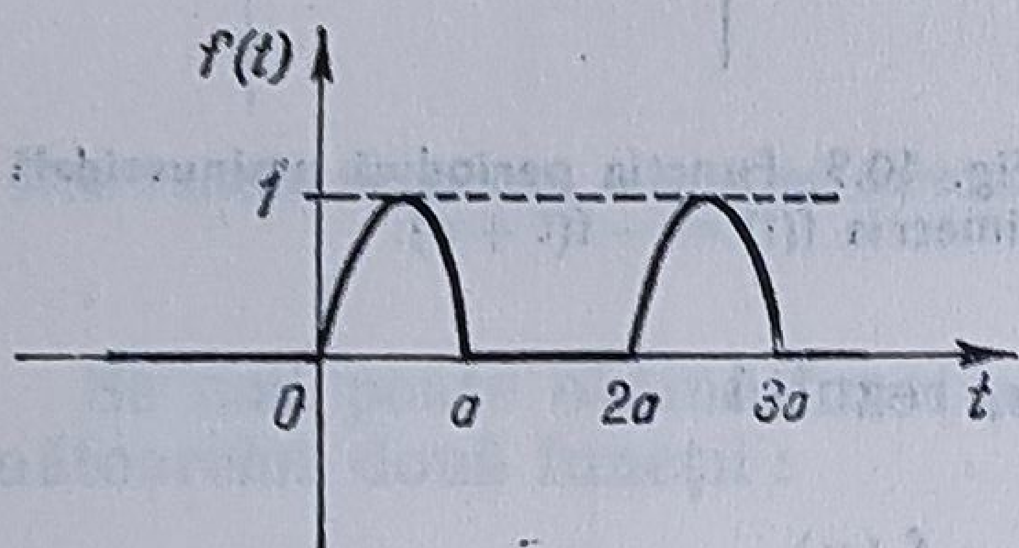


Fig. 10.10. Funcţie periodică nesinusoidală parţial redresată.

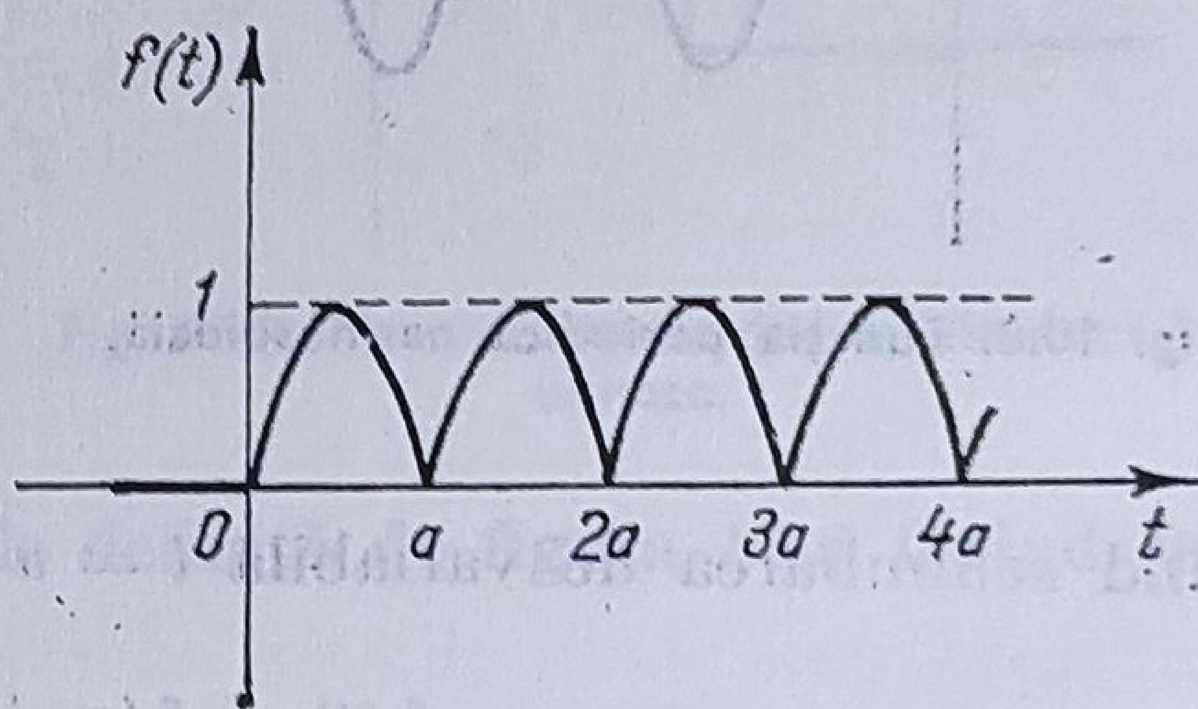


Fig. 10.11. Funcţie periodică nesinusoidală total redresată.

În cazul cînd la funcţia periodică nesinusoidală, cu simetria $f(t) = -f(t+a)$ se schimbă semnul uneia din alternanţe, funcţia căpătînd simetria $f(t) = f(t+a)$, se obţine o curbă „total redresată" (fig. 10.11) a cărei imagine este

$$\mathfrak{L} f_2(t) = \frac{1 + \varepsilon^{-sa}}{1 - \varepsilon^{-sa}} \mathfrak{L} f(t) = \operatorname{ctgh} \frac{sa}{2} \mathfrak{L} f(t), \tag{10.62}$$

$\mathfrak{L} f(t)$ fiind dată de relaţia (10.60).

Pentru a stabili relaţia (10.62) se consideră funcţia $f_2(t)$ ca provenind din funcţiile $f_1(t)$ şi $f_1(t-a)$, adică $f_1(t)$ deplasată cu a spre dreapta

$$f_2(t) = f_1(t) + f_1(t-a).$$

Dar, în conformitate cu relaţia (10.39),

$$\mathfrak{L} f_1(t-a) = \varepsilon^{-sa} \mathfrak{L} f_1(t)$$

şi deci

$$\mathfrak{L} f_2(t) = (1 + \varepsilon^{-sa}) \mathfrak{L} f_1(t);$$

ţinînd seama de (10.61) şi observînd că

$$\frac{1+\varepsilon^{-sa}}{1-\varepsilon^{-sa}} = \operatorname{ctg h} \frac{sa}{2},$$

se obţine relaţia (10.62).

Ca exemplu de aplicaţie, fie de calculat imaginea funcţiei „dinţi de ferăstrău" (fig. 10.12). Avem

$$f(t) = E\frac{t}{2a} \qquad \text{pentru } 0 < t < 2a.$$

Aplicînd relaţia (10.59) se obţine

$$\mathfrak{L} f(t) = \frac{1}{1-\varepsilon^{-2sa}} \int_0^{2a} \frac{Et}{2a}\, \varepsilon^{-st}\, dt = \frac{E}{2as^2} - \frac{E}{2} (\operatorname{ctgh} as - 1).$$

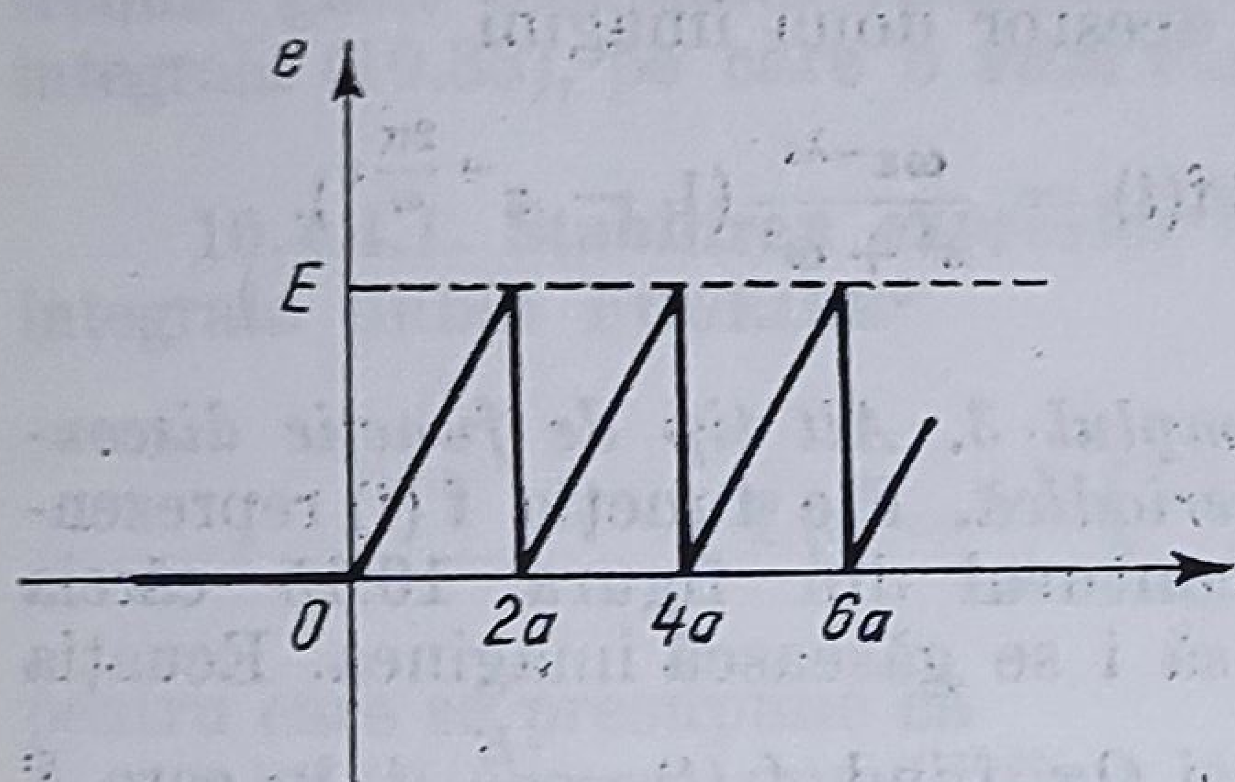


Fig. 10.12. Funcţie „dinţi de ferăstrău".

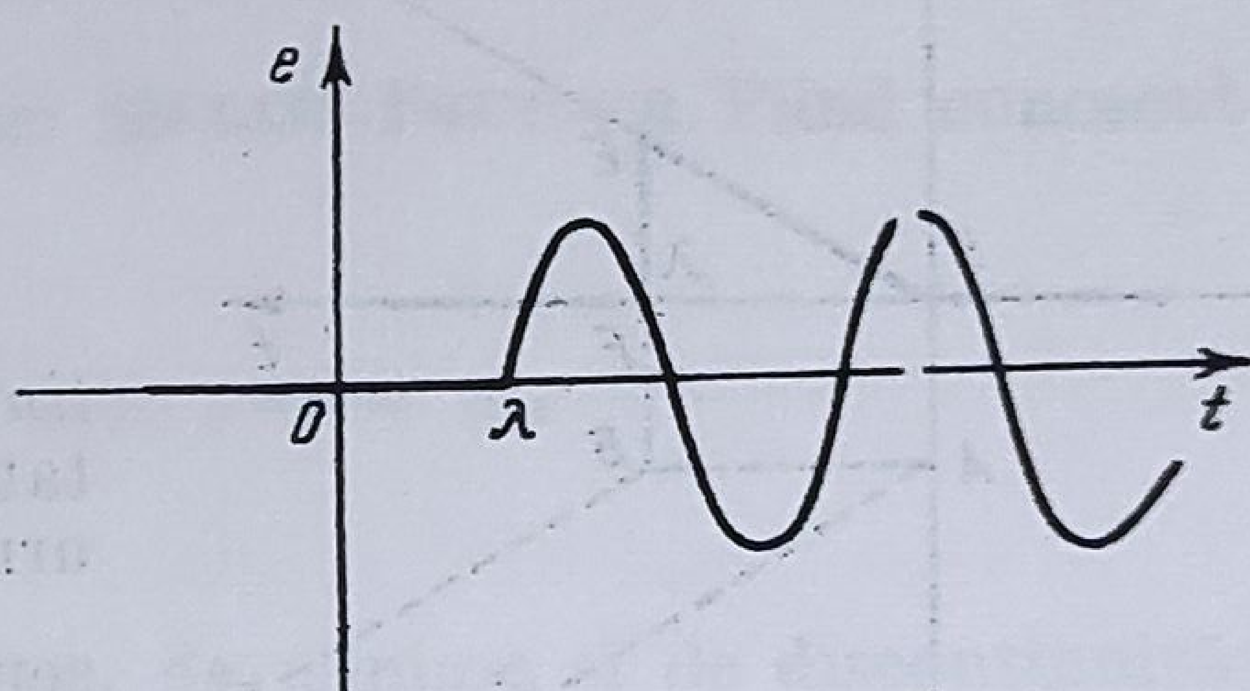


Fig. 10.13. Funcţie discontinuă periodică.

10.4.3.8. **Imaginea funcţiilor discontinue.** Teorema 9, care defineşte translaţia variabilei t şi relaţiile (10.39) corespunzătoare dă posibilitatea calculării imaginii oricărei funcţii discontinue pornind de la o funcţie de bază oarecare $f(t) \cdot \Upsilon(t)$. Aceasta se va arăta prin următoarele trei exemple :

Exemplul 1. Funcţie discontinuă periodică. Fie de găsit imaginea funcţiei $f(t) = \sin \omega (t - \lambda)$ care au un sens pentru $t > \lambda$, fiind nulă pentru $t < \lambda$ (fig. 10.13). Conform teoremei 9, imaginea acestei funcţii este

$$\mathfrak{L} f(t) = \frac{\omega\, \varepsilon^{-\lambda s}}{s^2 + \omega^2}.$$

Exemplul 2. Funcţie discontinuă neperiodică. Să considerăm funcţia $f(t)$ definită după cum urmează (fig. 10.14)

pentru $-\infty < t < \lambda$, $\quad f(t) = 0$

pentru $\lambda < t < \lambda + \frac{2\pi}{\omega}$,

$$f(t) = \sin \omega (t - \lambda)$$

pentru $\lambda + \frac{2\pi}{\omega} < t < +\infty$,

$$f(t) = 0.$$

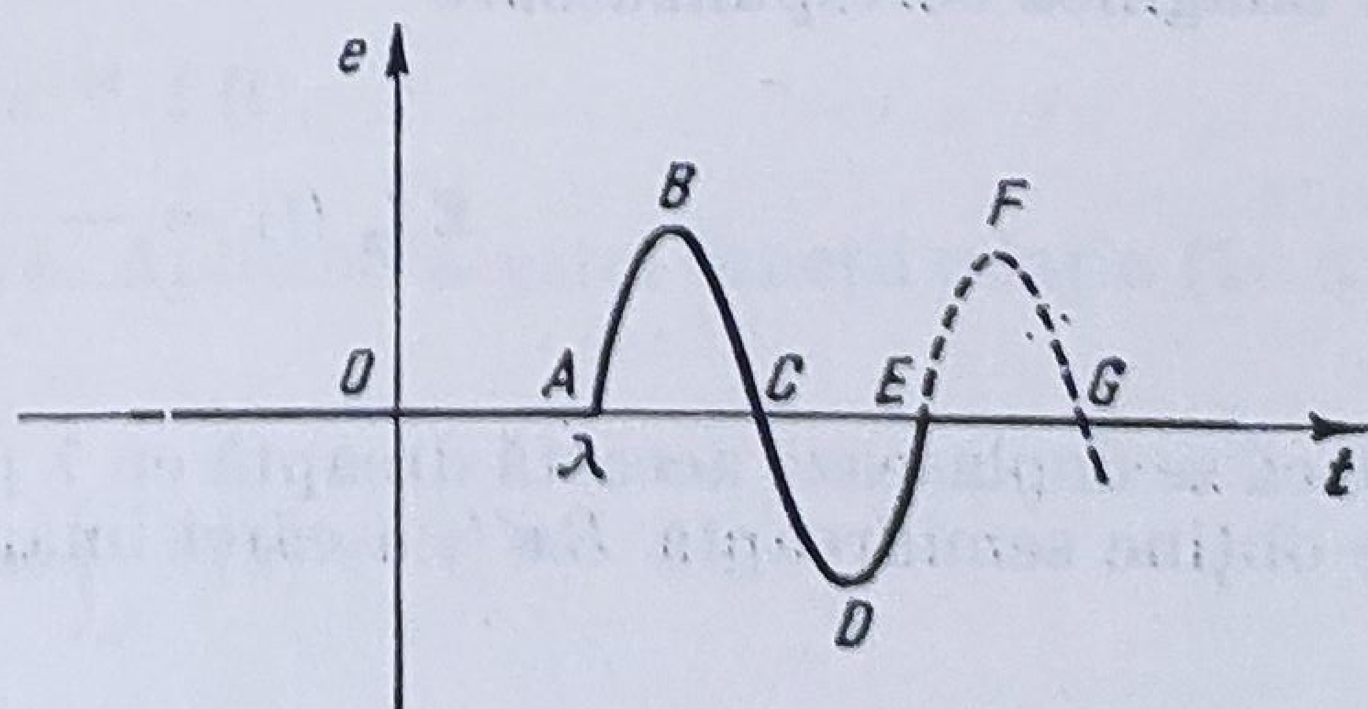


Fig. 10.14. Funcţie discontinuă neperiodică.

După cum reiese din exemplul 1, imaginea sinusoidei $A, B, C, D, E, F, G, \ldots$, care începe în momentul $t = \lambda$, este

$$\frac{\omega \varepsilon^{-\lambda s}}{s^2 + \omega^2}.$$

Sinusoida $E, F, G, \ldots$, care începe la timpul $t = \lambda + \frac{2\pi}{\omega}$, are imaginea

$$\frac{\omega \varepsilon^{\left(-\lambda + \frac{2\pi}{\omega}\right)s}}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega \varepsilon^{-\lambda s}}{s^2 + \omega^2} \varepsilon^{-\frac{2\pi}{\omega} s}.$$

Funcţia f (t) fiind egală cu diferenţa acestor sinusoide va avea drept imagine, diferenţa acestor două imagini

$$\mathfrak{L}\, f(t) = \frac{\omega \varepsilon^{-\lambda s}}{s^2 + \omega^2} (1 - \varepsilon^{-\frac{2\pi}{\omega} s}).$$

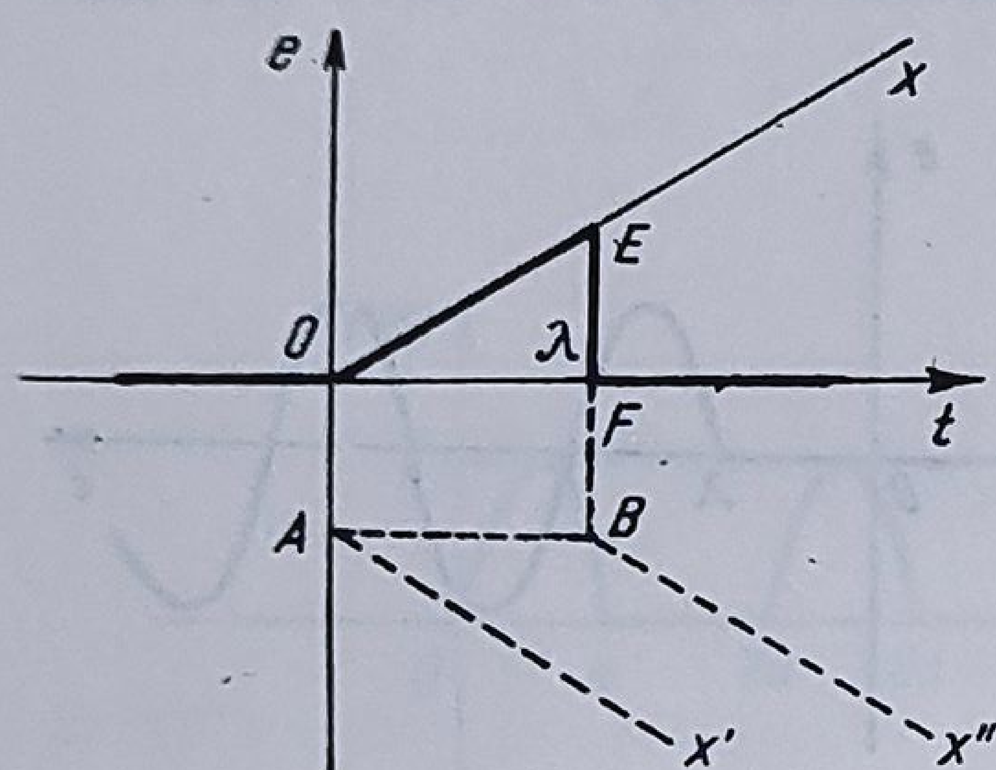


Fig. 10.15. Alt tip de funcţie discontinuă neperiodică.

Exemplul 3. Alt tip de funcţie discontinuă neperiodică. Fie funcţia f (t) reprezentată de conturul din figura 10.15 căreia urmează să i se găsească imaginea. Ecuaţia semidreptei Ox fiind $f_1(t) = \frac{E}{\lambda}\, t$, în care E este ordonata maximă a funcţiei şi λ abscisa corespunzătoare, imaginea sa este

$$\mathfrak{L}\, f_1(t) = \frac{E}{\lambda} \cdot \frac{1}{s^2}.$$

Să considerăm acum semidreapta Ax' trecînd prin punctul de coordonate $(0, -E)$ şi avînd panta egală şi de sens contrar cu aceea a semidreptei Ox; ecuaţia ei este

$$f_2(t) = -\frac{E}{\lambda} t - E$$

şi imaginea corespunzătoare

$$\mathfrak{L}\, f_2(t) = -\frac{E}{\lambda} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{E}{s}.$$

Dacă se deplasează această dreaptă cu λ paralel cu axa absciselor şi spre dreapta, se obţine semidreapta Bx'', a cărei imagine se scrie imediat

$$\mathfrak{L}\, f_2(t - \lambda) = -E\, \varepsilon^{-\lambda s} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{s^2}\right).$$

Funcţia dată se obţine prin adunarea a două funcţii reprezentate prin conturile $-\infty\, OEx$ şi $-\infty\, OFBx''$ şi în consecinţă imaginea sa va fi

$$\mathfrak{L}\, f(t) = \frac{E}{s}\left[\frac{1}{\lambda s} - \left(1 + \frac{1}{\lambda s}\right)\varepsilon^{-\lambda s}\right].$$

În modul acesta se poate construi imaginea oricărei funcţii, ce ar putea apărea în problemele de regim tranzitoriu.

10.4.4. GĂSIREA FUNCŢIEI ORIGINAL A UNEI FUNCŢII IMAGINE

O problemă fiind rezolvată cu ajutorul calculului operaţional, rezultatul obţinut dă imaginea mărimii căutate. Pentru rezolvarea completă a problemei trebuie găsit originalul funcţiei imagine obţinute. Aceasta se obţine calculînd integrala (10.33), pe care o vom stabili în cele ce urmează.

10.4.4.1. Stabilirea expresiei integralei MELLIN-FOURIER. Fiind cunoscută integrala dublă FOURIER*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \varepsilon^{j\omega(t-u)}\, du$$

pentru care se presupune că

a) $f(t)$ are un număr finit de maxime, de minime şi de discontinuităţi ordinare;
b) $f(t) = 0$ pentru $t < 0$;
c) integrala $f(t)$ este uniform convergentă, ceea ce necesită ca

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty.$$

În aceste condiţii, integrala dublă FOURIER se poate scrie

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{j\omega t}\, d\omega \int_{0}^{\infty} f(u)\, \varepsilon^{-j\omega u}\, du. \tag{10.63}$$

Să considerăm funcţia auxiliară

$$g(t) = \varepsilon^{-\sigma t}\, f(t),$$

unde σ este o constantă reală şi pozitivă. Aplicînd acestei funcţii relaţia (10.63) se obţine

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{j\omega t}\, d\omega \int_{0}^{\infty} f(u)\, \varepsilon^{-(\sigma+j\omega)u}\, du.$$

---

* Vezi 9.2.7.1.

Punînd $\sigma + j\omega = s$; rezultă $d\omega = \frac{ds}{j}$ şi deci

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-\infty}^{c+\infty} \varepsilon^{(s-\sigma)t}\, ds \int_0^{\infty} \varepsilon^{-su} f(u)\, du =$$

$$= \frac{\varepsilon^{-\sigma t}}{2\pi j}\int_{c-\infty}^{c+\infty} \varepsilon^{st}\, ds \int_0^{\infty} \varepsilon^{-su} f(u)\, du,$$

de unde

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-\infty}^{c+\infty} \varepsilon^{st} \varphi(s)\, ds,$$

adică tocmai integrala MELLIN-FOURIER dată în relaţia (10.33).

Integrala MELLIN-FOURIER este mai generală decît integrala FOURIER pentru că, dacă condiţia *c)* de mai sus nu este îndeplinită, avem întotdeauna îndeplinită condiţia

$$I_1 = \int_0^{\infty} \varepsilon^{-\sigma_a t} |f(t)|\, dt < \infty,$$

pentru $\sigma_a > 0$ şi în consecinţă integrala (10.33) are un sens şi este valabilă pentru orice valoare a lui $\sigma > \sigma_a$.

10.4.4.2. Calculul originalelor cu ajutorul integralei MELLIN-FOURIER. Calculul unui fenomen oarecare ne conduce la o soluţie sub forma unei funcţii $\varphi(s)$ de variabilă complexă $s = \sigma + j\omega$. Găsirea originalului acestei funcţii se face cu ajutorul relaţiei (10.33) efectuînd integrala respectivă în planul complex s, pentru efectuarea căreia se utilizează *metoda reziduurilor*. Această metodă se bazează pe teorema lui CAUCHY: Fiind dată o funcţie de variabilă complexă $\psi(s)$ avînd un număr de poli a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ de diverse ordine şi C un contur înconjurînd aceşti poli, parcurs în sensul direct şi astfel ales, încît funcţia să fie olomorfă în interiorul conturului, cu excepţia punctelor a_k, atunci

$$\int_c \psi(s)\, ds = 2\pi j\, \Sigma \text{ reziduuri din interiorul conturului } C. \tag{10.64}$$

Conturul C poate fi oarecare. Se alege de obicei un contur special numit *conturul lui* BROMWICH (fig. 10.16) şi care este constituit dintr-o dreaptă paralelă cu axa complexă de abscisă σ şi un semicerc cu centrul în punctul $(\sigma, 0)$ şi de rază R, tinzînd către infinit, situat în stînga axei complexe. Mărimea σ este întotdeauna pozitivă. Rezultă

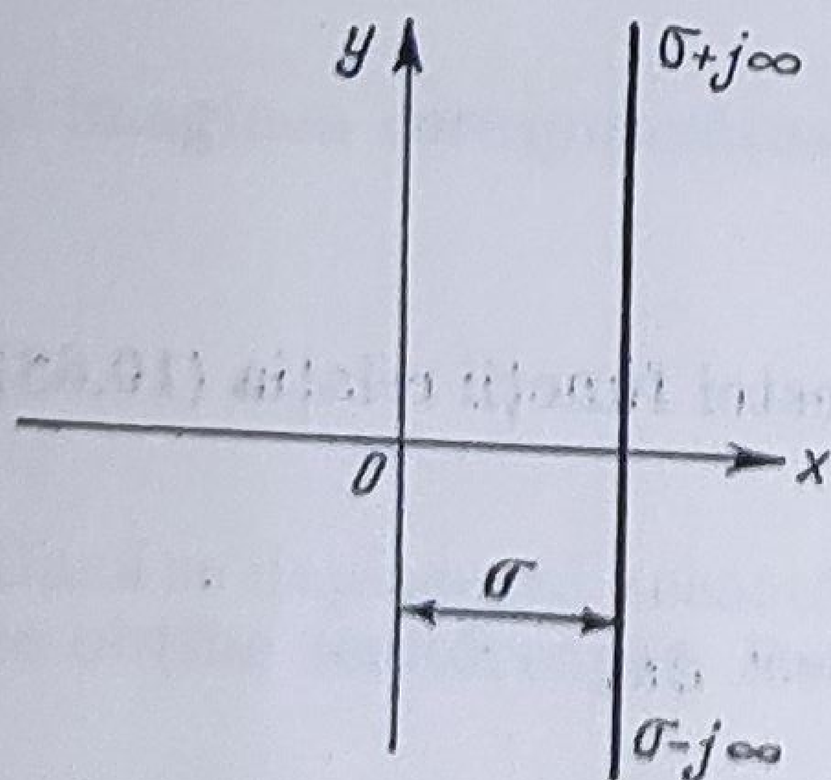


Fig. 10.16. Conturul lui BROMWICH.

$$\int_c = \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} + \int_\Gamma .$$

Dar, dacă funcţia $\psi(s)$ satisface condiţiile lemei lui JORDAN şi anume:

a) să aibă toate singularităţile la stînga dreptei de abscisă σ

b) să tindă uniform către zero cînd $|\sigma| \to \infty$

c) $t > 0$,

atunci integrala (10.64) luată de-a lungul semicercului Γ de rază $R \to \infty$ este nulă; în consecinţă, relaţia (10.64) poate fi scrisă

$$\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} \psi(s)\, ds = 2\pi j \,\Sigma\, \textit{reziduurile din stînga dreptei de abscisă } \sigma.$$

Aplicînd cele de mai sus integralei Mellin-Fourier, rezultă

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} \varepsilon^{st}\, \varphi(s)\, ds = \Sigma\, \textit{reziduurile din stînga dreptei de abscisă } \sigma.$$

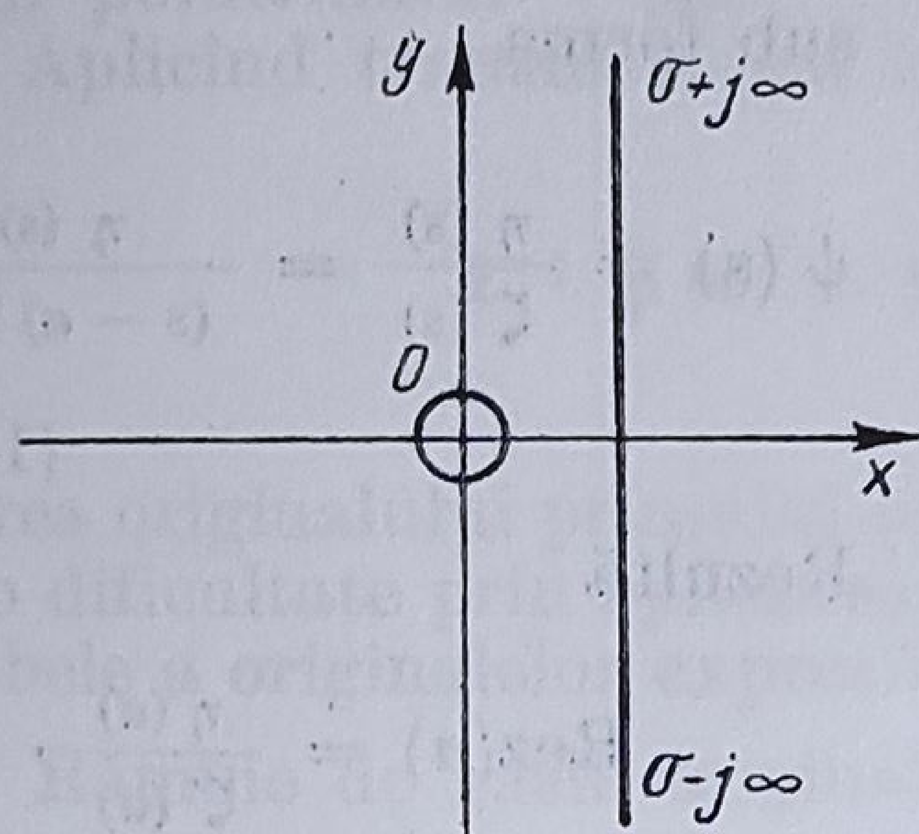


Fig. 10.17. Contur echivalent în cazul polilor.

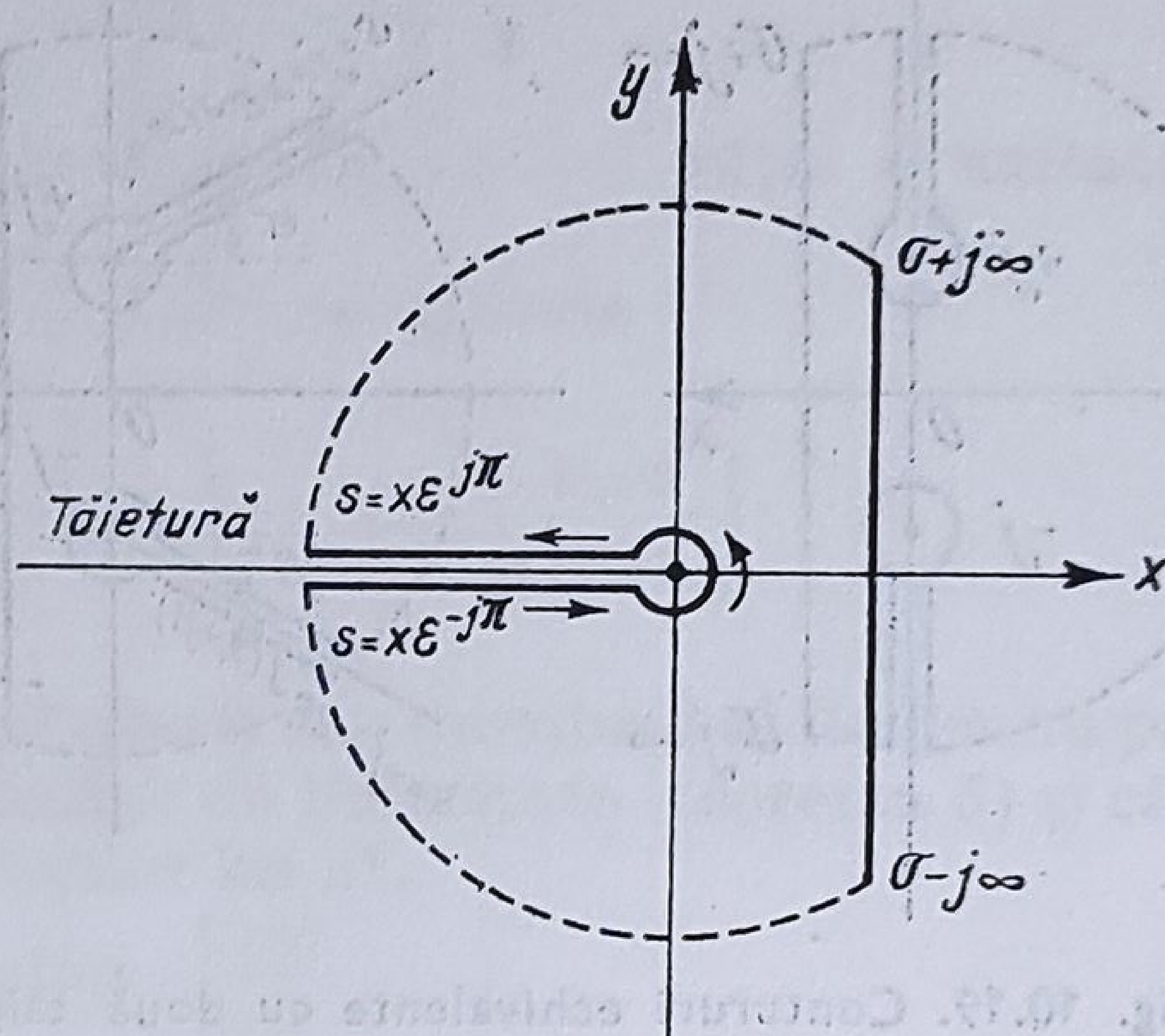


Fig. 10.18. Contur echivalent cu tăietură.

În cazul cînd funcţia de variabilă complexă satisface lemei lui Jordan, integrala ei fiind nulă de-a lungul semicercului de rază infinită sprijinit pe dreapta de abscisă c, în punctele sale extreme $\sigma + j\infty$ şi $\sigma - j\infty$, atunci conturul lui Bromwich poate fi înlocuit cu un *contur echivalent*, după cum urmează:

1. *Toate singularităţile funcţiei sînt poli.* În acest caz, orice curbă închisă, fără puncte duble, care înconjură toţi polii funcţiei este un contur echivalent conturului lui Bromwich şi integrala de-a lungul acestui contur este egală cu suma reziduurilor corespunzătoare polilor. Spre exemplu, pentru funcţia $\frac{1}{s^2}$, un contur echivalent conturului lui Bromwich este constituit dintr-un mic cerc trasat în jurul originii (fig. 10.17).

2. *Funcţia posedă puncte critice.* În acest caz se poate forma un contur echivalent cu conturul lui Bromwich printr-un mic cerc care să înconjure singularitatea şi printr-o tăietură care să lege acest cerc cu semicercul de la infinit din stînga axei complexe. Astfel, pentru funcţia $\frac{\varepsilon^{st}}{\sqrt{s^2}}$ conturul echivalent este indicat în figura 10.18. Dacă o funcţie are mai multe puncte critice, conturul echivalent va fi constituit din cercuri care să înconjure aceste puncte critice şi din tăieturi care să le lege cu cercul de rază infinită. Ţinînd seama că aceste tăieturi se pot face oricum, pot exista numeroase conturuLi echivalente cu conturul lui Bromwich pentru o aceeaşi funcţie. Spre exemplu, pentru

atunci integrala (10.64) luată de-a lungul semicercului Γ de rază $R \to \infty$ este nulă; în consecinţă, relaţia (10.64) poate fi scrisă

$$\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} \psi(s)\, ds = 2\pi j\, \Sigma \textit{ reziduurile din stînga dreptei de abscisă } \sigma.$$

Aplicînd cele de mai sus integralei Mellin-Fourier, rezultă

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} \varepsilon^{st}\, \varphi(s)\, ds = \Sigma \textit{ reziduurile din stînga dreptei de abscisă } \sigma.$$

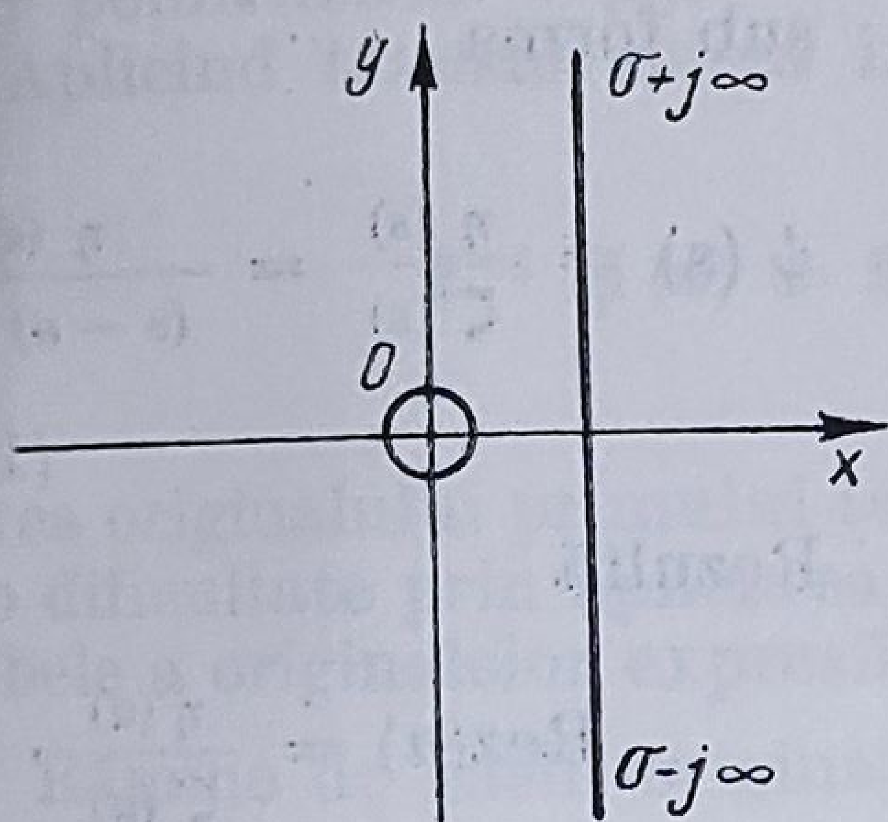


Fig. 10.17. Contur echivalent în cazul polilor.

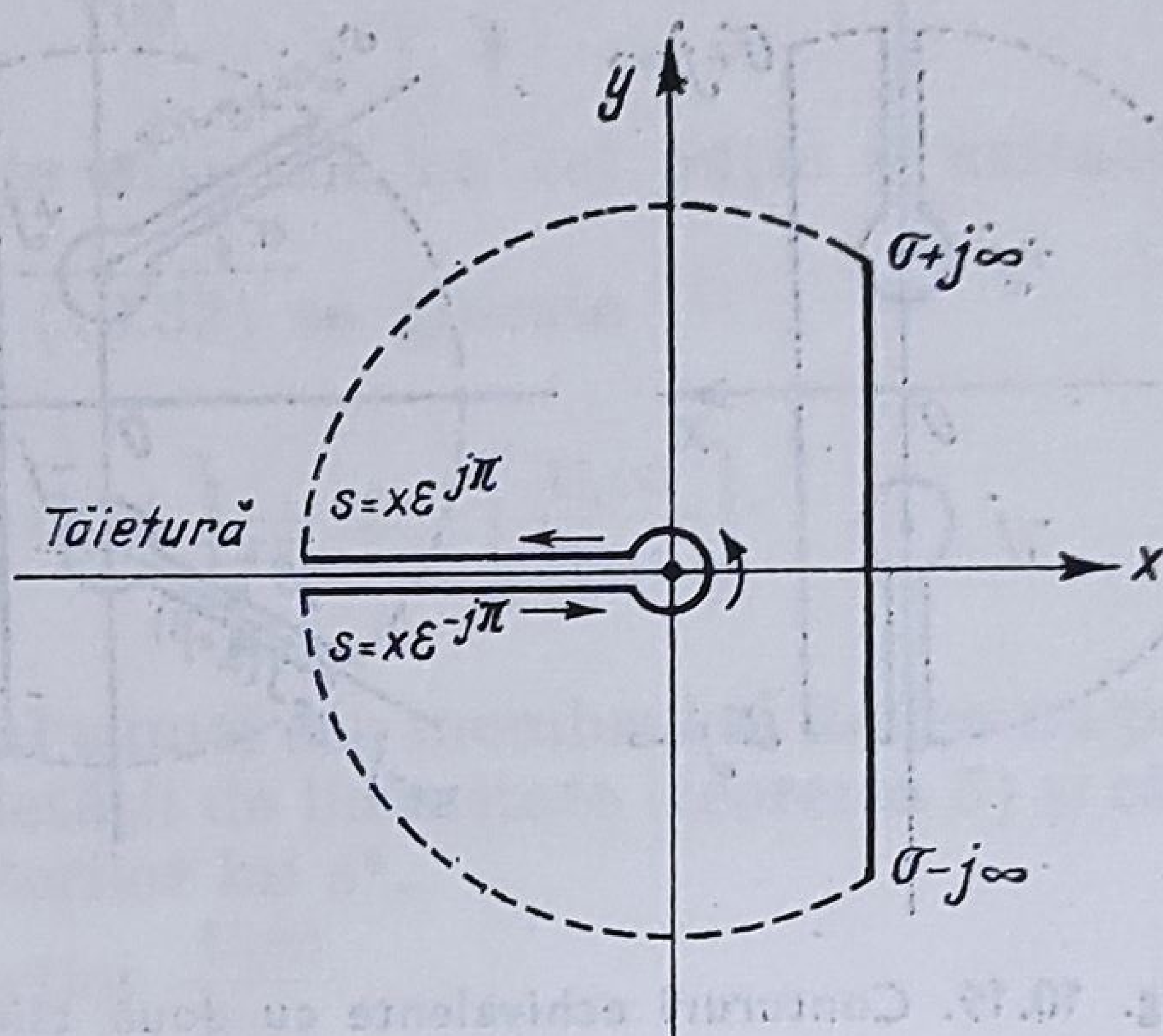


Fig. 10.18. Contur echivalent cu tăietură.

În cazul cînd funcţia de variabilă complexă satisface lemei lui Jordan, integrala ei fiind nulă de-a lungul semicercului de rază infinită sprijinit pe dreapta de abscisă c, în punctele sale extreme $\sigma + j\,\infty$ şi $\sigma - j\,\infty$, atunci conturul lui Bromwich poate fi înlocuit cu un *contur echivalent*, după cum urmează:

1. *Toate singularităţile funcţiei sînt poli*. În acest caz, orice curbă închisă, fără puncte duble, care înconjură toţi polii funcţiei este un contur echivalent conturului lui Bromwich şi integrala de-a lungul acestui contur este egală cu suma reziduurilor corespunzătoare polilor. Spre exemplu, pentru funcţia $\frac{1}{s^2}$, un contur echivalent conturului lui Bromwich este constituit dintr-un mic cerc trasat în jurul originii (fig. 10.17).

2. *Funcţia posedă puncte critice*. În acest caz se poate forma un contur echivalent cu conturul lui Bromwich printr-un mic cerc care să înconjure singularitatea şi printr-o tăietură care să lege acest cerc cu semicercul de la infinit din stînga axei complexe. Astfel, pentru funcţia $\frac{\varepsilon^{st}}{\sqrt{s^2}}$ conturul echivalent este indicat în figura 10.18. Dacă o funcţie are mai multe puncte critice, conturul echivalent va fi constituit din cercuri care să înconjure aceste puncte critice şi din tăieturi care să le lege cu cercul de rază infinită. Ţinînd seama că aceste tăieturi se pot face oricum, pot exista numeroase contururi echivalente cu conturul lui Bromwich pentru o aceeaşi funcţie. Spre exemplu, pentru

funcţia $\frac{\varepsilon^{st}}{\sqrt{s^2+1}}$, care are două puncte critice în $s = \pm j$, două oarecare din aceste contururi echivalente au fost arătate în figura 10.19.

În cazul cînd funcţia considerată este multiformă în partea planului complex limitată de conturul lui Bromwich ea se face uniformă într-un contur mai complicat, realizîndu-se tăieturile convenabile şi considerînd apoi un contur echivalent conturului lui Bromwich.

10.4.4.3. Calculul reziduurilor în cazul polilor simpli. Din cele ce preced rezultă că, determinarea originalului unei funcţii $\varphi(s)$ oarecare se face cu ajutorul integralei (10.33) şi se reduce în cele din urmă la calculul reziduurilor funcţiei $\varepsilon^{st}\varphi(s) = \psi(s)$. Să presupunem că funcţia $\psi(s)$ poate fi pusă sub forma

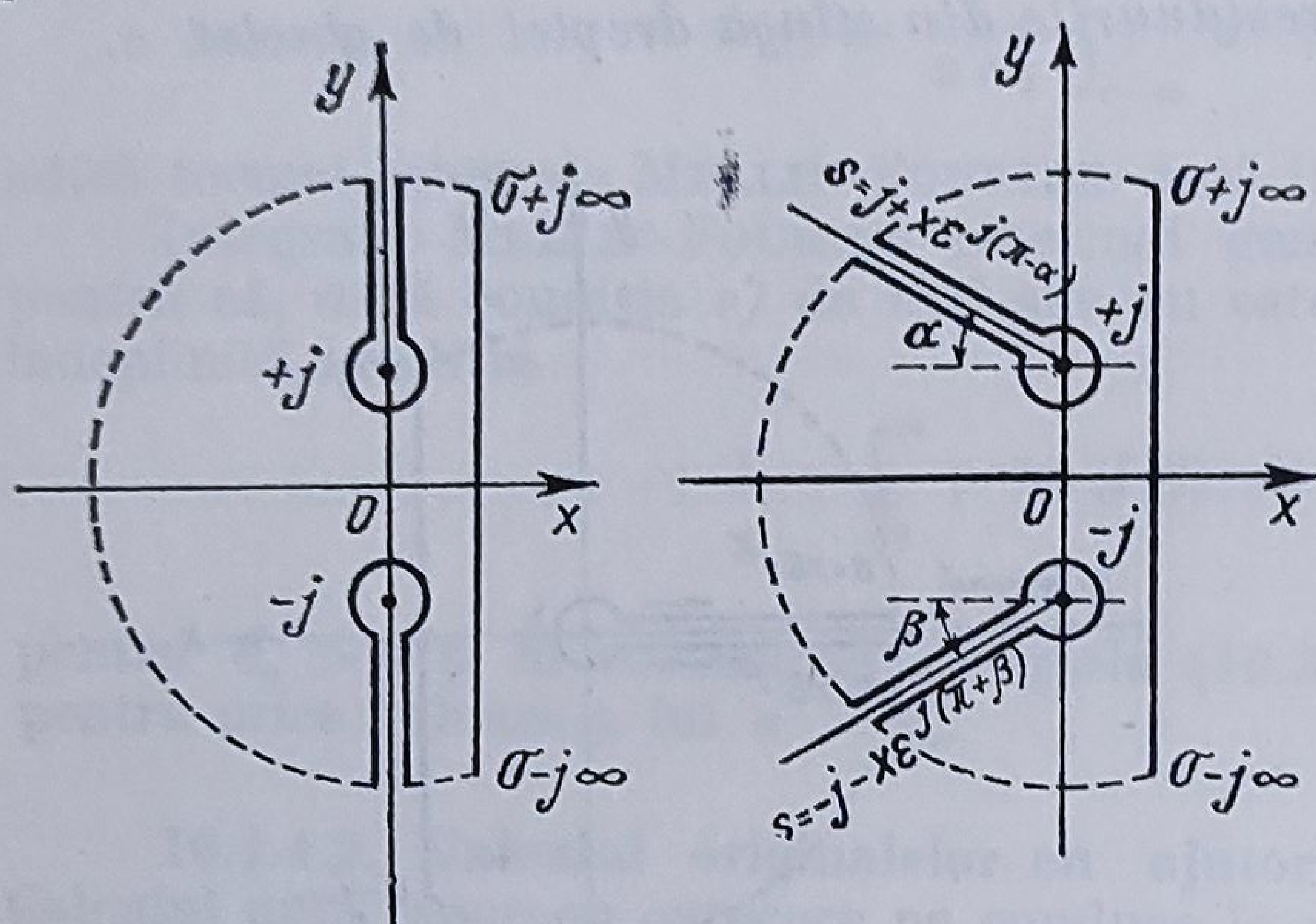


Fig. 10.19. Contururi echivalente cu două tăieturi.

$$\psi(s) = \frac{\eta(s)}{\zeta(s)} = \frac{\eta(s)}{(s-a)\,\zeta(s)}. \tag{10.65}$$

Rezultă

$$\text{Rez}(a) = \frac{\eta(a)}{\zeta'(a)},$$

şi în consecinţă, dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt poli simpli ai funcţiei $\zeta(s)$, atunci

$$\Sigma\ \textit{reziduurilor} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta(a_k)}{\zeta'(a_k)}. \tag{10.66}$$

Dacă funcţia de la numitor are o rădăcină nulă,

$\zeta(s) = s\,\zeta_1(s)$ cu condiţia că $\zeta_1(0) \neq 0$, atunci

$$\Sigma\ \textit{reziduurilor} = \frac{\eta(0)}{\zeta_1(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta(a_k)}{a_k\,\zeta_1(a_k)}. \tag{10.67}$$

după cum se poate arăta uşor.

10.4.4.4. Calculul reziduurilor în cazul polilor multipli. În cazul cînd funcţia (10.65) are un pol de ordinul n, determinarea reziduului corespunzător se face cu relaţia

$$\text{Rez}(a) = A_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}(s-a)^n\frac{\eta(s)}{\zeta(s)}\right]_{s=a}. \tag{10.68}$$

10.4.4.5. Teorema dezvoltării a lui Heaviside. Soluţiile problemelor de regim tranzitoriu apar în general sub forma unor fracţii algebrice raţionale;

sub acest aspect, problema se simplifică într-o oarecare măsură, găsirea originalului în acest caz fiind mai simplă.

Fie

$$\varphi(s) = \frac{U(s)}{V(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0} \qquad (10.69)$$

o fracţie algebrică raţională, în care a şi b sînt constante reale şi m şi n sînt numere întregi şi pozitive.

Dacă $m < n$ atunci expresia (10.69) se poate scrie

$$\varphi(s) = \sum_{i=0}^{k} C_i s^i + \frac{U_1(s)}{V(s)}, \; (k = n - m)$$

în care gradul polinomului $U_1(s)$ este mai mic cu cel puţin o unitate decît gradul polinomului $V(s)$.

Aplicînd transformarea inversă (10.32) se găseşte

$$\mathfrak{L}^{-1} \varphi(s) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k} C_i s^i\right) + \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{U_1(s)}{V(s)}\right].$$

Găsirea originalului primului termen al sumei din membrul al doilea nu prezintă nici o dificultate prin aplicarea proprietăţii de liniaritate (teorema 5) şi căutarea în tabele a originalelor expresiilor puterilor lui s*.

Rămîne de găsit originalul fracţiei $\frac{U_1(s)}{V(s)}$.

La aceasta se reduce şi cazul cînd $m > n$.

Două cazuri se pot prezenta: (a) ecuaţia $V(s) = 0$ nu are rădăcini multiple şi (b) ecuaţia $V(s)$ are rădăcini multiple.

a) Ecuaţia $V(s) = 0$ nu are rădăcini multiple

Fie

s_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ rădăcinile ecuaţiei

$$V(s) = 0 \qquad (10.70)$$

şi se presupune că ** $U(s) \neq 0$.

Fracţia (10.69) se poate scrie

$$\frac{U(s)}{V(s)} = \frac{U(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_m)};$$

---

* Trebuie observat că puterile lui s mai mari decît 1 *ar reprezenta* derivatele de ordin superior ale funcţiei unitate, care n-au încă un sens fizic. Pe de altă parte, originalele corespunzătoare nu se cunosc şi nici nu pot fi determinate prin mijloacele cunoscute astăzi, astfel că, valoarea cea mai mare pe care o poate lua exponentul i, în relaţia de mai sus, este 0.

De altfel, în problemele de fizică, în majoritatea cazurilor rezultatele calculelor apar sub forma de fracţii la care $m > n$; sînt foarte rare cazurile cînd $m = n$.

** S-a suprimat indicele 1 în expresia acestui polinom, aceasta neputînd duce la nici o confuzie, calculul originalului unei fracţii algebrice raţionale făcîndu-se pentru cazul $m > n$, oricare alt caz reducîndu-se la acesta.

care se poate descompune în fracţii simple, găsindu-se *

$$\frac{U(s)}{V(s)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{U(s_i)}{(s - s_i)\, V'(s_i)}$$

şi rezultă, pe baza proprietăţii de liniaritate,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{U(s)}{V(s)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{U(s_i)}{(s - s_i)\, V'(s_i)}\right] = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{U(s_i)}{V'(s_i)} \cdot \frac{1}{s - s_i}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{U(s_i)}{V'(s_i)}\, \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s - s_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{U(s_i)}{V'(s_i)}\, \varepsilon^{s_i t} \qquad (10.71)$$

căci, conform relaţiei (10.48),

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s - s_i}\right) = \varepsilon^{s_i t}\ .$$

Cazuri particulare : 1. *Ecuaţia* (*10.70*) *are o rădăcină nulă*. În acest caz **

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{U(s)}{V(s)}\right] = \frac{U(0)}{V_1(0)} + \sum_{i=2}^{m} \frac{U(s_i)}{s_i\, V_1(s_i)}\, \varepsilon^{s_i t}\ . \qquad (10.72)$$

Relaţiile (10.71) şi (10.72) constituie *teorema dezvoltării a lui* HEAVISIDE.

2. *Ecuaţia* (*10.70*) *are cel puţin o pereche de rădăcini complexe conjugate.* Fie $s_1 = j\omega_1$ şi $s_2 = -j\omega_1$ cele două rădăcini complexe conjugate. În acest caz ***

$$\frac{U(s)}{V(s)} = \frac{U(s)}{(s^2 + \omega_1^2) V_2(s)},$$

în care s-a notat

$$V(s) = (s^2 + \omega_1^2)\, V_2(s)\ ;$$

rezultă

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{U(s)}{(s^2 + \omega_1^2)\, V_2(s)}\right] = \mathcal{R}e\left[\frac{U(j\omega_1)}{j\omega_1 V_2(j\omega_1)}\, \varepsilon^{j\omega_1 t}\right] + \sum_{i=3}^{m} \frac{U(s_i)}{(s_i^2 + \omega_1^2)\, V_2'(s_i)}\, \varepsilon^{s_i t}\ , \qquad (10.73)$$

---

* Vezi [116] pag. 179.
** Vezi [116] pag. 181.
*** Vezi [116] pag. 182.

sau

$$\mathcal{R}e\,[2\,A_1\,\varepsilon\,j\omega_1 t] = \mathcal{I}m\,[2\,j\,A_1\,\varepsilon\,j\omega_1 t],$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{U(s)}{(s^2+\omega_1^2)\,V_2(s)}\right] = \mathcal{I}m\left[\frac{U(j\omega_1)}{\omega_1\,V_2\,(j\omega_1)}\,\varepsilon^{j\omega_1 t}\right] + \sum_{i=3}^{m}\frac{U(s_i)}{(s_i^2+\omega_1^2)\,V_2'(s_i)}\,\varepsilon^{s_i t}. \qquad (10.74)$$

Tabloul 10.1

ORIGINALUL FRACȚIILOR ALGEBRICE RAȚIONALE

1. Polinomul de la numitor *nu are* rădăcini multiple

$$\frac{U(s)}{V(s)}\;\Bigg|\;\sum_{i=1}^{m}\frac{U(s_i)}{V'(s_i)}\,\varepsilon^{s_i t}\quad 0 \leqslant t \qquad (10.71)$$

***a)* Polinomul de la numitor are o rădăcină nulă**

$$\frac{U(s)}{sV_1(s)}\;\Bigg|\;\frac{U(0)}{V_1(0)} + \sum_{i=2}^{m}\frac{U(s_i)}{s_i\,V_1'(s_i)}\,\varepsilon^{s_i t}\quad 0 \leqslant t. \qquad (10.72)$$

***b)* Polinomul de la numitor are o pereche de rădăcini complexe conjugate, pe axa complexă**

$$\frac{U(s)}{(p^2+\omega_1^2)\,V_2\,(s)}\;\Bigg|\;\mathcal{R}e\left[\frac{U(j\omega_1)}{j\,\omega_1\,V_2\,(j\,\omega_1)}\,\varepsilon^{j\omega_1 t}\right] + \sum_{i=3}^{m}\frac{U(s_i)}{(s_i^2+\omega_1^2)\,V_2'\,(s_i)}\,\varepsilon^{s_i t} \qquad (10.73)$$

sau

$$\Bigg|\;\mathcal{I}m\left[\frac{U(j\omega_1)}{\omega_1\,V_2\,(j\omega_1)}\,\varepsilon^{j\omega_1 t}\right] + \sum_{i=3}^{m}\frac{U(s_i)}{(s_i^2+\omega_1^2)\,V_2'\,(s_i)}\,\varepsilon^{s_i t} \qquad (10.74)$$

2. Polinomul de la numitor *are* rădăcini multiple

$$\frac{U(s)}{V(s)}\;\Bigg|\;\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{q_i}\frac{K_{ik}}{(q_i-k)!}\,t^{q_i-k}\,\varepsilon^{s_i t}\quad 0 \leqslant t, \qquad (10.75)$$

în care

$$K_{ik} = \frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{d^{(k-1)}}{ds^{k-1}}\cdot\frac{(s-s_i)^{q_i}\,U(s)}{V(s)}\right]_{s=s_i}$$

$$V(s) = (s-s_1)^{q_1}\,(s-s_2)^{q_2}\;.\;.\;.\;.\;.\;(s-s_r)$$

$$q_1 + q_2 + \;.\;.\;.\;.\;.\; + q_r = m.$$

3) *Ecuația V (s) = 0 are rădăcini multiple.* În aceste condiții ecuația (10.70) poate fi pusă sub forma

$$V(s) = (s - s_1)^{q_1}(s - s_2)^{q_2} \ldots (s - s_s)^{q_s},$$

cu restricția $q_1 + q_2 + \ldots + q_s = m$ și $U(s_k) \neq 0$.

În acest caz *

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{U(s)}{V(s)}\right] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{q_i}\frac{K_{ik}}{(q_i - k)!}\, t^{q_i - k}\, \varepsilon^{s_i t} \qquad (10.75)$$

în care coeficienții K_{ik} sînt dați de relația

$$K_{ik} = \frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\cdot\frac{(s - s_i)^{q_i}\,(U(s)}{V(s)}\right]_{s=s_i}.$$

Rezultatele obținute sînt rezumate în tabloul 10.1.

10.4.4.6. Exemple de aplicații. Pentru ilustrarea metodelor de calcul ale originalelor se vor trata în cele ce urmează cîteva exemple.

Exemplul 1. Fie de calculat originalul expresiei

$$\varphi(s) = \frac{s}{(s^2+\beta^2)(s^2+\lambda^2)}.$$

Expresia dată are patru poli simpli: $s_1 = j\beta$, $s_2 = -j\beta$, $s_3 = j\lambda$, $s_4 = -j\lambda$. Se va aplica, în consecință relația (10.66). Vom avea deci

$$\mathfrak{L}^{-1}\varphi(s) = \sum_{k=1}^{4}\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon^{a_k t}}{2a_k^2 + \beta^2 + \lambda^2} = \frac{\cos\beta t - \cos\lambda t}{\lambda^2 - \beta^2}.$$

Notă. Teorema dezvoltării, prin aplicarea relației (10.71) dă același rezultat.

Exemplul 2. Fie de calculat originalul expresiei

$$\varphi(s) = \frac{1}{s(s^2+\omega^2)}.$$

Expresia dată are trei poli simpli: $s_1 = 0$, $s_2 = j\omega$, $s_3 = -j\omega$. Unul din poli fiind nul, se aplică relația (10.72) a teoremei dezvoltării și se găsește

$$\mathfrak{L}^{-1}\varphi(s) = \frac{1}{\omega^2} + \sum_{k=1}^{2}\frac{\varepsilon^{s_k t}}{s_k\cdot 2s_k} = \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos\omega t).$$

Notă. Cu metoda reziduurilor prin aplicarea relației (10.67), se obține același rezultat.

---

* Vezi [161] pag. 184.

Exemplul 3. Fie de calculat originalul expresiei

$$\varphi(s) = \frac{\sqrt{s}}{s^2 + \omega^2}.$$

Expresia dată are doi poli simpli, $s = \pm j\omega$, şi un punct critic pentru $s = 0$. Pentru efectuarea integralei (10.33) se va lua un contur Γ echivalent conturului lui BROMWICH care să înconjure cei doi poli, punctul critic şi să aibă o tăietură de-a lungul părţii negative a axei x-lor (fig. 10.20). Este uşor de verificat că cele două contururi sînt echivalente: valoarea integralei de-a lungul arcelor de cerc de rază infinită situate la stînga conturului lui BROMWICH este nulă căci $\psi(s) = \sqrt{s}$ şi $\xi(s) = \beta^2 + \omega^2$.

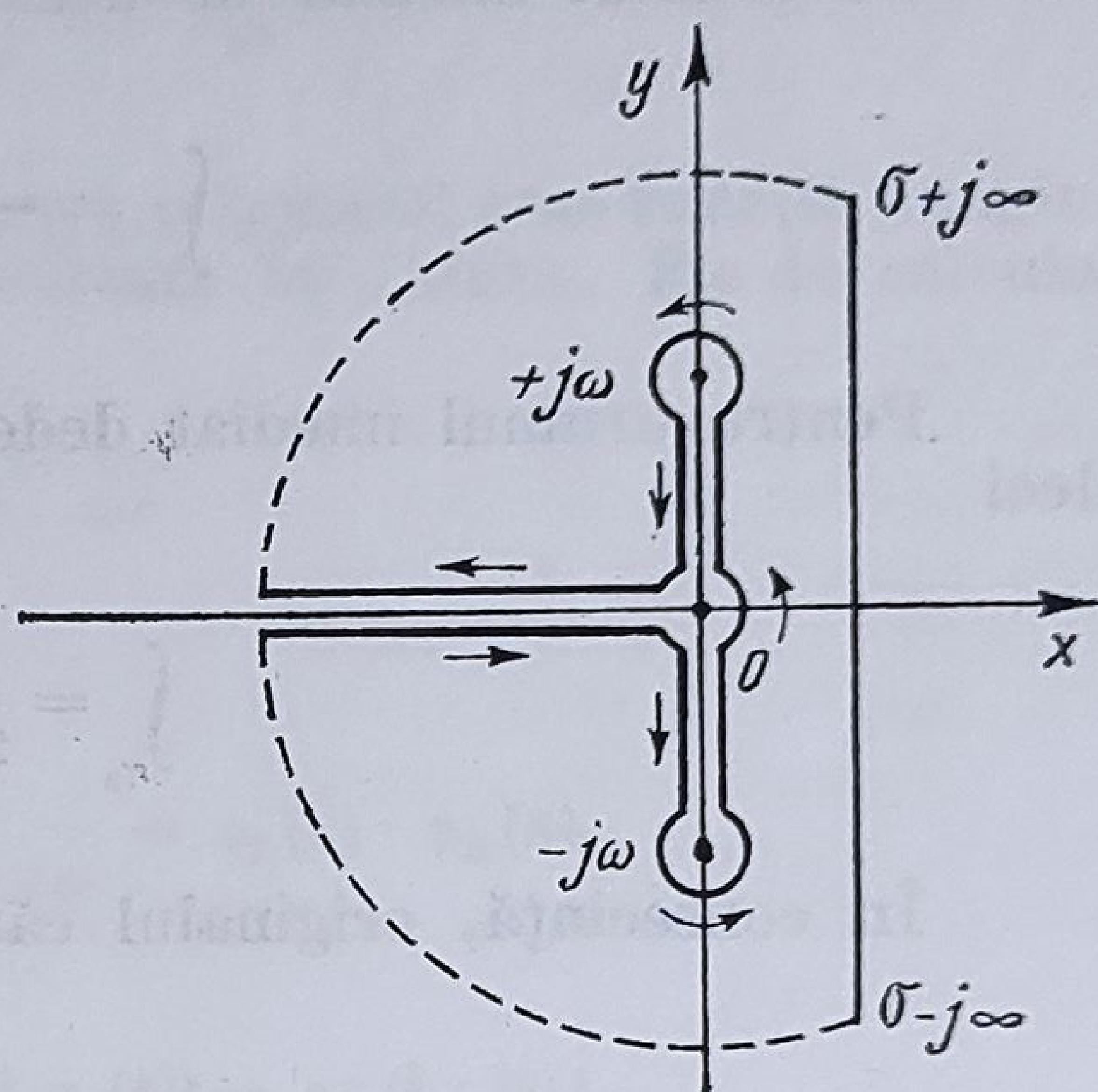


Fig. 10.20. Conturul echivalent.

Pe de altă parte, neexistînd singularităţi ale funcţiei între conturul Γ şi conturul lui BROMWICH, aplicînd formula lui CAUCHY şi ţinînd seama de sensul de parcurgere a conturului, vom avea

$$\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} + \int_{\Gamma} = 0.$$

Observînd că integrala de-a lungul drumului de dus şi întors care leagă polii de punctul critic e nulă, vom avea

$$\mathfrak{L}^{-1}\,\varphi(s) = \Sigma\ \text{reziduuri} + \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3},$$

unde γ_1 este un cerc cu centrul în 0 şi rază infinit mică

γ_2 este drumul situat puţin deasupra tăieturii

γ_3 este drumul situat puţin sub tăietură.

Pentru calculul reziduurilor aplicăm relaţia (10.66) şi se găseşte uşor

$$\text{Rez}\,(j\omega) = \left(\frac{\varepsilon^{st}\sqrt{s}}{s + j\omega}\right)_{s=j\omega} = \frac{\varepsilon^{j\omega t}\sqrt{j\omega}}{2\,j\,\omega} = \frac{\varepsilon^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}}{2\,j\sqrt{\omega}};$$

$$\text{Rez}(-j\omega) = \left(\frac{\varepsilon^{st}\sqrt{s}}{s - j\omega}\right)_{s=-j\omega} = \frac{\varepsilon^{-j\omega t}\sqrt{-j\omega}}{-2\,j\,\omega} = \frac{\varepsilon^{-j\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}}{-2\,j\sqrt{\omega}}$$

şi rezultă

$$\Sigma\ \text{reziduuri} = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Pentru calculul integralei de-a lungul cercului de rază ρ în jurul originii, vom pune $s = \rho\varepsilon^{j\theta}$ şi cum $|s| \ll \omega$, vom avea

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_1} = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \varepsilon^{j\rho(\cos\theta + j\sin\theta)} \rho^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{j\frac{3\theta}{2}} d\theta = 0.$$

Pe drumul imediat de deasupra tăieturii vom pune $s = |x|\varepsilon^{j\pi}$ şi deci

$$\int_{\gamma_2} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{-xt}\sqrt{x}\, dx}{x^2 + \omega^2}.$$

Pentru drumul imediat dedesubtul tăieturii vom pune $s = |x|\, \varepsilon^{-j\pi}$ şi deci

$$\int_{\gamma_3} = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{0} \frac{\varepsilon^{-xt}\sqrt{x}\, dx}{x^2 + \omega^2}.$$

În consecinţă, originalul căutat va fi

$$\mathfrak{L}^{-1} \varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{-xt}\sqrt{x}}{x^2 + \omega^2} dx.$$

Exemplul 4. Fie de calculat originalul expresiei

$$\varphi(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{(s + \alpha)^3 s^2}.$$

Numitorul expresiei avînd rădăcini multiple, se va aplica relaţia (10.75). Se obţine

$$\mathfrak{L}^{-1} \varphi(s) = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{K_{11}}{(s - \alpha^3)} + \frac{K_{12}}{(s - \alpha)^2} + \frac{K_{13}}{s - \alpha} + \frac{K_{21}}{s^2} + \frac{K_{22}}{s}\right] =$$

$$= \left(\frac{K_{11}}{2!} t^2 + K_{12} t + K_{13}\right) \varepsilon^{-\alpha t} + K_{21} t + K_{22}$$

unde

$$K_{11} = \left(\frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2}\right)_{s = -\alpha} = \frac{a_2 \alpha^2 - a_1 \alpha + a_0}{\alpha^2},$$

$$K_{12} = \left(\frac{d}{dt} \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2}\right)_{s = -\alpha} = \frac{-a_1 \alpha + 2a_0}{\alpha^3}$$

$$K_{13} = \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2}{dt^2}\cdot\frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2}\right)_{s=-\alpha} = \frac{-a_1\alpha + 3a_0}{\alpha^4}$$

$$K_{21} = \left[\frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{(s+\alpha)^3}\right]_{s=0} = \frac{a_0}{\alpha^3},$$

$$K_{22} = \left[\frac{d}{dt}\cdot\frac{a_2 s_2 + a_1 s + a_0}{(s+\alpha)^3}\right]_{s=0} = \frac{a_1\alpha - 3a_0}{\alpha^4}.$$

Exemplul 5. Se poate găsi, în unele cazuri, originalul unei funcţii imagine oarecare aplicînd relaţia (10.42) dată de teorema lui BOREL. Fie de calculat originalul expresiei

$$\varphi(s) = \frac{1}{(s+\delta)^2 + \omega^2}.$$

Expresia dată se poate scrie

$$\varphi(s) = \frac{1}{s+\delta+j\omega}\cdot\frac{1}{s+\delta-j\omega} = \varphi_1(s)\cdot\varphi_2(s).$$

Dar

$$\mathfrak{L}^{-1}\varphi_1(s) = \varepsilon^{-(\delta+j\omega)t} \text{ şi } \mathfrak{L}^{-1}\varphi_2(s) = \varepsilon^{-(\delta-j\omega)t}$$

Teorema lui BOREL dă imediat

$$\mathfrak{L}^{-1}\varphi(s) = \int_0^t \varepsilon^{-(\delta+j\omega)\tau}\cdot\varepsilon^{-(\delta-j\omega)(t-\tau)}\,d\tau =$$

$$= \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\omega}\cdot\frac{\varepsilon^{j\omega t} - \varepsilon^{-j\omega t}}{2j} = \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\omega}\sin\omega t.$$

OBSERVAŢIE. Rezolvarea problemelor de găsire a originalului funcţiilor imagine este în general o operaţie dificilă şi laborioasă. De aceea au fost întocmite tabele de transformare, al căror calcul a fost efectuat pornind de la determinarea imaginilor funcţiilor uzuale, această operaţie fiind mai simplă, integrarea făcîndu-se în domeniul real. Soluţia problemei se obţine astfel folosind aceste tabele şi efectuînd diverse transformări asupra funcţiei imagine în aşa fel, încît să se poată găsi corespondentul respectiv *.

10.4.5. METODA GENERALĂ DE CALCUL A REGIMURILOR TRANZITORII

10.4.5.1. **Reguli generale.** Metoda generală de calcul a regimurilor tranzitorii cu ajutorul calculului operaţional comportă următoarele etape:

I. Punerea în ecuaţie a problemei. Aceasta constă în aplicarea legilor şi teoremelor cu ajutorul cărora se poate descrie fenomenul respectiv, scriin-

* Vezi anexa 10.1.

du-se astfel ecuaţiile sau sistemele de ecuaţii diferenţiale şi integro-diferenţiale corespunzătoare.

II. Transformarea ecuaţiilor diferenţiale şi integro-diferenţiale, urmîndu-se metoda indicată în paragraful 10.4.2. şi aplicînd teoremele cunoscute. Se obţine astfel un sistem de ecuaţii algebrice între imaginile diverselor funcţii necunoscute.

III. Rezolvarea sistemului de ecuaţii algebrice în raport cu imaginile funcţiilor necunoscute. Se obţin astfel imaginile tuturor funcţiilor necunoscute sub forma de expresii algebrice în s.

IV. Găsirea originalului funcţiilor imagine obţinute. Această operaţie se face aplicînd una din metodele indicate în paragraful 10.4.4.

V. Interpretarea rezultatelor.

De multe ori pentru punerea în ecuaţie se foloseşte o schemă echivalentă a sistemului fizic respectiv, înlocuindu-se diversele mărimi componente prin reactanţele şi impedanţele operaţionale corespunzătoare. Pe această schemă echivalentă se stabilesc apoi ecuaţiile de legătură corespunzătoare între diversele imagini ale mărimilor ce intră în joc. Ecuaţiile ce se obţin sînt de data aceasta ecuaţii algebrice, sărindu-se astfel prima etapă de operaţii indicată mai sus.

Metoda este generală şi se aplică oricărui sistem fizic. Ea constituie o rutină de calcul care conduce întotdeauna la soluţia completă a problemei. Dificultate mai mare se poate întîlni la calculul originalelor funcţiilor necunoscute căutate.

10.4.5.2. **Exemple de aplicaţie.** Problemele de regim tranzitoriu în electrotehnică se rezolvă aplicînd metoda indicată în paragraful precedent. Ele se pretează mai uşor la construirea de scheme echivalente. Este necesar, pentru aceasta să se definească în prealabil impedanţa operaţională. Se va presupune, în exemplele ce urmează că circuitele respective sînt liniare.

Fie un circuit format numai dintr-o bobină de inductanţă L, căreia i se aplică, la timpul $t = 0$ o tensiune u oarecare; se presupune de asemenea că, la momentul iniţial, $i = 0$. Ecuaţia de funcţionare a circuitului este

$$u = L \frac{di}{dt};$$

Înmulţind ambii membri cu $\varepsilon^{-st}dt$ şi integrînd între limitele 0 şi ∞, se obţine

$$\mathfrak{L} u = \mathrm{s} L \mathfrak{L} i.$$

Se deduce de aici

$$\mathfrak{L} i = \frac{\mathfrak{L} u}{\mathrm{s} L}$$

adică, funcţia imagine a curentului se obţine împărţind funcţia imagine a tensiunii prin $\mathrm{s}L$, care se numeşte *reactanţa inductivă operaţională*.

În acelaşi mod, în cazul unui condensator de capacitate C şi în ipoteza $u_{t=0} = 0$, se poate scrie

$$u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt.$$

Înmulţind această egalitate cu $\varepsilon^{-st}dt$, integrînd de la 0 la ∞ şi ţinînd seama de relaţia (10.37), se găseşte

$$\mathfrak{L}u = \frac{\mathfrak{L}i}{sC}$$

sau

$$\mathfrak{L}i = s\,C\,\mathfrak{L}u.$$

În această expresie, mărimea $\frac{1}{sC}$ se numeşte *reactanţa capacitivă operaţională*.

În cazul unei rezistenţe ohmice se scrie imediat

$$\mathfrak{L}u = R\,\mathfrak{L}i.$$

Cu aceste rezistenţe şi reactanţe operaţionale se lucrează întocmai ca şi cu rezistenţele şi reactanţele complexe. Se va putea scrie deci, pentru un circuit serie, impedanţa operaţională

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}\cdot \tag{10.76}$$

Expresia

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} \tag{10.77}$$

se numeşte *admitanţa operaţională*.

În calculul operaţional, legea lui OHM se scrie

$$\mathfrak{L}u = Z(s)\,\mathfrak{L}i. \tag{10.78}$$

Exemplul 1. *Închiderea unui circuit oarecare pe o sursă de forţă electromotoare constantă.* Se presupune că la timpul $t = 0$ se aplică o forţă electromotoare constantă E unui circuit format dintr-o bobină de inductanţă L în serie cu un rezistor de rezistenţă R şi un condensator de capacitate C (fig. 10.21). Se presupune de asemenea, că la momentul iniţial curentul din circuit şi sarcina electrică a condensatorului sînt nule.

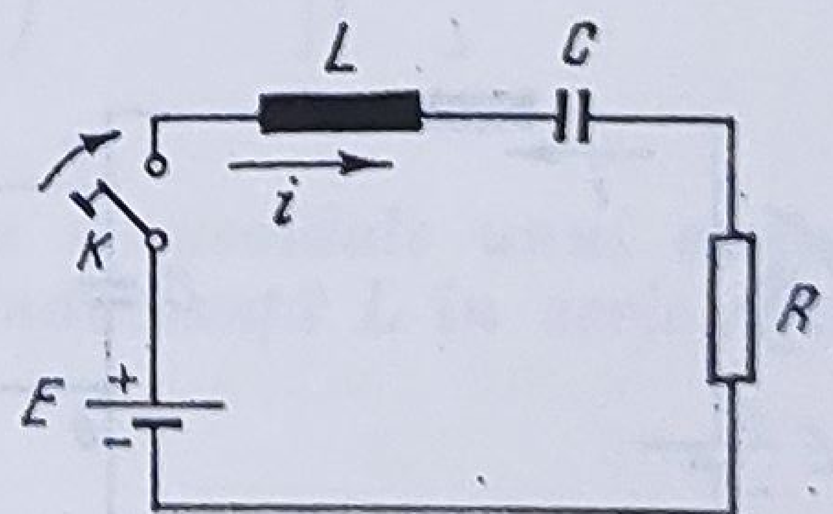


Fig. 10.21. Circuit electric format dintr-un condensator legat în serie cu un rezistor şi o bobină.

Impedanţa operaţională a circuitului este (10.76)

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}\cdot$$

Forţa electromotoare fiind constantă, imaginea ei este

$$\mathfrak{L}E = \frac{E}{s}\cdot$$

Aplicînd legea lui OHM (10.78) circuitului, se găsește

$$\mathfrak{L}i = \frac{E}{s} \cdot \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

sau

$$\mathfrak{L}i = \frac{E}{L\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right)}. \tag{10.79}$$

Pentru a găsi curentul i, se aplică relația (10.71) și curentul căutat va avea forma

$$i = \frac{E}{2\Omega' L} \varepsilon^{-\delta t} (\varepsilon^{\Omega' t} - \varepsilon^{-\Omega' t}),$$

sau, ținînd seama de expresia sinusului hiperbolic,

$$i = \frac{E}{\Omega' L} \varepsilon^{-\delta t} \operatorname{sh} \Omega' t.$$

Discuția rezultatului se face în raport cu Ω', așa cum s-a arătat în paragraful 3.6.4.

Se poate scrie direct originalul expresiei (10.79) folosind oricare din metodele indicate în paragraful 10.4.4. (metoda reziduurilor, teorema lui BOREL) sau folosind tabelele.

Exemplul 2. *Aplicarea unei forțe electromotoare constante unui circuit format dintr-o bobină de inductanță L, în serie cu un condensator de capacitate C, șuntat cu un rezistor de rezistență R* (fig. 10.22).

La timpul $t = 0$ se aplică circuitului forța electromotoare constantă E și se presupune că, pînă în acest moment în sistem nu existau curenți sau sarcini electrice.

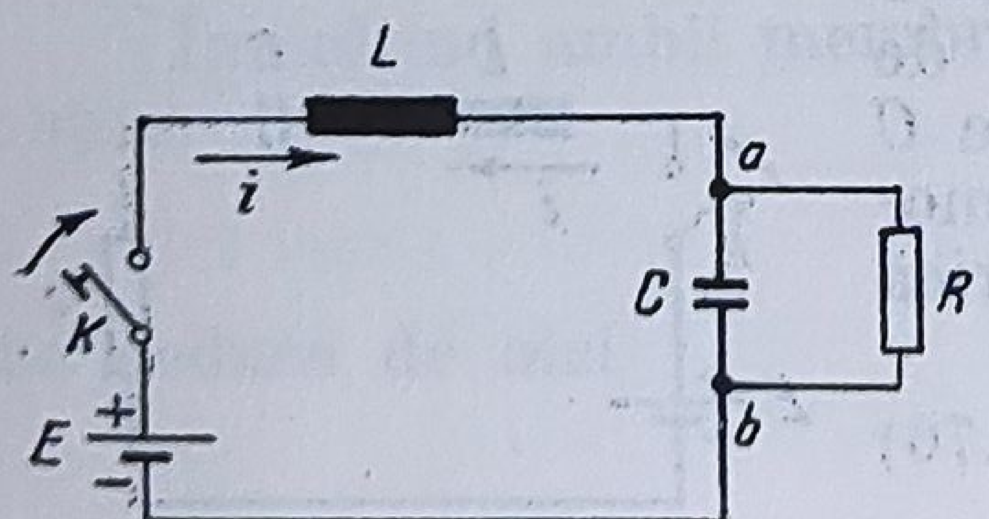


Fig. 10.22. Circuit electric format dintr-o inductanță în serie cu un condensator imperfect.

Impedanța operațională a circuitului se poate determina ușor, aplicînd regulile de compunere a impedanțelor circuitului echivalent corespunzător. Ea este

$$Z(s) = sL + \frac{R\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s^2 LCR + sL + R}{sCR + 1}.$$

Imaginea forței electromotoare fiind

$$\mathfrak{L}E = \frac{E}{s},$$

aplicînd legea lui OHM (10.78) se găsește

$$\mathfrak{L}i = E\frac{sCR+1}{s(s^2\,LCR + sL + R)}.$$

Aplicînd relația (10.69) se găsește fără dificultate

$$i = \frac{E}{R}\left\{1 - \varepsilon^{-\alpha t}\left[\operatorname{ch}\beta t + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{R}{\beta L}\right)\operatorname{sh}\beta t\right]\right\},$$

în care

$$\alpha = \frac{1}{2\,CR} \text{ și } \beta = \sqrt{\frac{1}{4C^2R^2} - \frac{1}{LC}}.$$

OBSERVAȚIE. Această relație este exactă dacă $\alpha^2 > \frac{1}{LC}$. Dacă $\alpha^2 < \frac{1}{LC}$, atunci β este imaginar. În acest caz punînd

$$\beta = j\Omega$$

în care

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4\,C^2R^2}},$$

relația de mai sus se scrie

$$i = \frac{E}{R}\left\{1 - \varepsilon^{-\alpha t}\left[\cos\,\Omega t + \left(\frac{\alpha}{\Omega} - \frac{R}{\Omega L}\right)\sin\,\Omega t\right]\right\}.$$

Exemplul 3. *Aplicarea unei forțe electromotoare sinusoidale unui circui format dintr-un rezistor de rezistență R și o bobină de inductanță L în serie.* Fie

$$e = E\sqrt{2}\,\sin\,\Omega\,t,$$

forța electromotoare care se aplică acestui circuit. Se presupune că, la timpul $t = 0$, înainte de închiderea circuitului, curentul în circuit este nul. Aplicînd legea lui OHM rezultă

$$\mathfrak{L}i = \frac{\mathfrak{L}e}{R + sL}.$$

Pentru a calcula $\mathfrak{L}e$, se aplică ecuaţia (10.30) şi se obţine, ţinînd seama că

$$\sin \omega t = \frac{\varepsilon^{j\omega t} - \varepsilon^{-j\omega t}}{2\,j},$$

$$\mathfrak{L}e = E\sqrt{2}\,\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Pentru simplificarea calculului este mai bine a se lăsa $\mathfrak{L}e$ format din doi termeni adică

$$\mathfrak{L}e = \mathfrak{L}e_1 + \mathfrak{L}e_2$$

în care

$$\mathfrak{L}e_1 = \frac{1}{2\,j}\,\frac{E\sqrt{2}}{s - j\omega} \quad \text{şi} \quad \mathfrak{L}e_2 = -\frac{1}{2\,j}\,\frac{E\sqrt{2}}{s + j\omega}$$

şi să se găsească soluţiile corespunzătoare fiecărui termen a lui $\mathfrak{L}e$. Se vede uşor că este suficient a face calculele numai pentru $\mathfrak{L}e_1$, deoarece, pentru $\mathfrak{L}e_2$ soluţia se obţine prin simpla înlocuire a lui j cu —j. Cum soluţia finală este suma soluţiilor corespunzătoare lui $\mathfrak{L}e_1$ şi $\mathfrak{L}e_2$ şi ambele soluţii sînt funcţii complex conjugate, este suficient, să se ia dublul valorii părţii reale a soluţiei corespunzătoare $\mathfrak{L}e_1$. Astfel

$$i = 2\mathcal{R}(J_1)$$

unde J_1 este soluţia corespunzătoare lui $\mathfrak{L}e_1$.

Funcţia imagine a lui J_1 fiind

$$\mathfrak{L}J_1 = \frac{1}{2\,j}\,\frac{E\sqrt{2}}{(s - j\,\omega)(R + sL)},$$

aplicînd relaţia (10.71) se găseşte

$$J_1 = \frac{E\sqrt{2}}{2j\,Z}\left[\varepsilon^{j(\omega t - \varphi)} - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\,\varepsilon^{-j\varphi}\right].$$

Luînd partea reală a acestei expresii şi înmulţind-o cu 2 se obţine soluţia căutată

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\left[\sin\,(\omega t - \varphi) + \sin\,\varphi\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right].$$

Exemplul 4. *Aplicarea unui impuls de tensiune într-un circuit cu un condensator de capacitate C şi rezistor de rezistenţă R.* Să considerăm un circuit electric format dintr-un condensator legat în serie cu un rezistor neinductiv. Acestui circuit i se aplică la timpul $t = 0$ o impulsie electrică de forma indicată în figura 10.14. Se cere a se determina curentul ce apare în circuit.

Imaginea acestei tensiuni a fost determinată (par. 10.4.3.8. ex. 3) şi este

$$\mathfrak{L}u = u(s) = \frac{E}{s}\left[\frac{1}{\lambda s} - \left(1 + \frac{1}{\lambda s}\right)\varepsilon^{-\lambda s}\right].$$

Impedanţa operaţională a circuitului fiind

$$Z(s) = R + \frac{1}{Cs},$$

aplicînd legea lui OHM generalizată, imaginea curentului va fi

$$\mathfrak{L}i = \frac{\mathfrak{L}u}{Z(s)} = \frac{E}{s}\left[\frac{1}{\lambda s} - \left(1 + \frac{1}{\lambda s}\right)\varepsilon^{-\lambda s}\right]\frac{1}{R + \frac{1}{Cs}} =$$

$$= \frac{E}{R}\cdot\frac{1}{s+\beta}\left[\frac{1}{\lambda s} - \left(1 + \frac{1}{\lambda s}\right)\varepsilon^{-\lambda s}\right],$$

în care am notat $\frac{1}{RC} = \beta$.

Pentru calculul originalului curentului, se desfac parantezele, obţinîndu-se

$$\mathfrak{L}i = \frac{E}{R\lambda}\cdot\frac{1}{s(s+\beta)} - \frac{E}{R}\cdot\frac{\varepsilon^{-\lambda s}}{s+\beta} - \frac{E}{R\lambda}\,\frac{\varepsilon - \lambda^{s}}{s(s+\beta)},$$

unde, fiecărei imagini i se poate găsi uşor originalul, pentru ultimii doi termeni aplicîndu-se şi teorema 9. Se găseşte astfel

$$i = \frac{EC}{\lambda}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad \text{pentru } \lambda > t > 0,$$

$$i = \frac{EC}{\lambda}\,\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}\left[\varepsilon^{\frac{\lambda}{RC}}\left(1 - \frac{\lambda}{RC}\right) - 1\right] \qquad \text{pentru } t > \lambda.$$

Curba curentului în funcţie de timp este dată în figura 10.23. Se observă pe curbă discontinuitatea pentru $t = \lambda$, care corespunde căderii bruşte a tensiunii. Explicaţia fenomenului este următoarea: Pînă în momentul $t = \lambda$, sursa dă o energie, care serveşte la încărcarea condensatorului. La $t = \lambda$, sursa dispare brusc şi condensatorul devine el sursă în circuit, debitînd un curent care de data aceasta este de sens contrar curentului de încărcare. Acest curent se stinge în timp, condensatorul rămânînd încărcat cu o anumită sarcină care se calculează uşor

$$q = \int_{\lambda}^{\infty} i\,dt = CE\left[\frac{RC}{\lambda}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{\lambda}{RC}}\right) - 1\right].$$

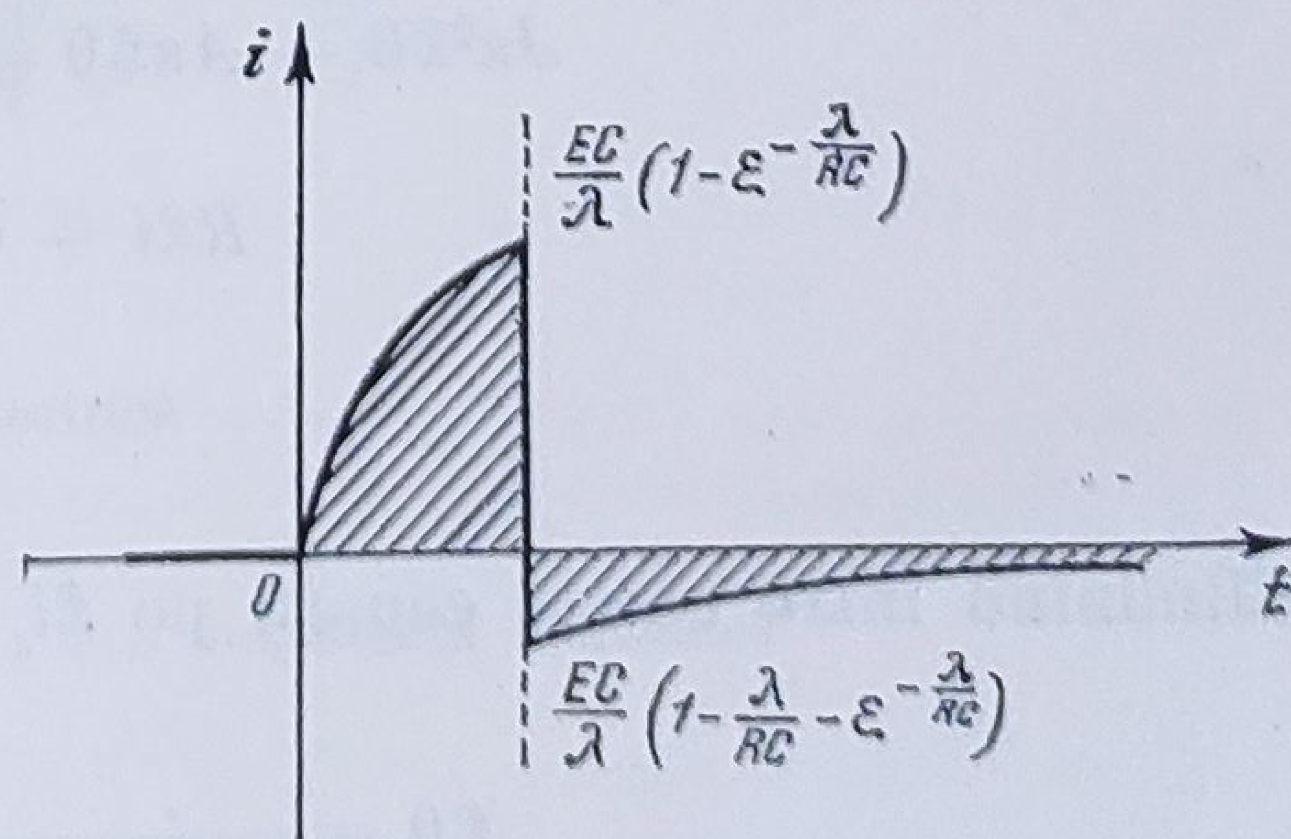


Fig. 10.23. Curba curentului.

Trebuie observat că saltul brusc (discontinuu) al curentului nu are nici o semnificație fizică. El apare numai datorită faptului că s-a neglijat inductanța circuitului.

Exemplul 5. *Studiul galvanometrului balistic.* Fie un galvanometru cu cadru mobil, avînd momentul de inerție J, prevăzut cu un resort antagonist, avînd coeficientul de elasticitate S, sistemul fiind cu frecări mecanice, caracterizate prin coeficientul A (fig. 10.24). Cadrul mobil are rezistența electrică R și inductanța proprie L; el se mișcă între polii unui magnet permanent producînd un cîmp de inducție magnetică B_0, constant. Prin șuntarea cu un condensator de capacitate C, galvanometrul este făcut balistic. Se cere funcționarea acestui galvanometru. Se presupune că, pentru toate regimurile de funcționare, $\Phi_0 = Const.$

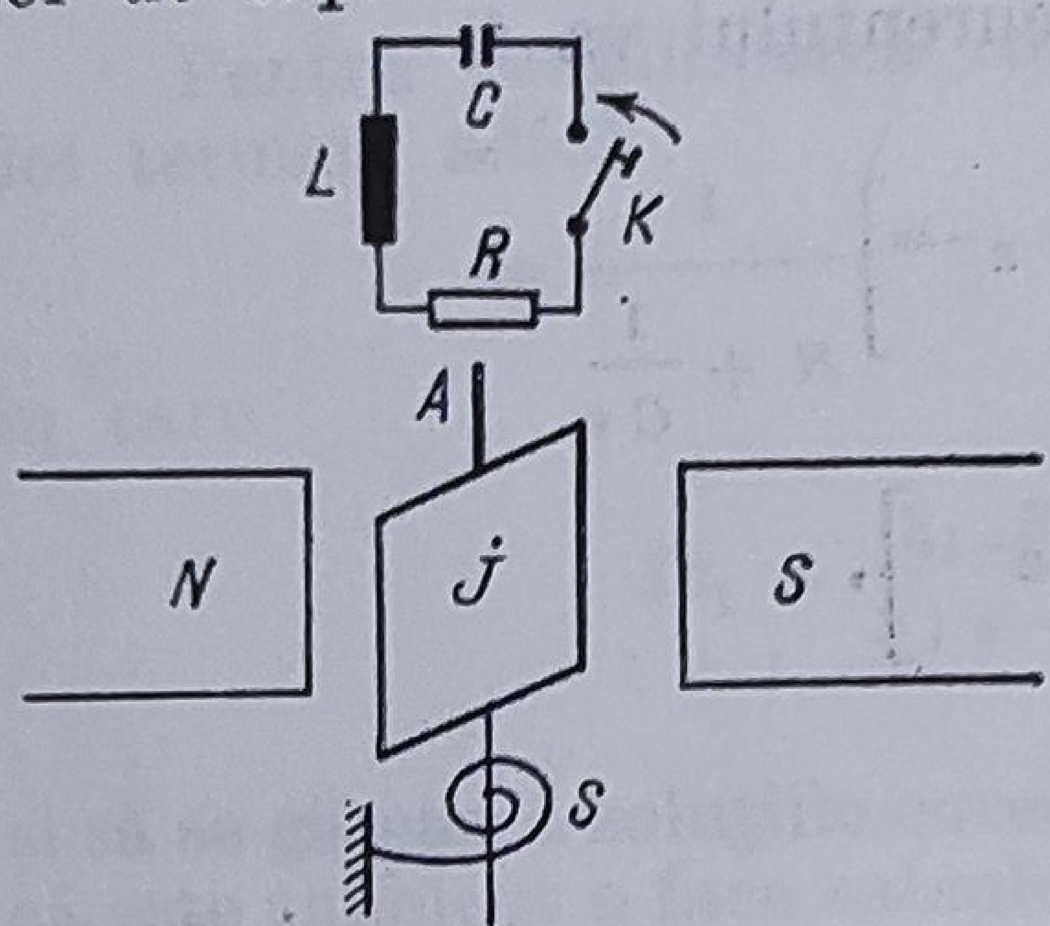


Fig. 10.24. Galvanometrul balistic.

Funcționarea galvanometrului va fi descrisă de următoarele grupe de ecuații diferențiale:

a) ecuații ce descriu fenomene mecanice

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + A\frac{d\theta}{dt} + S\theta = \Phi_0 i,$$

unde θ este deplasarea unghiulară a cadrului și i curentul ce-l străbate;

b) ecuații ce descriu fenomene electrice

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \Phi_0\frac{d\theta}{dt} = \frac{q}{C}, \quad i = -\frac{dq}{dt}.$$

Pentru simplificarea problemei neglijăm pe $L\frac{di}{dt}$ față de Ri în ecuațiile ce descriu fenomene electrice, ceea ce este posibil în practică. Aplicînd transformarea LAPLACE acestor ecuații și admițînd următoarele condiții inițiale

$$\theta_0 = 0, \quad \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad q_0 = Q_0 \quad \text{și} \quad i_0 = 0,$$

se obține:

$$\left.\begin{aligned} Js^2\mathcal{L}\theta + As\mathcal{L}\theta + S\mathcal{L}\theta &= \Phi_0\mathcal{L}i \\ R\mathcal{L}i + \Phi_0 s\mathcal{L}\theta &= \frac{1}{C}\mathcal{L}q \\ \mathcal{L}i &= -s\mathcal{L}q + Q_0. \end{aligned}\right\}$$

Eliminînd între aceste ecuații pe $\mathcal{L}i$ și $\mathcal{L}q$, se obține

$$\mathcal{L}\theta = \frac{\Phi_0 Q_0}{(CRs+1)(Js^2 + As + S) + C\Phi_0 s^2} \qquad (10.80)$$

sau*

$$\pounds\theta = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{Cs}} \cdot \frac{1}{J s^2 + \left(A + \frac{\Phi_0^2}{R + \frac{1}{Cs}} \right) s + S} \cdot \frac{Q_0}{C} \cdot \Phi_0. \tag{10.81}$$

Problema se poate rezolva complet căutînd originalul expresiei (10.80), care prezintă numai dificultatea rezolvării ecuaţiei în s de la numitor şi care, în cazul general, nu se poate face.

Problema poate fi însă discutată după cum urmează, trăgîndu-se concluzii interesante pentru practică :

Să presupunem că, aşa cum se întîmplă în practică, constanta de timp CR a circuitului electric este foarte mică, ceea ce revine a spune că durata de descărcare a condensatorului este foarte scurtă sau $R \ll \frac{1}{Cs}$. Vom scrie deci

$$Z_e = \frac{1}{Cs}$$

$$Z_m = Js^2 + (A + \Phi_0^2 Cs)\, s + S = J's^2 + As + S,$$

în care am notat cu

$$J' = J + \Phi_0^2 C,$$

momentul de inerţie aparent al sistemului mobil; în practică

$$J' \cong J.$$

Cu acestea, relaţia (10.81) devine

$$\pounds\theta = \frac{\Phi_0 Q^0}{J' s^2 + As + S} = \frac{\Phi_0 Q_0}{J'} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{A}{J'} s + \frac{S}{J'}}.$$

Rădăcinile polinomului de la numitor fiind

$$s_{1,2} = -\frac{A}{2J'} \pm j\sqrt{\frac{S}{J'} - \frac{A^2}{4J'^2}}$$

---

* În relaţia (10.81) se notează obişnuit

$Z_e = R + \frac{1}{Cs}$ impedanţa electrică

$Z_m = Js^2 + \left(A + \frac{\Phi_0}{R + \frac{1}{Cs}} \right) s + S$ impedanţa mecanică

$Z_{em} = Z_e Z_m$ impedanţa electromecanică.

se găsește ușor că

$$\theta = \frac{\Phi_0 Q_0}{J'} \frac{\varepsilon^{-\frac{A}{2J'}t}}{\sqrt{\frac{S}{J'} - \frac{A^2}{4J'^2}}} \sin \left(\sqrt{\frac{S}{J'} - \frac{A^2}{4J'^2}}\right) t.$$

Notînd

$$\omega_0^2 = \frac{S}{J'} \quad \text{și} \quad 2a = \frac{A}{J'},$$

și ținînd seama că amortizarea mecanică este în general foarte mică, deci $\omega_0^2 \gg a^2$, expresia oscilației galvanometrului devine

$$\theta = \frac{\Phi_0 Q_0}{\sqrt{J'S}} \varepsilon^{-\frac{A}{2J'}t} \sin \omega_0 t.$$

Elongația maximă se obține pentru valoarea lui t pentru care $\frac{d\theta}{dt} = 0$.

Se găsește

$$\theta_m = K \frac{\Phi_0}{\sqrt{J'S}} Q_0 = K_1 Q_0,$$

adică este proporțională cu Q_0.

Este ușor de observat că în funcționarea în balistic a unui galvanometru, prezența unui condensator la bornele sale are ca efect mărirea momentului de inerție al cadrului mobil.

10.4.6. CALCULUL FENOMENELOR TRANZITORII LA ÎNCHIDEREA ȘI DESCHIDEREA UNUI CIRCUIT ELECTRIC

10.4.6.1. Închiderea unui circuit electric. Fie o rețea liniară R, activă și două borne ale sale A și B; bornele A și B fiind deschise (circuitul funcționînd în gol prin aceste borne), între ele va exista o diferență de potențial $\underline{U}$. Dacă se închide circuitul pe o impedanță Z, prin această impedanță va circula un curent $\underline{I}_{AB}$ dat de teorema THÉVENIN*

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{AB}},$$

în care $\underline{Z}_{AB}$ este impedanța rețelei R pasivizată, văzută prin bornele A și B. Aplicînd transformata Laplace relației echivalente în mărimi instantanee și ținînd seama de cele arătate în paragraful 10.4.2., se obține

$$\mathfrak{L} i_{AB} = \frac{\mathfrak{L} U_{AB}}{Z(s) + Z_{AB}(s)}, \tag{10.82}$$

* Vezi 6.2.3.4, relația fiind scrisă în cantități complexe.

în care $\mathcal{L}i$ este imaginea curentului căutat, $\mathcal{L}\underline{U}_{AB}$ este imaginea tensiunii inițiale la bornele AB, Z_{AB} (s) este impedanța operațională a rețelei pasivizată văzută prin bornele A și B (s) este impedanța operațională pe care se închide rețeaua dată.

Pentru exemplificare să considerăm rețeaua din figura 10.25 la care, la timpul $t = 0_+$ se închide întrerupătorul K_1 aplicîndu-se tensiunea circuitului tensiunea constantă E; la timpul $t = t_1$ se scurtcircuitează rezistența. Se cere să se determine curentul i de scurtcircuit.

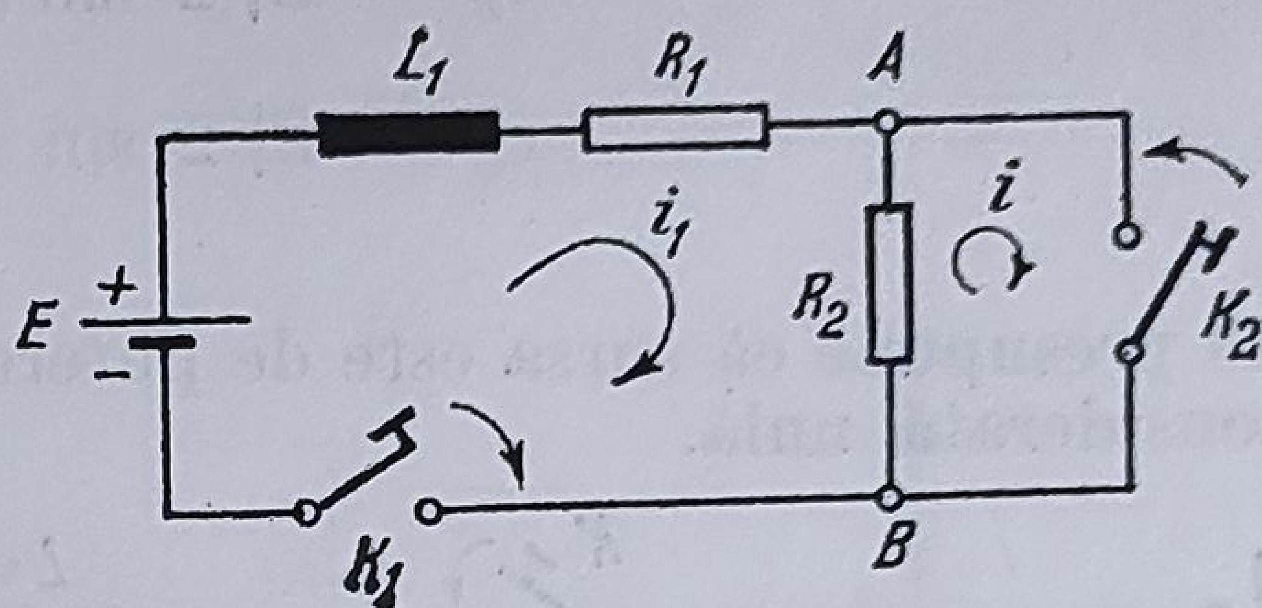


Fig. 10.25. Închiderea unui circuit electric.

În acest caz impedanța operațională $Z(s)$ e nulă.

Avem, ușor de stabilit

$$u_{AB}(t) = E\frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R_1+R_2}{L_1}t}\right).$$

imaginea acestei tensiuni la timpul $t = t_1$ este

$$\mathcal{L}\,U_{AB} = \int_{t_1}^{\infty}\varepsilon^{-st}E\frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1}t}\right)\mathrm{d}t = E\frac{R_2}{R_1 + R_2}\left[\frac{1}{s} - \frac{\varepsilon^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1}t_1}}{s + \frac{R_1 + R_2}{L_1}}\right]\varepsilon^{-st_1};$$

impedanța operațională a circuitului pasivizat, văzută prin bornele A și B, este

$$\frac{1}{Z_{AB}(s)} = \frac{1}{R_1 + L_1 s} + \frac{1}{R_2} = \frac{s + \frac{R_1 + R_2}{L_1}}{\frac{R_1 R_2}{L_1} + R_1 s}.$$

Aplicînd relația (10.82), imaginea curentului căutat este

$$\mathcal{L}i = \frac{E}{R_1 + R_2}\cdot\frac{\varepsilon^{-st_1}}{\frac{R_1}{L_1} + s}\cdot\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1}t_1}\right) + \frac{E\,\varepsilon^{-st_1}}{R_1 + L_1 s}\cdot\frac{1}{s},$$

a cărui original se determină imediat aplicînd teorema dezvoltării a lui HEAVISIDE și ținînd seama de teorema 9 a translației variabilei t. Se găsește

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1}t_1}\right)\varepsilon^{-\frac{R_1}{L_2}(t - t_1)}\,\Upsilon\,(t - t_1) + \frac{E}{R_1}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R_1}{L}(t - t_1)}\right),$$

unde $\Upsilon(t - t_1)$ este funcția unitate. Este ușor de văzut că la timpul $t = \infty$, în regim permanent, curentul i este curentul din circuit și este egal cu $\frac{E}{R_1}$.

10.4.6.2. Aplicarea teoremei lui THÉVENIN la studiul fenomenelor tranzitorii în sisteme trifazate*. Pentru a arăta modul de utilizare a teoremei lui THÉVENIN la studiul fenomenelor tranzitorii în circuitele trifazate, să considerăm circuitul trifazat din figura 10.26. În acest circuit

$$e_A = E\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \varphi),$$
$$e_B = E\sqrt{2}\,\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi\right),$$
$$e_C = E\sqrt{2}\,\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} + \varphi\right).$$

Se presupune că sursa este de putere infinită și deci impedanța ei internă este considerată nulă.

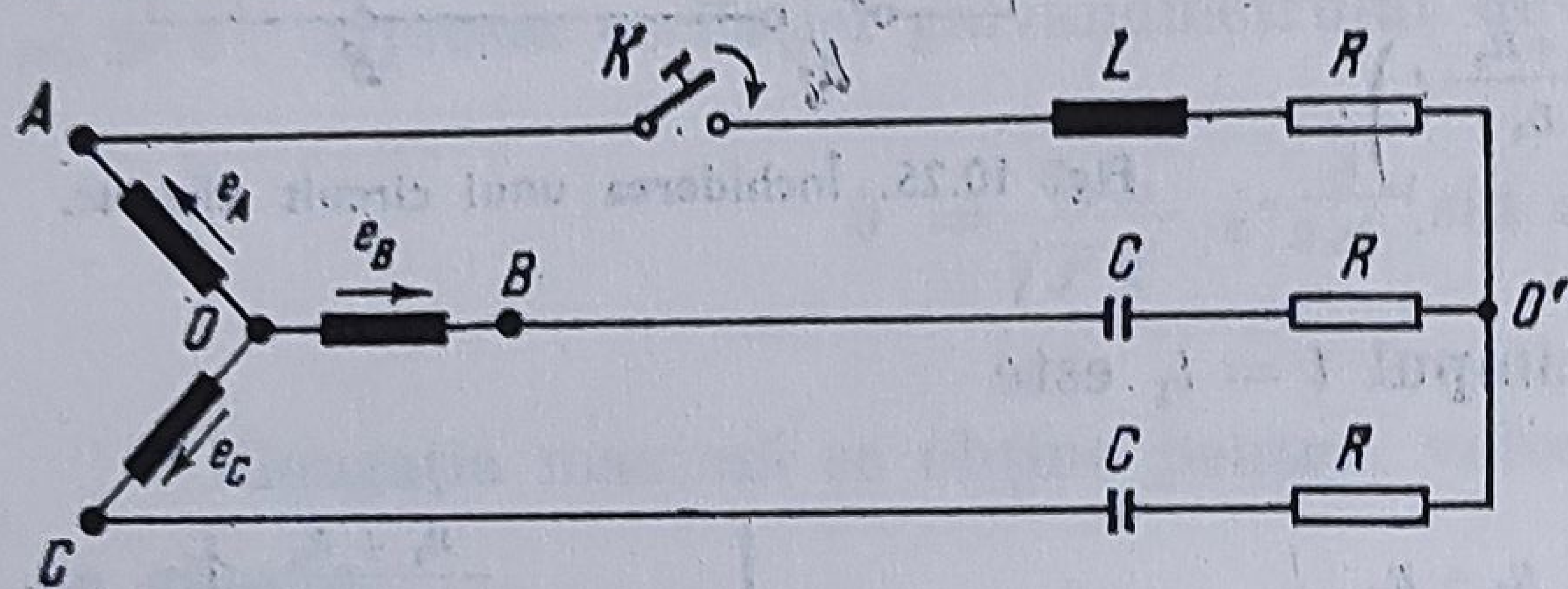


Fig. 10.26. Sistem trifazat.

Se cere să se determine curentul din faza A la închiderea întrerupătorului K.

Conform teoremei lui THÉVENIN curentul din faza A este dat de relația

$$i(s) = \frac{V_{AO'}(s)}{Z_A(s) + Z_i(s)}$$

în care

$$V_{AO'}(s) = \mathcal{L}\, V_{AO'}(t) = \mathcal{L}\, \frac{3}{2}\, E\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \varphi),$$

căci

$$V_{AO'}(t) = \frac{3}{2}\, E\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \varphi).$$

Într-adevăr, sarcinile pe fazele B și C fiind egale, cînd faza A este deschisă, tensiunea de linie $\underline{V}_{BC}$ se aplică impedanțelor $\underline{Z}_B$ și $\underline{Z}_C$ legate în serie; deci**, pe fiecare fază se aplică 1/2 din tensiunea de linie și deci (fig. 10.27)

$$\underline{V}_{AO'} = \underline{V}_A + \frac{1}{2}\underline{V}_A = \frac{3}{2}\underline{V}_A.$$

Imaginea tensiunii $V_{AO'}(t)$ este

$$V_{AO'}(s) = \frac{3}{2}\, E\sqrt{2}\, \frac{1}{s - j\omega} = \frac{3}{2}\, E\sqrt{2}\,\varepsilon^{\varphi}\, \frac{1}{s - j\omega},$$

luînd numai partea pozitivă și rezultatul fiind dat de $i = 2\,\mathcal{R}e(i)$.

* Vezi [41] pag. 466.
** Vezi 8.2.2.3.

Impedanța fazei A este

$$Z_A(s) = R + Ls,$$

iar impedanța sistemului văzută prin bornele A și O', sistemul fiind pasivizat, este egală cu cele două impedanțe de pe fazele B și C legate în paralel

$$\frac{1}{Z_i(s)} = \frac{2}{R} + 2Cs \qquad \therefore Z(s) = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{Cs}\right);$$

în consecință,

$$i(s) = \frac{3\sqrt{2}\,\underline{E}\,Cs}{(s - j\omega)(2s^2LC + 3RCs + 1)}.$$

Originalul curentului se determină apoi cu ajutorul teoremei dezvoltării sau cu ajutorul tabelelor și se ia

$$i(t) = 2\,\mathcal{R}e\,\underline{i}(t).$$

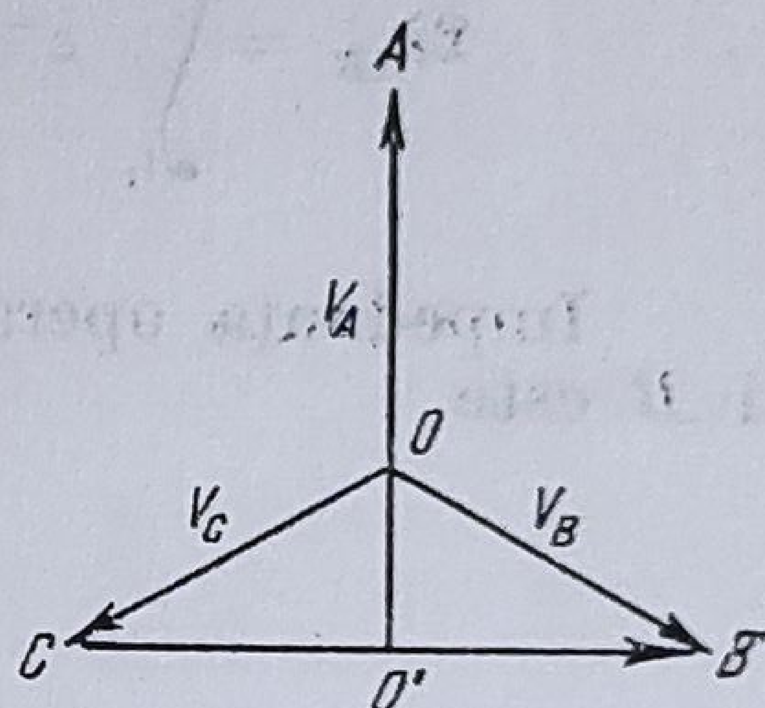


Fig. 10.27. Diagrama tensiunilor.

10.4.6.3. **Deschiderea unui circuit electric.** Se considerăm o rețea electrică liniară, activă, R avînd două borne A și B legate între ele printr-o impedanță $\underline{Z}$, străbătută de curentul $\underline{I}_{AB}$. Tensiunea la bornele A și B ale acestei impedanțe este dată de teorema NORTON*

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{AB}}{\underline{Y} + \underline{Y}_{AB}},$$

unde $\underline{Y}_{AB}$ este admitanța rețelei R pasivizată și văzută prin bornele A și B, iar $\underline{Z}\underline{Y} = 1$.

Deschiderea circuitului echivalează cu introducerea unei impedanțe infinite (sau a unei admitanțe nule) între bornele A și B și relația teoremei lui NORTON se scrie

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{AB}}{\underline{Y}_{AB}} = \underline{Z}_{AB}\,\underline{I}_{AB};$$

aplicînd transformata LAPLACE relației echivalente în mărimi instantanee, se obține

$$\mathfrak{L}U_{AB} = Z_{AB}(s)\mathfrak{L}i_{AB}, \qquad (10.83)$$

cu ajutorul căreia se determină tensiunea la bornele A și B ale întrerupătorului.

Ca exemplu, să considerăm același circuit, la care la timpul $t = 0_+$, se închide întrerupătorul K_1, întrerupătorul K_2 fiind închis; la timpul $t = t_1$ se deschide întrerupătorul K_2 (fig. 10.25).

* Vezi 6.2.3.5.

La timpul $t = 0_+$ curentul care se stabilește în circuit se determină ușor și este

$$i = \frac{E}{R_1}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R_1}{L_1}t}\right) = i_{AB}.$$

Imaginea acestui curent, corespunzătoare timpului $t = t_1$ este

$$\mathfrak{L}i_{AB} = \int_{t_1}^{\infty} \varepsilon^{-st} \frac{E}{R_1}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R_1}{L_1}t}\right) dt = \frac{E}{R_1}\left(\frac{1}{s} - \frac{L_1 \varepsilon^{-\frac{R_1}{L_1}t_1}}{R_1 + L_1 s}\right) \varepsilon^{-st_1}.$$

Impedanța operațională a circuitului pasivizat, văzută prin bornele A și B este

$$Z_{AB}(s) = \frac{R_1(R_1 + L_1 s)}{R_1 + R_2 + L_1 s}.$$

Aplicînd relația (10.83), imaginea tensiunii U_{AB} la bornele întrerupătorului este

$$\mathfrak{L}u_{AB} = E\frac{R_2}{R_1}\left[\frac{R_1 + L_1 s}{s(R_1 + R_2 + L_1 s)} - \frac{L_1 \varepsilon^{-\frac{R_1}{L_1}t_1}}{R_1 + R_2 + L_1 s}\right]\varepsilon^{-st_1},$$

a cărei original se determină cu ajutorul teoremei dezvoltării lui HEAVISIDE și a teoremei 9. Se găsește

$$u_{AB} = E\left[\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \varepsilon^{-\frac{R_1}{L_1}t_1}\right)\varepsilon^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1}(t - t_1)} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right].$$

În regim permanent, pentru $t = \infty$, această tensiune este

$$U_{AB} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E,$$

cum se poate determina și direct.

10.5. UTILIZAREA INTEGRALEI FOURIER LA STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU ÎN CIRCUITELE ELECTRICE

10.5.1. PERECHILE DE FUNCȚII

Să considerăm integrala FOURIER sub forma sa complexă, dată de relația

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{j\omega t} G(j\omega) d\omega$$

în care

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-j\omega\tau} f(\tau)\, d\tau$$

este spectrul funcţiei $f(t)$.

Relaţiile de mai sus pot fi deduse şi direct, pornind de la expresia seriei FOURIER cu termeni complecşi. Într-adevăr, repetînd raţionamentul făcut în paragraful 9.2.7.2. vom avea

$$f(t) = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=\infty}^{\infty} \underline{C}_k \varepsilon^{jk\omega_1 t},$$

în care $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$.

Punînd

$$k\omega_1 = \omega \begin{cases} k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \\ \omega = \pm\omega_1, \pm 2\omega_1, \pm 3\omega_1, \ldots \end{cases}$$

expresia (9.39) coeficientului termenului general poate fi scrisă

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\, \varepsilon^{-j\omega\tau}\, d\tau = \frac{1}{T}\, C(j\omega) = \frac{\omega_1}{2\pi}\, C(j\omega) \quad (\omega = \pm\,\omega_1, \pm 2\omega_1 \ldots).$$

Cu acestea, expresia (9.53) devine

$$f(t) = \lim_{\omega_1\to 0} \sum \frac{\omega_1}{2\pi}\, C(j\omega)\, \varepsilon^{j\omega t} \quad (\omega = \pm\omega_1, \pm 2\omega_1, \ldots).$$

Punînd

$$G(j\omega) = \lim_{\omega_1\to 0} \frac{1}{2\pi}\, C(j\omega) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\pi}\, C(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\varepsilon^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

relaţia (9.54) poate fi scrisă

$$f(t) = \lim_{\omega_1\to 0} \sum \omega_1\, G(j\omega)\, \varepsilon^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)\, \varepsilon^{j\omega t} d\omega,$$

adică tocmai expresia (9.52), expresia lui $G(j\omega)$ de mai sus fiind identică cu expresia (9.51).

Făcînd în relaţiile (9.52) şi (9.51) $t = -t$ (respectiv $\tau = -\tau$), se obţine

$$f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-j\omega t}\, G(j\omega) d\omega$$

$$-G(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{j\omega\tau} f(-\tau)\, d\tau.$$

Cele două funcţii $f(t)$ şi $G(j\omega)$ se corespund una cu cealaltă, în sensul că una din ele poate fi determinată cînd se cunoaşte cealaltă.

Funcţiile $f(t)$ şi $G(j\omega)$ formează *perechi de funcţii** şi pentru ele se pot întocmi tabele de corespondenţă.

10.5.2. TRANSFORMAREA FOURIER

Înmulţind relaţia (9.51) cu 2π şi punînd

$$2\pi\ G(j\omega) = \Phi(\omega)$$

şi revenind la variabila t, se obţine

$$\Phi(\omega) = \int_0^\infty \varepsilon_-^{j\omega t}\ f(t)\ dt, \tag{10.84}$$

în care am limitat domeniul de integrare de la 0 la ∞.

Funcţia $\Phi(\omega)$ se numeşte *transformata* FOURIER *a funcţiei* $f(t)$. Ea se mai notează

$$\mathcal{F}\ f(t) = \Phi(\omega).$$

Transformarea inversă este definită de relaţia (9.52) sub forma

$$\mathcal{F}^{-1}\ \Phi(\omega) = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{j\omega t}\ \Phi(\omega)\ d\omega. \tag{10.85}$$

Ca şi pentru transformata LAPLACE şi pentru transformata FOURIER s-au construit tabele de funcţii echivalente.

De altfel, metoda integralei FOURIER şi aceea a transformatei FOURIER sînt atît de strîns legate între ele, încît ele pot fi considerate ca fiind una şi aceeaşi metodă**. Într-adevăr, transformata FOURIER definită prin relaţia (10.84), şi deci funcţia $\Phi(\omega)$ poate fi considerată ca limita către care tinde imaginea $\varphi(s)$ a funcţiei $f(t)$, obţinută prin transformarea LAPLACE, definită de relaţia (10.30) cînd termenul real al lui s tinde către zero

$$\Phi(\omega) = \lim_{\sigma\to 0}\varphi\ (s),$$

bineînţeles, cu condiţia ca această limită să existe.

În consecinţă, dacă în expresia lui $\varphi(s)$ se înlocuieşte s cu $j\omega$ se obţine funcţia $\Phi(\omega)$, dacă $\Phi(\omega)$ există.

Astfel, fiind dată funcţia

$$f(t) = \varepsilon^{-\alpha t},$$

imaginea ei fiind

$$\varphi(s) = \frac{1}{s+\alpha},$$

* Vezi [244] pag. 280.
** Vezi [155] pag. 8.

se obţine

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{j\omega + \alpha}.$$

10.5.3. APLICAREA INTEGRALEI FOURIER LA STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE

10.5.3.1. **Generalităţi.** În regimul permanent se defineşte impedanţa complexă a unui circuit, raportul complex care există între forţa electromotoare complexă şi curentul complex

$$Z(j\omega) = \underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{I}}.$$

Astfel, pentru un circuit serie cu R, L şi C, expresia acestei impedanţe este

$$\underline{Z} = Z\ (j\omega) = R + j\ L\omega + \frac{1}{jC\omega}.$$

Din relaţia de mai sus, dacă se cunoaşte forţa electromotoare periodică armonică, la care se poate ataşa vectorul complex $\underline{E}$, cunoscînd impedanţa $\underline{Z}$, se deduce imediat curentul respectiv prin vectorul complex asociat.

Fie o forţă electromotoare $f(t)$, neperiodică, pe care o presupunem nulă în afara intervalului $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$.

Dezvoltînd funcţia $f(t)$ în serie FOURIER complexă în intervalul $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$, dacă $Z(jk\omega_1)$ este impedanţa complexă a circuitului pentru pulsaţia $k\omega_1$, atunci curentul permanent din circuit va fi

$$i'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\underline{C}_k\ \varepsilon^{jk\omega_1 t}}{Z(jk\omega_1)}$$

sau, ţinînd seama de cele stabilite

$$i(t) = \lim_{\omega_1 \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\underline{C}_k\ \varepsilon^{jk\omega_1 t}}{Z(jk\omega_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega)}{Z(j\omega)}\ \varepsilon^{j\omega t}\, d\omega. \tag{10.86}$$

Relaţia (10.86) reprezintă răspunsul pe care îl dă reţeaua cînd i se aplică un semnal neperiodic oarecare $f(t)$.

Metoda constă deci în a determina spectrul $G(j\omega)$ al tensiunii date, cu ajutorul relaţiei (9.51); împărţind expresia acestui spectru cu impedanţa complexă a circuitului respectiv şi calculînd integrala din relaţia (10.86) se obţine expresia curentului căutat.

În afară de aceasta, aplicarea integralei FOURIER dă posibilitatea găsirii modului de conectare a elementelor pasive constituitive ale reţelei atunci cînd se cunoaşte tensiunea aplicată reţelei şi răspunsul corespunzător al reţelei (efectuarea de sinteză de reţele).

31 – c. 229

10.5.3.2. **Exemple de aplicaţie.** *Exemplul 1.* Fie de determinat curentul care ia naştere într-un circuit serie format dintr-un rezistor de rezistenţă R şi o bobină de inductanţă L, căruia i se aplică o tensiune continuă $e(t) = E$ la timpul $t = 0$.

Spectrul acestei tensiuni este

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E\varepsilon^{-j\omega\tau}\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} E\varepsilon^{-j\omega\tau}\, d\tau = \frac{E}{2\pi}\cdot\frac{1}{j\omega}\cdot$$

Impedanţa complexă a circuitului fiind

$$Z(j\omega) = R + j\omega L,$$

curentul căutat este dat de relaţia (10.86)

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega)}{Z(j\omega)}\varepsilon^{j\omega t}\, d\omega = \frac{E}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j\omega t}}{j\omega(R + j\omega L)}\, d\omega = \frac{E}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j\omega t}}{j\omega(R + j\omega L)}\, d(j\omega).$$

Calculul integralei se face prin metoda reziduurilor. Se găseşte

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{L}{R}t}\right),$$

expresie cunoscută.

Exemplul 2. Fie acum acelaşi circuit, dar la care se aplică forţa electromotoare sinusoidală

$$e(t) = E\sqrt{2}\sin \omega t,$$

şi se caută curentul care apare în circuit.

Aplicînd identitatea lui EULER, rezultă

$$e(t) = \frac{E\sqrt{2}}{2j}\left(\varepsilon^{j\omega t} - \varepsilon^{-j\omega t}\right);$$

cum cele două mărimi din paranteză sînt mărimi complex conjugate şi soluţia finală este reală, este suficient a calcula numai cu una din aceste mărimi şi a lua dublul părţii reale a rezultatului.

Vom avea deci

$$G(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{E\sqrt{2}}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-j(\Omega-\omega)\tau}\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\,\frac{E\sqrt{2}}{2j}\int_{0}^{\infty} \varepsilon^{-j(\Omega-\omega)\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{E\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\omega - \Omega}\cdot$$

Avem apoi,

$$i(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{E\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j\Omega t}}{(\omega - \Omega)(R + jL\Omega)}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{E\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j\Omega t}\, d(j\Omega)}{[j\omega - (j\Omega)]\,[R + L(j\Omega)]}\cdot$$

Integrala se calculează prin metoda reziduurilor.

Punînd $R + L(j\omega) = Z \underline{|\varphi}$, unde $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ şi $\text{tg}\ \varphi = \frac{L\omega}{R}$,

curentul căutat va fi

$$i = 2\,\mathcal{R}e\ \mathrm{i}(t) = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\left[\sin\,(\omega t - \varphi) + \sin\,\varphi\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right],$$

relaţie de asemenea cunoscută.

Exemplul 3. Fiind dat un circuit, cărui aplicîndu-i-se o forţă electromotoare constantă E la timpul $t = 0$, răspunde cu un curent de forma $i = \frac{R}{E}(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t})$, se cere să se determine modul de conectare a elementelor acestui circuit.

Spectrul curentului este

$$\mathrm{i}(j\omega) = \frac{G\,(j\omega)}{Z\,(j\omega)} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{E}{R}\int_0^\infty \left(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}\tau}\right)\varepsilon^{-j\omega\tau}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{E}{R}\,\frac{\frac{R}{L}}{j\omega\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)} = \frac{\frac{1}{2\pi}\,\frac{E}{j\omega}}{R + j\,L\omega}$$

şi deci, circuitul este format dintr-o bobină de inductanţă L şi un rezistor de rezistenţă R, legate în serie.

TABLOU DE CORESPONDENȚĂ PENTRU FUNCȚII IMAGINE ȘI ORIGINAL *
(TRANSFORMAREA LUI LAPLACE)

Nr.	$\varphi(s)$	$f(t)$ $(0 \leqslant t)$
0.00	$\varphi(s)$	$f(t)$
0.01	$a\varphi(s)$	$af(t)$
	a este o constantă sau o variabilă independentă de t și s	
0.02	$\varphi_1(s) \pm \varphi_2(s)$	$f_1(t) \pm f_2(t)$
0.03	$s\varphi(s) - f(0)$	$\frac{df(t)}{dt} = f'(t)$
0.04	$s\left[\varphi(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{s^k + 1}\right]$	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$
0.05	$s\varphi(s)$	$f'(t)$ $[f(0) = 0]$
0.06	$\frac{\varphi(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$	$\int f(t)dt = f^{(-1)}(t)$
0.07	$\frac{\varphi(s)}{s}$	$\int_0^t f(t)\,dt$
0.08	$\frac{\varphi(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s^{n-k+1}} f^{(-k)}(0)$	$f^{(-n)}(t)$
0.09	$\lambda\,\varphi(\lambda s)$	$f\left(\frac{t}{\lambda}\right)$
	λ este o constantă sau o variabilă independentă de t și s	
0.10	$\varepsilon^{-as}\,\varphi(s)$	$f(t-a)$ dacă pentru $0 < t < a$ $f(t-a) = 0$, a număr real pozitiv

* În acest tablou ε reprezintă baza logaritmilor neperieni, iar α, β, γ și λ sînt numere reale.

Nr.	$\varphi(s)$	$f(t) \qquad (0 \leqslant t)$
0.11	$\varepsilon^{as}\,\varphi(s)$	$f(t+a)$ dacă pentru $-a<t<0$ $f(t+a)=0$ a număr real pozitiv
0.12	$\varphi(s+a)$	$\varepsilon^{-at}\,f(t)$ a număr complex cu partea reală pozitivă
0.13	$\varphi(s-a)$	$\varepsilon^{at}\,f(t)$ a număr complex cu partea reală pozitivă
0.14	$\lim\limits_{a \to a_0} \varphi(s,\,a)$	$\lim\limits_{a \to a_0} f(t,\,a)$
	a o a doua variabilă, independentă de t şi s	
0.15	$\frac{\partial}{\partial a}\,\varphi(s,\,a)$	$\frac{\partial}{\partial a}\,f(t,\,a)$
	a o a doua variabilă independentă de t şi s	
0.16	$-\frac{d}{ds}\,\varphi(s)$	$tf(t)$
0.17	$\int_s^\infty \varphi(s)\,ds$	$\frac{1}{t}\,f(t)$
0.18	$\int_{a_0}^{a} \varphi(s,\,a)\,da$	$\int_{a_0}^{a} f(t,\,a)\,da$
	a o a doua variabilă independentă de t şi s	
0.19	$\mathcal{R}\,[\varphi(s)]$	$\mathcal{R}\,[f(t)]$ } $f(t)$ o funcţie complexă
0.20	$\mathcal{I}\,[\varphi(s)]$	$\mathcal{I}\,[f(t)]$ } $f(t)$ o funcţie complexă
0.21	$\frac{A(s)}{B(s)}$ Fracţie algebrică raţională, numitorul cu rădăcini simple.	$\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{A(s_i)}{B'(s_i)}\,\varepsilon^{s_i t}$

Nr.	φ(s)	f(t) (0 ⩽ t)
0.22	$\frac{A(s)}{B(s)}$ Fracţie algebrică raţională, numitorul cu rădăcini multiple; cazul general	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{q_i}\frac{K_{ik}}{(q_i-k)}\, t^{\,q_i-k}\,\varepsilon^{s_i}$ $K_{ik}=\frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\cdot\frac{(s-s_i)^{q_i}A(s)}{B(s)}\right]_{s=s_i}$ $B(s)=(s-s_1)^{q_1}(s-s_2)^{q_2}\ldots(s-s_i)^{q_i}\ldots(s-s_n)^{q_n}$ $q_i+q_2+\ldots+q_i+\ldots+q_n=m$
1.01	1	$\Upsilon'(t)$ funcţia impuls la $t=0$
1.02	s	$\Upsilon''(t)$ funcţia impuls de ordinul 2 la $t=0$
1.03	$\frac{1}{s}$	$\Upsilon(t)$ funcţia unitate
1.04	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\varepsilon^{-\alpha t}$
1.05	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{\varepsilon^{-\alpha t}-\varepsilon^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$
1.06	$\frac{s+a_0}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{(a_0-\alpha)\,\varepsilon^{-\alpha t}-(a_0-\beta)\,\varepsilon^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$
1.07	$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\beta\varepsilon^{-\alpha t}-\alpha\varepsilon^{-\beta t}}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}$
1.08	$\frac{s+a_0}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{a_0}{\alpha\beta}+\frac{a_0-\alpha}{\alpha(\alpha-\beta)}\varepsilon^{-\alpha t}+\frac{a_0-\beta}{\beta(\beta-\alpha)}\varepsilon^{-\beta t}$
1.09	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{a_0}{\alpha\beta}+\frac{\alpha^2-a_1\alpha+a_0}{\alpha(\alpha-\beta)}\varepsilon^{-\alpha t}-\frac{\beta^2-a_1\beta+a_0}{\beta(\alpha-\beta)}\varepsilon^{-\beta t}$
1.10	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}+\frac{\varepsilon^{-\beta t}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}+\frac{\varepsilon^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
1.11	$\frac{s-a_0}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{a_0-\alpha}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\varepsilon^{-\alpha t}+\frac{(\alpha_0-\beta)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}\varepsilon^{-\beta t}+$ $+\frac{a_0-\gamma}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\varepsilon^{-\gamma t}$

Nr.	$\varphi(s)$	$f(t)$ $(0 \leqslant t)$
1.12	$\frac{s^2 + a_1 s + a_0}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{\alpha^2 - a_1\alpha + a_0}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\varepsilon^{-\alpha t} + \frac{\beta^2 - a_1\beta + a_0}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}\varepsilon^{-\beta t} + \frac{\gamma^2 - a_1\gamma + a_0}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\varepsilon^{-\gamma t}$
1.13	$\frac{1}{s^2+\beta^2}$	$\frac{1}{\beta}\sin\beta t$
1.14	$\frac{1}{s^2-\beta^2}$	$\frac{1}{\beta}\,\mathrm{sh}\,\beta t$
1.15	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$\cos\beta t$
1.16	$\frac{s}{s^2-\beta^2}$	$\mathrm{ch}\,\beta t$
1.17	$\frac{s+a_0}{s^2+\beta^2}$	$\frac{1}{\beta}\sqrt{a_0 + \beta^2}\sin(\beta t + \psi_1)$ unde $\mathrm{tg}\,\psi_1 = \frac{\beta}{a_0}$
1.18	$\frac{1}{s(s^2+\beta^2)}$	$\frac{1}{\beta^2}(1-\cos\beta t)$
1.19	$\frac{s+a_0}{s(s^2+\beta^2)}$	$\frac{a_0}{\beta^2} - \frac{\sqrt{a_0^2+\beta^2}}{\beta^2}\cos(\beta t + \psi_1)$
1.20	$\frac{s^2 + a_1 s + a_0}{s(s^2+\beta^2)}$	$\frac{a_0}{\beta^2} - \frac{\sqrt{(a_0-\beta^2)^2 + a_1^2\beta^2}}{\beta^2}\cos(\beta t + \psi_2)$ unde $\mathrm{tg}\psi_2 = \frac{a_1\beta}{a_0-\beta^2}$
1.21	$\frac{s+a_0}{(s+\alpha)(s^2+\beta^2)}$	$\frac{a_0-\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\varepsilon^{-\alpha t} + \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{a_0^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}\sin(\beta t + \psi_4)$ unde $\mathrm{tg}\,\psi_3 = \frac{\beta}{\alpha}$ şi $\psi_4 = \psi_1 - \psi_3$.
1.22	$\frac{s^2 + a_1 s + a_0}{(s+\alpha)(s^2+\beta^2)}$	$\frac{\alpha^2 - a_0\alpha + a_0}{\alpha^2+\beta^2}\varepsilon^{-\alpha t} + \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{(a_0-\beta^2)+a_1^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}\sin(\beta t + \psi_5)$ unde $\psi_5 = \psi_2 - \psi_3)$

Nr.	$\varphi(s)$	$f(t)$ $(0 \leqslant t)$
1.23	$\dfrac{s}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)}$	$\dfrac{\cos \alpha t - \cos \beta t}{\alpha^2 - \beta^2}$
1.24	$\dfrac{s}{[s^2+(\alpha+\beta)^2][s^2+(\alpha-\beta)^2]}$	$\dfrac{1}{2\alpha\beta} \sin \alpha t \sin \beta t$
1.25	$\dfrac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta} \varepsilon^{-\alpha t} \sin \beta t$
1.26	$\dfrac{s+a_0}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta}\sqrt{(a_0-\alpha)^2+\beta^2} \cdot \varepsilon^{-\alpha t} \sin(\beta t + \psi_6)$ unde $\operatorname{tg} \psi_6 = \dfrac{\beta}{a_0 - \alpha}$
1.27	$\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\varepsilon^{-\alpha} \cos \beta t$
1.28	$\dfrac{1}{(s+\alpha)^2-\beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta} \varepsilon^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t$
1.29	$\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2-\beta}$	$\varepsilon^{-\alpha t} \operatorname{ch} \beta t$
1.30	$\dfrac{1}{s^2}$	t
1.31	$\dfrac{1}{s^n}$	$\dfrac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$ (n întreg și pozitiv)
1.32	$\dfrac{1}{(s+\alpha)s^2}$	$\dfrac{1}{\alpha^2}(\varepsilon^{-\alpha t} + \alpha t - 1)$
1.33	$\dfrac{s+a_0}{(s+\alpha)s^2}$	$\dfrac{1}{\alpha^2}[(a_0-\alpha)\varepsilon^{-\alpha t} + a_0 \alpha t - (a_0 - \alpha)]$
1.34	$\dfrac{s^2+a_1 s + a_0}{(s+\alpha)s^2}$	$\dfrac{1}{\alpha^2}[(\alpha^2 - a_1\alpha + a_0)\varepsilon^{-\alpha t} + a_0 \alpha t + a_1\alpha - a_0]$
1.35	$\dfrac{1}{(s+\alpha)^2}$	$t\varepsilon^{-\alpha t}$
1.36	$\dfrac{s+a_0}{(s+\alpha)^2}$	$[(a_0-\alpha)t+1]\varepsilon^{-\alpha t}$
1.37	$\dfrac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\dfrac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \varepsilon^{-\alpha t}$ (n întreg și pozitiv)
1.38	$\dfrac{s^n}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$\varepsilon^{-\alpha t} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n!(-\alpha)^k}{(n-k)!(k!)^2} t^k$ (n întreg și pozitiv)
1.39	$\dfrac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\dfrac{1}{\alpha^2}[1-(1+\alpha t)\varepsilon^{-\alpha t}]$

Nr.	$\varphi(s)$	$f(t) \qquad (0 \leqslant t)$
1,40	$\frac{s + a_0}{s(s + \alpha)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^2} + \left(\frac{\alpha - a_0}{\alpha} t - \frac{a_0}{\alpha^2}\right) \varepsilon^{-\alpha t}$
1,41	$\frac{s^2 + a_1 s + a_0}{s(s + \alpha)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^2} + \left(\frac{a_1\alpha - a_0 - \alpha^2}{\alpha} t + \frac{\alpha^2 - a_0}{\alpha^2}\right) \varepsilon^{-\alpha t}$
1,42	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)^2}$	$\frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \varepsilon^{-\alpha t} + \frac{(\alpha - \beta) t - 1}{(\alpha - \beta)^2} \varepsilon^{-\beta t}$
1,43	$\frac{s + a_0}{(s + \alpha)(s + \beta)^2}$	$\frac{a_0 - \alpha}{(\alpha_0 - \beta)^2} \varepsilon^{-\alpha t} + \left[\frac{a_0 - \beta}{\alpha - \beta} t + \frac{\alpha - a_0}{(\alpha - \beta)^2}\right] \varepsilon^{-\beta t}$
1,44	$\frac{1}{(s + \alpha)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 \varepsilon^{-\alpha t}$
1,45	$\frac{s}{(s + \alpha)^3}$	$t\left(1 - \frac{1}{2} \alpha t\right) \varepsilon^{-\alpha t}$
1,46	$\frac{1}{(s^2 + \alpha^2)s^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} t - \frac{1}{\alpha^3} \sin \alpha t$
1,47	$\frac{1}{(s^2 - \alpha^2)s^2}$	$\frac{1}{\alpha^3} \operatorname{sh} \alpha t - \frac{1}{\alpha^2} t$
1,48	$\frac{s^2 + 2\alpha^2}{s^4 + 4\alpha^4}$	$\frac{1}{\alpha} \sin \alpha t \operatorname{ch} \alpha t$
1,49	$\frac{s^2 - 2\alpha^2}{s^4 + 4\alpha^4}$	$\frac{1}{\alpha} \cos \alpha t \operatorname{sh} \alpha t$
1,50	$\frac{1}{s^4 - \alpha^4}$	$\frac{1}{2\alpha^3} (\operatorname{sh} \alpha t - \sin \alpha t)$
1,51	$\frac{s}{s^4 - \alpha^4}$	$\frac{1}{2\alpha^2} (\operatorname{ch} \alpha t - \cos \alpha t)$
1,52	$\frac{s^2}{s^4 - \alpha^4}$	$\frac{1}{2\alpha} (\operatorname{sh} \alpha t + \sin \alpha t)$
1,53	$\frac{s^3}{s^4 - \alpha^4}$	$\frac{1}{2} (\operatorname{ch} \alpha t + \cos \alpha t)$
1,54	$\frac{1}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha^3} (\sin \alpha t - \alpha t \cos \alpha t)$
1,55	$\frac{1}{(s^2 - \alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha^3} (\alpha t \operatorname{ch} \alpha t - \operatorname{sh} \alpha t)$
1,56	$\frac{s}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha} t \sin \alpha t$
1,57	$\frac{s^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha} (\sin \alpha t + \alpha t \cos \alpha t)$

Nr.	$\varphi(s)$	$f(t)$ $(0 \leqslant t)$
1.58	$\frac{s^2 - \alpha^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	$t \cos \alpha t$
1.59	$\frac{1}{[(s + \alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$\frac{1}{2\beta^3} \varepsilon^{-\alpha t} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)$
1.60	$\frac{s + \alpha}{[(s + \alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$\frac{1}{2\beta} t \varepsilon^{-\alpha t} \sin \beta t$
1.61	$\frac{(s + \alpha)^2 - \beta^2}{[(s + \alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$t \varepsilon^{-\alpha t} \cos \beta t$
1.62	$\frac{1}{s(s^2 + \alpha^2)^2}$	$\frac{1}{\alpha^4}(1 - \cos \alpha t) - \frac{1}{2\alpha^3} t \sin \alpha t$
1.63	$\frac{1}{s^3(s^2 + \alpha^2)}$	$\frac{1}{\alpha^4} (\cos \alpha t - 1) + \frac{1}{2\alpha^2} t^2$
1.64	$\frac{1}{s^3(s^2 - \alpha^2)}$	$\frac{1}{\alpha^4} (\text{ch}\, \alpha t - 1) - \frac{1}{2\alpha^2} t^2$
2.01	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
2.02	$\frac{1}{s \sqrt{s}}$	$2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}$
2.03	$\frac{\sqrt{s}}{s^{n+1}}$	$\frac{2^n t^n}{1.3.5. \ldots (2n - 1)_{)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
2.04	$\frac{1}{\sqrt{s + \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \varepsilon^{-\alpha t}$
2.05	$\frac{s}{(s + \alpha)\sqrt{s + \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} (1 - 2 \alpha t) \varepsilon^{-\alpha t}$
2.06	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha) \sqrt{s + \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} [1 + 2(a - \alpha t)] \varepsilon^{-\alpha t}$
2.07	$\sqrt{\frac{\sqrt{s^2 + \alpha^2} - s}{s^2 + \alpha^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin \alpha t$
2.08	$\sqrt{\frac{\sqrt{s^2 + \alpha^2} + s}{s^2 + \alpha^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos \alpha t$
2.09	$\sqrt{\frac{s - \sqrt{s^2 - \alpha^2}}{s^2 - \alpha^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \text{sh}\, \alpha t$
2.10	$\sqrt{\frac{s + \sqrt{s^2 - \alpha^2}}{s^2 - \alpha^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \text{ch}\, \alpha t$
3.01	$\frac{1}{s} \varepsilon^{-\alpha t}$	$\begin{cases} 0 & t < \alpha \\ t & t > \alpha \end{cases}$

Nr.	$\varphi(s)$	$f(t)$	$(0 \leqslant t)$
3.02	$\frac{1}{s^2}(1-\varepsilon^{-\alpha s})$	t α	$t<\alpha$ $t>\alpha$
3.03	$\frac{1}{s+\alpha}\varepsilon^{-\alpha s}$	0 $\varepsilon^{-a(t-\alpha)}$	$t<\alpha$ $t>\alpha$
3.04	$\frac{1}{s^2+1}(1+\varepsilon^{-\pi s})$	$\sin t$ 0	$t<\pi$ $t>\pi$
3.05	$\frac{s}{s^2+1}(1+\varepsilon^{-\pi s})$	$\cos t$ 0	$t<\pi$ $t>\pi$
3.06	$\frac{1}{\sqrt{s}}\varepsilon^{\frac{\alpha^2}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{ch}\,2\alpha\sqrt{t}$	
3.07	$\frac{1}{\sqrt{s}}\varepsilon^{-\frac{\alpha^2}{4s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\alpha\sqrt{t}$	
3.08	$\frac{1}{s\sqrt{s}}\varepsilon^{\frac{\alpha^2}{s}}$	$\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sh}\,2\alpha\sqrt{t}$	
3.09	$\frac{1}{s\sqrt{s}}\varepsilon^{-\frac{\alpha^2}{4s}}$	$\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}\sin\alpha\sqrt{t}$	
3.10	$\frac{1}{s\sqrt{s}}\left(1+\frac{\alpha^2}{2s}\right)\varepsilon^{\frac{\alpha^2}{4s}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,\mathrm{ch}\,\alpha\sqrt{t}$	
3.11	$\frac{1}{s\sqrt{s}}\left(1-\frac{\alpha^2}{2s}\right)\varepsilon^{-\frac{\alpha^2}{4s}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\cos\alpha\sqrt{t}$	
3.12	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}\left(1-\varepsilon^{\frac{2n\pi s}{\alpha}}\right)$	$\cos\alpha t$ 0	$t<\frac{2n\pi}{\alpha}$ $t>\frac{2n\pi}{\alpha}$
4.01	$\frac{1}{\sqrt{s}}\cos\frac{1}{s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{ch}\sqrt{2t}\cos\sqrt{2t}$	
4.02	$\frac{1}{\sqrt{s}}\sin\frac{1}{s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{sh}\sqrt{2t}\sin\sqrt{2t}$	
4.03	$\frac{1}{\sqrt{s}}\varepsilon^{-\sqrt{\alpha s}}\cos\sqrt{\alpha s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\left(\frac{\alpha}{st}\right)$	
4.04	$\frac{1}{\sqrt{s}}\varepsilon^{-\sqrt{\alpha s}}\sin\sqrt{\alpha s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\left(\frac{\alpha}{2t}\right)$	
4.05	$\frac{1}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}\cos\left(\beta+\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{s}\right)$	$\cos(\alpha t+\beta)$	

Nr.	$\varphi(s)$	$f(t) \qquad (0 \leqslant t)$
4.06	$\frac{1}{\sqrt{s^2+\alpha^2}} \sin\left(\beta + \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{s}\right)$	$\sin(\alpha t + \beta)$
4.07	$\frac{1}{\sqrt{s}} \operatorname{ch}\frac{1}{s}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}(\operatorname{ch} 2\sqrt{t} + \cos 2\sqrt{t})$
4,08	$\frac{1}{s\sqrt{s}} \operatorname{ch}\frac{1}{s}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}(\operatorname{sh} 2\sqrt{t} + \sin 2\sqrt{t})$
5.01	$\ln\frac{s-\alpha}{s}$	$\frac{1}{t}(1 - \varepsilon^{\alpha t})$
5.02	$\ln\frac{s+\alpha}{s-\alpha}$	$\frac{2}{t}\operatorname{sh}\alpha t$
5.03	$\ln\frac{s-\beta}{s-\alpha}$	$\frac{1}{t}(\varepsilon^{\alpha t} - \varepsilon^{\beta t})$
5.04	$\ln\frac{s^2-\alpha^2}{s^2}$	$\frac{2}{t}(1 - \operatorname{ch}\alpha t)$
5.05	$\ln\frac{s^2+\alpha^2}{s^2}$	$\frac{2}{t}(1 - \cos\alpha t)$
5.06	$\ln\frac{s^2+\alpha^2}{s^2+\beta^2}$	$\frac{2}{t}(\sin\alpha t + \sin\beta t)$
5.07	$\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)$	$\frac{4}{t}\sin^2\frac{t}{2}$
5.08	$s\ln\frac{s^2-\alpha^2}{s^2}$	$\frac{2}{t^2}[(\operatorname{ch}\alpha t - 1) + t\alpha\operatorname{sh}\alpha t]$
5.09	$s\ln\frac{s^2+\alpha^2}{s^2}$	$\frac{2}{t^2}[(\cos\alpha t - 1) + t\alpha\sin\alpha t]$
5.10	$\ln\frac{(s+\alpha)^2+\gamma^2}{(s+\beta^2)+\gamma^2}$	$\frac{2}{t}(\varepsilon^{-\beta t} - \varepsilon^{-\alpha t})\cos\gamma t$
5.11	$\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{s}$	$\frac{1}{t}\sin\alpha t$
5.12	$\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{s-\beta}$	$\frac{1}{t}\varepsilon^{\beta t}\sin\alpha t$
5.13	$\operatorname{arctg}\frac{2\alpha s}{s^2-\alpha^2+\beta^2}$	$\frac{2}{t}\sin\alpha t\cos\beta t$
5.14	$\operatorname{arctg}\frac{s^2-\alpha s+\beta}{\alpha\beta}$	$\frac{1}{t}(\varepsilon^{\alpha t} - 1)\sin\beta t$

Capitolul XI

SISTEME ELECTRICE NELINIARE ÎN CURENT ALTERNATIV

11.1. GENERALITĂŢI ŞI DEFINIŢII

11.1.1. GENERALITĂŢI

Consideraţiile făcute asupra funcţionării unei reţele electrice de curent continuu *, sînt integral aplicabile şi pentru reţelele electrice de curent alternativ. Fenomenele care apar în cazul curentului alternativ sînt însă mai complicate şi multiple **. De asemenea, în circuitele de curent alternativ pot fi utilizate nu numai rezistenţe cu caracter neliniar, dar şi inductanţe şi capacităţi care au caracteristici neliniare.

Utilizarea elementelor neliniare nesimetrice (de exemplu supapele electronice, care prezintă o rezistenţă foarte mică pentru un sens al curentului şi o rezistenţă foarte mare pentru sensul opus) permit *redresarea* curentului alternativ, adică transformarea acestuia într-un curent electric a cărei valoare medie să nu fie nulă, practic în curent electric continuu.

Existenţa unui element neliniar într-un circuit electric de curent alternativ, la bornele căruia este aplicată o tensiune electrică alternativă sinusoidală, sau care este străbătută de un curent electric alternativ sinusoidal, are drept consecinţă faptul, că tensiunea la bornele circuitului, respectiv curentul din circuit, este deformat, rămînînd totuşi periodic ***.

În circuitele de curent alternativ, serie sau derivaţie, care cuprind elemente oscilante (condensatoare şi bobine) cu caracteristici neliniare, se pot produce unele fenomene deosebite asemănătoare rezonanţei electrice, numite fenomene de ferorezonanţă ****.

De asemenea, circuitele electrice neliniare în curent alternativ pot prezenta, în anumite condiţii, stări de nestabilitate adică, în cazul unui proces tranzitoriu, oscilaţiile care apar nu se mai amortizează ci dimpotrivă se amplifică *****.

Studiul teoretic al fenomenelor care apar în circuitele electrice de curent alternativ neliniare este deci mult mai complicat decît studiul fenomenelor în circuitele electrice liniare sau chiar în cazul circuitelor electrice neliniare de curent continuu.

Ecuaţiile diferenţiale pentru studiul circuitelor electrice neliniare de curent alternativ se obţin tot cu ajutorul celor două teoreme ale lui KIRCHHOFF; ele sînt ecuaţii diferenţiale neliniare. Pentru rezolvarea acestor ecuaţii nu există o metodă generală.

---

* Vezi 2.5.1.
** Vezi [19].
*** Vezi 9.4.
**** Vezi 11.3.
***** Vezi 11.4.

11.1.2. CLASIFICAREA ELEMENTELOR NELINIARE ALE REŢELELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV

11.1.2.1. Circuite electrice ai căror parametri sînt constanţi. 1. Un circuit electric prezintă o rezistenţă constantă atunci cînd raportul dintre tensiunea la bornele circuitului şi curentul care străbate circuitul este constant şi independent de alte elemente. Această definiţie care se aplică circuitelor de curent continuu (sistemelor staţionare), se aplică şi circuitelor de curent alternativ (sistemele cuasistaţionare). În general, în condiţii normale de încălzire, rezistenţele metalice îndeplinesc aceste condiţii.

Caracteristica *volt-amper* a unei rezistenţe constante este o dreaptă care trece prin origine, de coeficient unghiular * :

$$G = \frac{\Delta i}{\Delta u},$$

G fiind conductanţa circuitului respectiv.

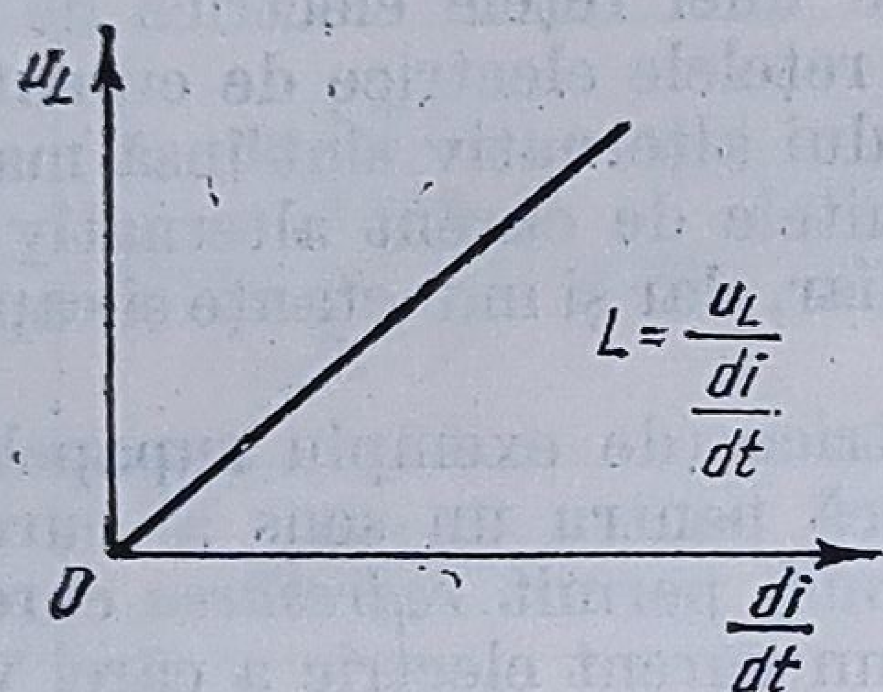


Fig. 11.1. Caracteristica *volt-amper* a unei inductanţe constante.

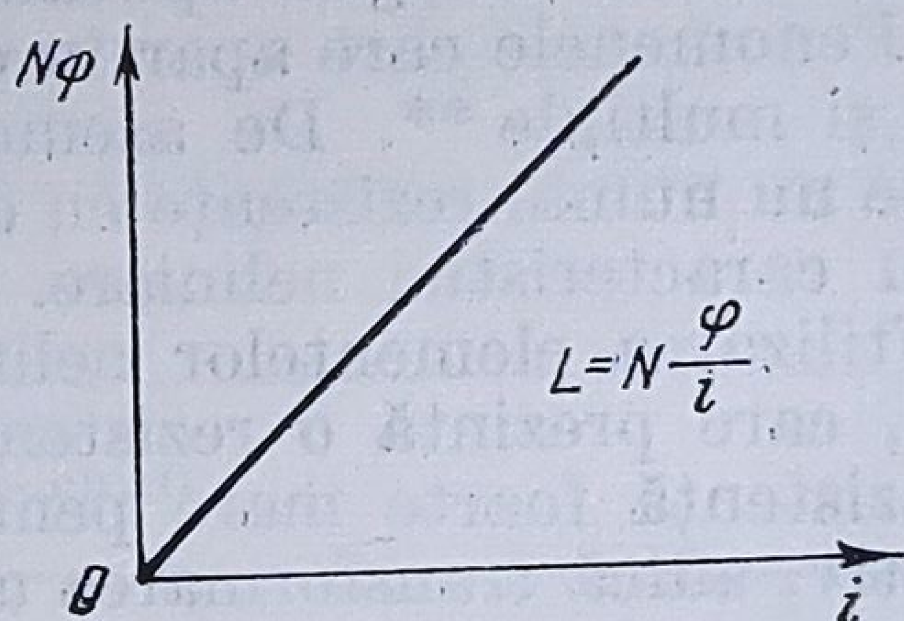


Fig. 11.2. Caracteristica *weber-amper* a unei inductanţe constante.

2. Un circuit electric prezintă o inductanţă constantă atunci cînd raportul dintre forţa electromotoare de inducţie care apare la bornele circuitului şi variaţia în timp a curentului care străbate circuitul este constant şi independent de alte elemente. Această definiţie este dedusă din relaţia

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

şi caracteristica sa *volt-amper* ** este o dreaptă care trece prin origine (fig. 11.1).

Definirea unui circuit cu inductanţă constantă poate fi dedusă şi din relaţia (3.120)

$$L\,i = N\,\varphi.$$

În acest caz circuitul este definit ca prezentînd o inductanţă constantă, atunci cînd raportul dintre fluxul total al bobinei şi curentul care o străbate este constant. Caracteristica *weber - amper* corespunzătoare este de asemenea o dreaptă, care trece prin origine, a cărei coeficient unghiular reprezintă inductanţa circuitului (fig. 11.2).

---

* Vezi şi 2.5.2.

** O caracteristică *volt-amper* propriu-zisă a unei inductanţe nu există, deoarece nu există nici o relaţie directă între u_L, i şi L. Se păstrează totuşi denumirea prin analogie.

3. Un circuit electric prezintă o capacitate sau o elastanță constantă, atunci cînd raportul dintre tensiunea la bornele sale și sarcina electrică înmagazinată în circuit este constant și independent de alte elemente. Această definiție este dedusă din relațiile (1.92)

$$u_c = Sq = \frac{q}{C}.$$

Caracteristica *volt-coulomb* corespunzătoare este o dreaptă care trece prin origine avînd coeficientul unghiular egal cu elastanța circuitului (fig. 11.3).

Parametrii circuitului îndeplinînd condițiile arătate mai înainte formează grupa de *parametri liniari* ai unui circuit electric.

4. Impedanțele, respectiv admitanțele, constituite din rezistențe și reactanțe liniare sînt impedanțe, respectiv admitanțe liniare ale circuitului electric. Ele sînt definite ca raportul dintre tensiunea la bornele sale și curentul care le străbat. Caracteristica lor *volt-amper* este o dreaptă care trece prin origine și al cărei coeficient unghiular este impedanța însăși a circuitului

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

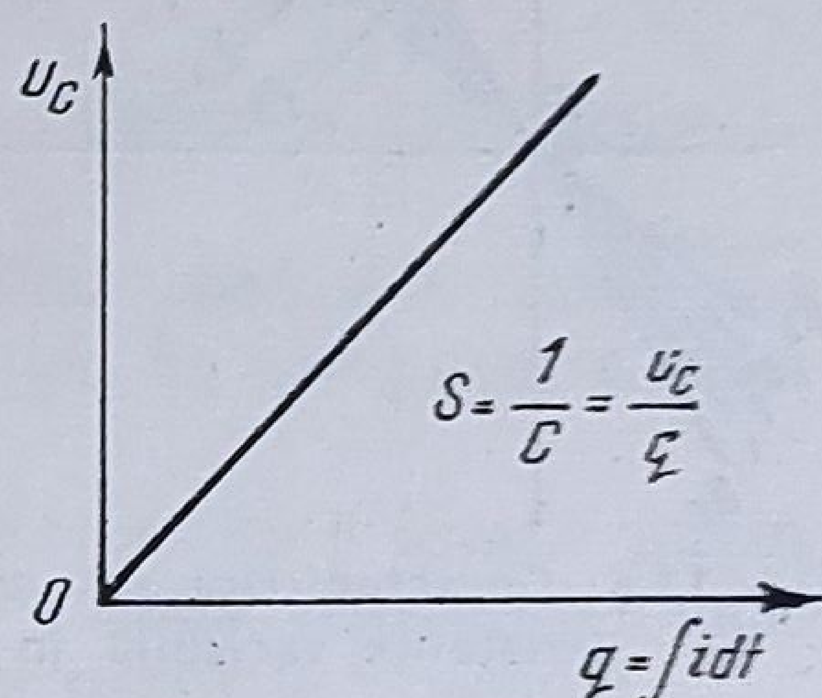


Fig. 11.3. Caracteristica *volt-coulomb* a unei elastanțe constantă.

11.1.2.2. Circuite electrice ai căror parametri variază numai cu timpul. Se consideră ca parametri care variază cu timpul, acei parametri ai unui circuit electric care sînt funcții explicite de timp și independenți de curent și de tensiune. Dacă se notează cu R_t, L_t, S_t respectiv C_t, acești parametri, atunci ecuațiile de funcționare a circuitelor electrice caracteristice speciale sînt:

— pentru circuitul rezistiv $\quad u_R = R_t\, i,$

— pentru circuitul inductiv $\quad u_L = \frac{d(L_t\, i)}{dt} = L_t \frac{di}{dt} + i \frac{dL_t}{dt},$

— pentru circuitul capacitiv $\quad u_C = \int S_t\, idt,$

respectiv $\quad i = \frac{d(C_t u_c)}{dt} = C_t \frac{du_c}{dt} + u_c \frac{dC_t}{dt}.$

Există numeroase cazuri în care acești parametri sînt funcții de timp, fără a depinde de curent sau de tensiune. Astfel, de exemplu, inductanța înfășurării polifazate a unui alternator față de înfășurarea inductorului este o funcție de poziția acestuia din urmă și deci de timp; de asemenea, rezistența unui microfon cu granule de cărbune este o funcție variabilă de timp deoarece ea depinde de presiune, deci de unda sonoră care este o funcție de timp, și nu depinde de caracteristicile electrice ale microfonului (tensiunea și curentul).

Caracteristicile *volt-amper* formează o familie de drepte avînd originea ca punct comun ; în figura 11.4 este reprezentată o asemenea caracteristică pentru o rezistență variabilă în timp.

În problemele în care apar asemenea parametri, se poate aplica întotdeauna principiul suprapunerii efectelor.

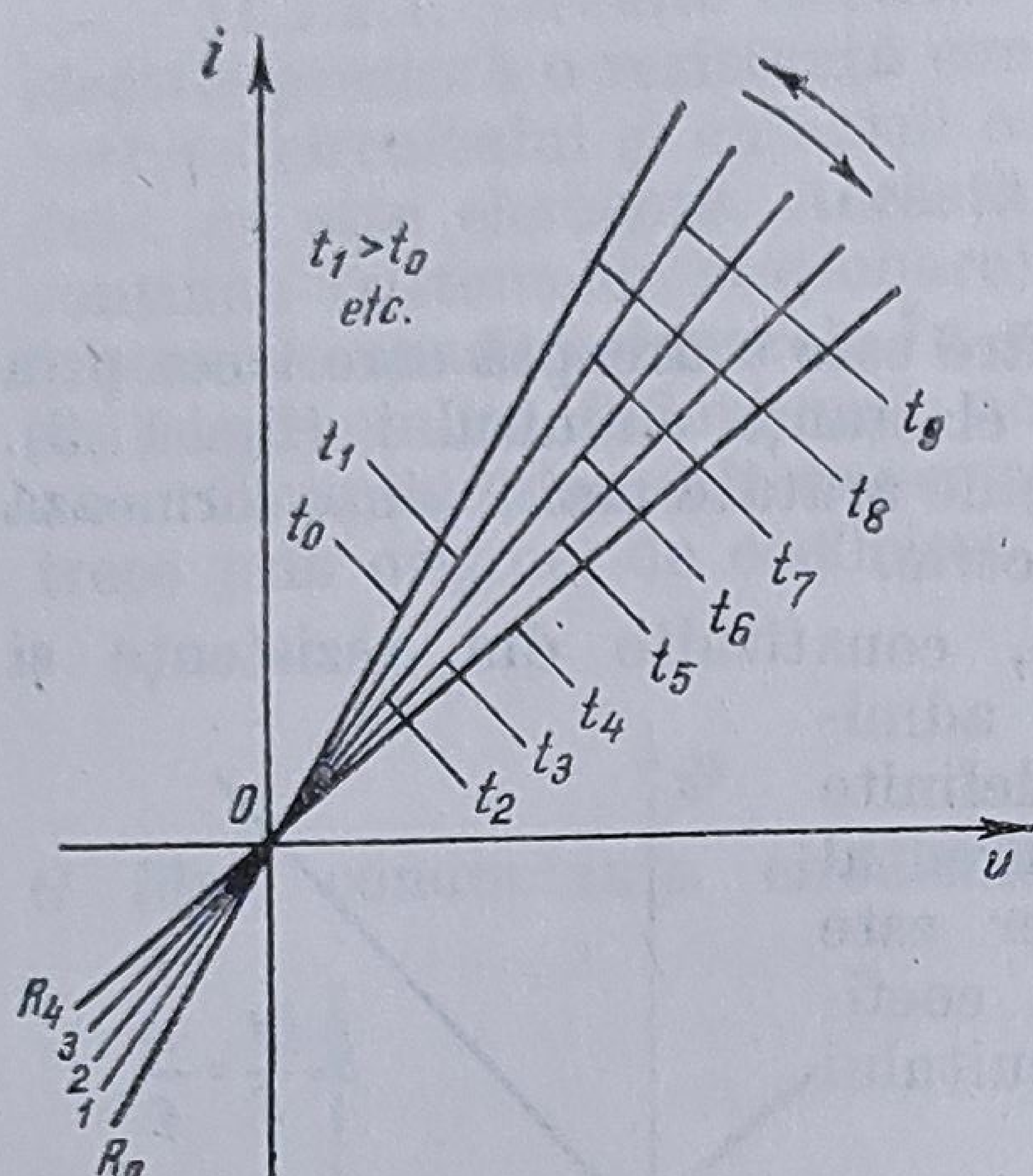


Fig. 11.4. Caracteristica *volt-amper* a unei rezistențe variabilă în timp.

11.1.2.3. Circuitele electrice ai căror parametri variază numai cu curentul sau numai cu tensiunea. Parametrii unui circuit electric, rezistența R, inductanța L sau capacitatea C, care variază în raport cu curentul care îi străbat sau cu tensiunea aplicată la borne, după o lege oarecare, bine definită, dar care nu variază în mod explicit cu timpul, se numesc *parametri liniari*.

Caracteristica de funcționare a acestor elemente nu se poate determina decît experimental, ecuația lor analitică neputînd fi în general stabilită. O asemenea curbă poate fi simetrică sau nu în raport cu originea, iar curbura ei este variabilă.

a) În cazul unei rezistențe neliniare, aceasta este caracterizată prin valoarea ei care este definită în două moduri (fig. 11.5) :

1) *Rezistența statică*, care este raportul dintre diferența de potențial de la bornele rezistenței neliniare și curentul care o străbate

$$R_s = \frac{u}{i}$$

și este definită pe caracteristica volt-amper a rezistenței neliniare, prin unghiul pe care îl face dreapta ce unește originea axelor de coordonate, cu punctul de funcționare corespunzător cu axa absciselor

$$\text{ctg}\ \sigma = \frac{u_A}{i_A} = R_s\ .$$

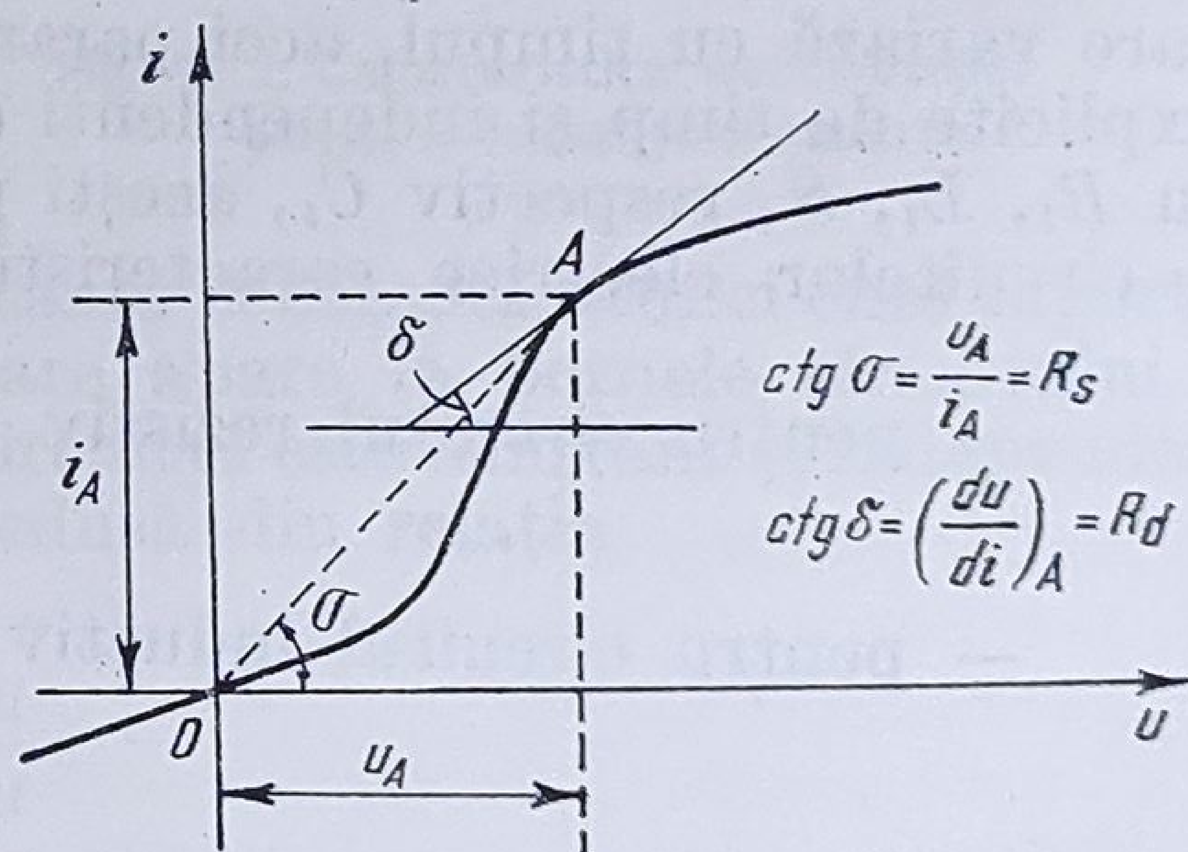


Fig. 11.5. Caracteristica *volt-amper* a unei rezistențe neliniare.

2) *Rezistența dinamică*, care este raportul dintre *variația* diferenței de potențial la bornele rezistenței neliniare și variația curentului ce o străbate, cînd aceasta tinde către zero

$$R_d = \lim_{\Delta i \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di}\ .$$

Această mărime este definită pe caracteristica volt-amper, prin unghiul de înclinare al tangentei la curba caracteristică, în punctul de funcționare, cu axa absciselor

$$\text{ctg}\ \delta = \left(\frac{du}{di}\right)_A = R_d.$$

Rezistențele statică și dinamică ale unei rezistențe neliniare sînt variabile de-a lungul caracteristicii corespunzătoare și diferite între ele, $R_s \neq R_d$; dacă $R_s = R_d$, rezistența este liniară, cel puțin pe porțiunea de caracteristică pentru care această egalitate este satisfăcută. Trebuie observat de asemenea, că rezistența statică e întotdeauna *pozitivă*, pe cînd rezistența dinamică poate fi *pozitivă* sau *negativă*, aceasta depinzînd de poziția concavității caracteristicii față de origine.

Un exemplu de rezistențe neliniare îl constituie redresoarele de orice fel.

b) Caracteristicile inductanțelor neliniare se pot reprezenta de asemenea grafic. Astfel, curbele de magnetizare dau caracteristica *weber-amper* a acestor mărimi. Ținînd seama de relația care definește fluxul în funcție de curent*

$$Li = N\varphi = \Phi,$$

se poate defini și în acest caz o inductanță statică și una dinamică, însă acestea nu au o utilitate practică.

Ca exemplu de elemente de circuit prezentînd inductanțe neliniare, pot fi date bobinele cu miez de fier cu caracteristică saturată, în categoria cărora intră transformatoarele electrice.

c) Utilizarea capacităților neliniare în circuitele electrice este foarte puțin uzitată; reprezentarea grafică a caracteristicii unei asemenea capacități este în orice caz posibilă, deși obținerea ei este mai dificilă în cazurile practice.

În probleme în care apar parametri neliniari ai unui circuit electric, principiul suprapunerii efectelor nu poate fi aplicat decît în cazuri cu totul particulare.

11.1.2.4. **Circuite electrice a căror parametri variază în același timp cu tensiunea sau cu curentul și cu timpul.** Parametrii unui circuit, R, L sau C, care variază cu curentul care le străbat sau cu tensiunea la bornele lor și simultan și cu timpul se numesc *parametri neliniari variabili în timp*.

Caracteristica de funcționare a acestor elemente este formată dintr-o familie de curbe trecînd prin origine, fiecare curbă reprezentînd caracteristica neliniară a parametrului considerat pentru o anumită valoare a timpului (fig. 11.6); aceste caracteristici pot fi reprezentate și prin suprafețe în spațiu în

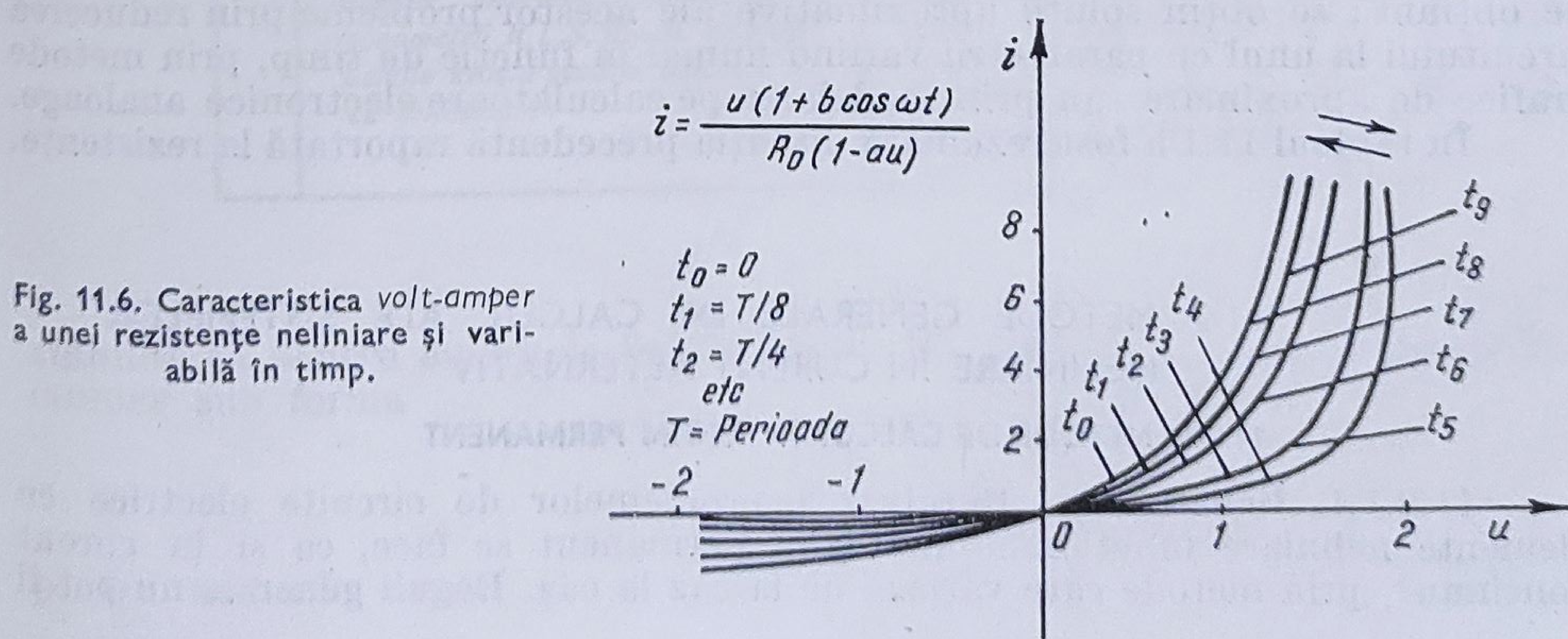


Fig. 11.6. Caracteristica *volt-amper* a unei rezistențe neliniare și variabilă în timp.

* Vezi (3.120).

raport cu ambele variabile (fig. 11.7). În figurile indicate sînt redate aceste caracteristici pentru o rezistență neliniară variabilă în timp care poate fi reprezentată prin ecuația

$$R = \frac{R_0 (1 - au)}{1 + b \cos\omega t},$$

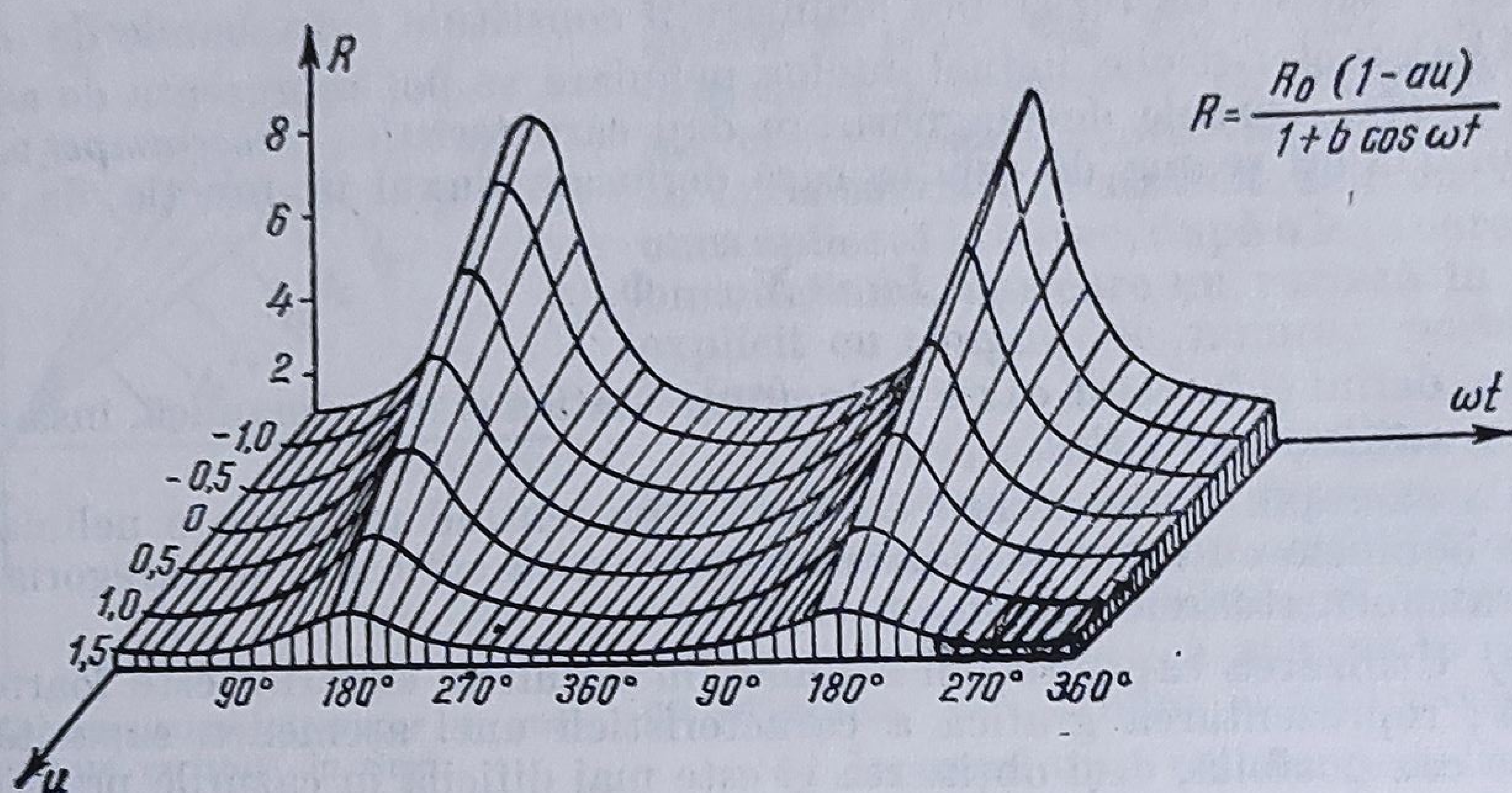


Fig. 11.7. Caracteristica spațială a unei rezistențe neliniară și variabilă în timp.

în care R_0, a, b, și ω sînt constante. Caracteristica *volt-amper* corespunzătoare este

$$i = \frac{u}{R} = \frac{u (1 + b \cos\omega t)}{R_0 (1 - au)}.$$

Analog, se pot găsi caracteristicile și pentru ceilalți parametri ai unui circuit electric, inductanțe sau capacități.

Pentru circuitele conținînd asemenea parametri, principiul superpoziției nu se poate aplica. Soluția exactă a acestor probleme este în general imposibil de obținut; se obțin soluții aproximative ale acestor probleme prin reducerea circuitului la unul cu parametrii variind numai în funcție de timp, prin metode grafice de aproximare sau prin modelarea pe calculatoare electronice analoage. În tabloul 11.1 a fost rezumată discuția precedentă raportată la rezistențe.

11.2. METODE GENERALE DE CALCUL ALE SISTEMELOR NELINIARE ÎN CURENT ALTERNATIV

11.2.1. METODE DE CALCUL ÎN REGIM PERMANENT

11.2.1.1. **Generalități.** Rezolvarea problemelor de circuite electrice cu elemente neliniare funcționînd în regim permanent se face, ca și în curent continuu* prin metode care variază de la caz la caz. Reguli generale nu pot fi

* Vezi 2.5.

Tabloul 11.1

	Elemente cu caracteristică liniară	Elemente cu caracteristică neliniară
Independente de timp	a - Rezistență constantă $\frac{u}{i} = R = const$ Analog. $L = const$ $S = const$ Teorema suprapunerii efectelor se aplică Ecuații diferențiale liniare cu parametrii R,L,S, constanți Soluția exactă se obține relativ ușor	c - Rezistență neliniară $\frac{u}{i} = R(u)$ sau $R(i)$ Analog. inductanța $= L(u)$ sau $L(i)$ elastanța $= S(u)$ sau $S(q)$ Teorema suprapunerii efectelor nu se aplică Ecuații diferențiale neliniare cu parametrii R,L,S, funcții de tensiune sau curent. Cu excepția unor cazuri particulare, nu este posibilă decît o soluție aproximativă
Variind cu timpul	b - Rezistență variabilă în timp $\frac{u}{i} = R(t)$ Analog. inductanța $= L(t)$ elastanță $= S(t)$ Teorema suprapunerii efectelor se aplică. Ecuații diferențiale liniare cu parametrii R,L,S, funcții de timp. Soluția exactă posibilă obținută cu dificultate.	d - Rezistență neliniară variabilă în timp $\frac{u}{i} = R(t,u)$ sau (t,i) Analog. inductanța $= L(t,u)$ sau $L(t,i)$ elastanța $= S(t,u)$ sau $S(t,i)$ Teorema suprapunerii efectelor nu se aplică Ecuații diferențiale neliniare cu parametrii R,L,S, funcții de timp și curent sau tensiune Soluția obținută cu dificultate prin aducerea la cazurile a, b, c.

stabilite ca pentru circuitele liniare. Aplicarea celor două teoreme ale lui KIRCHHOFF sub forma

$$\Sigma i = 0$$

pentru nodurile rețelei și

$$\Sigma Zi + \Sigma u = \Sigma e$$

pentru buclele rețelei, în care se reprezintă tensiunea la bornele elementului neliniar — dată de caracteristica volt-amper corespunzătoare — conduc întotdeauna la găsirea metodei de rezolvare a circuitului respectiv.

În cazul cînd funcția care reprezintă caracteristica volt-amper este simplă și circuitul electric este de asemenea simplu, problema se poate rezolva ușor. Astfel, în cazul unui circuit electric format dintr-o simplă rezistență electrică variabilă în timp, de forma

$$R_t = R_0 - R_m \cos t,$$

în care R_0 și R_m sînt constante, alimentate de o forță electromotoare constantă, valoarea curentului ce se stabilește în circuit este

$$i = \frac{E}{R_0 - R_m \cos t} = \frac{E}{R_0}\left[1 + \frac{R_m}{R_0}\cos t + \frac{R_m^2}{R_0^2}\cos^2 t + \ldots\right] =$$

$$= I_0 + I_1 \cos t + I_2 \cos 2t + I_3 \cos 3t + \ldots \tag{11.1}$$

deoarece

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t,$$

$$\cos^3 t = \frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t,$$

$$\cos^{2n-1} t = \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{2n-1} C_{2n-1}^k \cos(2n-2k-1)t,$$

$$\cos^{2n} t = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \cos 2(n-k)t.$$

Metodele de rezolvare ale circuitelor electrice neliniare în regim permanent, în curent alternativ, pot fi grupate în două mari categorii : metode grafice și metode analitice.

11.2.1.2. **Metode grafice.** Ca și în cazul problemelor de curent continuu*, metoda constă în a găsi forma curentului electric ce străbate circuitul printr-o construcție grafică realizată punct cu punct (fig. 11.8).

În cazul cînd circuitul este mai complicat, se determină în prealabil caracteristica volt-amper rezultantă a circuitului după care se construiește diagrama curentului în raport cu această caracteristică printr-un procedeu analog. În

* Vezi 2.5.4.

figura 11.9 este dată această operație pentru un circuit format dintr-o supapă electronică (o diodă) care funcționează în serie cu o rezistență liniară, fiind alimentată de o sursă de tensiune alternativă sinusoidală (fig. 11.10).

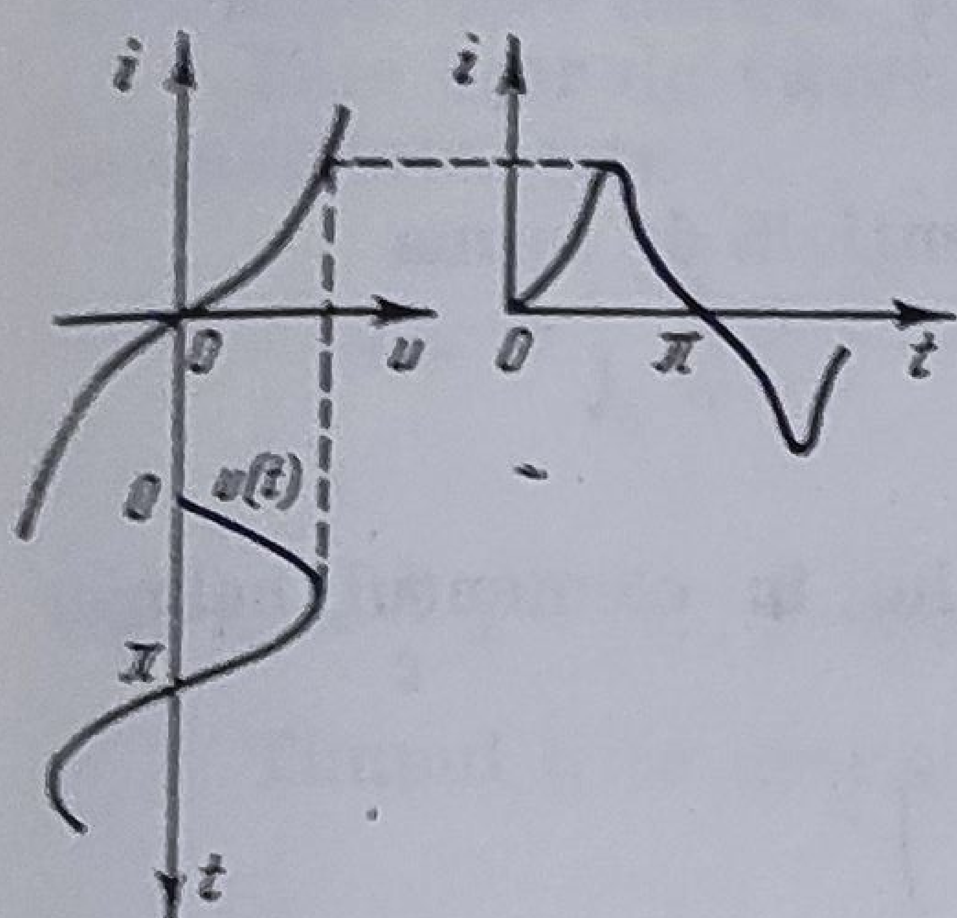


Fig. 11.8. Determinarea curbei de curent într-un element neliniar.

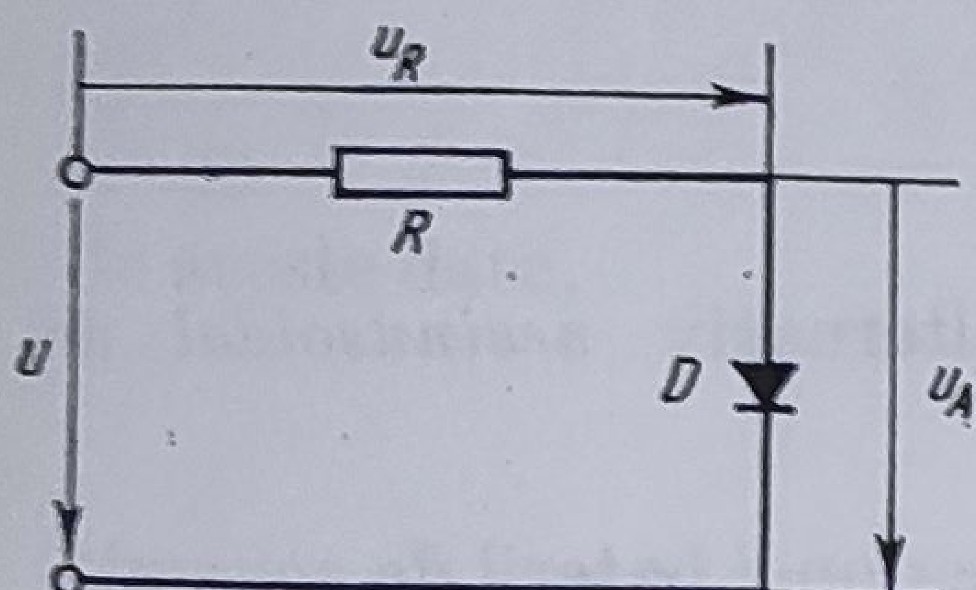


Fig. 11.10. Circuit redresor monoalternanță.

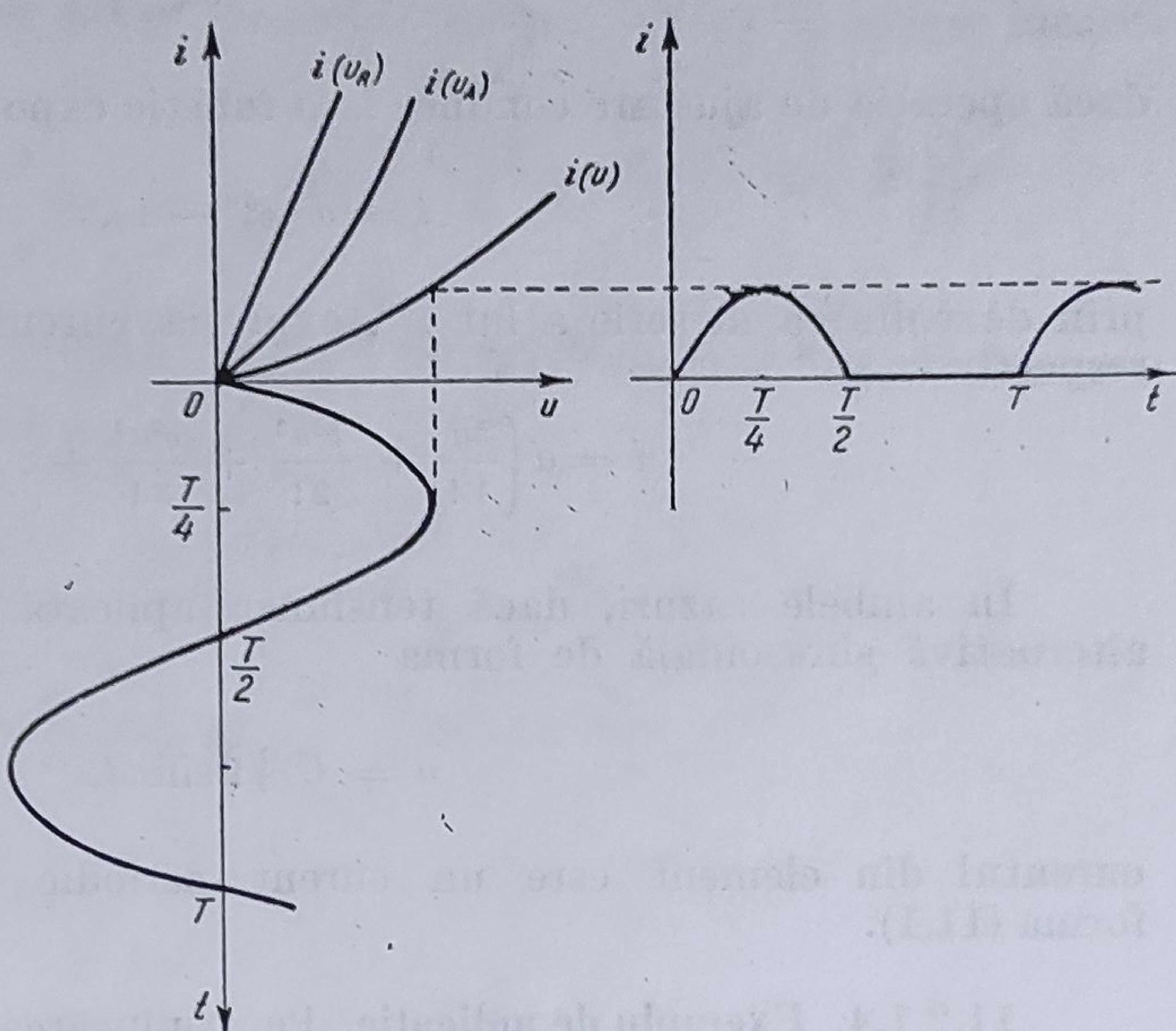


Fig. 11.9. Determinarea curbei de curent absorbit de o diodă.

11.2.1.3. **Metode de aproximare analitice.** Fiind dată caracteristica *volt-amper* a unui element neliniar oarecare, dezvoltînd-o în serie *Taylor* în jurul unei valori u_0 a tensiunii, se obține

$$i(u) = i(u_0) + \frac{u-u_0}{1!}\frac{\partial i}{\partial u} + \frac{(u-u_0)^2}{2!}\frac{\partial^2 i}{\partial u^2} + \ldots =$$

$$= a_0 + a_1\,(u-u_0) + a_2\,(u-u_0)^2 + \ldots, \qquad (11.2)$$

ceea ce arată că funcția caracteristică volt-amper a elementului respectiv poate fi aproximată, printr-un polinom întreg în u. Dacă tensiunea de alimentare este alternativă sinusoidală, atunci curentul absorbit de circuit este nesinusoidal*.

Partea dificilă în aplicarea metodei constă în necesitatea cunoașterii ecuației analitice a curbei caracteristice, ceea ce în general nu se poate obține decît dintr-o prealabilă operație de ajustare a curbei experimentale **. Odată această ecuație cunoscută, expresia curentului se deduce imediat. Astfel, dacă operația de ajustare a condus pentru caracteristica volt-amper la o ecuație de forma

$$i = \left(1 + \frac{u}{a}\right)^{3/2},$$

* Vezi 9.1.
** Vezi [113].

atunci, expresia curentului din elementul neliniar corespunzător este*

$$i = 1 + \frac{3}{2a} u + \frac{3}{8a^2} u^2 + \dots;$$

dacă operaţia de ajustare conduce la o funcţie exponenţială de forma

$$i = a(\varepsilon^{bu} - 1),$$

prin dezvoltarea în serie a lui ε^{bu}, expresia curentului în elementul neliniar respectiv va fi

$$i = a\left(\frac{bu}{1!} + \frac{b^2u^2}{2!} + \frac{b^3u^3}{3!} + \dots\right).$$

În ambele cazuri, dacă tensiunea aplicată elementului este periodică alternativă sinusoidală de forma

$$u = U\sqrt{2}\sin\omega t,$$

curentul din element este un curent periodic alternativ *nesinusoidal* de forma (11.1).

11.2.1.4. **Exemplu de aplicaţie.** Pentru încărcarea unei baterii de acumulatoare de la o reţea de curent alternativ, se relizează montajul din figura 11.11, *a*,

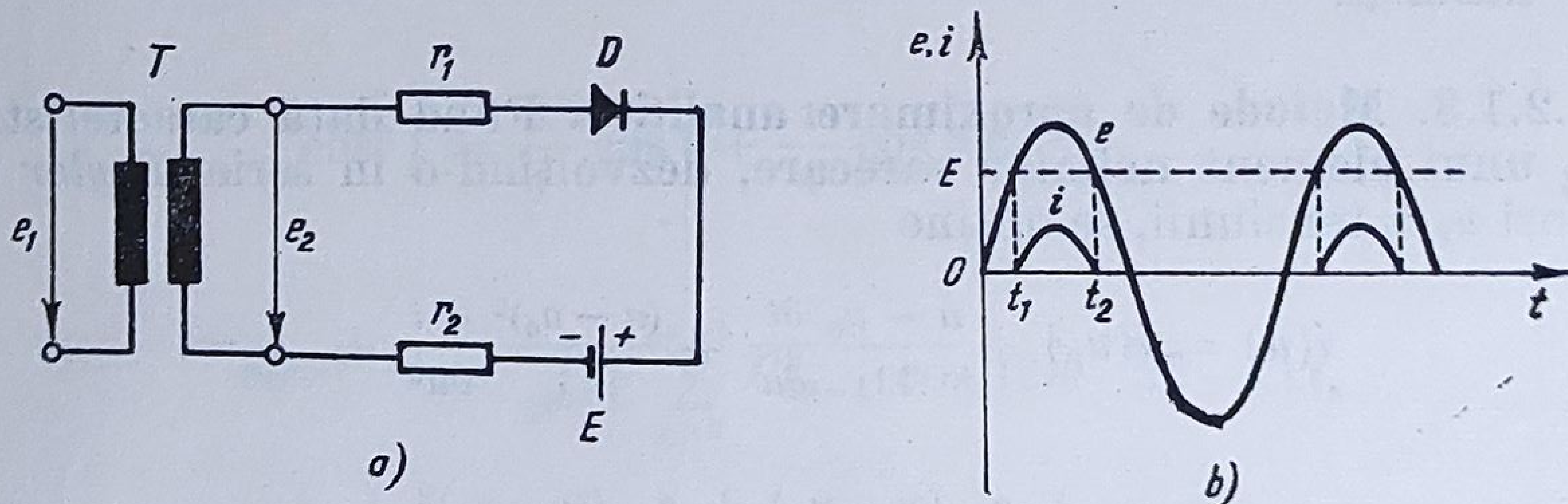


Fig. 11.11. Circuit redresor pentru încărcat acumulatoare.
a) Schema de montaj ; *b)* diagrama tensiunii de alimentare şi a curentului

în care E reprezintă bateria de acumulatoare care urmează să fie încărcată şi a cărei forţă electromotoare este $E = 7$ V, T este transformatorul reductor, avînd tensiunea în secundar $e_2 = 10 \sin \omega t$ V, şi $f = 50$ Hz, D — o diodă, presupusă ideală şi $r_1 + r_2 = 1\Omega$, rezistenţa totală a circuitului. Se cere să se determine : 1) Sarcina electrică cu care s-a încărcat bateria de acumulatoare după o oră ; 2) valoarea maximă a curentului ; 3) valoarea maximă a tensiunii pe diodă.

Curentul din circuit va fi dat de legea lui Ohm şi este

$$i = \frac{e_2 - E}{r_1 + r_2}.$$

* Vezi [28] p. 9.

Ţinînd seama de modul de funcţionare a diodei*, curentul va apărea în circuit la timpul t_1 cînd $e_2 = E$, va dura atît timp cît $e_2 > E$ şi va dispărea din circuit la timpul t_2 cînd din nou $e_2 = E$. În aceste condiţii, diagrama de funcţionare a circuitului este dată în figura 11.11, *b*.

Este uşor de văzut, că într-o perioadă sarcina electrică cu care se încarcă acumulatorul este

$$q_{per} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{e_2 - E}{r_1 + r_2} \mathrm{d}t = \frac{1}{\omega (r_1 + r_2)} \left[2 E_m \cos \omega t_1 + E \left(2t_1 - \frac{1}{2} T \right) \right],$$

căci $t_2 = \frac{1}{2} T - t_1$, T fiind perioada funcţiei sinusoidale, egală cu 0,02 s.

Timpul t_1 se determină din relaţia

$$E_m \sin \omega t_1 = E$$

şi deci,

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \text{ arc sin } \frac{E}{E_m} = 247.10^{-5}\text{s}.$$

Cu aceste date,

$$q_{per} = \frac{0,504}{f} \text{C}$$

f fiind frecvenţa reţelei de curent alternativ; într-o secundă acumulatorul se va încărca cu o sarcină electrică**

$$q = f \; q_{per} = 0,504 \;\; \text{C} = 0,504 \;\; \text{As},$$

iar într-o oră

$$Q = 3\,600\, q = 1814,4 \;\; \text{C} = 0,504 \;\; \text{Ah}.$$

Valoarea maximă a curentului este

$$i_m = \frac{E_m - E}{r_1 + r_2} = 3 \text{ A}.$$

Valoarea maximă a tensiunii inversă pe diodă este

$$U_i = E_m - (-E) = 17 \text{ V}.$$

11.2.2. METODE DE CALCUL ÎN REGIM TRANZITORIU

11.2.2.1. Problema generală. Rezolvarea regimului tranzitoriu de funcţionare a unui circuit electric se face găsind soluţiile generale şi particulare ale sistemului de ecuaţii diferenţiale care descriu fenomenul corespunzător**.

* Vezi 11.2.1.2.

** De fapt ar trebui să se scrie

$$q = 0,504 \text{ C/s} = 0,504 \text{ As/s};$$

în această relaţie f trebuie privit ca un număr fără dimensiuni.

*** Vezi 3.6.1.

Dacă sistemul de ecuaţii diferenţiale este liniar, se poate găsi întotdeauna o soluţie exactă a problemei fie rezolvînd sistemul respectiv prin metode directe, fie utilizînd metode speciale de calcul (mărimile complexe, transformata LAPLACE etc.) *.

În cazul cînd parametrii circuitului sînt funcţie numai de timp, regimurile tranzitorii corespunzătoare pot fi calculate transformînd ecuaţiile diferenţiale de funcţionare ale circuitelor în ecuaţii integrale a căror rezolvare este posibilă** ; rezolvarea acestor ecuaţii integrale devine însă dificilă, dacă se ţine seama de fenomenele de ereditate magnetică sau dielectrică.

Dacă parametrii circuitelor electrice sînt neliniari, simpli sau depinzînd de timp, soluţia problemei nu se poate găsi, decît făcînd oarecare aproximaţii şi utilizînd metode de calcul grafice sau calculatoare electronice, analogice sau cifrice, pentru fiecare problemă stabilindu-se în prealabil programarea corespunzătoare.

Pentru exemplificare, fie de determinat curentul ce se stabileşte într-un circuit electric format dintr-un element prezentînd o rezistenţă neliniară, legat în serie cu o bobină de inductanţă L, cînd se închide pe o sursă de tensiune constantă (fig. 11.12) ; se presupune, că bobina are inductanţa constantă şi nu are rezistenţă proprie, ceea ce revine a admite că rezistenţa acesteia este cuprinsă în valoarea rezistenţei neliniare.

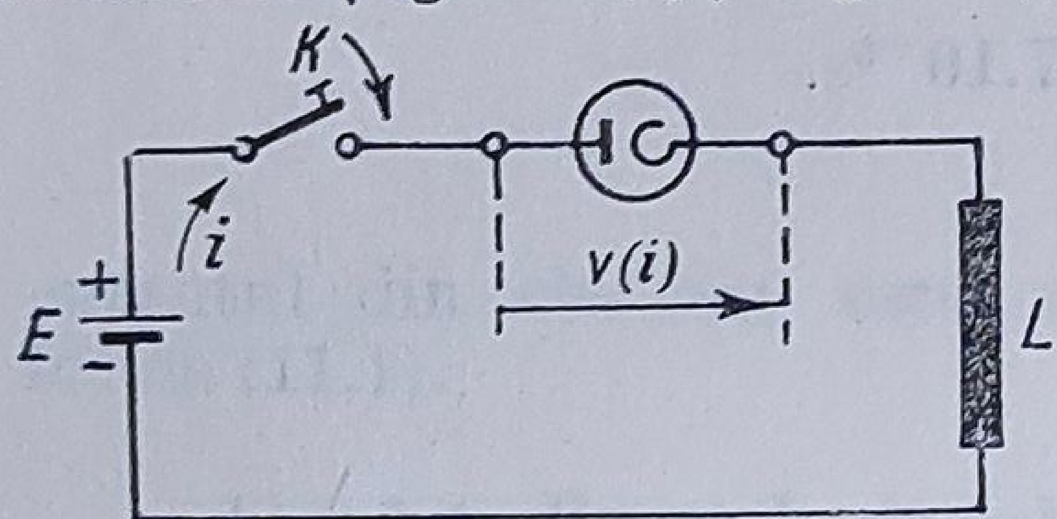


Fig. 11.12. Circuit electric neliniar.

Dacă $v = \mathrm{v}(i)$ este caracteristica rezistenţei neliniare, atunci ecuaţia de funcţionare a circuitului este

$$L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \mathrm{v}(i) = E, \tag{11.3}$$

care este o ecuaţie diferenţială neliniară, a cărei integrare nu se poate face direct, întrucît funcţia $\mathrm{v}(i)$ nu este cunoscută ; în general funcţia $\mathrm{v}(i)$ este cunoscută sub forma unei diagrame, caracteristica *volt-amper* a rezistenţei neliniare.

Pentru integrarea ecuaţiei (11.3) se folosesc diverse metode ca integrarea grafică, liniarizarea caracteristicii *volt-amper*, aproximarea acestei caracteristici printr-o ecuaţie analitică etc.

Pentru concretizare, să presupunem că rezistenţa neliniară din circuitul dat este o diodă cu vid (un kenotron) a cărei caracteristică este dată în figura 11.13.

Se va rezolva această problemă prin toate metodele indicate, căutîndu-se gradul de aproximare obţinut.

Metodele de rezolvare ale acestei probleme sînt aplicabile oricărei probleme analoage, oricare ar fi parametrul variabil.

11.2.2.2. **Metoda integrări grafice.** Separînd variabilele în ecuaţia (11.3) şi integrînd se obţine

$$\frac{t}{L} = \int_{i_0}^{i_t} \frac{\mathrm{d}i}{E - \mathrm{v}(i)}, \tag{11.4}$$

în care i_0 este curentul la timpul $t = 0$ şi i_t valoarea curentului la timpul t oarecare. Calculul acestei integrale se face în modul următor : cunoscînd caracteristica *volt-amper* $\mathrm{v}(i)$ a diodei (fig. 11.14, *a*) se trasează curba $E - \mathrm{v}(i)$ şi se deduce curba inversă $1/[E - \mathrm{v}(i)]$ (fig. 11.14, *b*, *c*). Integrala din relaţia (11.4) reprezintă

* Vezi 10.4.

** Vezi [164] pag. 14.

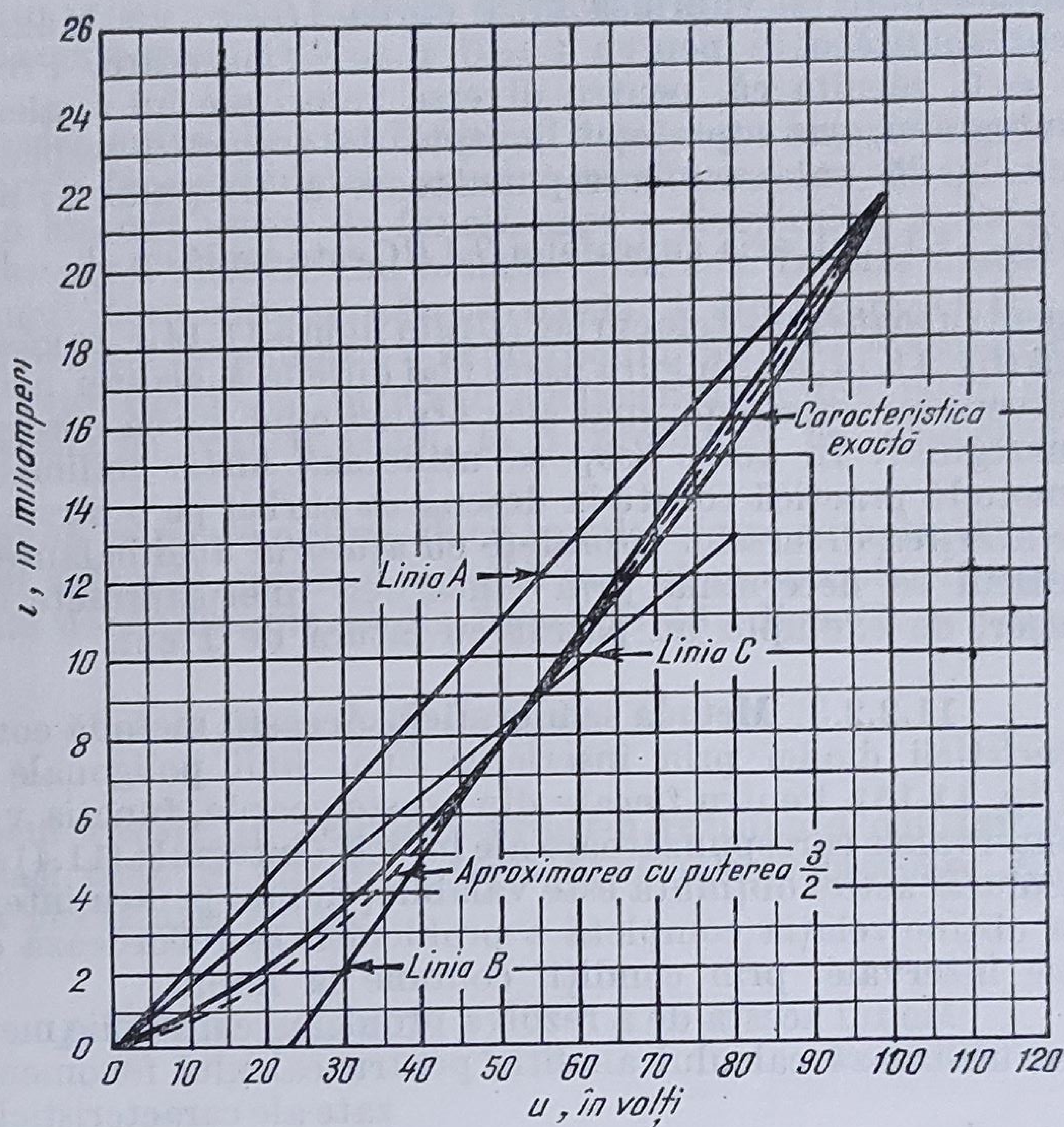


Fig. 11.13. Caracteristica volt-amper a unei diode cu vid.

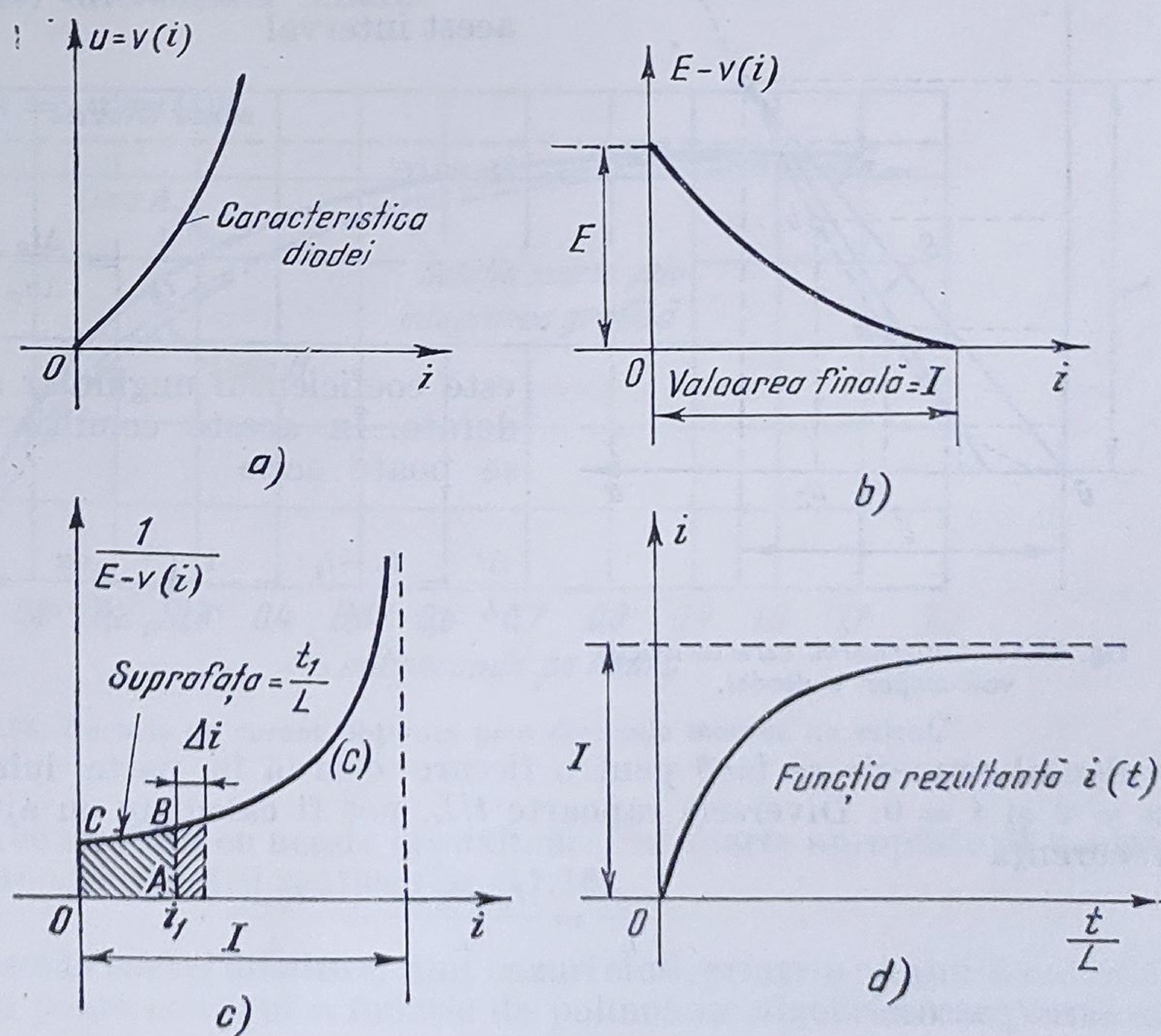


Fig. 11.14. Rezolvarea regimului tranzitoriu prin metoda grafică.

aria suprafeţei cuprinsă între curba $1/[E - v(i)]$, axa absciselor şi ordonatele corespunzătoare pentru $t = 0$ şi $t = t$ oarecare. Presupunînd ca la $t = 0$ şi $i = 0$, rezultă că, pentru diverse valori ale lui i, alese ca limită superioară a integralei, aria suprafeţei limitată de ordonata respectivă la dreapta, înmulţite cu L, dă valoarea corespunzătoare a timpului t; astfel, pentru ordonata i_1 (fig. 11.14, *c*), aria suprafeţei $OABC$ este egală cu $\frac{t_1}{L}$. Procedînd în acelaşi mod pentru toate punctele curbei (C) din figura 11.14, *c*, se găseşte curba integrală căutată (fig. 11.14, *d*). Singura parte mai dificilă a acestei metode este evaluarea ariei diverselor suprafeţe, mai ales atunci cînd curba corespunzătoare are un traseu neregulat. În acest scop se utilizează hîrtia milimetrică sau planimetrul. O metodă practică constă în desenarea curbei pe o hîrtie calibrată, decuparea ei şi cîntărirea diverselor suprafeţe cu ajutorul unei balanţe analitice. Constanta de calcul se determină prin cîntărirea unei suprafeţe a cărei arie se determină uşor, de exemplu un pătrat cu latura de 1 cm.

11.2.2.3. **Metoda semigrafică.** Această metodă constă în liniarizarea caracteristicii diodei prin înscrierea unei linii poligonale în curba caracteristică (fig. 11.15). Pentru fiecare din aceste coarde, funcţia $v(i)$ este liniară şi pentru intervalele corespunzătoare ale lui u şi i integrala (11.4) se poate efectua analitic. Soluţia astfel obţinută este valabliă, numai pentru intervalul considerat; pentru a obţine relaţia completă a problemei, se racordează diversele soluţii obţinute pe intervale, prin condiţii comune la limită.

Modul acesta de a rezolva problema constituie metoda *semigrafică*, întrucît se utilizează calculul analitic pentru calculul fenomenului pe porţiunile liniarizate ale caracteristicii.

Fig. 11.15. Liniarizarea caracteristicii volt-amper a diodei.

Fie un interval a, b (fig. 11.15). Pentru acest interval

$$v(i) = u_p = r_p i_p$$

în care

$$\frac{1}{r_p} = \frac{\Delta i_p}{\Delta u_p}$$

este coeficientul unghiular al coardei considerate. În aceste condiţii, integrala (11.4) se poate scrie

$$\frac{\Delta t}{L} = \frac{t_2 - t_1}{L} = \frac{1}{r_p}\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{E - u_p} = \frac{1}{r_p} \ln \frac{E - u_1}{E - u_2}. \tag{11.5}$$

Calculul numeric se face pentru fiecare coardă în parte, luînd pentru $t = 0$, $u = 0$ şi $i = 0$. Diversele rapoarte t/L, pot fi calculate cu ajutorul relaţiei de recurenţă

$$\frac{t_n}{L} = \frac{t_n - t_{n-1}}{L} + \frac{t_{n-1}}{L},$$

în care $t_0 = 0$.

Rezultatele ce se obțin prin această metodă sînt foarte apropiate de acelea care se obțin prin metoda integrării grafice.

11.2.2.4. **Metoda coardei unice.** În cazul cînd se urmărește o aproximație mai puțin precisă a urmăririi fenomenului în ansamblul său, acesta rămînînd bine determinat pentru un anumit punct de funcționare a sistemului, se înlocuiește caracteristica *volt-amper* a elementului neliniar prin coarda care unește originea cu punctul de funcționare corespunzător (coarda A din figura 11.15). Aceasta revine în a înlocui rezistența neliniară a kenotronului printr-o rezistență constantă a cărei valoare este egală cu inversul coeficientului unghiular, al coardei considerate. Problema se reduce astfel, la o problemă cu elemente liniare.

O aproximație mai bună se poate obține, dacă se înlocuiește caracteristica de funcționare a rezistenței neliniare, printr-o secantă care să se apropie cît mai mult de caracteristica reală dată (dreapta B din figura 11.15). Ecuația acestei drepte fiind

$$u = E_1 + R_1 i,$$

aceasta revine în a înlocui rezistența neliniară printr-o rezistență constantă R_1 și a introduce, în același timp în circuit o forță contraelectromotoare E_1. Ecuația de funcționare a circuitului devine

$$L \frac{di}{dt} + R_1 i = E - E_1,$$

care este o ecuație diferențială liniară.

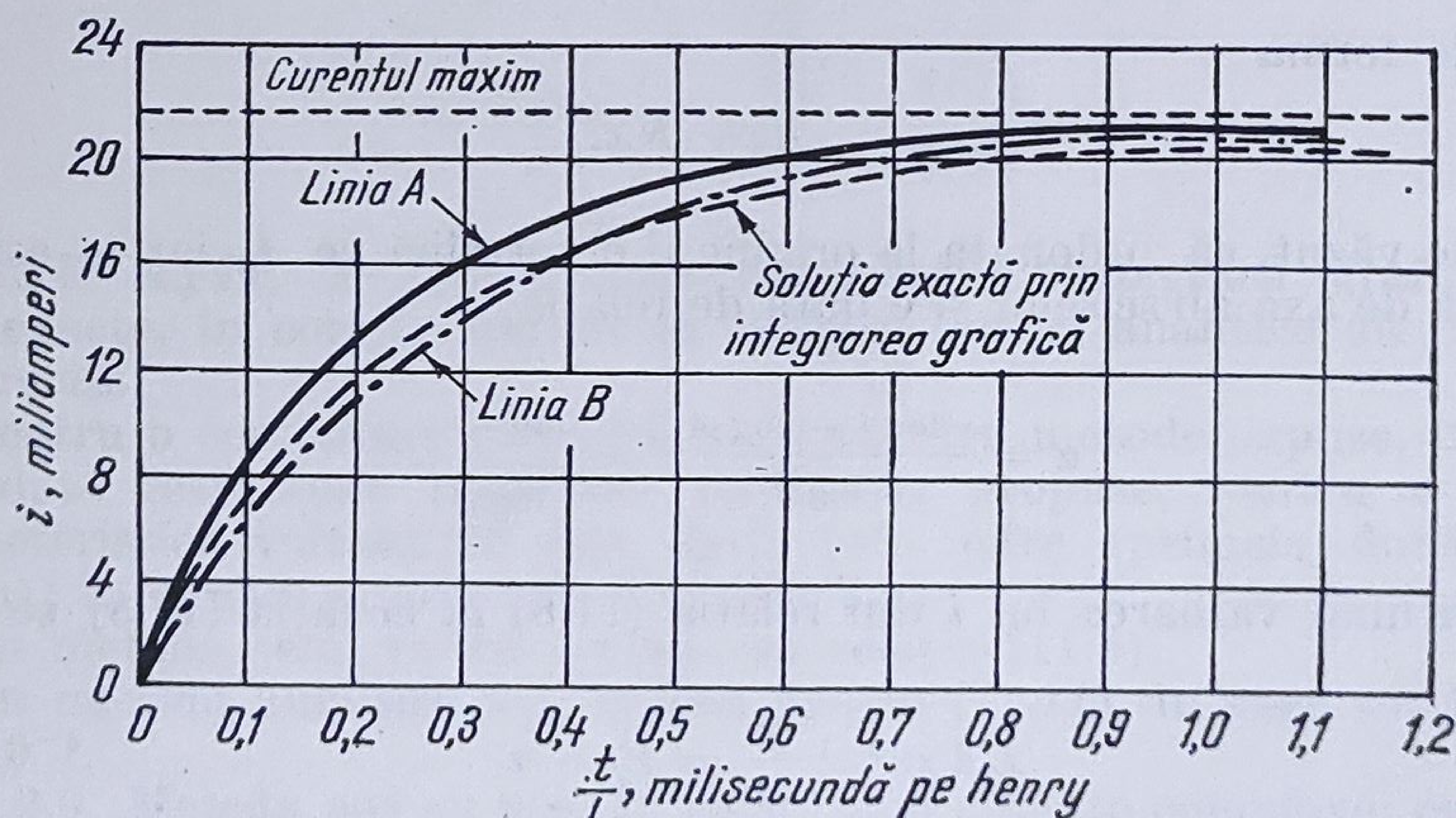


Fig. 11.16. Curbele de curent obținute prin diversele metode de calcul.

Rezultatele ce se obțin cu aceste aproximări sînt foarte apropiate de acelea obținute prin metoda integrării grafice (fig. 11.16).

11.2.2.5. **Metoda curbei analitice.** Sînt cazuri cînd, printr-o anumită metodă de aproximare, se poate construi o funcție de polinoame algebrice care în anu-

mite intervale considerate să convergă către funcția dată obținută experimental*. Astfel, caracteristica *volt-amper* a unui element neliniar poate lua forma

$$i = a_1 u^{\alpha_1} + a_2 u^{\alpha_2} + \ldots + a_n u^{\alpha_n} \tag{11.6}$$

sau

$$u = b_1 i^{\beta_1} + b_2 i^{\beta_2} + \ldots + b_n i^{\beta_n}. \tag{11.7}$$

În practică se poate lua, pentru caracteristica *volt-amper*, o expresie de forma

$$i = A u^{\alpha} \tag{11.8}$$

sau

$$u = B i^{\beta}. \tag{11.9}$$

Ecuațiile de tipul celor indicate mai sus se pot aplica semiconductorilor a căror rezistență variază în limite foarte largi ca germaniul, siliciul, cuproxidul etc.; pentru tuburile electronice LANGMUIR** a stabilit valoarea coeficientului α din ecuația (11.8) egală cu 3/2.

Să considerăm cazul cînd caracteristica *volt-amper* a unui element neliniar este reprezentat printr-o ecuație de tipul (11.8), acesta fiind cazul cel mai frecvent întîlnit în practică. Pentru determinarea constantelor A și α se construiește caracteristica elementului neliniar într-un sistem de referință cu coordonate logaritmice și curba obținută se aproximează printr-o dreaptă ai cărei parametri sînt constantele căutate. Într-adevăr, aplicînd logaritmii expresiei (11.8) se obține

$$\log i = \log A + \alpha \log u$$

care este de forma

$$y = M + Nx.$$

Este ușor de văzut, că ordonata la origine îl determină pe A, iar α este panta dreptei, față de axa ab sciselor și e dată de relația

$$\alpha = \frac{\log i - \log A}{\log u} = \frac{\log \frac{i}{A}}{\log u}.$$

Substituind valoarea lui i din relația (11.8) în ecuația (11.3) se obține:

$$LA\alpha u^{\alpha-1} \frac{du}{dt} = E - u$$

de unde, prin separarea variabilelor și integrarea între limitele O și u, rezultă:

$$\frac{t}{L} = \alpha A \int_0^u \frac{u^{\alpha-1} du}{E - u}. \tag{11.10}$$

---

* Vezi [199] pag. 98.
** Vezi [168].

Integrala din această relaţie se calculează relativ uşor cînd α este un număr întreg şi pozitiv; astfel, prin efectuarea împărţirii şi integrarea polinomului obţinut între limitele date, se obţine

$$\frac{t}{L} = -\alpha A E^{\alpha-1}\left[\ln\left(1-\frac{u}{E}\right)+\sum_{j=0}^{\alpha-2}\frac{1}{\alpha-j-1}\left(\frac{u}{E}\right)^{\alpha-j-1}\right].$$

În cazul cînd α este fracţionar, calcularea integralei este mai dificilă, dar nu imposibilă; în cazul particular în care α este un multiplu *impar* de $\frac{1}{2}$, punînd

$$\frac{du}{E-u} = \frac{d(u^{\frac{1}{2}})}{E^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{1}{2}}} - \frac{d(u^{\frac{1}{2}})}{E^{\frac{1}{2}}+u^{\frac{1}{2}}}$$

şi făcînd schimbarea de variabilă

$$E^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}} = x,$$

ecuaţia (11.10) devine

$$\frac{t}{L} = \alpha A\int_{E^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{1}{2}}}^{E^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{1}{2}}}\frac{(E^{\frac{1}{2}}-x)^{2(\alpha-1)}}{x}\,dx,$$

în care, de data aceasta, exponentul $2(\alpha-1)$ este un număr întreg.

În cazul diodelor $\alpha = \frac{3}{2}$ se obţine

$$\frac{t}{L} = 3A\sqrt{E}\left(\operatorname{cth}\sqrt{\frac{u}{E}} - \sqrt{\frac{u}{E}}\right). \tag{11.11}$$

OBSERVAŢII. 1. Considerînd că metoda integrării grafice ar da rezultate exacte, în comparaţie cu ea metoda curbei analitice dă rezultatele cele mai precise.

2. Pentru o comparare concretă a celor patru metode expuse, în tabloul 11.2 sînt date rezultatele rezolvării problemei propuse, pentru o diodă a cărei caracteristică volt-amper este dată prin cifre (primele două coloane din tablou); în circuit a fost luat $E = 100$ V.

3. În metoda semigrafică s-a aplicat relaţia (11.5).

4. În metoda analitică s-a aplicat relaţia (11.11), în care s-a luat $A = 22 \times 10^{-6}$.

11.2.2.6. **Metoda pas cu pas.** În cazul unor circuite complexe, care conţin în afară de elementele inductive şi rezistive şi elemente capacitive, problemele de stabilire a regimului tranzitoriu de funcţionare a circuitului nu mai pot fi rezolvate prin relaţii simple — ca în cazurile examinate în paragrafele precedente — problema complicîndu-se foarte mult, chiar dacă numai unul din elementele circuitului este neliniar. În această categorie intră circuitele redresoare, circuitele sistemelor de protecţie ale reţelelor electrice etc. Rezolvarea acestor probleme se face prin diverse metode, dintre care cea mai utilizată este metoda *pas cu pas* sau din *aproape în aproape*.

Tabloul 11.2

COMPARAȚIA ÎNTRE REZULTATELE OBȚINUTE PRIN DIVERSELE METODE DE CALCUL ALE SISTEMELOR NELINIARE

Caracteristica volt-amper a diodei		Metoda integrării grafice	Metoda semigrafică		Metoda analitică		
u V	i mA	$\frac{t}{L}$ ms/H	$\frac{t}{L}$ ms/H	Diferență μs/H	$\frac{t}{L}$ ms/H	Diferență μs/H	i mA
0	0	0	0		0		0
10	0,9	0,0095	0,00953	+ 0,08	0,00759	−1,86	0,70
20	2,15	0,0242	0,02422	+ 0,02	0,02243	−1,77	1,97
30	3,75	0,0456	0,04559	− 0,01	0,449	−0,70	3,62
40	5,65	0,0751	0,07492	− 0,08	0,746	−0,50	5,75
50	7,80	0,1144	0,11417	− 0,23	0,1148	+0,40	7,78
60	10,20	0,1684	0,16782	− 0,58	0,1705	+2,10	10,23
65	11,50	0,2033					
70	12,90	0,2466	0,24562	− 0,98	0,2469	+0,30	12,88
75	14,25	0,2961					
80	15,68	0,3605	0,35842	− 2,08	0,3615	+1,00	15,74
82,5	16,35	0,3964					
85	17,08	0,4416					
87,5	17,80	0,4945					
90	18,50	0,5575	0,55392	− 3,58	0,5760	+18,50	18,78
92	19,10	0,6250					
94	19,70	0,7126					
96	20,30	0,8376					
98	20,94	1,0776	1,04492	−32,68	1,092	+14,4	21,35
100	21,60	∞	∞		∞		22

OBSERVAȚII. 1. Diferența s-a făcut în raport cu metoda integrării.
2. În metoda semigrafică s-a aplicat relația (11.5).
3. În metoda analitică s-a aplicat relația (11.11) luîndu-se pentru caracteristica volt-amper ecuația $i=22\times10^{-6}u^{1,5}$ A.

Fie un circuit electric format dintr-o diodă în serie cu o bobină și cu un condensator (fig. 11.17). Se presupune că rezistența electrică a întregului circuit este cuprinsă în rezistența neliniară a diodei, a cărei caracteristică *volt-amper* este dată în figura 11.14, *a*. Se cere să se determine regimul tranzitoriu de stabilire a curentului electric în circuit, la închiderea întrerupătorului *K*.

Ecuația de funcționare a circuitului este

$$L\frac{di}{dt}=E-u_R-u_C, \qquad (11.12)$$

în care s-a notat cu u_R tensiunea la bornele elementului neliniar, dată de caracteristica *volt-amper* corespunzătoare și cu

$$u_c=\frac{1}{C}\int idt,$$

tensiunea la bornele condensatorului.

Separînd variabilele, rezultă

$$di=\frac{1}{L}\,(E-u_R-u_c)dt.$$

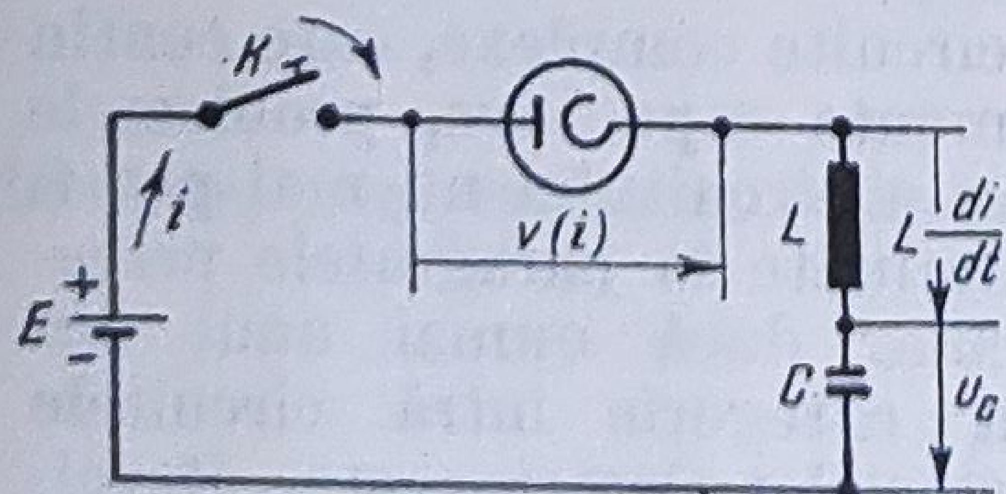


Fig. 11.17. Circuit electric serie, neliniar complet.

Rezultă dar, că pentru a calcula curentul i, este necesar să se cunoască valorile tensiunii la bornele elementului neliniar şi ale condensatorului. Soluţia poate fi obţinută presupunîndu-se că, în intervale de timp Δt, suficient de mici, variaţia curentului, di/dt, este constantă în întreg intervalul.

La timpul $t = 0_+$, corespunzător momentului imediat după închiderea întrerupătorului K şi care este considerat ca origine de timp, curentul în circuit rămîne egal cu zero, din cauza prezenţei inductanţei; rezultă dar că şi $u_R = 0$ şi $u_c = 0$. Din relaţia (11.12) rezultă

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{E}{L}.$$

Ţinînd seama de ipoteza făcută, curentul la sfîrşitul intervalului de timp Δt_1 este

$$i_1 = \left(\frac{di}{dt}\right)_0 \Delta t_1.$$

Cunoscînd valoarea curentului i_1, din caracteristica *volt-amper* a elementului neliniar se deduce u_{R1}. Pentru a determina tensiunea la bornele condensatorului la sfîrşitul acestui prim interval de timp, se calculează sarcina electrică înmagazinată în acest interval de timp şi care este egală cu cea cuprinsă între curba de curent, axa timpurilor şi ordonata corespunzătoare timpului Δt_1 (fig. 11.18). Pentru primul interval, între 0 şi Δt_1, se găseşte

$$q_1 = \tfrac{1}{2}\, i_1 \Delta t_1$$

şi tensiunea la bornele condensatorului este deci

$$u_{c1} = \frac{1}{C} q_1.$$

Pentru al doilea interval de timp Δt_2, variaţia curentului va fi dată de relaţia

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_1 = \frac{1}{L}(E - u_{R1} - u_{c1}).$$

În timpul acestui interval, curentul creşte de la valoarea i_1, la valoarea

$$i_2 = i_1 + \Delta i_2,$$

în care

$$\Delta i_2 = \left(\frac{di}{dt}\right)_1 \Delta t_2 = \frac{1}{L}(E - u_{R1} - u_{C1})\,\Delta t_2.$$

În acelaşi interval de timp, sarcina electrică a condensatorului creşte cu

$$\Delta q_2 = \tfrac{1}{2}(i_1 + i_2)\,\Delta t_2 = (i_1 + \tfrac{1}{2}\,\Delta i_2)\,\Delta t_2,$$

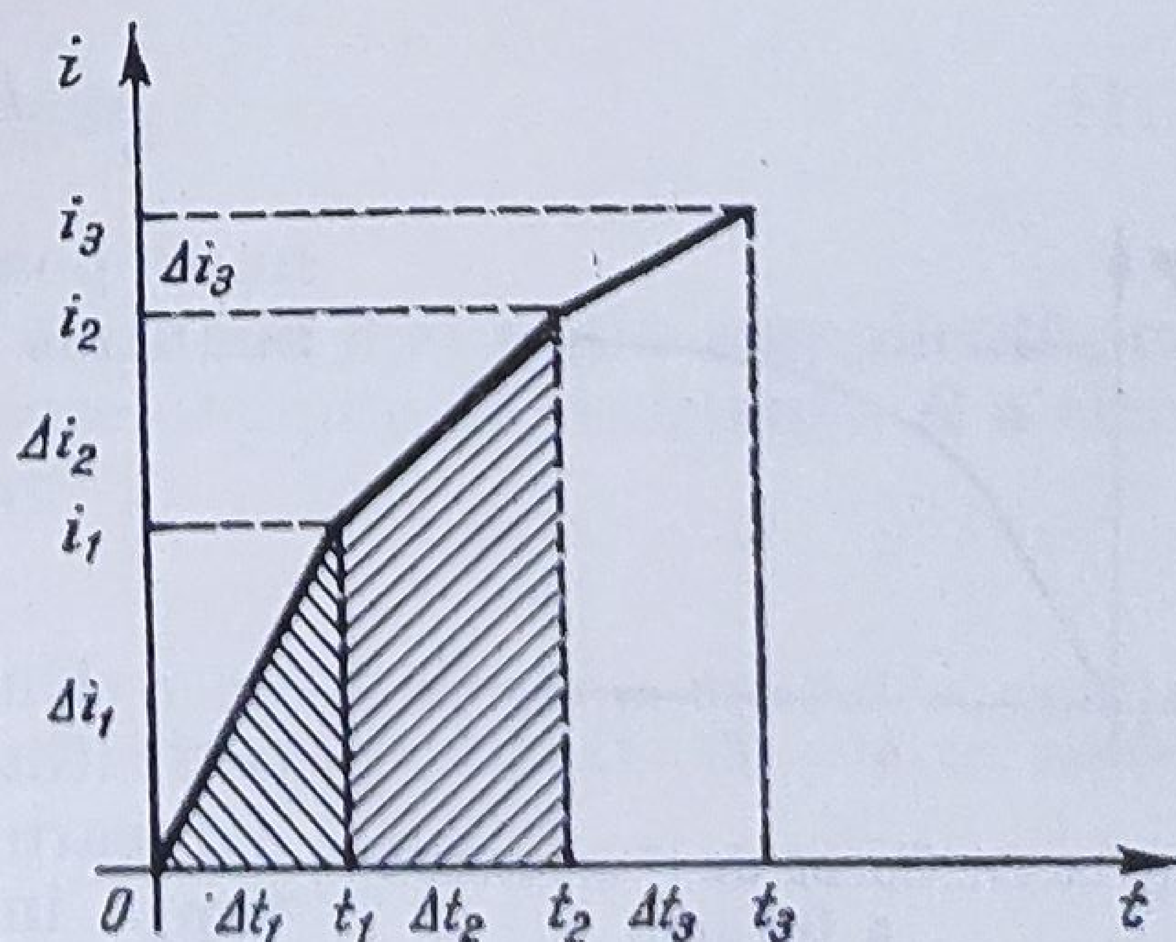


Fig. 11.18. Metoda pas cu as.

astfel, că sarcina condensatorului la sfîrşitul celui de-al doilea interval este

$$q_2 = q_1 + \Delta q_2$$

şi tensiunea la bornele condensatorului la timpul t_2 este

$$u_{e2} = \frac{1}{C} q_2.$$

Calculul urmează în acelaşi mod pentru oricîte intervale de timp Δt au fost alese; rezultatul obţinut este cu atît mai precis, cu cît intervalele de timp alese sînt mai mici.

11.2.2.7. **Exemplu de aplicaţie: Punerea bruscă sub tensiune a unui transformator funcţionînd în gol.** Elementele neliniare care apar cel mai des în sistemele energetice sînt bobinele de inductanţă cu miez de fier, reprezentate prin transformatoarele electrice, numărul acestora fiind destul de mare. Construcţia modernă a acestor transformatoare utilizează fierul magnetic în regiunea cotului de saturaţie şi chiar după acesta. În aceste condiţii, inductanţele proprii şi mutuale ale transformatoarelor nu mai sînt elemente liniare, valoarea lor depinzînd de intensitatea curentului de magnetizare a fierului.

Punerea sub tensiune a unui asemenea circuit constituie un fenomen tranzitoriu foarte complex, cu consecinţe importante în practică şi care nu se poate rezolva prin mijloace analitice directe.

S-a arătat, că în cazul închiderii unui circuit inductiv liniar, alimentat cu o tensiune electrică alternativă sinusoidală, curentul poate ajunge, la un moment dat, la o valoare maximă egală cu cel mult de două ori valoarea maximă a curentului din regimul permanent*. În cazul unui circuit neliniar — un circuit care conţine o bobină cu miez de fier putînd ajunge la saturaţie — în regimul tranzitoriu respectiv, pot apărea supraintensităţi cu mult mai mari.

Ţinînd seama că între fluxul φ care străbate bobina cu miez de fier şi curentul de excitaţie i există relaţia (3.120), care nu poate fi determinată decît experimental, prin ridicarea curbei de magnetizare a materialului (fig. 11.19), rezultă că

$$L = N\frac{\varphi}{i}$$

este o mărime neliniară şi deci ecuaţia care dă căderea de tensiune în circuit

$$Ri + N\frac{d\varphi}{dt} = U\cos\,(\omega t + \psi) \qquad (11.13)$$

nu se poate integra, deoarece nu se cunoaşte expresia analitică a funcţiei

$$\varphi = f(i).$$

Un studiu cantitativ şi calitativ al fenomenului tranzitoriu care se produce poate fi făcut numai cu oarecare aproximaţie, numai într-un interval de timp în jurul momentului producerii regimului

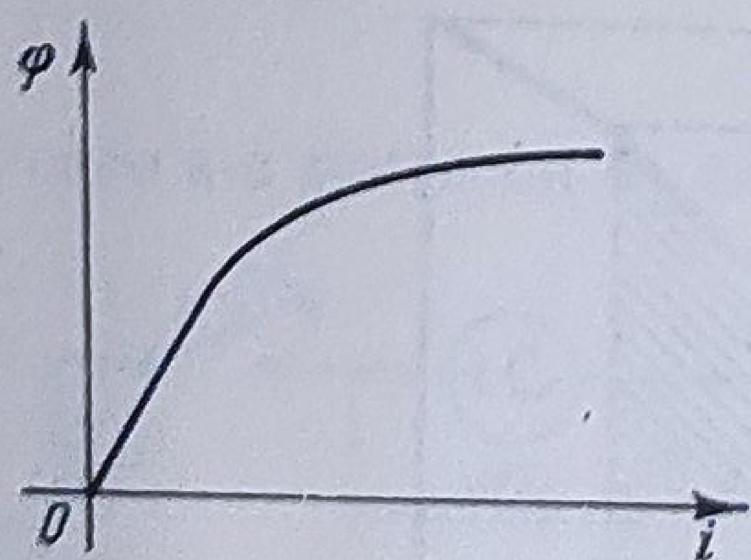


Fig. 11.19. Curbă de magnetizare a fierului.

* Vezi 10.2.2.2.

tranzitoriu ($t = 0_-$) şi dacă se neglijează căderea de tensiune în înfăşurarea transformatorului, faţă de căderea de tensiune inductivă corespunzătoare. În aceste condiţii, din ecuaţia (11.13) se deduce

$$d\varphi = \frac{U}{N} \cos (\omega t + \psi) \, dt,$$

de unde, prin integrare se obţine

$$\varphi = \frac{U}{N\omega} \sin (\omega t + \psi) + K$$

în care K este constanta de integrare.

Pentru determinarea acestei constante de integrare, observăm că la timpul $t = 0_-$, înainte de închiderea întrerupătorului, fluxul este nul sau egal cu fluxul remanent Φ_R datorit magnetizării fierului; imediat după închiderea întrerupătorului la timpul $t = 0_+$, fluxul rămîne tot nul sau egal cu fluxul remanent U întrucît el nu poate varia brusc. În consecinţă, la $t = 0$, $\varphi = 0$ şi rezultă

$$K = -\frac{U}{N\omega} \sin \psi + \Phi_R.$$

Expresia fluxului *în jurul originii* este deci,

$$\varphi = \frac{U}{N\omega} [\sin (\omega t + \psi) - \sin\psi \pm \Phi_R]. \tag{11.14}$$

După un timp suficient de lung, fluxul ia valoarea lui din regimul permanent

$$\varphi_p = \frac{U}{N\omega} \cos (\omega t + \psi); \tag{11.15}$$

termenul

$$-\frac{U}{N\varphi} \sin\psi \pm \Phi_R \tag{11.16}$$

se amortizează cu timpul după o lege mai mult sau mai puţin complicată, care nu se poate determina pe cale analitică şi care depinde de rezistenţa R a circuitului precum şi de alte cauze de amortizare* .

---

* Dacă se consideră funcţionarea transformatorului numai pe porţiunea dreaptă a caracteristicii de magnetizare, ţinînd seama că relaţia (3.120) este liniară, ecuaţia (11.13) este de asemenea liniară şi are expresia

$$N \frac{R}{L} \varphi + N \frac{d\varphi}{dt} = U \cos (\omega t + \psi)$$

Din relaţia (11.14) rezultă că, peste fluxul corespunzător regimului permanent din circuit φ_p, a cărui valoare maximă este

$$\Phi_M = \frac{U}{N\omega},$$

se suprapune fluxul aperiodic (11.16), a cărui amplitudine iniţială poate varia între zero şi $\pm(\Phi_M + \Phi_R)$, după momentul în care se face închiderea circuitului. Curba fluxului apare astfel ca o curbă deformată, a cărei valoare medie e diferită de zero, şi care poate să varieze de la Φ_R la $2\Phi_M + \Phi_R$ (fig. 11.20).

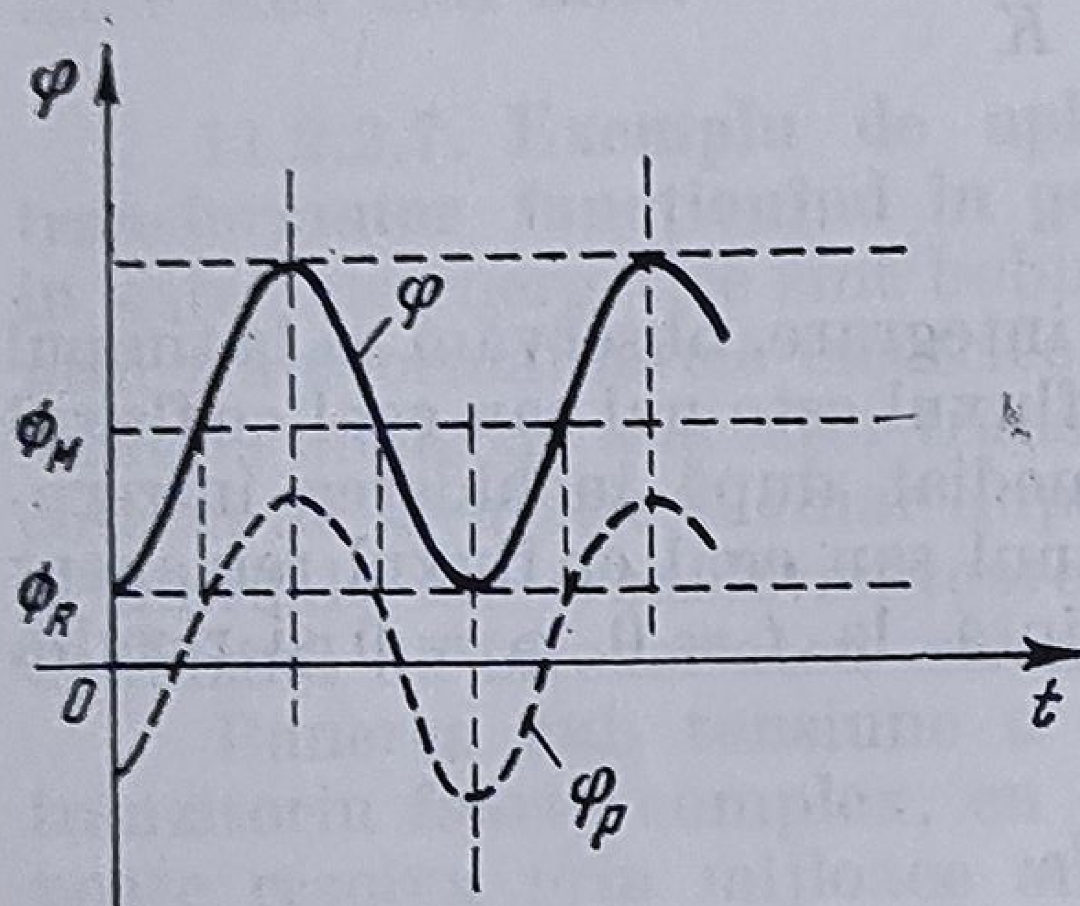


Fig. 11.20. Fluxul rezultant în transformator.

Cunoscînd curba fluxului, precum şi curba de magnetizare a fierului, curba curentului de magnetizare care se stabileşte în circuit în momentul închiderii acestuia, se determină pe o cale grafică, analoagă cu aceea cu care s-a determinat curentul permanent din circuit, în cazul cînd se ţine seama de fenomenul de histerezis din fier* . În figura 11.21 este arătată forma acestui curent în primele perioade după cuplarea transformatorului în circuit.

OBSERVAŢIE. Amplitudinea maximă a curentului de magnetizare depinde de calitatea tolelor miezului de fier. La transformatoarele moderne,

---

a cărei soluţie este

$$\varphi = \Phi_m\left(\cos(\omega t + \psi - \alpha) - \cos(\psi - \alpha)\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

în care

$$\Phi_m = \frac{LU}{N\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \qquad \text{şi} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{L\omega}{R};$$

pentru $R = 0$ se obţine

$$\Phi_m = \frac{U}{N\omega} \qquad \text{şi} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2},$$

expresia fluxului fiind în acest caz

$$\varphi = \frac{U}{N\omega}\left[\sin(\omega t + \psi) - \sin\psi\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right].$$

Comparînd această relaţie cu relaţia (11.14) se vede că, termenul liber ar trebui să conţină un factor exponenţial care să conducă la amortizarea lui, dar care nu poate fi determinat întrucît în cazul general L este neliniar; experienţa confirmă această afirmaţie.

* Vezi 9.4.2.1.

se poate obține un curent de magnetizare nominal cît mai redus, folosind tole magnetice de calitate superioară; în acest caz, curba de magnetizare (1) are un cot de saturație foarte pronunțat, ceea ce face, ca la închiderea circuitului, amplitudinea maximă a curentului tranzitoriu să fie mult mai mare decît la vechile transformatoare, construite cu tole magnetice de calitate inferioară (fig. 11.22).

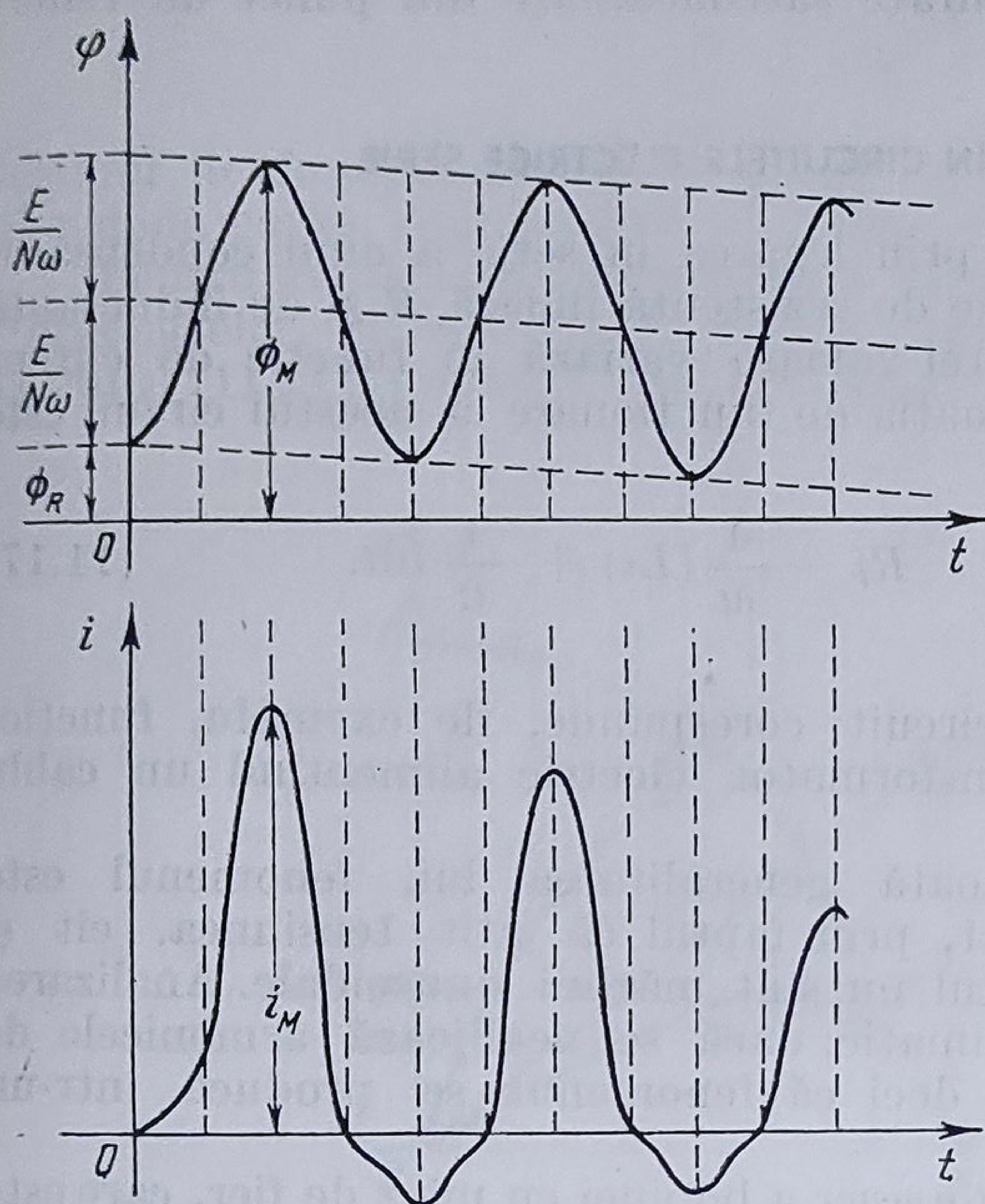


Fig. 11.21. Regimul tranzitoriu al curentului de magnetizare, la punerea în circuit a unui transformator

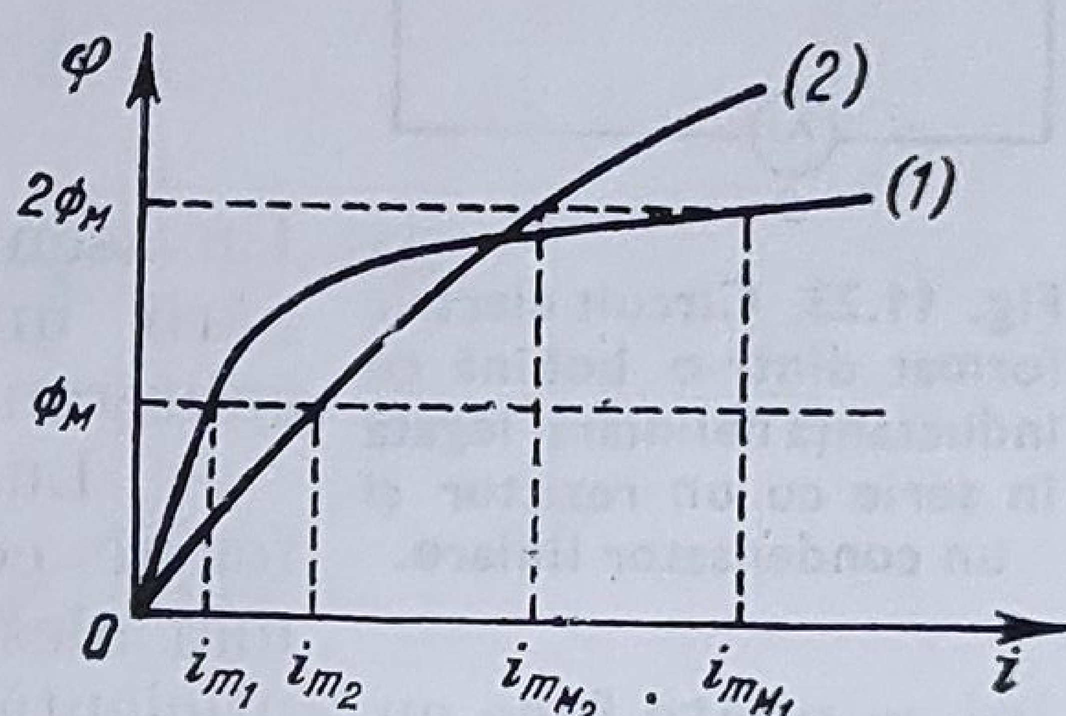


Fig. 11.22. Influența calității tolelor magnetice asupra curentului de magnetizare

11.3 FEROREZONANȚA CIRCUITELOR ELECTRICE

11.3.1. GENERALITĂȚI

În rețelele electrice, în care există simultan rezistențe electrice, reprezentate prin rezistența conductoarelor și înfășurărilor mașinilor electrice, inductanțe, reprezentate prin înfășurările transformatoarelor sau mașinilor rotative și capacități, reprezentate de capacitatea cablurilor sau a liniilor electrice, apar, în anumite condiții, fenomene de supratensiuni sau de supraintensități cu totul deosebite de acelea examinate pînă aici. Aceste fenomene se datorează în primul rînd faptului, că inductanțele din rețelele electrice, în majoritatea lor, sînt neliniare. Ele sînt cunoscute sub denumirea de *fenomene de ferorezonanță*.

Din cauza caracterului de neliniaritate a inductanțelor care apar în aceste fenomene, și fenomenul de ferorezonanță este un fenomen neliniar. Un calcul precis al acestor fenomene este imposibil de făcut, din cauza fenomenelor conexe ce apar în rețelele electrice, ca deformarea curbelor de curent și de tensiune, disimetrie etc. Se poate totuși face un studiu calitativ suficient pentru a cunoaște anomaliile funcționării unei rețele datorite fenomenelor de ferorezonanță, care, adesea, sînt mult mai periculoase decît acelea datorite

fenomenelor de rezonanţă simplă* ; aceste fenomene se traduc prin supratensiuni sau supracurenţi foarte mari, prin producerea de regim deformant în reţea, prin nestabilitatea funcţionării reţelei electrice etc.

Studiul fenomenelor de ferorezonanţă se face aplicînd metodele de calcul, indicate în paragraful 11.2, utilizînd în special metodele grafice, acestea fiind mai expeditive şi conducînd la rezultate satisfăcătoare din punct de vedere practic.

11.3.2. FEROREZONANŢA ÎN CIRCUITELE ELECTRICE SERIE

Fie un circuit electric format prin legarea în serie a unui condensator liniar de capacitate C şi a unei bobine de rezistenţă liniară R şi de inductanţă neliniară L a cărei valoare variază în funcţie de curent (fig. 11.23). Ecuaţia de funcţionare a acestui circuit este

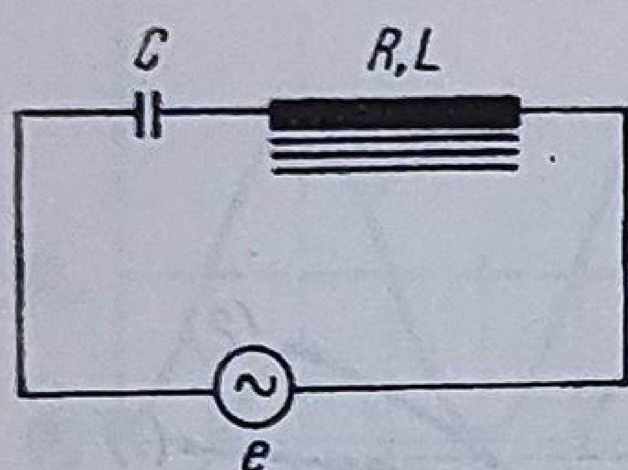


Fig. 11.23. Circuit electric format dintr-o bobină cu inductanţă neliniară, legată în serie cu un rezistor şi un condensator liniare.

$$e = Ri + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Li) + \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t. \tag{11.17}$$

Un asemenea circuit corespunde, de exemplu, funcţionării unui transformator electric alimentînd un cablu subteran.

Luat în toată generalitatea lui, fenomenul este foarte complicat, prin faptul că atît tensiunea, cît şi mai ales curentul nu sînt mărimi sinusoidale. Analizarea lui se poate face cu suficientă aproximaţie, dacă se neglijează armonicele de tensiune şi de curent, presupunînd deci că fenomenul se produce într-un regim perfect sinusoidal.

Fie $U_L = f(I)$ caracteristica *volt-amper* a bobinei cu miez de fier, care este presupusă a fi trasată la frecvenţa f a tensiunii aplicată circuitului.

Ecuaţia (11.17) poate fi scrisă în valori efective, sub forma

$$E^2 = R^2I^2 + \left(U_L - \frac{I}{C\omega}\right)^2, \tag{11.18}$$

defazajul curentului faţă de tensiune fiind dat de relaţia

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{U_L - \dfrac{I}{C\omega}}{RI}. \tag{11.19}$$

Relaţiile (11.18) şi (11.19) se deduc din diagrama fazorială de funcţionare a circuitului serie şi care se construieşte în mod obişnuit, considerînd un anumit curent I căruia îi corespunde pe diagrama *volt-amper* a elementului neliniar o tensiune la borne bine definită.

Ecuaţia (11.18) poate fi scrisă sub forma

$$E^2 - R^2I^2 = \left(U_L - \frac{I}{C\omega}\right)^2 = U^2,$$

* Vezi 4.3.8.

de unde, rezultă că ea poate fi descompusă în sistemul

$$U = \left| U_L - \frac{I}{C\omega} \right| \tag{11.20}$$

$$U = \sqrt{E^2 - R^2 I^2}. \tag{11.21}$$

Regimul de funcţionare al sistemului corespunde punctelor de intersecţie a celor două curbe, reprezentate de aceste ecuaţii.

Pentru aceasta se construieşte o diagramă luîndu-se tensiunea U, ca axă a ordonatelor, şi curentul I, ca axă a absciselor, în care se trasează curbele (11.20) şi (11.21). Curba (11.20) se obţine trasînd, în valori absolute, diferenţele

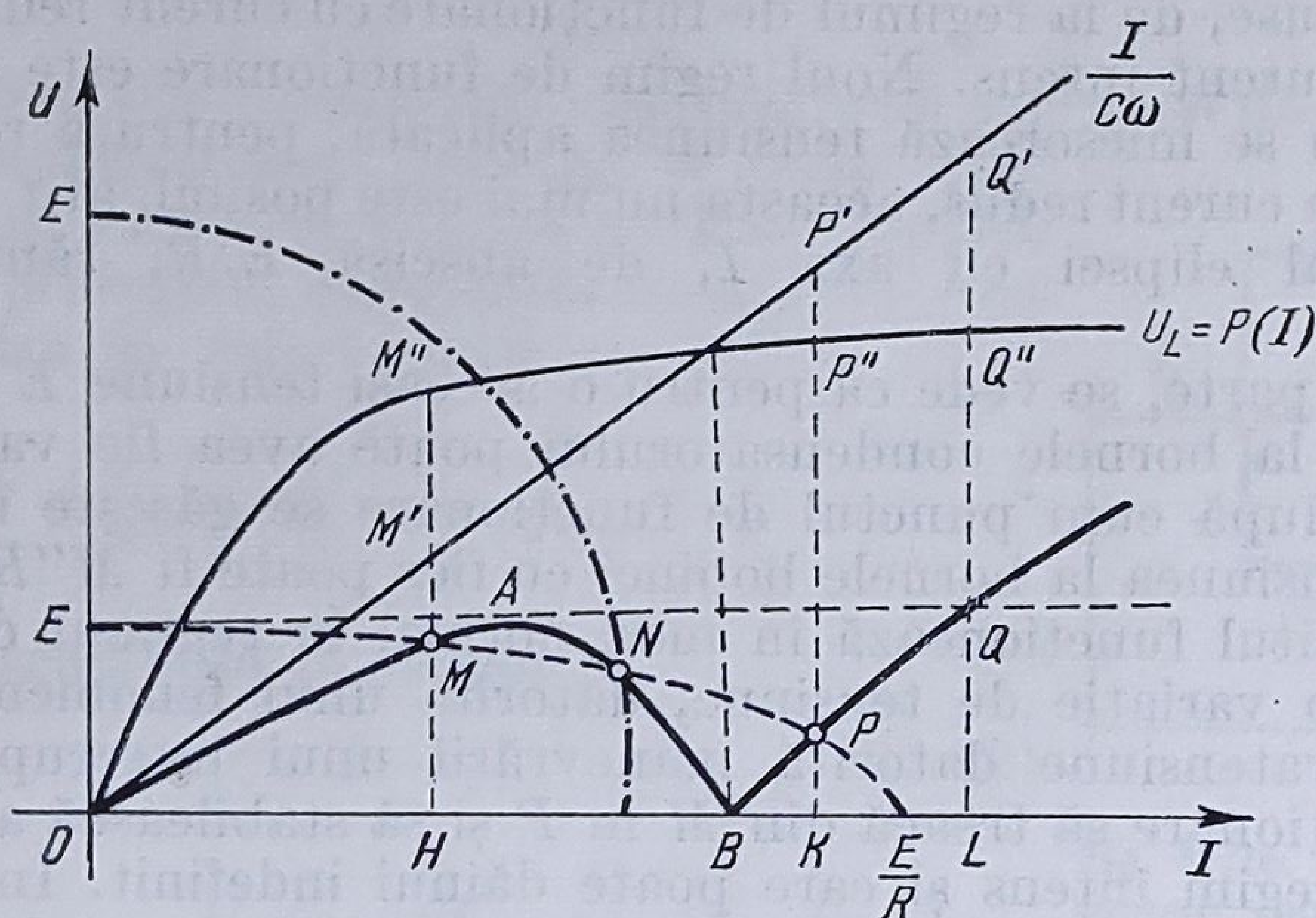


Fig. 11.24. Studiul grafic al ferorezonanţei într-un circuit electric serie.

dintre caracteristica *volt-amper* a inductanţei şi dreapta $(I/C\omega)$. Această curbă, pornind din origine, trece printr-un maxim, corespunzînd cotului de saturaţie a caracteristicii U_L, trece apoi din nou prin zero în punctul B, corespunzînd intersecţiei dintre dreapta $(I/C\omega)$ şi caracteristica U_L şi curba creşte apoi din nou către infinit (fig. 11.24).

Ecuaţia (11.21) reprezintă un arc de elipsă cu centrul în origine şi vîrfurile pe axe, şi care intersectează axa ordonatelor în punctul de ordonată maximă E şi axa absciselor în punctul de abscisă maximă E/R.

În general, arcul de elipsă intersectează curba (11.20) în trei puncte distincte M, N şi P. Punctul M, cuprins în partea ascendentă OA a curbei (11.20) corespunde unui punct de funcţionare stabilă şi care se numeşte punctul de funcţionare în regim de curent redus.

În adevăr, pentru o creştere a sarcinii (curentul I) corespunde imediat şi o creştere a tensiunii şi deci echilibrul se restabileşte.

Pe toată această parte a curbei (11.20), tensiunea la bornele bobinei de U_L este mai mare decît tensiunea la bornele condensatorului $I/C\omega$; rezultă $\text{tg}\varphi > 0$ şi deci curentul este în *urma* tensiunii.

Punctul de funcţionare N corespunde unui regim în general nestabil, căci pe toată porţiunea AB a curbei (11.20), la o creştere a sarcinii, corespunde o scădere a tensiunii ; sistemul se comportă ca o impedanţă negativă.

Al treilea punct de funcţionare P, care reprezintă un nou regim de funcţionare stabilă, se numeşte punctul de funcţionare în regim de curent intens. Pentru acest punct $U_L < \frac{I}{C\omega}$; rezultă $\mathrm{tg}\,\varphi < 0$ şi deci curentul este *înaintea* tensiunii.

Fie un asemenea circuit căruia i se aplică la borne o tensiune foarte mică, care este mărită progresiv. Arcul de elipsă (11.21), nul atunci cînd tensiunea aplicată este nulă, creşte progresiv rămînînd asemenea cu el însuşi. Punctul de funcţionare M porneşte din origine şi se deplasează pe curba (11.20) descriind ramura OA, pînă în punctul A ce corespunde unei tensiuni aplicată E care face ca arcul de elipsă să fie tangent curbei (11.20). Dacă se creşte acum tensiunea cu o valoare oricît de mică, astfel încît arcul de elipsă să depăşească maximul A al curbei (11.20), şi dacă se presupune că rezistenţa R nu este prea mare, punctul de funcţionare M trece de pe ramura OA pe ramura BC. Se trece astfel, în mod brusc, de la regimul de funcţionare cu curent redus, la regimul de funcţionare cu curent intens. Noul regim de funcţionare este un regim stabil.

Dacă acum se micşorează tensiunea aplicată, pentru a reveni la regimul de funcţionare cu curent redus, aceasta nu mai este posibil, atît timp cît punctul de intersecţie al elipsei cu axa I, de abscisă E/R, rămîne în dreapta punctului B.

Pe de altă parte, se vede că pentru o aceeaşi tensiune E aplicată circuitului, tensiunea la bornele condensatorului poate avea fie valoarea $M'H$, fie valoarea $P'K$, după cum punctul de funcţionare se găseşte în M sau în P; de asemenea, tensiunea la bornele bobinei cu fier poate fi $M''H$ sau $P''K$.

Dacă circuitul funcţionează în mod normal în regimul de curent redus, este suficientă o variaţie de tensiune, datorită unui fenomen tranzitoriu, de exemplu o supratensiune datorită manevrării unui întrerupător, pentru ca punctul de funcţionare să treacă din M în P şi să stabilească astfel, regimul de funcţionare în regim intens şi care poate dăinui indefinit. În aceste condiţii, tensiunea la bornele condensatorului şi la bornele bobinei trece brusc de la valorile $M'H$, respectiv $M''H$, la valorile $P'K$, respectiv $P''K$; supratensiunea ce apare poate fi foarte mare şi ea poate dura atît timp, cît circuitul nu sufere o modificare importantă.

Acesta este fenomenul de ferorezonanţă.

În teoria făcută în cele ce preced au fost neglijate armonicile superioare, precum şi pierderile datorite magnetizării fierului. Dacă trecem la cazul real, atunci caracteristica de funcţionare a circuitului capătă forma indicată în figura 11.25 cu linie continuă. Din examinarea acestei caracteristici se vede că sistemul funcţionînd la limită (punctul A de funcţionare), se produce o supratensiune oarecare, punctul de funcţionare sare în punctul Q, pe a doua ramură de funcţionare stabilă, curentul crescînd brusc în circuit. Pentru orice creştere de tensiune ulterioară, curentul creşte de asemenea. Dacă se micşorează tensiunea, curentul scade continuu pînă în punctul S al caracteristicii după care, la o scădere oricît de mică a tensiunii, punctul de funcţio-

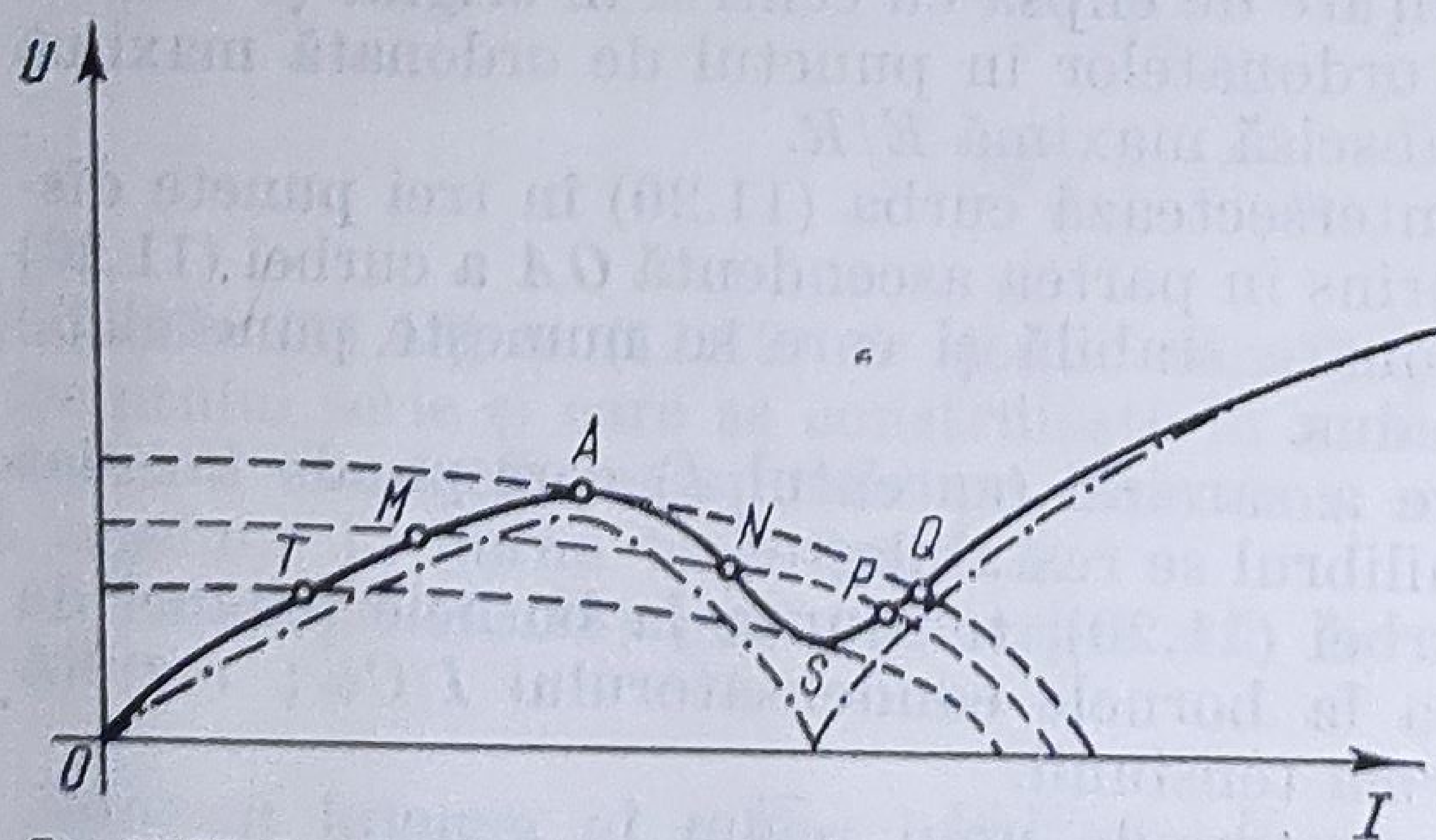


Fig. 11.25. Caracteristica circuitului ferorezonant cînd se ţine seama de armonicile superioare şi de pierderi.

nare a circuitului să sară în punctul T, apărînd astfel o scădere bruscă a curentului în circuit. Discontinuităţile corespunzătoare de curent sînt însoţite de schimbarea semnului defazării în circuit.

11.3.3. FEROREZONANŢA ÎN CIRCUITELE ELECTRICE DERIVAŢIE

Studiul fenomenului de ferorezonanţă într-un circuit electric derivaţie, format dintr-o bobină cu fier legată în paralel cu un rezistor şi cu un condensator (fig. 11.26) se studiază în acelaşi mod ca şi în circuitul serie.

Ecuaţia de funcţionare a acestui circuit este

$$i_c = \frac{U}{R} + \frac{1}{L}\int u\,dt + C\frac{du}{dt};$$

neglijînd şi în acest caz armonicile superioare de curent şi de tensiune, precum şi pierderile suplimentare, dacă $I_L = \varphi(U)$ este caracteristica *volt-amper* a bobinei cu fier, trasată la frecvenţa f şi presupusă cunoscută, ecuaţia de mai sus poate fi scrisă în valori efective:

$$I_t^2 = \frac{U^2}{R^2} + (I_L - C\omega U)^2,$$

care poate fi descompusă în sistemul

$$I = |C\omega U - I_L|, \qquad (11.22)$$

$$I = \sqrt{I_t^2 - \frac{U^2}{R^2}}. \qquad (11.23)$$

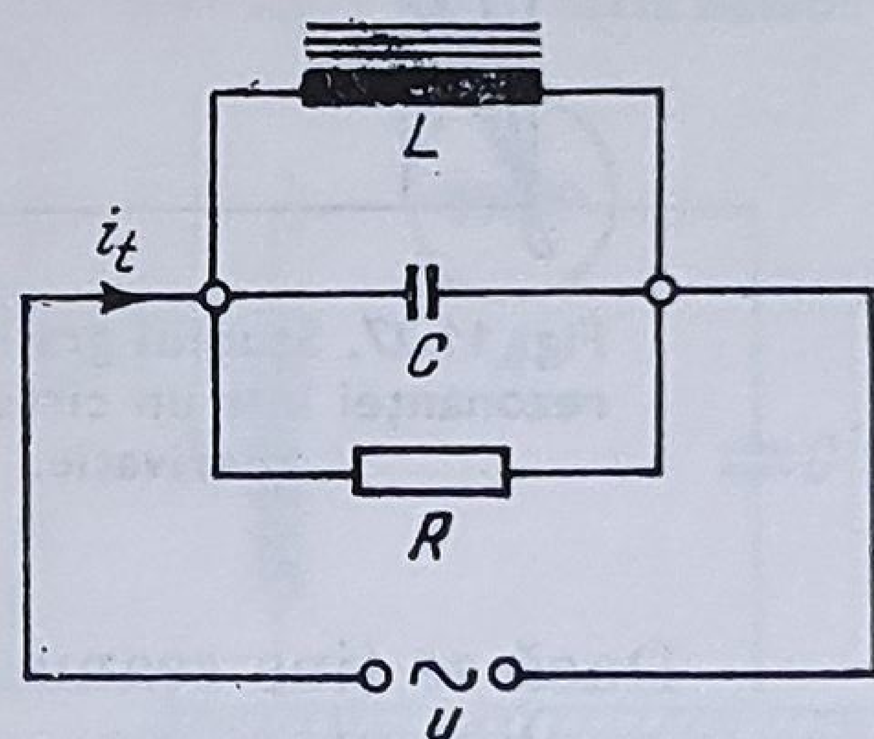


Fig. 11.26. Circuit electric format dintr-o bobină de inductanţă neliniară în derivaţie cu un rezistor şi un condensator liniare.

Defazajul curentului faţă de tensiune este dat de relaţia

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{R(I_L - C\omega U)}{U}.$$

Punctele de funcţionare ale sistemului sînt date de intersecţiile curbelor (11.22) şi (11.23). Prima dintre aceste curbe reprezintă variaţia, în valoare absolută, a diferenţei dintre ordonatele caracteristicei $I_L = \varphi(U)$ şi dreapta $C\omega U$, iar a doua, reprezintă un arc de elipsă cu centrul în origine, intersectînd axele în vîrfurile sale $(0, I_t)$ şi $(R\,I_t, 0)$, (fig. 11.26).

În cazul general curba (11.22) este intersectată de arcul de elipsă (11.23) în trei puncte M, N şi P. Punctul M, cuprins în regiunea OA a curbei (11.22) corespunde funcţionării stabile, pentru care $\operatorname{tg}\psi < 0$ şi deci curentul este defazat înaintea tensiunii; punctul P, cuprins în regiunea BC a curbei (11.22) corespunde unui al doilea regim stabil de funcţionare, în care însă curentul este defazat în urma tensiunii; punctul N, care se găseşte în regiunea AB a curbei (11.22) corespunde în general unei funcţionări nestabile.

Deci, impedanţa rezultantă a unui asemenea circuit poate lua două valori diferite după modul de funcţionare a circuitului: în cazul cînd circuitul funcţio-

nează la limita de stabilitate (punctul A pe figura 11.27), un fenomen tranzitoriu oarecare, care poate produce o supraintensitate sau o supratensiune oarecare, poate face ca punctul de funcţionare M (funcţionare capacitivă subexcitată) să treacă în punctul P (funcţionare inductivă supraexcitată).

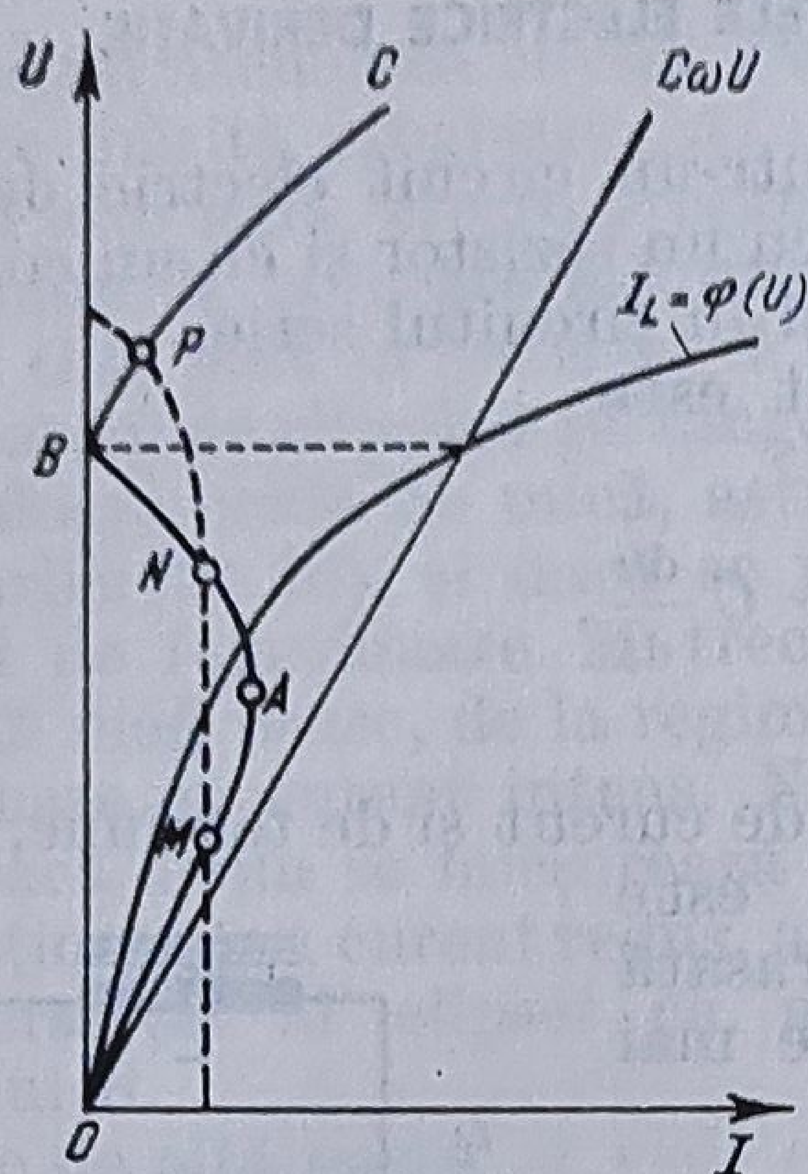


Fig. 11.27. Studiul grafic al ferorezonanţei într-un circuit electric derivaţie.

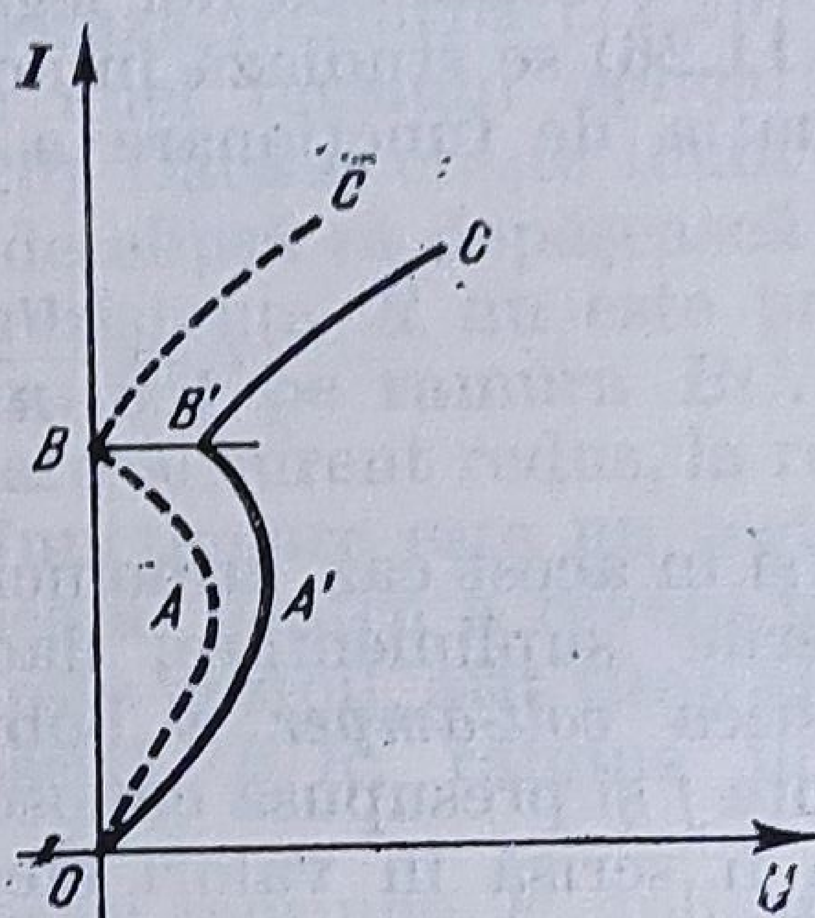


Fig. 11.28. Caracteristica fenomenului ferorezonant în circuitul derivaţie cînd se ţine seama de armonicile superioare şi de pierderi.

Dacă se ţine seama de existenţa armonicilor superioare precum şi de pierderile suplimentare, caracteristica de funcţionare a circuitului capătă forma din figura 11.28. Rezultă dar, că întocmai ca şi în cazul circuitului serie, la creşterea sau la micşorarea curentului se vor produce discontinuităţi însoţite de modificarea defazajului dintre tensiune şi curent, în circuitul respectiv.

11.3.4. CARACTERISTICILE FENOMENULUI DE FEROREZONANŢĂ

Fenomenul de ferorezonanţă se deosebeşte fundamental de rezonanţa obişnuită, atît prin modul de producere cît şi prin condiţiile care îl provoacă. Din studiul făcut în paragrafele precedente rezultă :

a) Rezonanţa obişnuită se produce în cazul cînd este îndeplinită condiţia $LC\omega^2 - 1 = 0$. Ferorezonanţa poate să se producă chiar în cazul cînd caracteristicile inductanţei şi capacităţii sînt foarte diferite unele de altele. Pentru ca să se producă un fenomen de ferorezonanţă este necesar ca dreapta $\frac{I}{C\omega}$ să intersecteze caracteristica $U_L = f(I)$, adică valoarea reactanţei capacitive să fie cuprinsă între valorile extreme ale reactanţei inductive a bobinei, înainte şi după saturaţie. Domeniul periculos al ferorezonanţei este cu mult mai întins decît acel al rezonanţei obişnuite.

b) În cazul unei rezonanţe obişnuite, intensitatea curentului în circuit este limitată de rezistenţa R a acestuia ; în cazul ferorezonanţei, această rezistenţă nu are decît un rol secundar ; saturaţia circuitului magnetic produce supratensiunea, limitînd în acelaşi timp şi amplitudinea acesteia. Într-adevăr, dacă $R = 0$, atunci arcul de elipsă (11.21) se înlocuieşte cu tangenta în origine la elipsă şi punctul de funcţionare trece din P în Q (fig. 11.24), astfel, că tensiunea la bornele condensatorului nu depăşeşte tensiunea LQ'.

c) În rezonanța obișnuită, regimul tranzitoriu face ca valoarea periculoasă să fie atinsă după un anumit timp, depinzînd de constanta de timp a circuitului; în cazul ferorezonanței supratensiunea se produce brusc și apare cu toată valoarea ei la cea mai mică creștere a tensiunii peste tensiunea critică.

d) Aceleași considerații sînt valabile și în cazul fenomenului de ferorezonanță care apare în circuitele derivație.

11.3.5. EXEMPLE DE FENOMENE DE FEROREZONANȚĂ

11.3.5.1. **Considerații generale.** Fenomenele de ferorezonanță nu pot fi prevăzute și ele apar în rețeaua electrică datorită unor circumstanțe fortuite, producînd astfel fenomene de supratensiuni, supracurenți, modificări de impedanțe etc. Cazurile de ferorezonanță de acest fel apar destul de rar în rețelele electrice, de aceea ele sînt semnalate și urmărite cu mult interes.

În afară de acestea, fenomenul de ferorezonanță este utilizat și pentru realizarea de aparate sau dispozitive avînd diferite utilizări tehnice cum sînt stabilizatoarele de tensiune, multiplicatoare de frecvență etc.

În cele ce urmează se vor da cîteva exemple de fenomene de ferorezonanță, întîmplate în practică precum și modul cum se poate realiza un stabilizator ferorezonant de tensiune.

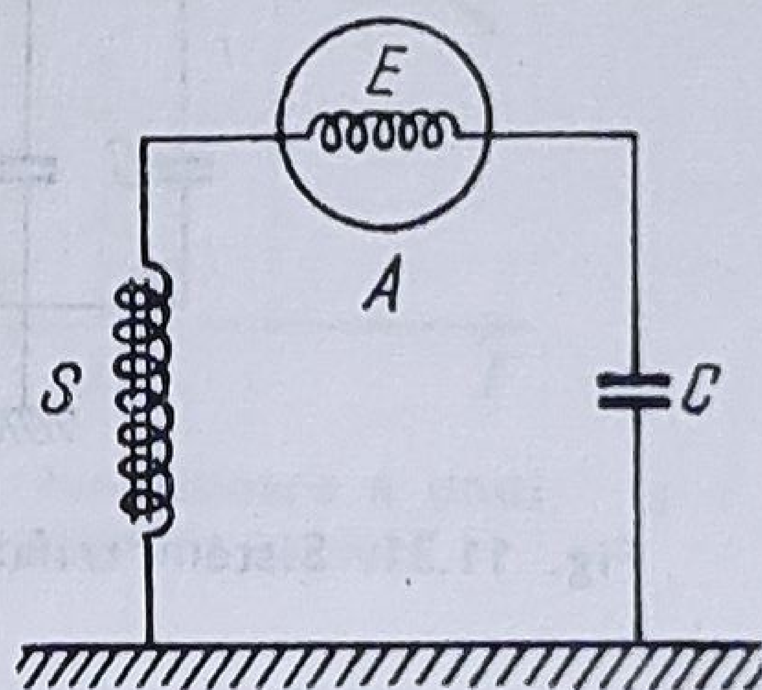


Fig. 11.29. Schema unui circuit ferorezonant serie, obținută prin punerea la pămînt a unei faze a unui cablu armat.

11.3.5.2 **Cabluri armate.** Un cablu armat poate fi considerat ca o inductanță cu fier, acesta fiind constituit din armătura de oțel de protecție. În cazul unei centrale electrice, avînd punctul neutru izolat de pămînt, care debitează pe un număr mare de cabluri subterane legate în paralel, dacă o fază a unui cablu se pune la pămînt, circuitul echivalent al rețelei poate fi reprezentat prin schema din figura 11.29.

În această schemă, bobina cu miez de fier S reprezintă inductanța circuitului constituită de faza avariată a cablului armat și din pămînt care servește ca conductor de întoarcere; circuitul este alimentat de alternatoarele A și curenții produși se închid la pămînt prin capacitatea C a celorlalte faze.

S-a calculat că, în acest caz, deși lungimea cablului nu atingea valori prea mari, totuși tensiunea ce apărea la bornele capacității C atingea valori de 4—5 ori tensiunea normală a instalației.

11.3.5.3. **Transformatoare de tensiune.** Un transformator de tensiune este un element, care poate produce cu multă ușurință fenomene de ferorezonanță. În adevăr, asemenea aparate funcționează cu înfășurarea secundară deschisă, sau închisă pe o impedanță foarte mare, constituind astfel o încărcare extrem de redusă; în aceste condiții, înfășurarea de înaltă tensiune constituie bobine cu miez de fier cu o inductanță foarte mare, capabilă să intre în rezonanță cu capacități mici.

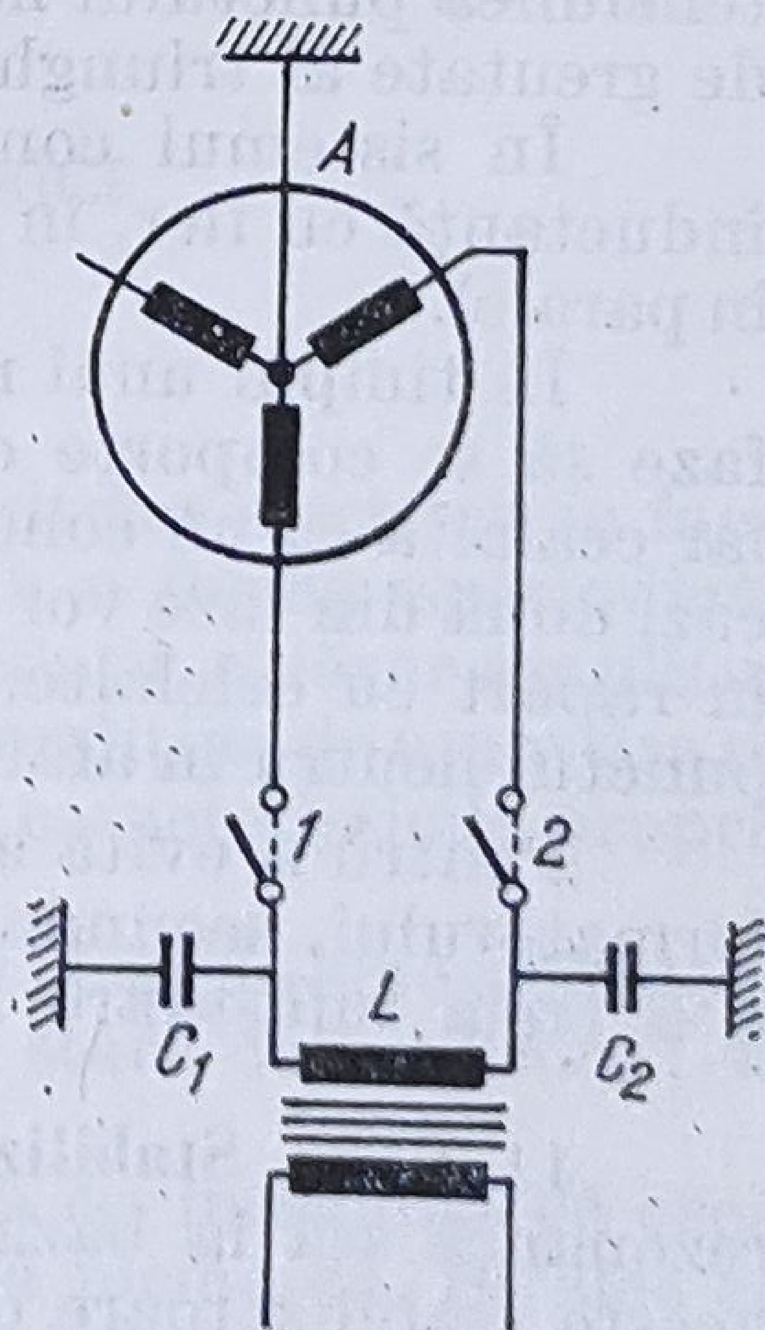


Fig. 11.30. Circuit ferorezonant al unui transformator de tensiune în cazul închiderii nesimultane a separatoarelor 1 și 2.

Fie un asemenea transformator, legat la bornele unui alternator trifazat, avînd neutrul legat la pămînt (fig. 11.30). În cazul cînd capacitățile C_1 și C_2

ale legăturilor cuprinse între transformator şi separatoarele *1* şi *2* sînt suficiente, o ferorezonanţă poate apărea foarte uşor, dacă se închide unul din separatoare, spre exemplu *1*, al doilea separator rămînînd deschis : regimul tranzitoriu de încărcare prin circuitul LC_2 poate fi suficient pentru a produce fenomenul de ferorezonanţă şi a provoca astfel supratensiuni importante la bornele condensatorului C_2.

11.3.5.4. **Deplasarea punctului neutru al unei reţele trifazate.** Fie un transformator trifazat, cuplat în stea ; secundarul acestui transformator este de asemenea legat în stea, iar punctul neutru al înfăşurării primare este legat la

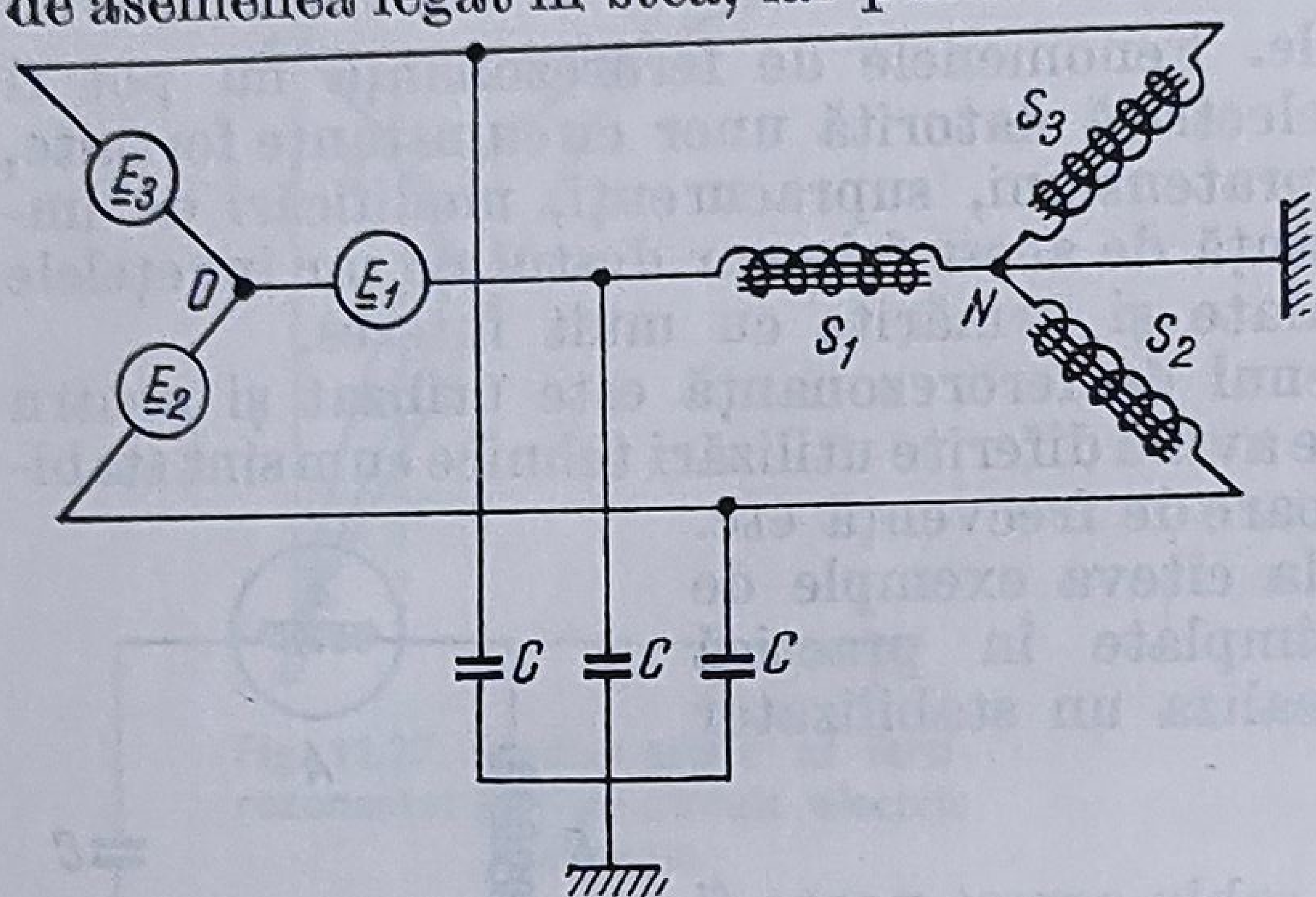


Fig. 11.31. Sistem trifazat alternator-transformator.

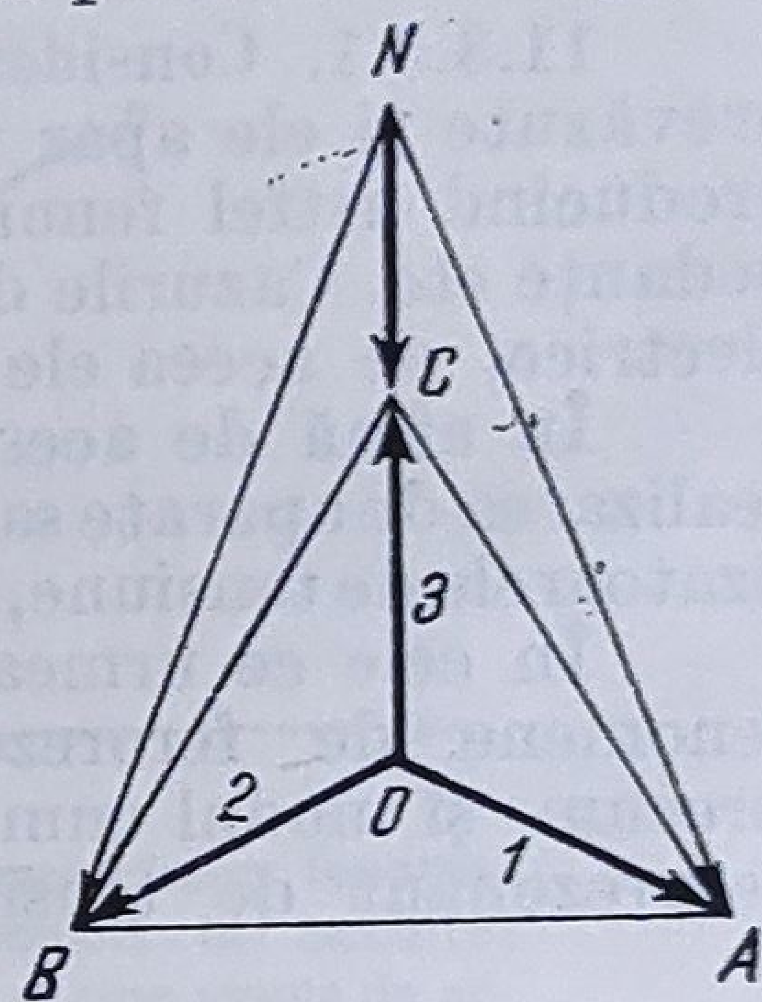


Fig. 11.32. Diagrama tensiunilor.

pămînt. Transformatorul este legat la un alternator simetric şi echilibrat, prin intermediul unor conductori care au fiecare aceeaşi capacitate C faţă de pămînt. Punctul neutru al alternatorului este izolat faţă de pămînt (fig. 11.31).

Dacă impedanţele aparente ale celor trei faze ale sistemului sînt identice, tensiunea punctului neutru al sistemului e nulă şi acesta se confundă cu centrul de greutate al triunghiului tensiunilor la borne.

În sistemul considerat, însă fiecare din impedanţe este formată din o inductanţă cu fier, în paralel cu o capacitate şi formează sisteme ferorezonante în paralel.

În timpul unui regim tranzitoriu oarecare, se poate întîmpla ca două din faze să se comporte ca inductanţe (funcţionarea în punctul M'', figura 11.24), iar cealaltă ca un condensator (funcţionarea în punctul M, figura 11.24). În acest caz, două din faze vor fi astfel supraexcitate, iar a treia subexcitată şi inversată în raport cu celelalte. Diagrama tensiunilor pe fază va avea de data aceasta punctul neutru în afara triunghiului (fig. 11.32).

Pentru a evita acest fenomen care produce supratensiuni pe fazele transformatorului, secundarul transformatorului se leagă în triunghi, sau se prevede o a treia înfăşurare legată în triunghi.

11.3.5.5. **Stabilizatoare de tensiune, feromagnetice.** Fenomenul de ferorezonanţă stă la baza construirii stabilizatoarelor de tensiune feromagnetice ; aceste stabilizatoare de tensiune servesc la menţinerea unei tensiuni constante la bornele unui receptor atunci cînd tensiunea la bornele de alimentare variază. Stabilizatoarele de tensiune feromagnetică pot fi realizate fie utilizînd fenomenul de ferorezonanţă din circuitele serie, fie fenomenul de ferorezonanţă din circuitele derivate, schemele de montaj fiind mai mult sau mai puţin complicate.

Schema de principiu a unui stabilizator de tensiune ferorezonant — funcționînd pe principiul ferorezonanței din circuitele serie — este dată în figura 11.32, iar diagrama de funcționare a acestui circuit este dată în figura 11.33.

Funcționarea acestui stabilizator se bazează pe faptul că punctul de funcționare P a circuitului se găsește pe ramura ascendentă a curbei $OABC$, pentru care fierul bobinei de inductanță este foarte saturat. Unei variații mari a tensiunii U_1 aplicată la bornele circuitului, îi corespunde o variație mare a curentului I din circuit — și deci și a curentului I_L din circuitul inductanței. Din figura 11.34 se vede ușor că acestei variații de curent I în jurul valorii nominale I_L a curentului de funcționare a dispozitivului are drept consecință o variație de

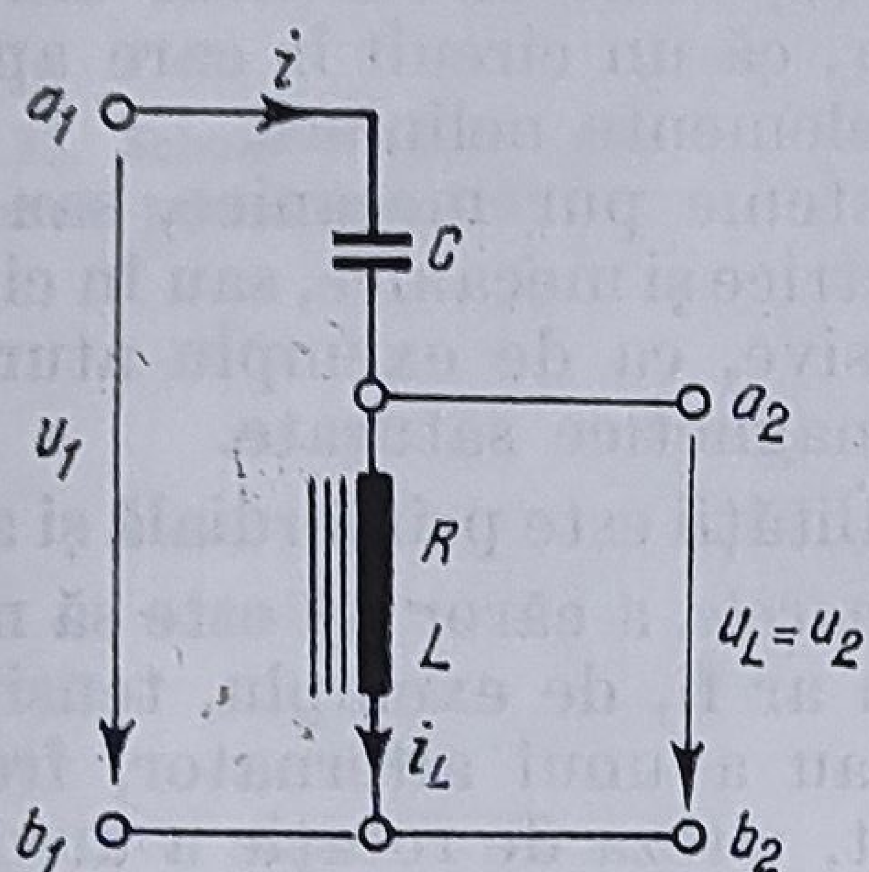


Fig. 11.33. Schema de principiu a unui stabilizator ferorezonant serie.

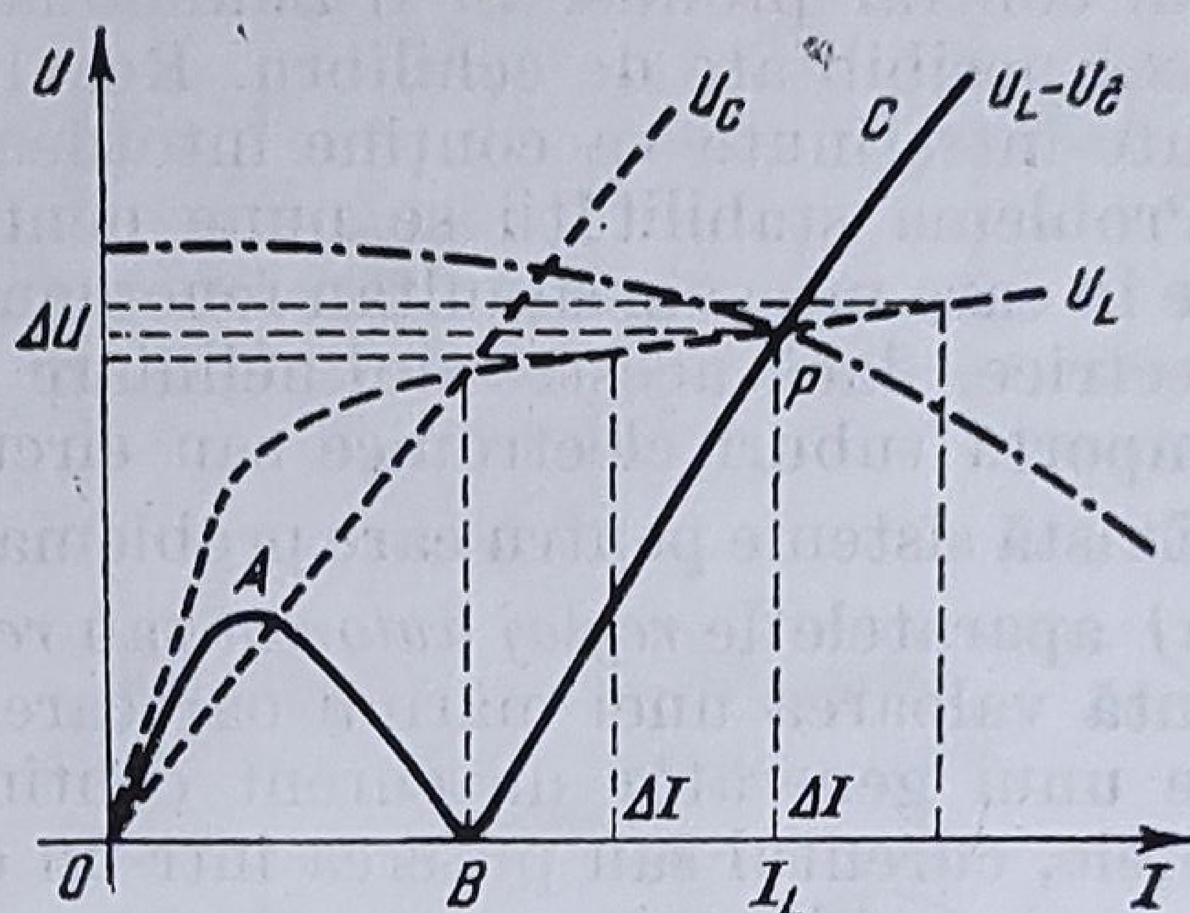


Fig. 11.34. Diagrama de funcționare a unui stabilizator ferorezonant serie.

tensiune ΔU, la bornele de ieșire, foarte mică în raport cu tensiunea nominală de utilizare U_2.

Există numeroase scheme de stabilizatoare de tensiune ferorezonante, bazate fie pe fenomenul de rezonanță serie, fie pe acela de rezonanță derivație; descrierea lor iese din cadrul acestei lucrări.

11.4. STABILITATEA CIRCUITELOR ELECTRICE

11.4.1. GENERALITĂȚI

Schimbarea caracteristicilor de funcționare ale circuitelor electrice se face trecînd printr-un regim tranzitoriu. Acesta apare fie sub o formă aperiodică, fie sub o formă de oscilații periodice amortizate, adică oscilații a căror amplitudine scade cu timpul, după o lege exponențială oarecare. Condițiile de amortizare și periodicitatea fenomenului oscilant nu depind, decît de caracteristicile proprii ale circuitului și deloc de acțiunile exterioare.

Cînd un circuit a fost scos din starea lui de echilibru și lăsat de-sine-stătător, tinde după un oarecare interval de timp, să revină la o stare de echilibru; se zice că circuitul este stabil.

Sînt cazuri însă, în care circuitul nu este stabil, ceea ce înseamnă că oscilațiile sale în jurul poziției de echilibru nu se amortizează niciodată. Se zice că regimul tranzitoriu creează un sistem de *oscilații autoîntreținute*. Aceste oscilații sînt caracterizate prin faptul că ele singure creează și controlează forțele electromotoare care le întrețin; bineînțeles că o oscilație autoîntreținută nu poate exista fără o sursă exterioară de energie, însă pulsația sa este independentă de pulsația acestei surse, care dealtfel poate fi chiar constantă.

Un sistem auto-întreţinut poate fi considerat ca un sistem oscilant posedînd un *amortisment negativ*, lucrurile petrecîndu-se ca şi cum în circuit există o *impedanţă negativă* ceea ce nu se poate realiza decît dacă circuitul conţine elemente neliniare. Dacă circuitul ar conţine numai elemente liniare, cum noţiunea de impedanţă implică o proporţionalitate între curent şi diferenţa de potenţial, rezultă că amplitudinea oscilaţiilor amorsate ar deveni infinit mari. În adevăr, pentru ca să se stabilească un regim stabil de oscilaţii este necesar să existe un echilibru între energia consumată în circuit şi aceea produsă de cauza de amortizare negativă : dacă cei doi factori de amortizare, unul pozitiv şi celălalt negativ ar fi liniari, cu alte cuvinte, cele două forţe electromotoare de semn contrar produse ar fi amîndouă proporţionale cu curentul din circuit, nu există posibilitate de echilibru. Rezultă dar, că un circuit în care apar oscilaţii auto-întreţinute va conţine întotdeauna elemente neliniare.

Problema stabilităţii se pune pentru sisteme pur mecanice, sau pentru sisteme în care intervin simultan fenomene electrice şi mecanice, sau în circuitele pur electrice, dacă acestea sînt neliniare şi pasive, ca de exemplu atunci cînd ele comportă tuburi electronice sau circuite magnetice saturate.

Există sisteme pentru care problema stabilităţii este primordială şi anume :

a) aparatele de *reglaj automat* sau *regulatoarele*, a căror rol este să menţină constantă valoarea unei mărimi oarecare, cum ar fi, de exemplu, tensiunea la bornele unui generator de curent continuu sau a unui alternator, frecvenţa unei reţele, curentul sau puterea într-un circuit, viteza de rotaţie a unui motor sau a unei turbine etc.

b) aparatele de *telecomandă aservită*, destinate să modifice la distanţă poziţia sau regimul de funcţionare a unui aparat receptor, cu o cantitate conformă cu ordinul dat.

Atît regulatoarele, cît şi aparatele de telecomandă constituie *servomecanisme*. Astfel, în cazul regulatoarelor, perturbaţia este, în general, accidentală şi scopul aparatului este să aducă mărimea reglată la valoarea ei fixată, fie că perturbaţia a fost pasageră sau de durată. Pentru ca reglajul să fie *stabil*, este necesar ca abaterea accidentală dintre valoarea fixată a mărimii şi valoarea instantanee a acesteia să tindă să se anuleze de la sine ; revenirea la echilibru se face aperiodic sau oscilant ; în acest din urmă caz, amplitudinea oscilaţiilor trebuie să fie cît mai mică posibil. Calitatea unei reglări se apreciază prin durata minimă a reducerii *abaterii de reglaj* sub o anumită limită şi a micimii amplitudinilor de reglaj.

Studiul servomecanismelor iese din cadrul acestei lucrări* ; este necesar totuşi să fie date unele precizări sumare necesare studiului stabilităţii însăşi.

Un servomecanism de reglaj sau de telecomandă are un circuit funcţional format din următoarele elemente (fig. 11.35):

— *circuitul de acţiune* format din unul sau mai multe elemente intercalate între *organul de comandă* care dă *ordine* şi *organul de execuţie*, care se conformează ordinelor primite.

— *circuitul de reacţie*, care stabileşte o legătură între organul de execuţie şi organul de comandă în scopul de a modifica în sensul necesar ordinele primite în raport cu rezultatul urmărit.

Instabilitatea unui servomecanism se produce, în general, din cauza închiderii circuitului de reacţie.

---

* Vezi [80] pag. 9.

Ca un exemplu de sistem de reglaj, asimilabil unui servomecanism să considerăm reglajul tensiunii la bornele unui alternator (fig. 11.36) : prin variația reostatului de cîmp a excitatoarei, (elementul de comandă) se produce variația curentului de excitație a excitatoarei, deci a tensiunii la bornele sale (prima amplificare), deci a curentului de excitație a alternatorului (a doua amplificare), ceea ce conduce la variația tensiunii la bornele alternatorului

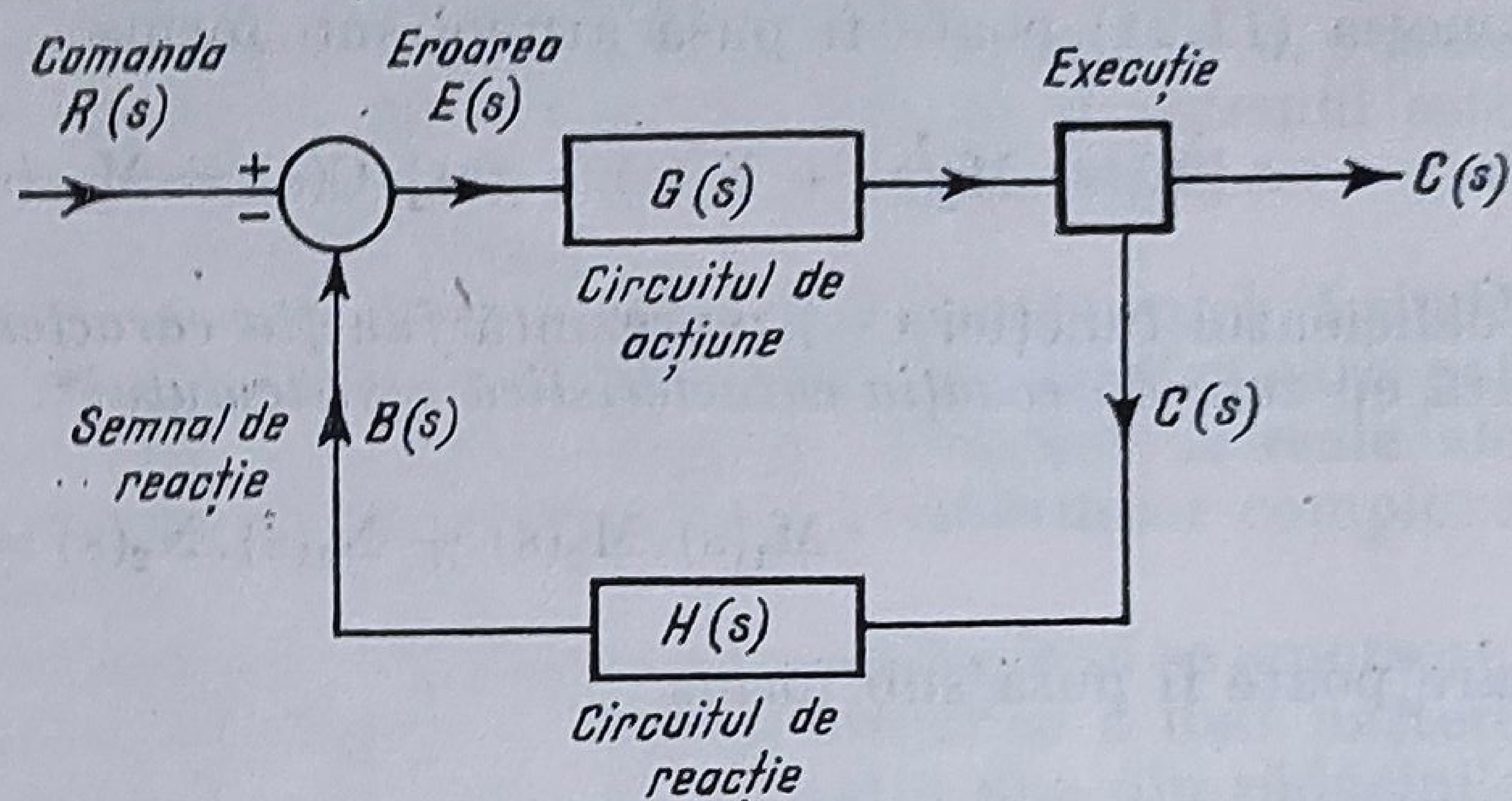


Fig. 11.35. Schema funcțională a unui servomecanism.

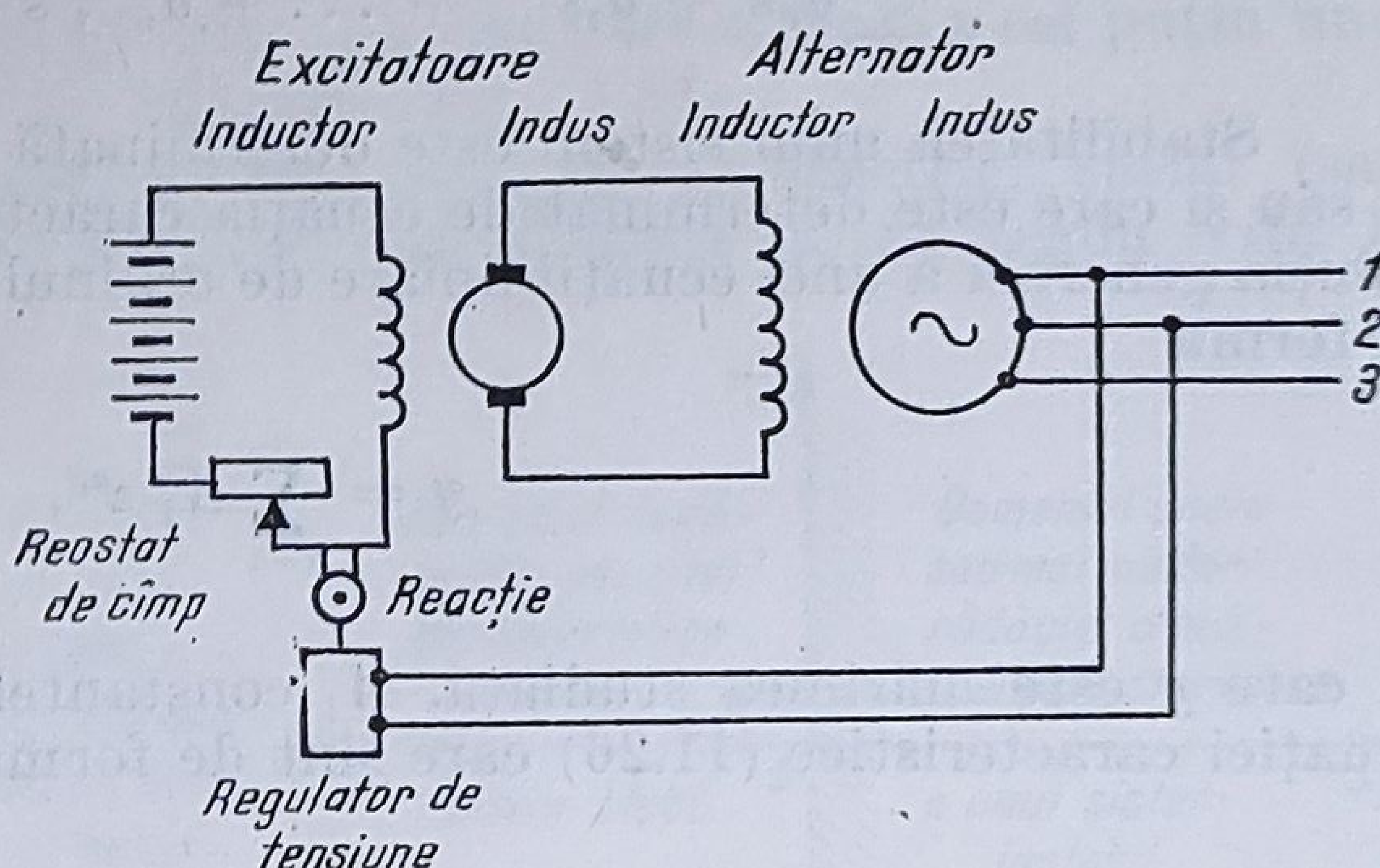


Fig. 11.36. Schema de reglaj a tensiunii la bornele unui alternator.

(organul de execuție). Tensiunea (mărimea produsă de organul de execuție- este măsurată de regulatorul de tensiune care o compară cu o tensiune de refe) rință și face să acționeze (reacția) abaterea constantă asupra comenzii reostatului de cîmp al excitatoarei ; circuitul este astfel închis. Sistemul este în echilibru numai dacă tensiunea alternatorului are o anumită valoare.

11.4.1.2. **Ecuația de funcționare. Condiția de stabilitate.** Considerînd schema funcțională a unui sistem de reglaj (fig. 11.35), neglijînd cantitatea preluată la ieșire pentru a alimenta circuitul de reacție și reducînd schema respectivă* , se obține ecuația operațională de funcționare a sistemului

$$C(s) \frac{G(s)R(s)}{1+G(s)\ H(s)}. \tag{11.24}$$

* Vezi [80].
Această relație se putea stabili și direct pe figura 11.34 : rezultă imediat :

$$C(s) = G(s)\cdot E(s)$$

dar

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

și

$$B(s) = H(s)\ C(s).$$

Scoțînd din acest sistem valoarea lui C(s) se obține, fără dificultate, relația (11.24).

Să presupune că funcţiile G(s) şi H(s) sînt fracţii raţionale de forma

$$G(s) = \frac{M_1(s)}{N_1(s)} \quad \text{şi} \quad H(s) = \frac{M_2(s)}{N_2(s)};$$

ecuaţia (11.24) poate fi pusă atunci sub forma

$$[M_1(s).M_2(s) + N_1(s).N_2(s)]\ C(s) = M_1\ (s)\ N_2(s)\ R(s). \tag{11.25}$$

Coeficientul funcţiei C(s) reprezintă *funcţia caracteristică a sistemului*, care egalată cu zero dă *ecuaţia caracteristică a sistemului**.

$$M_1(s).M_2(s) + N_1(s).N_2(s) = 0,$$

care poate fi pusă sub forma

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, s + a_n = 0. \tag{11.26}$$

Stabilitatea unui sistem este determinată de regimul liber de funcţionare al său şi care este determinat de ecuaţia caracteristică respectivă. Într-adevăr, soluţia generală a unei ecuaţii liniare de ordinul n, fără membrul al doilea, este de forma

$$y = \sum_{i=1}^{n} A_i\, \varepsilon^{s_i t}, \tag{11.27}$$

în care y este mărimea studiată, A_i constantele de integrare şi s_i rădăcinile ecuaţiei caracteristice (11.26) care sînt de forma

$$s = \delta + j\Omega \tag{11.28}$$

şi este viteza unghiulară a fazorului a cărui proiecţie pe axa reală trebuie să reprezinte mărimea considerată**.

Pentru ca un sistem să fie stabil, este necesar ca relaţia (11.27) să îndeplinească condiţia

$$\lim_{t\to\infty} y = 0,$$

şi care este obţinută numai dacă toţi termenii expresiei (11.27) tind simultan către zero, cînd timpul creşte indefinit. Întrucît coeficienţii A_i sînt mărimi constante, condiţia de stabilitate depinde de natura rădăcinilor (11.28) ale ecuaţiei caracteristice.

Dacă $\delta > 0$ şi $\Omega = 0$, atunci y va creşte cu timpul indefinit şi sistemul este aperiodic şi nestabil.

Dacă $\delta < 0$ şi $\Omega = 0$, atunci y va tinde către zero cînd t tinde către infinit şi sistemul este aperiodic şi stabil.

---

* Vezi 10.4.2.
** Vezi 4.2.5.3.

Dacă $\delta \neq 0$ şi $\Omega \neq 0$, atunci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este de forma

$$y = \sum_{i=1}^{n} B_i \, \varepsilon^{\delta t} \cos (\Omega t + \psi) \tag{11.29}$$

şi rezultă că fenomenul este oscilant; amplitudinea acestuia va creşte sau va scădea în funcţie de semnul părţii reale a rădăcinii (11.28). Dacă $\delta > 0$, atunci amplitudinea oscilaţiilor este continuu crescătoare cu timpul şi sistemul este nestabil. Dacă $\delta < 0$, atunci amplitudinea oscilaţiilor va tinde către zero cînd timpul tinde către infinit şi sistemul este stabil.

În consecinţă, pentru ca un sistem să fie *stabil*, adică pentru ca el să tindă a reveni la starea de repaus, sau pentru ca amplitudinile oscilaţiilor care pot lua naştere să tindă către zero, este necesar şi suficient ca rădăcinile reale ale ecuaţiei caracteristice să fie negative iar partea reală a rădăcinilor complexe ale acestei ecuaţii să fie negative.

Pentru ca un sistem să fie *nestabil*, sau pentru ca o oscilaţie să se amorseze, adică pentru ca amplitudinea sa să crească cu timpul după ce a luat naştere dintr-o cauză oarecare, este necesar şi suficient ca cel puţin una din rădăcinile reale ale ecuaţiei caracteristice să fie pozitivă, sau partea reală a cel puţin unei perechi de rădăcini complexe să fie pozitivă (fig. 11.37).

Cele două regimuri de funcţioare ale unui circuit electric, stabil (sau amortizat) şi instabil (sau autoîntreţinut) sînt separate de un regim *critic* la care amortismentul este nul ($\delta = 0$). Acest regim este caracterizat din punct de vedere matematic, prin aceea că rădăcinile (11.28) ale ecuaţiei caracteristice sînt pur complexe, de forma $\pm j\Omega$.

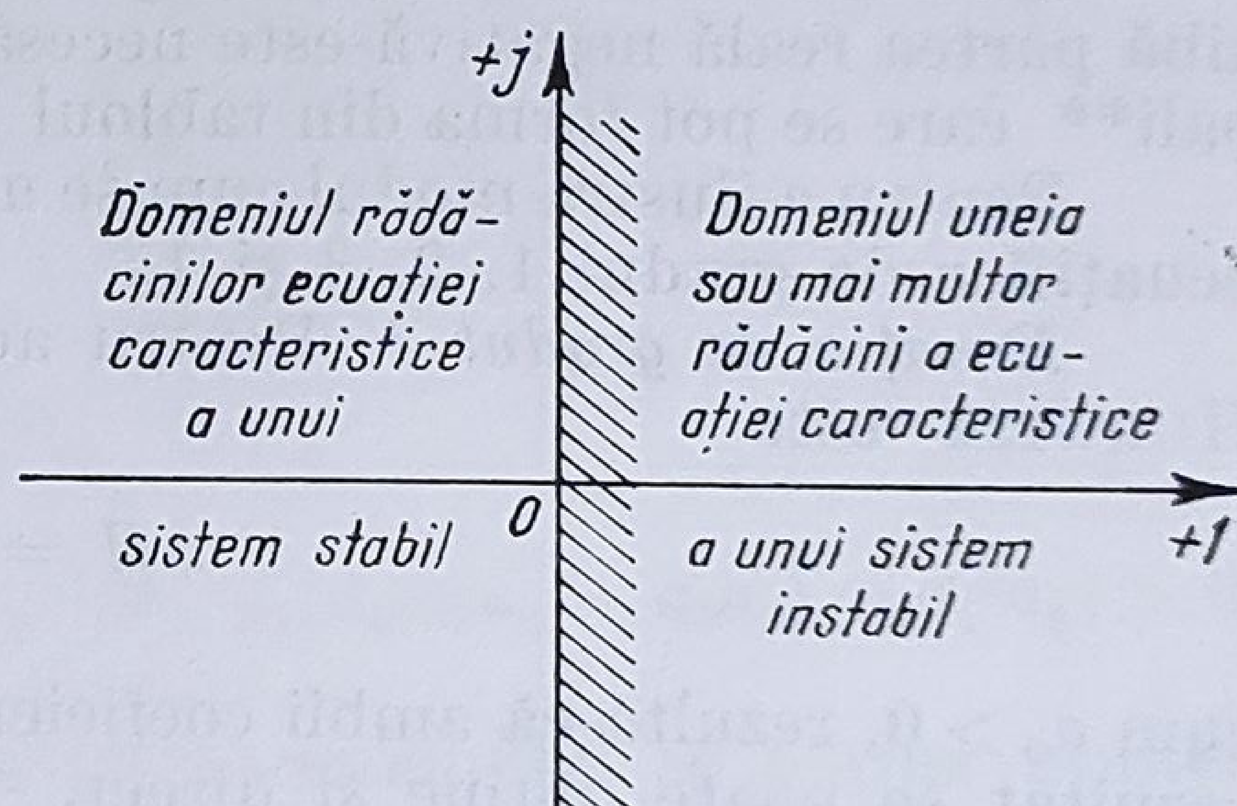


Fig. 11.37. Divizarea planului complex în zonele de stabilitate şi instabilitate a sistemelor.

Studiul stabilităţii unui sistem se poate face uşor, dacă se cunosc rădăcinile ecuaţiei caracteristice. Determinarea acestor rădăcini, cînd gradul ecuaţiei caracteristice este mai mare de 2, se face cu multă greutate şi rezultatele obţinute sînt uneori numai aproximative; pe de altă parte, aceasta nu se poate face în mod practic decît dacă se cunosc valorile numerice ale coeficienţilor ecuaţiei caracteristice. S-au văzut mai înainte condiţiile în care un sistem este nestabil. Dacă s-ar căuta să se modifice într-un mod oarecare parametrii circuitului pentru ca sistemul să devină stabil, aceasta nu se va putea face întrucît nu se poate stabili o relaţie generală între expresia unei rădăcini şi coeficienţii ecuaţiei caracteristice.

Toate aceastea au condus la stabilirea unor criterii, care permit să se stabilească condiţiile de stabilitate fără a se recurge la calculul explicit al rădăcinilor ecuaţiei caracteristice.

Numărul acestor criterii este destul de mare şi studiul amănunţit al lor iese din cadrul lucrării de faţă.

Unele din aceste criterii, permit numai să se vadă dacă sistemul este sau nu stabil şi se aplică numai în cazul cînd numitorul expresiei (11.24) este un polinom întreg în s, de forma (11.26). Dintre aceste criterii, pur algebrice, fac parte

criteriile lui HURWITZ, ROUTH etc. Există criterii cu caracter mai general, în sensul că nu este necesar ca numitorul să fie numaidecît un polinom; aceste criterii permit în plus, nu numai verificarea stabilității sistemului dar dau și posibilitatea aprecierii rapidității cu care se amortizează oscilațiile. Printre acestea cităm criteriul lui NYQUIST, care utilizează procedee de investigație mixte, algebrice și grafice.

11.4.2. CRITERII DE STABILITATE

11.4.2.1. **Criteriul lui HURWITZ.** Fie o ecuație algebrică de forma (11.26) scrisă astfel, încît $a_0 > 0$.

Se formează tabloul coeficienților sub forma:

$$T_H = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

HURWITZ a arătat*, că pentru ca toate rădăcinile ecuației (11.26) să aibă partea reală negativă este necesar și suficient ca cei n determinanți principali** care se pot forma din tabloul T_H să fie pozitivi.

Pentru a ilustra modul cum se utilizează criteriul lui HURWITZ, se va aplica ecuațiilor de gradul 1, 2, 3 și 4.

Ecuația de gradul 1. Pentru această ecuație $n = 1$ și determinantul lui HURWITZ este

$$\Delta H = |a_1| = a_1 > 0;$$

cum $a_0 > 0$, rezultă că ambii coeficienți ai ecuației trebuie să fie pozitivi. Acest rezultat se poate obține și direct.

Ecuația de gradul 2. În acest caz $n = 2$ și determinantul lui HURWITZ este

$$\Delta H = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix};$$

condițiile de stabilitate sînt

$$a_1 > 0; \qquad a_1 a_2 > 0; \qquad \text{rezultă } a_2 > 0,$$

adică toți coeficienții ecuației caracteristice trebuie să fie pozitivi, rezultat ce se putea obține de asemenea direct.

---

* Vezi [138] pag. 273.

** Determinanții principali sînt cei încadrați cu linii punctate.

Ecuaţia de gradul 3. În acest caz $n = 3$ şi determinantul lui HURWITZ este

$$\Delta H = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}$$

şi condiţiile de stabilitate sînt :

$$a_1 > 0\,;\; a_1a_2 - a_0a_3 > 0\,;\; a_3(a_1a_2 - a_0a_3) > 0.$$

Comparînd ultimele două relaţii, rezultă $a_3 > 0$; cum $a_0 > 0$ şi $a_1 > 0$, din relaţia a doua rezultă $a_2 > 0$. Rezultă dar, că funcţionarea sistemului este stabilă dacă toţi coeficienţii ecuaţiei caracteristice sînt pozitivi şi satisfac relaţia

$$a_1a_2 - a_0a_3 > 0.$$

Ecuaţia de gradul 4. Pentru această ecuaţie $n = 4$ şi determinantul lui HURWITZ este

$$\Delta H = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

Condiţiile de stabilitate ale sistemului sînt

$$a_1 > 0\,;\; a_1a_2 - a_0a_3 > 0\,;\; a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0\,;\; a_4[a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4] > 0,$$

Se deduce uşor că funcţionarea stabilă a sistemului se obţine atunci, cînd toţi coeficienţii ecuaţiei caracteristice sînt pozitivi şi satisfac relaţia

$$a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0.$$

11.4.2.2. **Condiţiile de funcţionare în regim critic sau instabil.** Regimul critic de funcţionare a unui sistem este un regim de funcţionare limită, între funcţionarea stabilă şi funcţionarea instabilă a sistemului. Acest regim este caracterizat prin aceea, că nu are un element de amortizare şi deci, rădăcinile (11.28) ale ecuaţiei caracteristice sînt pur imaginare. Pentru a găsi condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească coeficienţii ecuaţiei caracteristice pentru a corespunde unui sistem funcţionînd în regim critic, se substituie în ecuaţia caracteristică o rădăcină de forma $s = \pm j\Omega$ şi se elimină parametrul Ω între cele două relaţii ce se obţin separînd părţile reale de cele complexe.

Pentru ca un regim de funcţionare a unui sistem să nu fie stabil şi deci, să se producă oscilaţii autoîntreţinute, este necesar şi suficient, ca cel puţin una din condiţiile date de criteriul de stabilitate al lui HURWITZ să nu fie satisfăcută ; în aceste condiţii, cel puţin una din rădăcini va avea partea reală pozi-

34 — c. 229

tivă, amortismentul corespunzător va fi *negativ* și deci unda va avea amplitudinea mereu crescătoare.

Pentru a găsi deci, condițiile pe care trebuie să le îndeplinească coeficienții ecuației caracteristice în cazul unui regim instabil de funcționare a unui sistem, se alege din inegalitățile lui HURWITZ pe acelea care dau condiția de funcționare în regim critic și se schimbă sensul acestor inegalități.

Aplicînd aceste reguli ecuațiilor de gradul 2, 3 și 4 se obțin următoarele:

Ecuația de gradul 2. Fie ecuația

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0.$$

Făcînd $s = + j\,\Omega$ se obține

$$-a_0\,\Omega^2 \pm ja_1\Omega + a_2 = 0$$

de unde relațiile

$$a_1\Omega = 0; \; -a_0\,\Omega^2 + a_2 = 0.$$

Rezultă condiția de funcționare în *regim critic*

$$a_1 = 0.$$

Condițiile lui HURWITZ pentru regimul stabil fiind $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ și $a_2 > 0$, regimul nestabil (autoîntreținut) va fi obținut pentru $a_1 < 0$.

Ecuația de gradul 3. Făcînd în ecuația (11.26) $n = 3$, punînd $s = \pm j\Omega$ și separînd părțile reale de cele complexe se obțin relațiile

$$-a_0\Omega^3 + a_2\,\Omega = 0; \; -a_1\Omega^2 + a_3 = 0,$$

între care eliminînd pe Ω, se găsește condiția

$$a_1\,a_2 - a_0\,a_3 = 0,$$

pentru ca sistemul să funcționeze în regim critic.

Condiția lui HURWITZ, pentru regimul stabil, fiind

$$a_1\,a_2 - a_0\,a_3 > 0,$$

rezultă că regimul nestabil (autoîntreținut) va fi realizat pentru

$$a_1\,a_2 - a_0\,a_3 < 0.$$

Ecuația de gradul 4. Procedînd în același mod pentru ecuația de gradul 4 ($n = 4$), se obține condiția pentru funcționarea în regim critic

$$a_3\,(a_1 a_2 - a_0\,a_3) - a_1^2\,a_4 = 0$$

și pentru regimul nestabil (autoîntreținut)

$$a_3\,(a_1 a_2 - a_0\,a_3) - a_1^2\,a_4 < 0.$$

OBSERVAȚIE. Criteriul lui HURWITZ este destul de simplu de aplicat; el devine extrem de laborios și practic inutilizabil dacă $n > 4$.

11.4.2.3. Criteriul lui ROUTH *. Cu coeficienții ecuației caracteristice a sistemului, scrisă astfel încît $a_0 > 0$, se formează tabloul

$$T_R = \left\| \begin{matrix} a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0^1 & a_2^1 & a_4^1 & \dots \\ a_1^1 & a_3^1 & a_5^1 & \dots \\ a_0^2 & a_2^2 & a_4^2 & \dots \\ a_1^2 & a_3^2 & a_5^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\|$$

în care

$$a_0^1 = a_2 - \frac{a_0\,a_3}{a_1}\,;\; a_2^1 = a_4 - \frac{a_0\;a_5}{a_1}\,,\;\dots$$

$$a_1^1 = a_3 - \frac{a_1\,a_2^1}{a_0^1}\,;\; a_1^3 = a_5 - \frac{a_1\;a_4^1}{a_0^1}\,,\;\dots$$

$$a_0^2 = a_2^1 - \frac{a_0^1\;a_3^1}{a_1^1}\,;\; a_2^2 = a_4^1 - \frac{a_0^1\;a_5^1}{a_1^1}\,,\;\dots$$

$$a_1^2 = a_3^1 - \frac{a_1^1\;a_2^2}{a_0^2}\,;\; a_3^2 = a_5^1 - \frac{a_1^1\;a_4^2}{a_0^2}\,,\;\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Condiția de stabilitate a lui ROUTH este îndeplinită dacă:

— toți coeficienții ecuației caracteristice sînt pozitivi, adică

$$a_i > 0 \;\; (i = 0,1,2,\dots,n);$$

— toți termenii primei coloane a tabloului T_R sînt pozitivi adică

$$a_0^i > 0 \text{ și } a_1^i > 0 \quad (i = 1,2,\dots,n).$$

Criteriul lui ROUTH conduce la aceleași condiții ca și criteriul lui HURWITZ, fiind însă mai ușor de aplicat. Într-adevăr, pentru o ecuație caracteristică de gradul 3 se obțin condițiile de stabilitate

$$a_0,\; a_1,\; a_2,\; a_3 > 0,$$

$$a_0^1 = a_3 - \frac{a_0\,a_2}{a_1} > 0$$

sau

$$a_3 a_1 - a_0 a_2 > 0.$$

* Vezi [250].

11.4.2.4. Criteriul lui NYQUIST*. Să considerăm un sistem fizic oarecare — un circuit electric de exemplu, căruia aplicîndu-i un semnal, imaginea răspunsului obținut are expresia (11.24), pe care putem să o punem sub forma

$$\eta(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \tag{11.30}$$

în care A(s) și B(s) sînt două polinoame raționale în s, gradul polinomului de la numitor fiind în general mai mare decît cel de la numărător; polinomul B(s) reprezintă funcția caracteristică a sistemului.

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m$ rădăcinile polinomului A(s), care se numesc *zero*-urile funcției (11.30) și $b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots b_n$ rădăcinile polinomului B(s), care se numesc *polii* funcției (11.30). În ipoteza că polii funcției (11.30) sînt toți așezați în partea stîngă a axei complexe**, să căutăm condiția de stabilitate a acestei expresii. Este evident, că în ipoteza făcută, condiția de stabilitate va depinde de poziția zerourilor funcției (11.30).

Să considerăm funcția

$$D(s) = 1 + \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{B(s)}, \tag{11.31}$$

la care gradul numărătorului este de data aceasta egal cu cel al numitorului. Fie $c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_n$ rădăcinile numărătorului expresiei (11.32); putem scrie:

$$D(s) = 1 + \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{B(s)} = \frac{C(s-c_1)\ \ldots\ (s-c_i)\ \ldots\ (s-c_r)}{B(s-b_1)\ \ldots\ (s-b_i)\ \ldots\ (s-b_n)}. \tag{11.32}$$

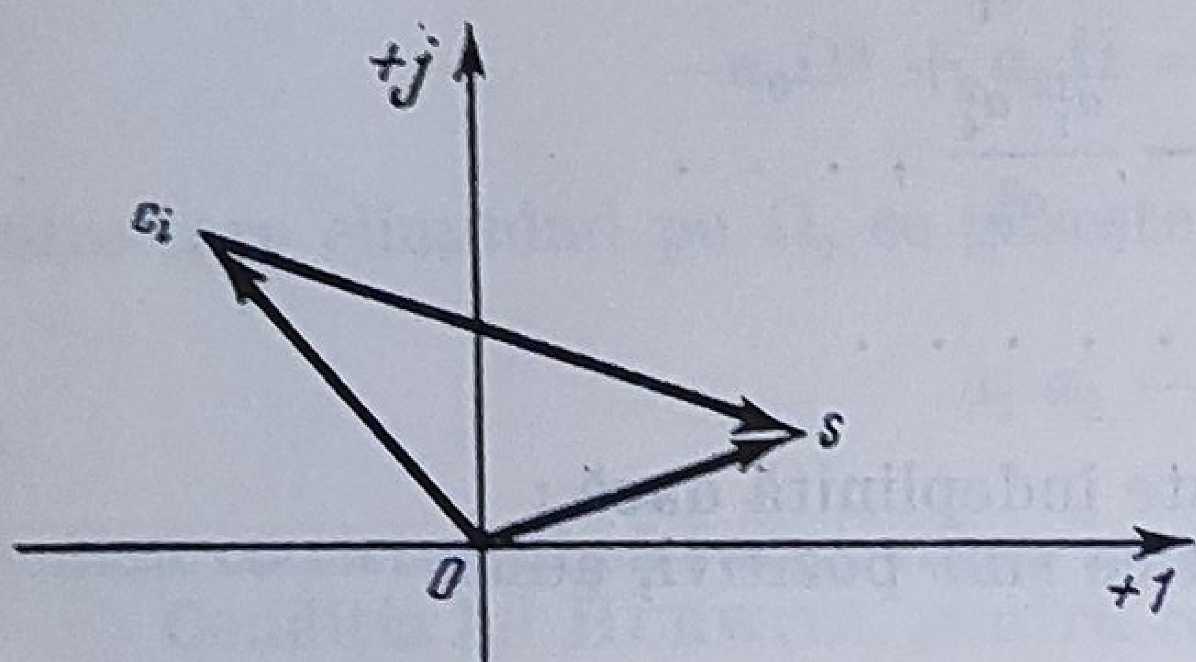


Fig. 11.38. Diagrama vectorială a factorului $(s - c_i)$.

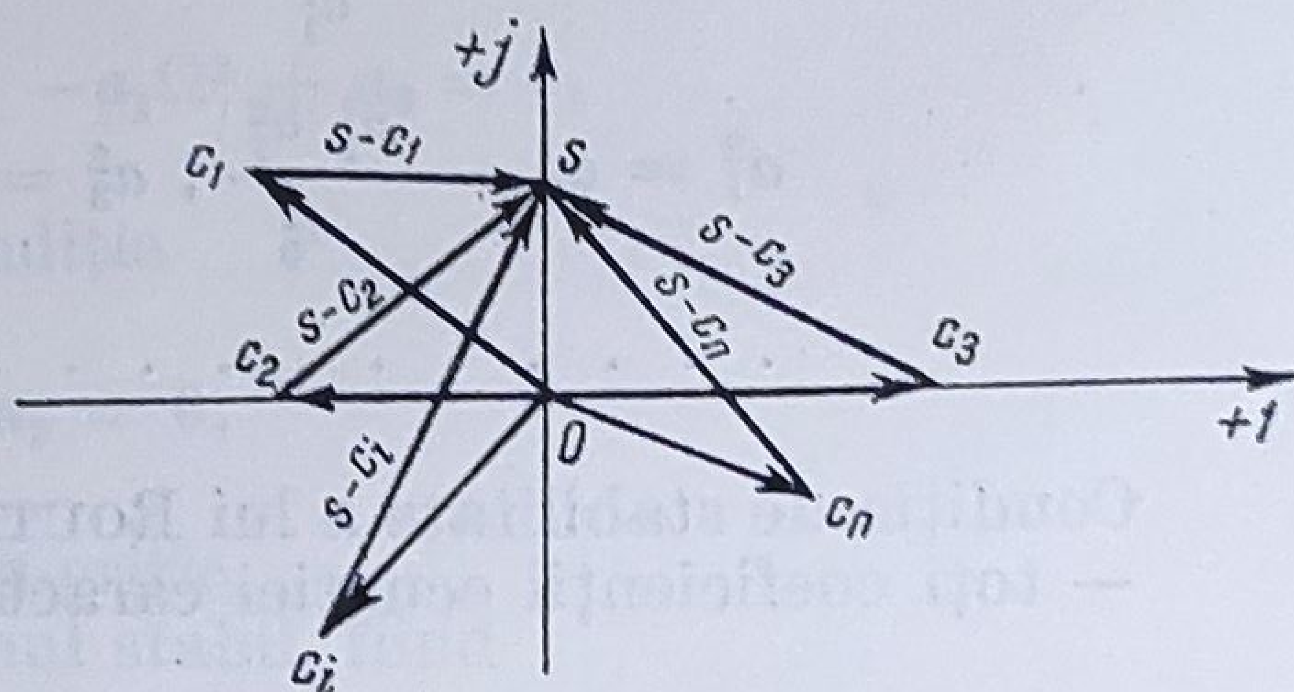


Fig. 11.39. Așezarea rădăcinilor numărătorului în planul complex.

Să reprezentăm în planul complex (fig. 11.38) o rădăcină c_i și numărul complex $s = \delta + j\omega$; expresia $(s - c_i)$ va reprezenta un vector egal cu diferența dintre vectorii s și c_i. Cum vectorul s a fost ales arbitrar, putem să-l alegem pur complex și deci situat pe axa complexă. În acest caz, expresia (11.32) poate fi scrisă:

$$D(j\omega) = 1 + \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} = \frac{C(j\omega - c_1)\ldots(j\omega - c_i)\ldots(j\omega - c_n)}{B(j\omega - b_1)\ldots(j\omega - b_i)\ldots(j\omega - b_n)}, \tag{11.33}$$

astfel că reprezentarea diverșilor factori ai produsului de la numărător sau de la numitor poate fi reprezentat ca în figura 11.39.

* Vezi [201].

** Raționamentul este același dacă se face ipoteza că toate zerourile funcției sînt așezate în stînga axei complexe.

Dacă ω variază în mod continuu de la $-\infty$ la $+\infty$, atunci fiecare vector $(s-c_i)$ se va roti în jurul originii sale (vîrful vectorului c_i) cu un unghi π şi anume, *pozitiv* dacă rădăcinile se găsesc în stînga axei complexe şi *negativ* dacă ele se găsesc în dreapta acestei axe. Acelaşi lucru se poate spune şi despre numitorul expresiei (11.33).

Pe de altă parte, atît numărătorul cît şi numitorul expresiei (11.33) reprezintă cîte un vector al cărui modul este egal cu produsul modulelor vectorilor reprezentînd factorii respectivi şi al cărui argument este egal cu suma argumentelor acestor vectori. Fie

$$C(j\omega) = \prod_1^n C_i \underline{|\, \Sigma\gamma_i}$$

şi

$$B(j\omega) = \prod_1^n B_i \underline{|\, \Sigma\, \beta_i}$$

aceşti vectori. În consecinţă, $D(j\omega)$ reprezintă cîtul a doi vectori al cărui modul este egal cu cîtul modulelor celor doi vectori, iar argumentul său egal cu diferenţa argumentelor acestora, adică

$$D\,(j\omega) = D \underline{|\,\delta} = \frac{\Pi C_i}{\Pi B_i} \underline{|\, \Sigma\gamma_i - \Sigma\beta_i}.$$

Ţinînd seama de ipoteza făcută, că polii ecuaţiei (11.30) sînt aşezaţi în partea stîngă, rezultă că argumentul vectorului de la numitor va fi egal cu $n\pi$ atunci cînd ω variază de la $-\infty$ la $+\infty$,

$$\Sigma\, \beta_i = n\pi.$$

Gradul numărătorului expresiei (11.33), respectiv (11.31), fiind tot n, toate rădăcinile sale vor fi situate în partea stîngă a axei complexe dacă argumentul vectorului reprezentativ este egal cu $n\pi$, în cazul cînd ω variază continuu de la $-\infty$ la $+\infty$, adică dacă $\Sigma\,\gamma_i = n\pi$.

Dacă această condiţie este îndeplinită, atunci vectorul

$$D(j\omega) = 1 + \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} = D \underline{|\,\delta} \tag{11.34}$$

are argumentul egal cu *zero* cînd ω variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

Din punct de vedere geometric, această condiţie este îndeplinită dacă originea axelor de coordonate, care este şi originea vectorului $D(j\omega)$, este situată în *afara* curbei locului geometric al extremităţii acestui vector, cînd ω variază de la $-\infty$ la $+\infty$, sau să se găsească pe această curbă. Într-adevăr, în acest caz

(fig. 11.40), unghiul pornind de la o valoare 0 pentru $\omega = 0$, ajunge la valoarea 0 pentru $\omega = +\infty$; în cazul cînd originea se găsește în interiorul curbei, unghiul respectiv variază de la 0 la π și condiția enunțată mai sus nu este îndeplinită.

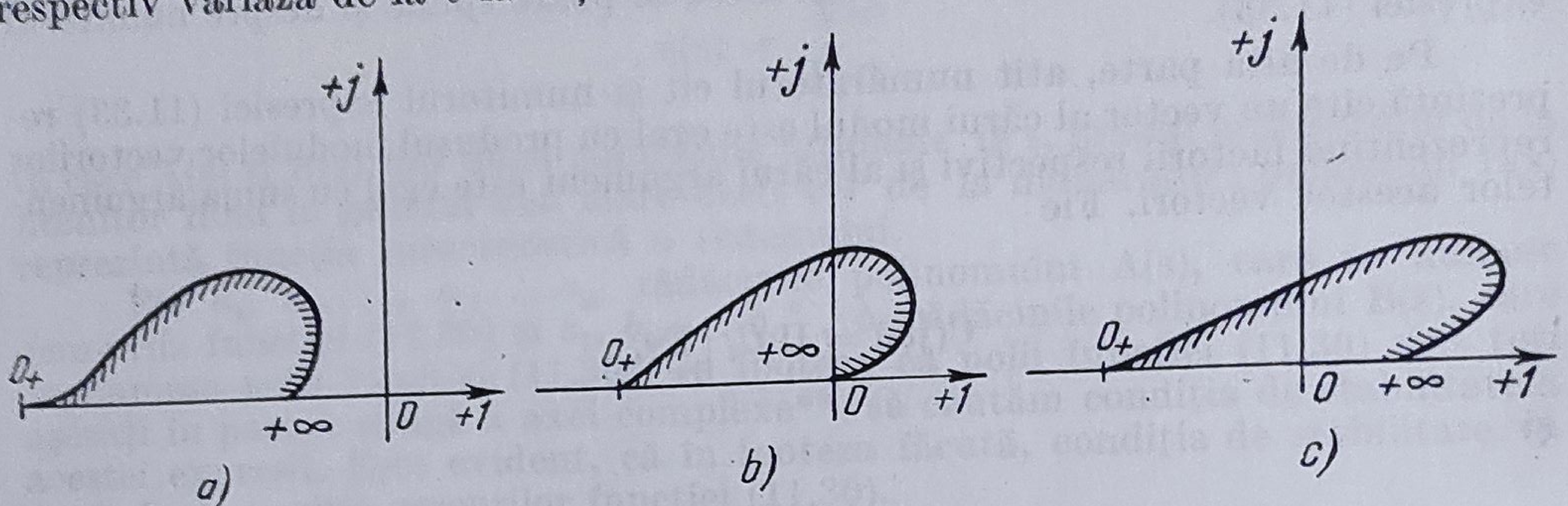


Fig. 11.40. Locul geometric al vectorului D(jω) în diverse situații ale sistemului: a) și b) sistem stabil; c) sistem instabil.

În consecință, dacă locul geometric al vectorului (11.33) este în *afara* originei atunci sistemul a cărei funcționare este dată de ecuația (11.31) este stabil.

Pentru a deduce acum condiția de stabilitate a relației (11.30) să mutăm originea axelor de coordonate în punctul $(-1, j0)$ (fig. 11.41) și rezultă imediat că

$$\eta(j\omega) = D(j\omega) - 1 = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} \tag{11.35}$$

ceea ce înseamnă că, în acest caz, originea vectorului $D(j\omega)$ este în punctul $(-1, j0)$ și în consecință condiția de stabilitate a expresiei (11.30) este ca punctul $(-1, j0)$ să fie în afara locului geometric al vectorului

$$\eta(j\omega) = \frac{A\ (j\omega)}{B\ (j\omega)},$$

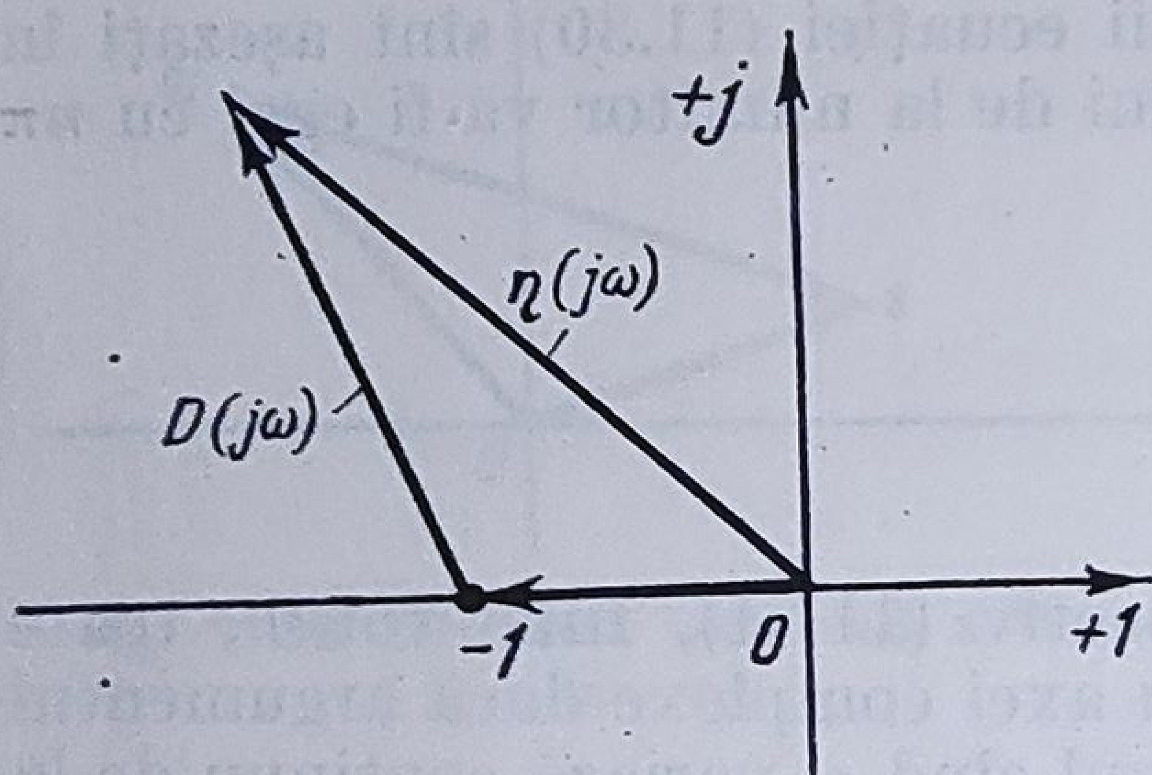


Fig. 11.41. Legătura între vectorii D(jω) și η (jω).

și este instabil dacă acest punct este cuprins de curba respectivă.

Regula enunțată mai sus constituie criteriul de stabilitate *amplitudine-fază* a lui NYQUIST.

În general locul geometric al vîrfurilor vectorului $\eta(j\omega)$ pentru variația frecvenței de la $-\infty$ la 0 este conjugat locului geometric al aceluiași vector, în cazul cînd ω variază de la ∞ la 0 și deci, este suficient a trasa acest loc numai pentru variația frecvenței de la 0 la $+\infty$.

Studiul de mai sus a fost făcut în ipoteza că funcția (11.30) are toți polii săi situați în semiplanul din stînga axei complexe. Regula rămîne valabilă și în cazul cînd unul din poli se află în origine. În acest caz, curba locului geometric este o curbă asimptotă la axa complexă și pentru a avea curba închisă necesară, se completează cu un semicerc cu raza infinită astfel ales, încît parcurgînd axa complexă de la 0 la $+\infty$ — ceea ce corespunde sensului orar — semicercul să fie parcurs în același sens.

Dacă punctul $(-1, j0)$ este cuprins între curbă și acest semicerc, sensurile de parcurgere fiind aceleași, sau punctul este în afara curbei, sistemul este stabil

fig. 11.42); el este instabil în cazul cînd punctul se găsește în interiorul curbei și aceasta este parcursă în sensuri contrarii în raport cu punctul (fig. 11.43).

Aceasta se poate vedea ușor, vectorul cu originea în punctul $(-1, j0)$ făcînd o *rotație completă* (de unghi 2π) în cazul *sistemelor instabile* și *incompletă* (de unghi $<2\pi$) în cazul *sistemelor stabile*.

O metodă simplă pentru a vedea dacă sistemul e stabil este următoarea: se trasează hașuri pe dreapta curbei, dacă se merge de la 0 la $+\infty$, sau pe stînga curbei dacă se merge de la 0 la $-\infty$; dacă punctul e de partea curbei unde nu sînt hașuri, sistemul e stabil; în caz contrar, este instabil.

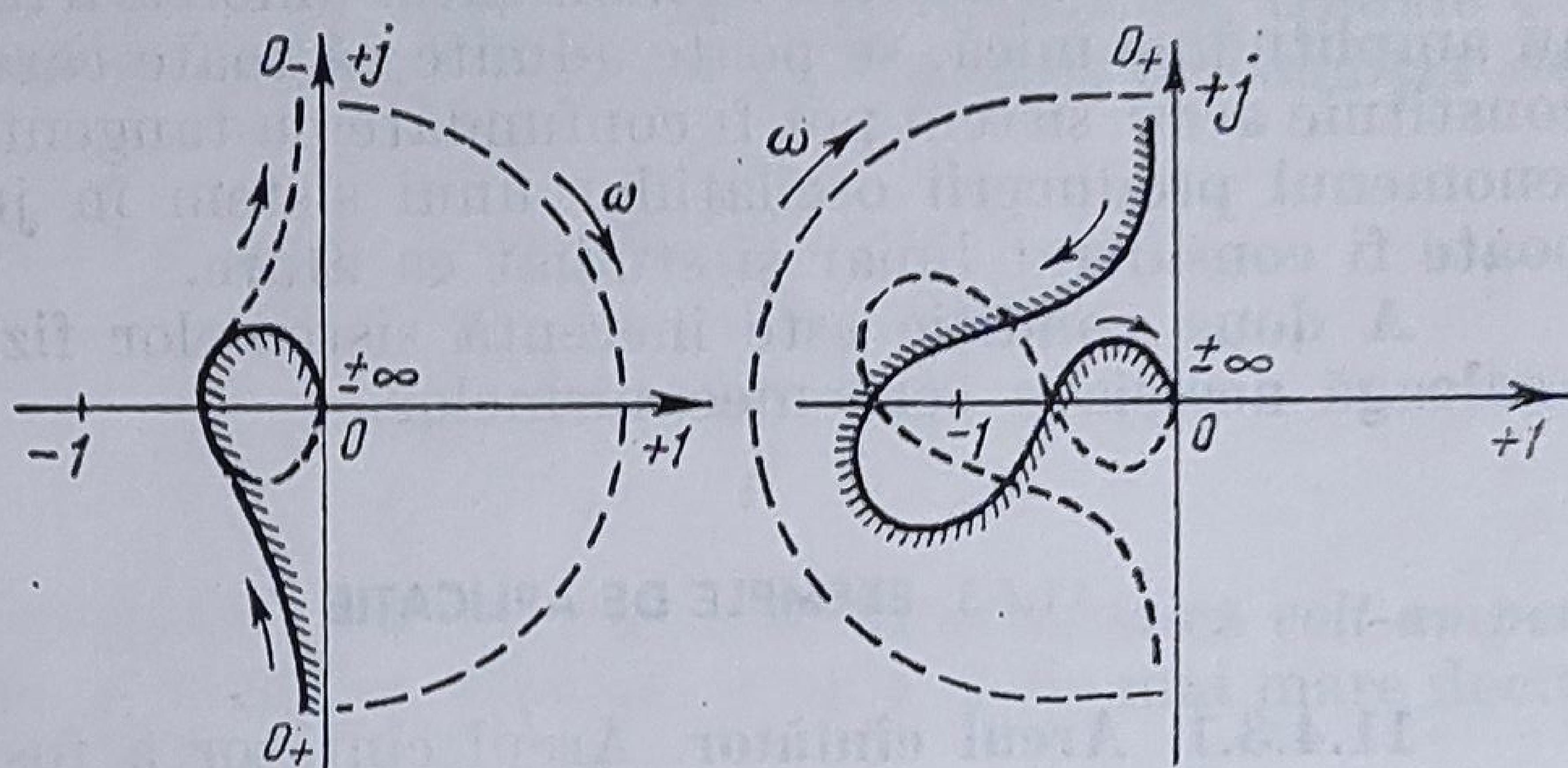


Fig. 11.42. Sisteme stabile.

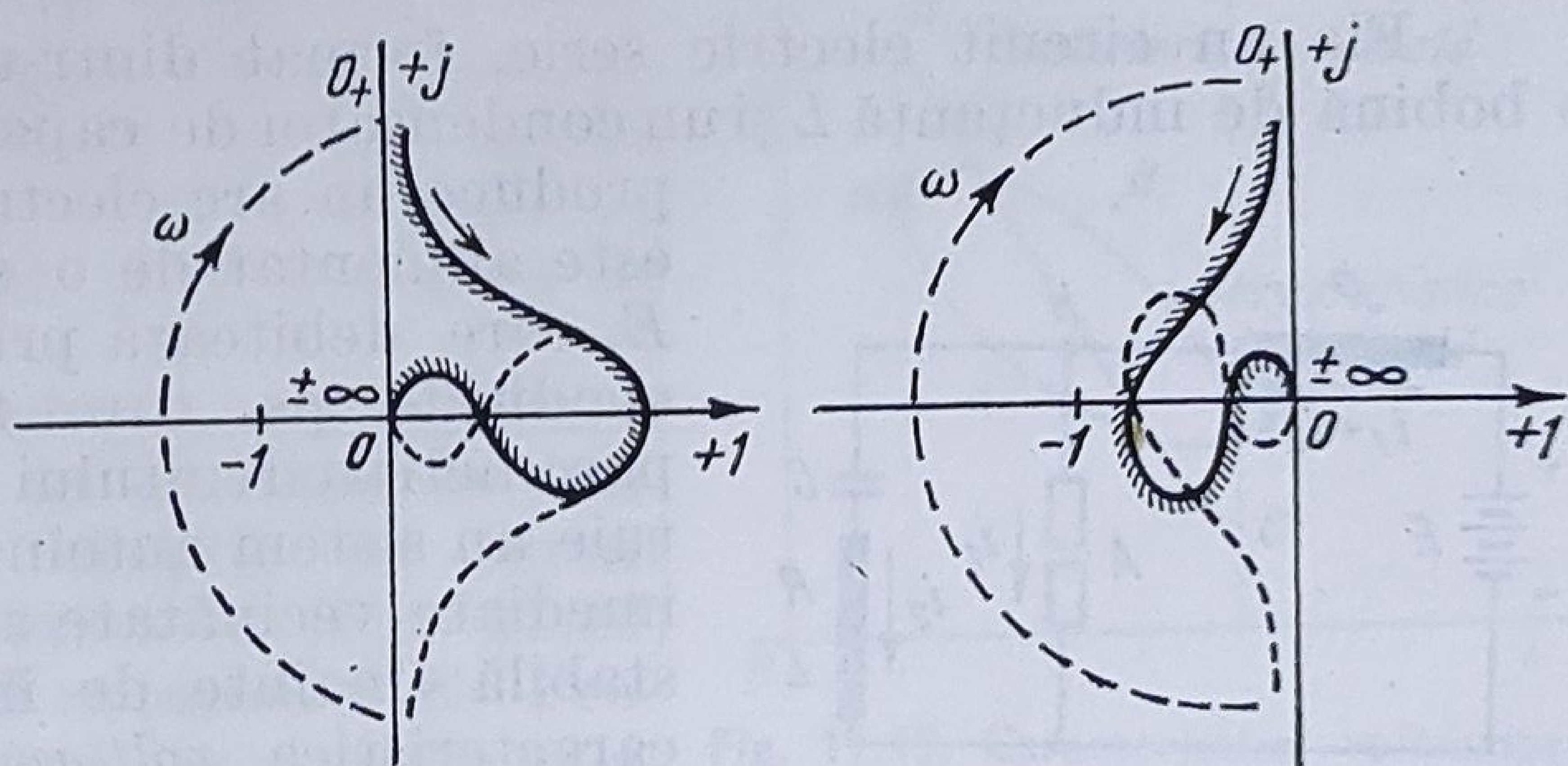


Fig. 11.43. Sisteme instabile.

Cînd polul nul este multiplu, atunci se vor trasa o serie de semicercuri de rază infinită egală cu gradul de multiplicare al rădăcinii nule *.

OBSERVAȚIE. Pe cînd criteriile de stabilitate ale lui Hurwitz și Routh sînt bazate pe considerații pur matematice, privind proprietățile ecuațiilor algebrice, criteriul de stabilitate al lui Nyquist dă posibilitatea unei ușoare interpretări fizice.

Criteriul lui Nyquist are o serie de proprietăți, care îl fac util în studiul stabilității sistemelor fizice și în special în acelea cu reacție. Astfel, el informează asupra existenței de rădăcini ale ecuației caracteristice în semiplanul pozitiv; diagrama construită pentru studiul stabilității unui sistem poate da indicații asupra stabilității sistemului și poate sugera calea de urmat pentru îmbunătățirea stabilității sistemului, în caz de necesitate. De asemenea, criteriul de stabilitate dă posibilitatea să se examineze acțiunea independentă a diverselor elemente ale sistemului asupra stabilității acestuia.

---

* Pentru o demonstrație completă și riguroasă a criteriului lui Nyquist, vezi [94].

Pentru a se putea aplica criteriul de stabilitate a lui NYQUIST este necesar şi suficient, ca ecuaţiile diferenţiale care definesc funcţionarea sistemului să fie liniare, cu coeficienţi constanţi; în afară de aceasta este necesar ca funcţia G(s).H(s) din relaţia (11.24) să tindă către o limită pozitivă sau nulă cînd |s| tinde către infinit.

Prima condiţie se datorează faptului, că aplicarea acestui criteriu se face asupra unor expresii, care rezultă din aplicarea transformatei LAPLACE a relaţiilor, care definesc funcţionarea sistemului. Sînt cazuri cînd însă, deşi parametrii sistemului nu sînt constanţi în întreg domeniul de funcţionare a acestuia, pentru oscilaţiile care iau naştere în momentul amorsării fenomenului, care în acest caz au amplitudine mică, se poate admite că toate caracteristicile elementelor care constituie acest sistem pot fi confundate cu tangentele lor; aceasta înseamnă că fenomenul producerii oscilaţiilor unui sistem în jurul punctului de amorsare poate fi considerat liniar şi studiat ca atare.

A doua condiţie este inerentă sistemelor fizice a căror constituţie este analoagă aceleia a servomecanismelor.

11.4.3. EXEMPLE DE APLICAŢIE

11.4.3.1. Arcul cîntător. Arcul cîntător a fost utilizat la începutul telegrafiei fără fir pentru producerea oscilaţiilor autoîntreţinute, necesare posturilor emiţătoare.

Fie un circuit electric serie, format dintr-un rezistor de rezistenţă R, o bobină de inductanţă L şi un condensator de capacitate C la bornele căruia se produce un arc electric A (fig. 11.44). Acest arc este alimentat de o sursă de tensiune constantă E, care debitează printr-o rezistenţă ρ. Se caută condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească parametrii circuitului pentru ca circuitul să constituie un sistem autoîntreţinut. Se presupune că, în imediata vecinătate a punctului de funcţionare stabilă (înainte de introducerea circuitului LC), caracteristica *volt-amper* a arcului electric este liniară, de forma

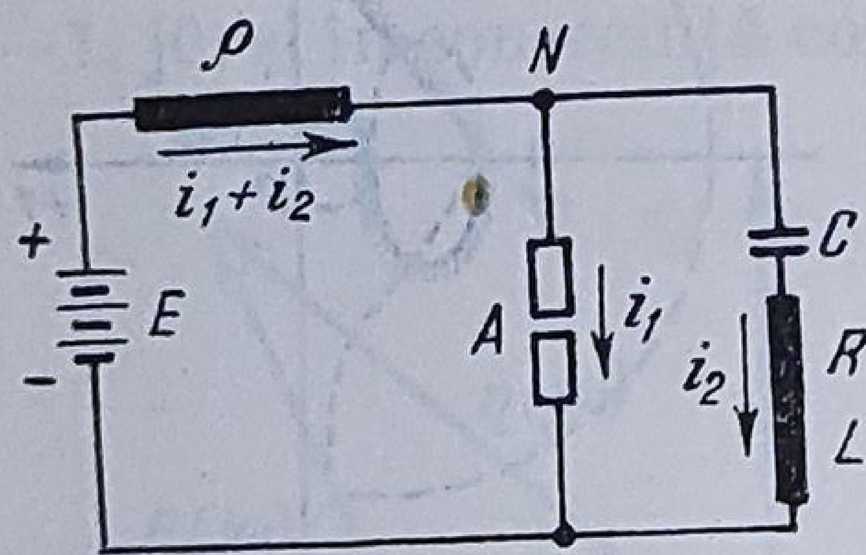


Fig. 11.44. Circuitul unui arc cîntător.

$$u_1 = a + bi\ ;$$

rezistenţa dinamică a arcului este deci,

$$b = \frac{du_1}{di_1}.$$

Pentru stabilirea ecuaţiei caracteristice a circuitului, se aplică, în operaţional, metoda potenţialelor la noduri, nodului N.
Se găseşte

$$\left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{b} + \frac{1}{Z\,(s)}\right] \mathcal{L}V_N = \frac{\mathcal{L}E}{\rho}$$

în care,

$$Z(s) = R + Ls + \frac{1}{Cs}$$

este impedanţa operaţională a circuitului serie.

Ecuaţia caracteristică a sistemului este*

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{b}+\frac{1}{Z(s)}=0$$

sau, dezvoltînd şi ţinînd seama că nici unul din parametrii circuitului nu este nul,

$$CL\,(b+\rho)\,s^2+C\,[(b+\rho)\,R+b\rho]\,s+(b+\rho)=0.$$

Pentru ca arcul electric care se produce să fie autoîntreţinut, trebuie ca circuitul să fie instabil; ecuaţia caracteristică fiind de gradul 2, condiţia de instabilitate este**

$$C[\,(b+\rho)\,R+b\rho]<0,$$

de unde rezultă

$$-\,b>\frac{\rho\,R}{\rho+R}.$$

Rezultă dar, că b trebuie să fie negativ, cu alte cuvinte, caracteristica *volt-amper* a arcului să fie descrescătoare, şi valoarea absolută a lui b să fie mai mare decît rezistenţa echivalentă a rezistenţelor ρ şi R legate în paralel.

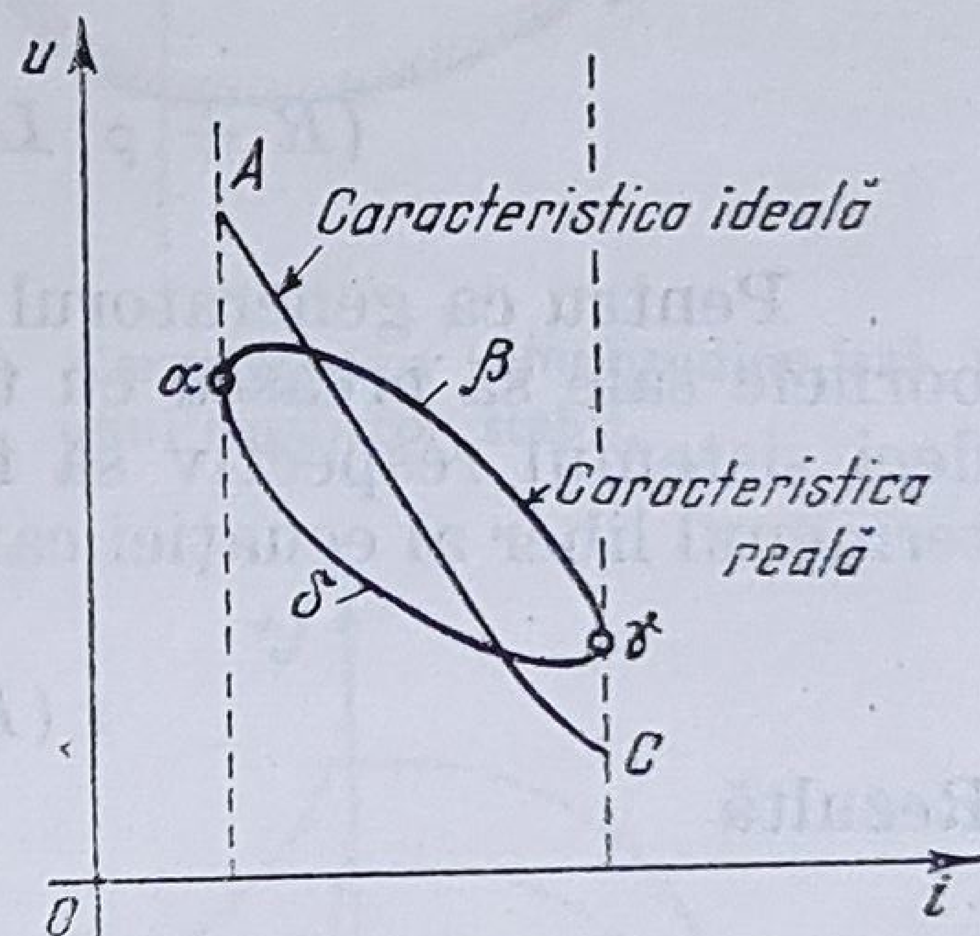


Fig. 11.45. Caracteristica *volt-amper* a unui arc electric.

În realitate, caracteristica dinamică a arcului electric prezintă un fenomen analog fenomenului de histerezis, formînd o curbă închisă oarecare (fig. 11.45) astfel, încît condiţiile de stabilire a unui arc cîntător sînt mai greu de îndeplinit.

11.4.3.2. **Condiţia de prindere a unui generator electric de curent continuu cu excitaţia în derivaţie*****. Fie un generator electric de curent continuu cu excitaţia în derivaţie (fig. 11.46) care debitează pe o rezistenţă exterioară R. Presupunem, pentru simplificare, că circuitul de excitaţie nu este saturat şi că inductanţa indusului şi a sarcinii sînt nule. Fie N numărul de conductoare a înfăşurării induse, n turaţia maşinii, Φ_0 fluxul datorit inducţiei remanente, ρ şi r rezistenţele respectiv ale indusului şi inductorului, L inductanţa proprie a inductorului, i curentul de excitaţie şi I curentul debitat de maşină. Presupunem, de asemenea că numărul de căi de curent a maşinii electrice este egal cu numărul său de poli.

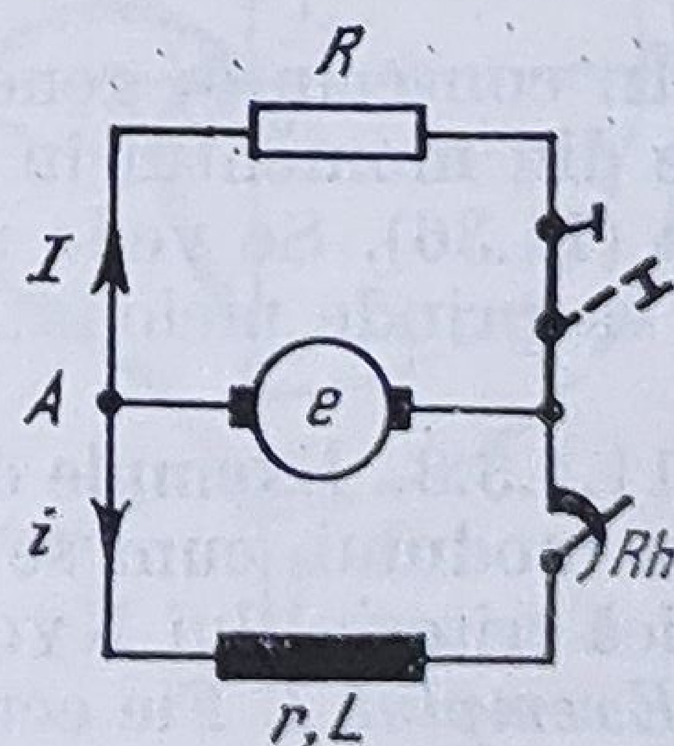


Fig. 11.46 Generator electric de curent continuu cu excitaţia în derivaţie.

Ţinînd seama că forţa electromotoare a maşinii e dată de relaţia

$$e=N\,n\,\Phi_0+K\,n\,i,$$

* Vezi 10.4.2.1.

** Vezi 11.4.2.2.

*** Vezi [192] pag. 438 şi 3.3.3.3.

unde K este o constantă, aplicînd metoda potențialelor la noduri nodului A, se găsește

$$\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{\rho}+\frac{1}{Ls+r}\right)\mathcal{L}V_A = \frac{n}{\rho}\,(N\,\mathcal{L}\Phi_0 + K\,\mathcal{L}i),$$

de unde rezultă

$$\mathcal{L}V_A = \frac{n\,(N\mathcal{L}\,\Phi_0 + K\mathcal{L}i)\,(Ls+r)\,R}{\rho R + (Ls+r)\,(R+\rho)}.$$

Curentul de excitație fiind dat de relația

$$\mathcal{L}i = \frac{\mathcal{L}V_A}{Ls+r},$$

rezultă imediat ecuația operațională care definește acest curent

$$[R\rho + (Ls+r)\,(R+\rho) - KnR_1]\,\mathcal{L}i = RNn\,\mathcal{L}\Phi_0.$$

Ecuația caracteristică corespunzătoare este

$$(R+\rho)\,Ls + r\,(R+\rho) + R\rho - KnR = 0.$$

Pentru ca generatorul electric să se „prindă" este necesar ca tensiunea la bornele sale să crească cu timpul — pînă la tensiunea nominală a mașinii —, deci sistemul respectiv să fie instabil. Condiția necesară și suficientă este ca termenul liber al ecuației caracteristice să fie negativ; în cazul de față

$$r\,(R+\rho) + R\rho - KnR < 0.$$

Rezultă

$$n > \frac{r\,(R+\rho)+R\rho}{KR} = \frac{r+\rho+\dfrac{r\rho}{R}}{K}. \tag{11.36}$$

În consecință, generatorul electric de curent continuu cu excitație se va prinde din momentul în care turația sa va depăși o anumită valoare, dată de relația (11.36). Se vede ușor, că mașina se poate prinde și în gol ($R=\infty$), dar nu se va prinde niciodată dacă funcționează în scurtcircuit ($R=0$).

11.4.3.3. Exemple de utilizare ale criteriului lui Nyquist. Fără a insista asupra modului cum se stabilesc relațiile respective*, vom arăta modul cum se aplică criteriul lui Nyquist:

Exemplul 1. Fie ecuația

$$\eta\,(s) = \frac{K}{(T_1 s+1)\,(T_2\,s+1)},$$

care reprezintă funcția de transfer a unui regulator de tensiune, a unui regulator de viteză, a unui aparat de măsură etc.

---

* Vezi 11.4.1.2.

Efectuînd produsul de la numitor, înlocuind pe s cu jω şi separînd părţile reale de cele complexe, relaţia dată se poate scrie

$$\eta(j\omega) = \frac{K(-a_0\omega^2+1)}{(-a_0\omega_2+1)^2+a_1^2\omega^2} - j\frac{Ka_1\omega}{(-a_0\omega^2+1)^2+a_1^2\omega^2}$$

în care $a_0 = T_1 T_2 > 0$ şi $a_1 = (T_1 + T_2) > 0$.

Caracteristica amplitudine-fază se construieşte prin puncte (fig. 11.47)*, avem astfel:

$$|\eta(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(-a_0\omega^2+1)^2+a_1^2\omega^2}}$$

şi

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{a_1\omega}{(-a_0\omega^2+1)^2+a_1^2\omega^2}.$$

Pentru $\omega = 0: |\eta(j\omega)| = K;$

$$\operatorname{tg}\varphi = 0;\ \varphi = 0,$$

$$\omega = \infty: |\eta(j\omega)| = 0;$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 0;\ \varphi = \pi;$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{a_0}}: |\eta(j\omega)| = K\frac{\sqrt{a_0}}{a_1};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\infty;\ \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

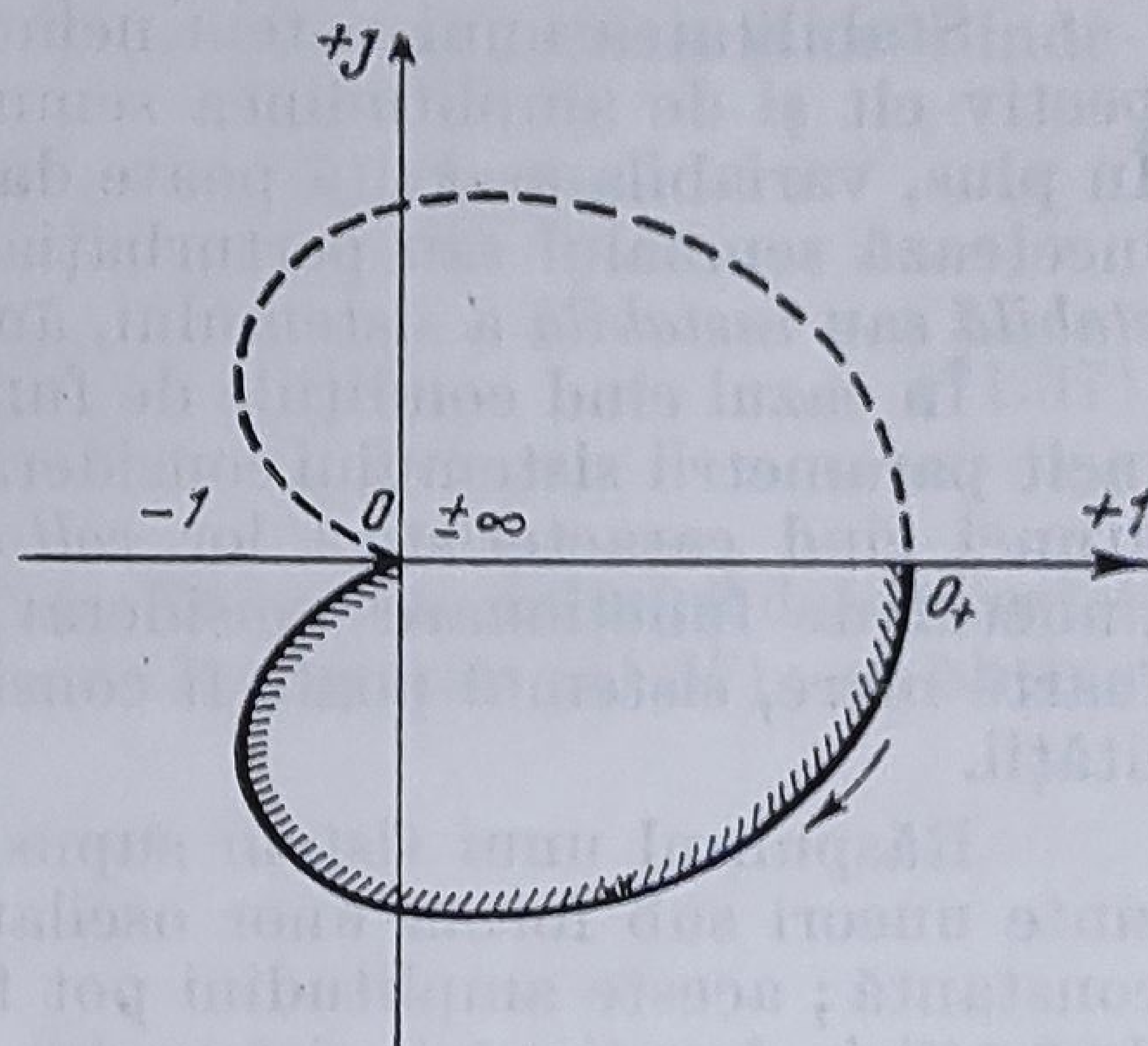


Fig. 11.47. Caracteristica amplitudine-fază a unui regulator stabil.

Rezultă, că pentru orice valoare a lui K, sistemul considerat este întotdeauna stabil.

Exemplul 2. Fie ecuaţia

$$\eta(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)},$$

care reprezintă, de exemplu, funcţia de transfer a unui regulator de poziţie comandat de un motor electric.

Procedînd ca şi în cazul precedent, se găseşte că argumentul maxim este $\frac{3\pi}{2}$ (în sensul orar). Rezultă că stabilitatea sistemului depinde de mărimea parametrului K (fig. 11.48)**.

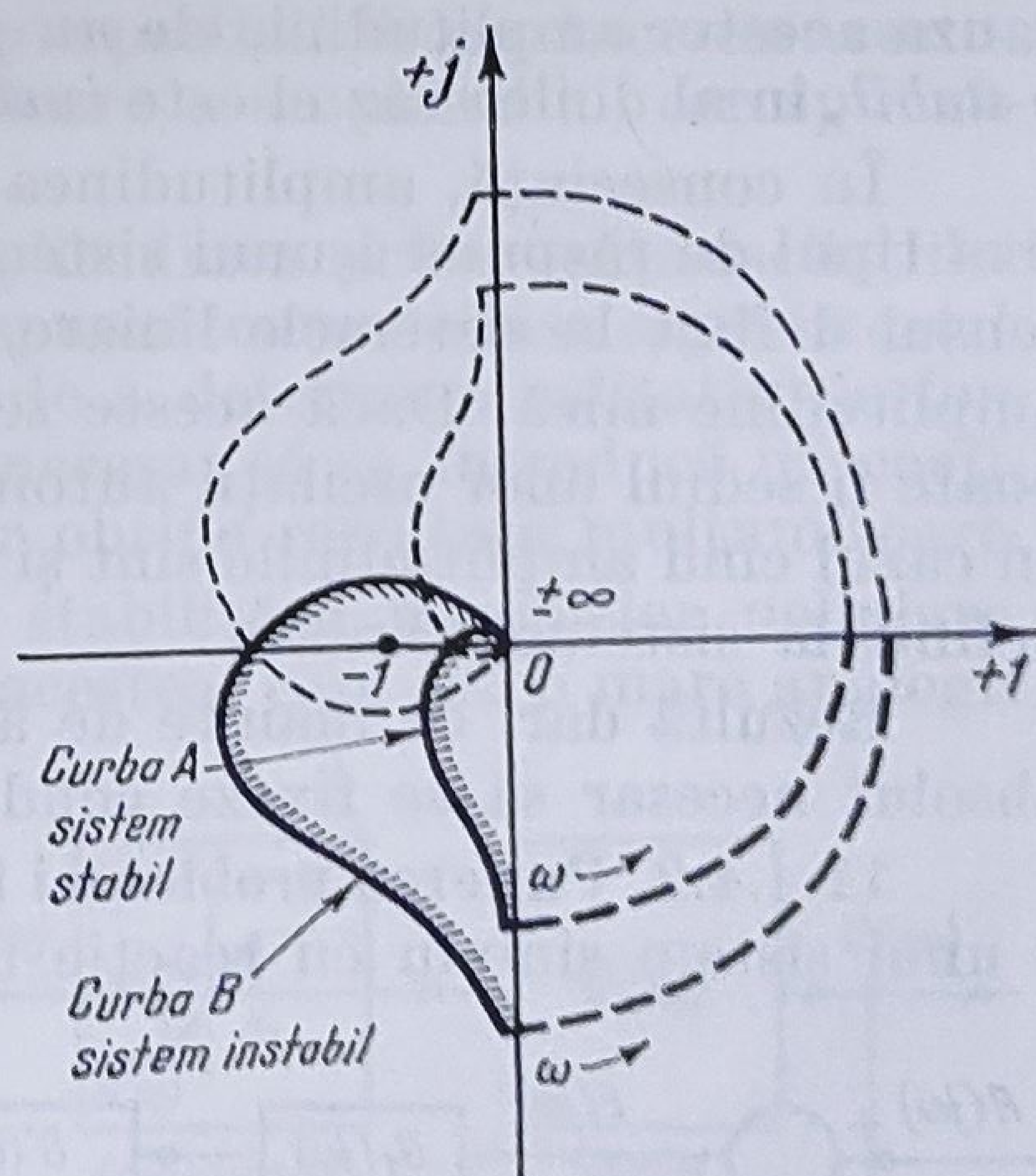


Fig. 11.48. Caracteristica amplitudine-fază a unui regulator comandat.

---

* Curba a fost trasată pentru cazul particular $T_1 = 0{,}5$, $T_2 = 0{,}04$ şi $K = 20$ [80].

** Curbele au fost construite pentru cazurile particulare $T_1 = \frac{1}{4}$, $T_2 = \frac{1}{16}$, $K_1 = 10$ curba A) şi $K = 100$ (curba B).

11.4.4. STABILITATEA SISTEMELOR NELINIARE

11.4.4.1. **Generalităţi** *. Stabilitatea unui sistem liniar depinde numai de parametrii sistemului respectiv şi este independentă de amplitudinea semnalului aplicat. Criteriile de stabilitate (HURWITZ, ROUTH, NYQUIST etc.) dau posibilitatea să se ştie dacă un sistem, în prealabil în echilibru, supus la timpul t la un semnal sau la o perturbaţie oarecare, revine la o nouă stare de echilibru, în cazul unui sistem stabil, sau va căpăta o oscilaţie autoîntreţinută, în cazul unui sistem instabil.

Stabilitatea unui sistem neliniar depinde atît de parametrii sistemului respectiv cît şi de amplitudinea semnalului aplicat sau a funcţiei perturbatoare. În plus, variabila aservită poate da mai multe tipuri de răspunsuri atunci cînd încetează semnalul sau perturbaţia. Este posibil astfel, să apară o *funcţionare stabilă* sau *instabilă* a sistemului, analog cu acelea care apar în sistemele liniare.

În cazul cînd condiţiile de funcţionare ale unui sistem neliniar sînt astfel, încît parametrii sistemului considerat variază puţin faţă de valoarea lor liniară, atunci cînd caracteristica lor *volt-amper* poate fi confundată cu tangenta în punctul de funcţionare considerat, în cazul cînd semnalul nu are o valoare foarte mare, sistemul poate fi considerat liniar din punctul de vedere al stabilităţii.

Răspunsul unui sistem supus unei perturbaţii oarecare poate să se prezinte uneori sub forma unor oscilaţii autoîntreţinute, cu amplitudine maximă constantă ; aceste amplitudini pot fi cuprinse sau nu între nişte limite definite de precizia funcţionării sistemului.

Trebuie observat, că examinarea producerii oscilaţiilor autoîntreţinute nu trebuie limitată numai la consideraţii de amplitudine. Trebuie văzut, în special, dacă ele sînt destul de mici, pentru a putea fi *tolerate* de sistem sau din cauza acestor amplitudini, ele *nu pot fi tolerate* de sistem ; în primul caz sistemul e *stabil*, în al doilea caz el este *instabil*.

În consecinţă, amplitudinea unui semnal sau a unei perturbaţii poate fixa tipul de răspuns a unui sistem neliniar. Un asemenea sistem este stabil, în sensul definit la sistemele liniare, dacă este supus unor semnale de intrare de amplitudine mică. Dacă aceste semnale au o amplitudine mai mare, sistemul poate fi sediul unor oscilaţii autoîntreţinute cu amplitudine maximă constantă. În cazul cînd amplitudinile sînt şi mai mari, sistemul poate fi instabil, în sensul definit la sistemele liniare.

Rezultă dar, că înainte de a verifica stabilitatea unui sistem neliniar, este absolut necesar să se fixeze condiţiile sale de utilizare.

11.4.4.2. **Punerea problemei în ecuaţie***. Să considerăm schema funcţională a unui sistem simplu cu reacţie totală (fig. 11.49). Elementele circuitului de

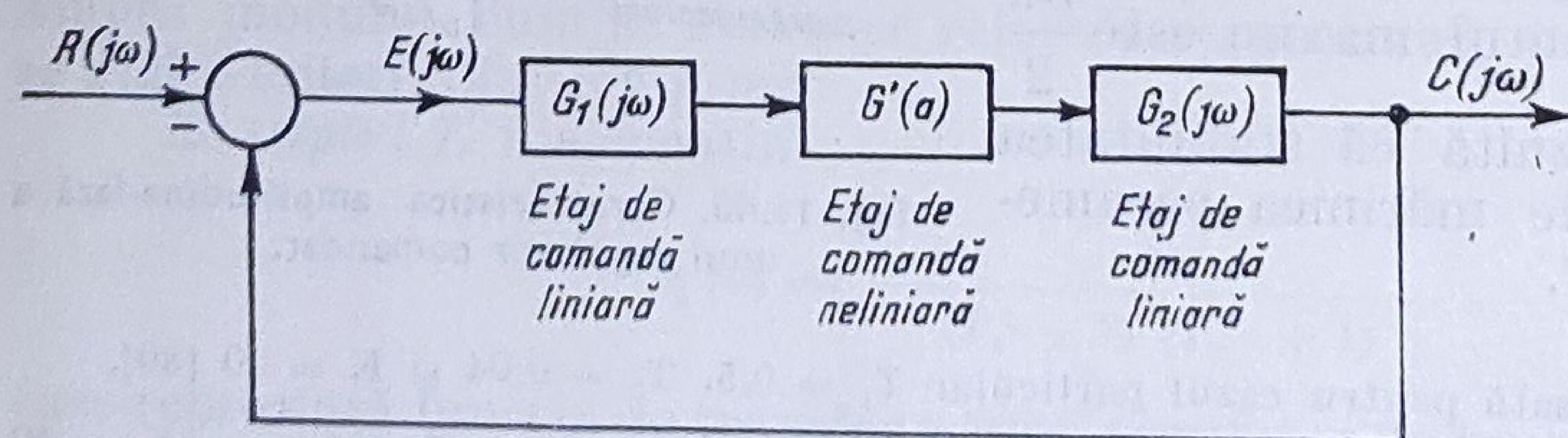


Fig. 11.49. Sistem simplu de comandă cu elemente liniare şi neliniare.

---

* Vezi [80].

acțiune, reprezentate prin funcțiile de transfer $G_1(j\omega)$ și $G_2(j\omega)$, sînt liniare. În consecință, ele variază cu pulsația ω independent de amplitudinea a a semnalului respectiv de intrare. Se poate scrie deci*

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) . G_2(j\omega).$$

Această relație ne arată în plus că, poziția în schemă a elementului neliniar e indiferentă**.

Elementul de comandă reprezentat prin funcția de transfer $G'(a)$ este neliniar, el depinde de amplitudinea semnalului sinusoidal aplicat și este independent de frecvența acestuia.

Urmînd teoria aplicată la sistemele liniare ***, se găsește

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G'(a)\ G(j\omega)}{1 + G'(a)\ G(j\omega)}. \tag{11.37}$$

Pentru a stabili condițiile de instabilitate (în sensul definirii date acestei noțiuni în sistemele liniare), să anulăm numitorul expresiei (11.37); se obține

$$1 + G'(a)\, G(j\omega)$$

sau

$$G(j\omega) = -\frac{1}{G'(a)}, \tag{11.38}$$

care este condiția de apariție a oscilațiilor autoîntreținute. Relația (11.38) poate să fie astfel, încît să nu existe decît o singură valoare posibilă de producere a acestor oscilații autoîntreținute, pentru o anumită valoare a amplitudinii corespunzătoare unei anumite frecvențe.

În practică, valorile calculate pentru amplitudinea și frecvența oscilațiilor autoîntreținute diferă sensibil de valorile corespunzătoare deduse *experimental*. Astfel, această metodă este numai un mijloc de a determina calitativ performanțele unui sistem neliniar; în practică este necesar să se introducă un coeficient de siguranță pentru a fi siguri că se vor obține rezultate mulțumitoare.

Există numeroase metode de studiu a stabilității sistemelor neliniare. În paragraful următor se va examina una din acestea, care are o mare analogie cu criteriul lui NYQUIST, utilizat în sistemele liniare.

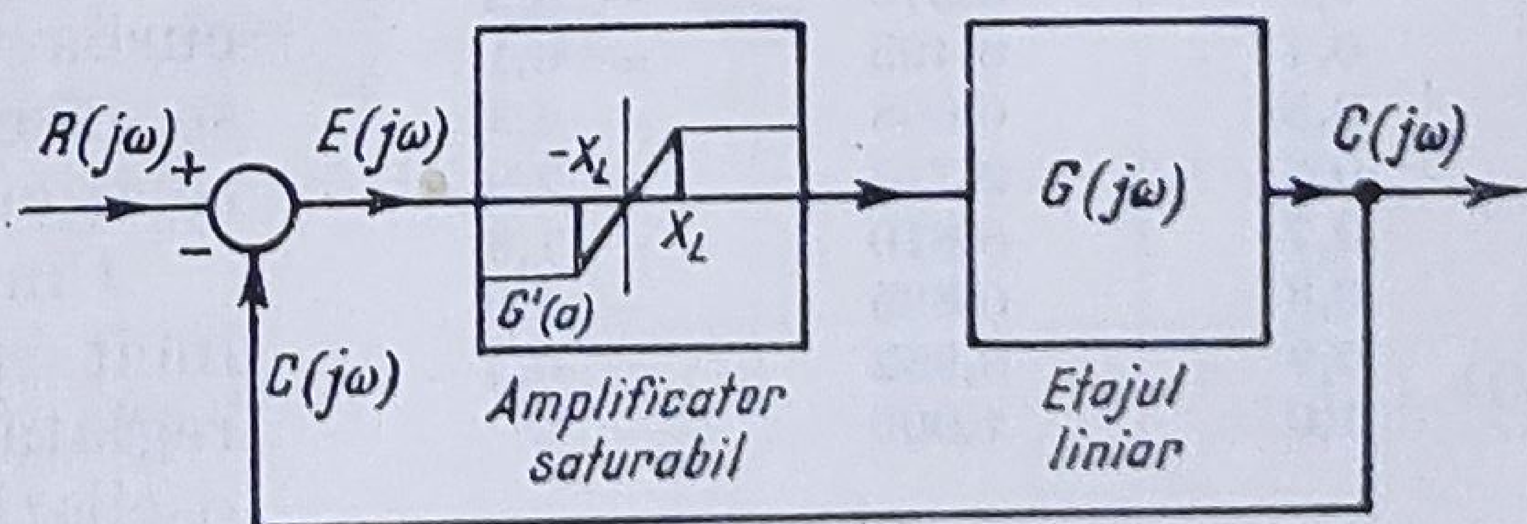


Fig. 11.50. Sistem comportînd un amplificator saturabil.

11.4.4.3. Metoda planului complex**.** Fie un sistem, care comportă în circuitul său un amplificator saturabil (fig. 11.50); caracteristica ideală de saturație a amplificatorului este dată în figura 11.51, iar în

* Vezi 6.3.1.5.

** Afirmație valabilă numai într-o primă aproximație.

*** Vezi 11.4.1.2.

**** Vezi [80].

tabloul 11.3 sînt date elementele care caracterizează funcția descriptivă $G'(a)$. În figura 11.52 a fost construită caracteristica $G(j\omega)$ a sistemului dat, în funcție de frecvență și o funcție descriptivă $G'(a)$ și inversa sa cu semnul schimbat în funcție de raportul $X_L/X_{max} = a_1$. Să presupunem că se aplică sistemului un semnal sub forma unei funcții treaptă. Eroarea inițială aplicată la intrarea amplificatorului saturabil este egal cu amplitudinea X_{max} a semnalului de referință.

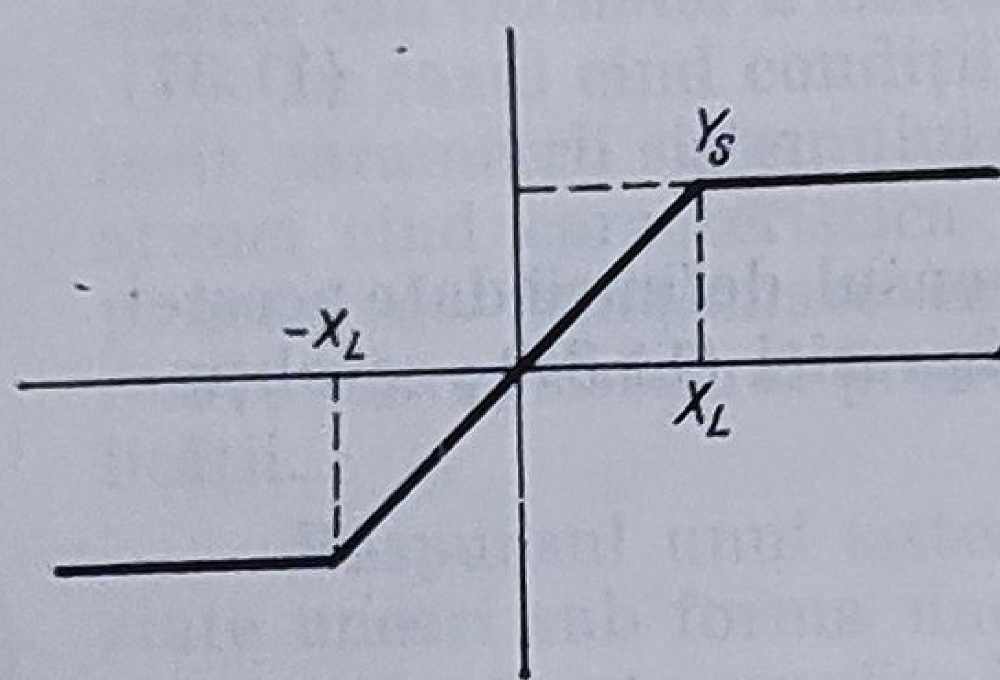


Fig. 11.51. Reprezentarea idealizată a unei saturații.

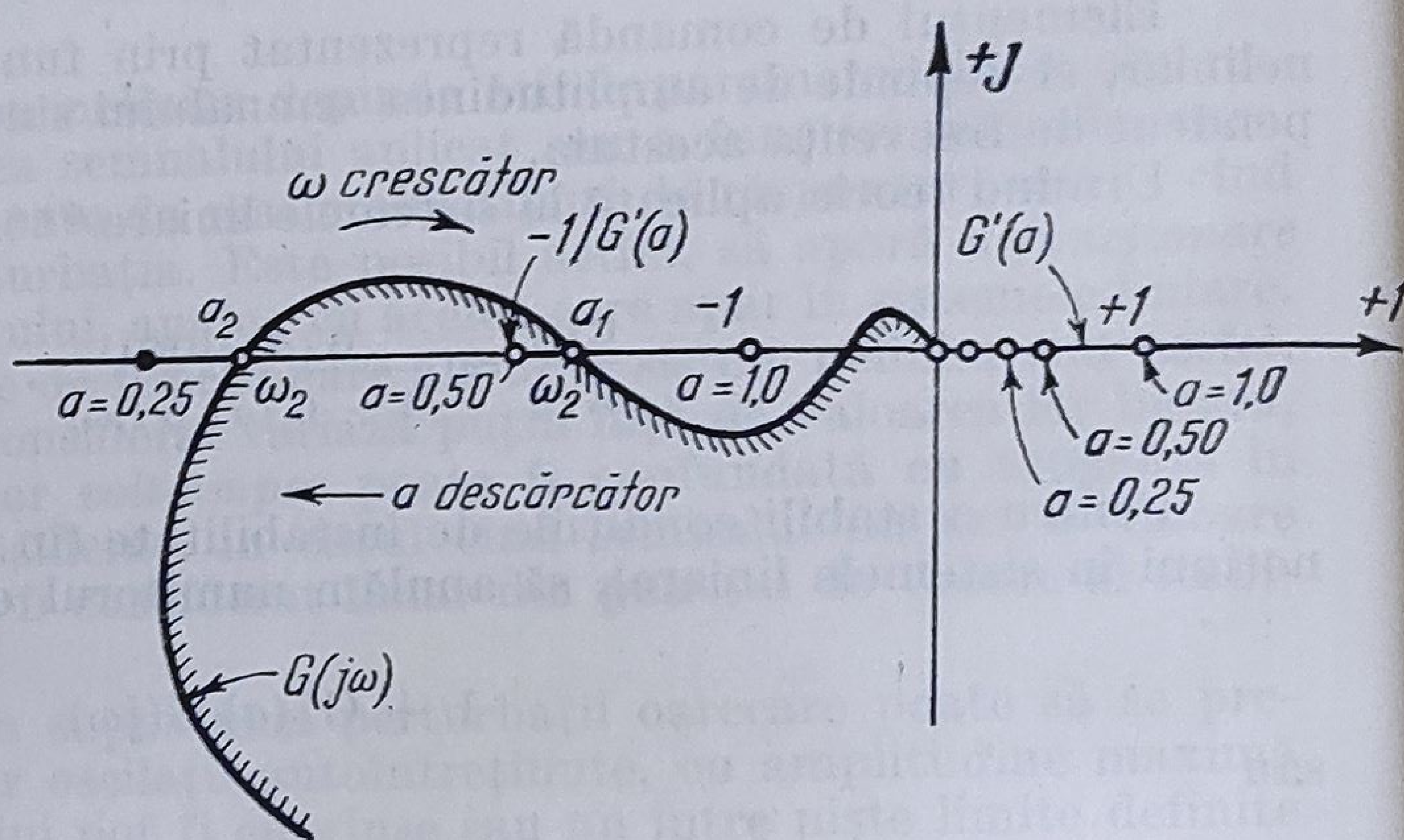


Fig. 11.52. Reprezentarea în planul complex a funcțiilor $G(j\omega)$, $G'(a)$ și $-1/G'(a)$ a sistemului considerat.

Dacă X_{max} e mic, sistemul nu e saturat; sistemul funcționează ca un sistem liniar stabil, care se traduce prin aceea că punctul, $-1, j0$ se găsește în stînga curbei $G(j\omega)$ și relația (11.38) nu e niciodată satisfăcută.

Tabloul 11.3

VALOAREA RELATIVĂ, A FUNCȚIEI DE SATURAȚIE

$a = X_L/X_{max}$	A_s numeric	decibeli
0	0	...
0,1	0,127	−17,9
0,2	0,253	−12,0
0,3	0,376	− 8,5
0,4	0,495	− 6,1
0,5	0,608	− 4,3
0,6	0,715	− 2,9
0,7	0,810	− 1,8
0,8	0,895	− 1,0
0,9	0,962	− 0,4
1,0	1,000	0

Pentru semnale cu amplitudinea mai mare, astfel ca $X_{max} > X_L$, pentru $1 > a > a_1$, valoarea $-1/G'(a)$ se situează pe partea negativă a axei reale, dar nu există nici o valoare pentru ω și pentru a care să satisfacă relația (11.38). Sistemul este stabil.

Pentru semnale pentru care $a_1 > a > a_2$, curba $G(j\omega)$ cuprinde valorile lui $-1/G'(a)$ se găsesc deci condiții pentru satisfacerea relației (11.38) și sistemul este instabil.

Cînd amplitudinea X_{max} este astfel, încît raportul $X_L/X_{max} = a_2$, variabila reglată tinde să se prezinte sub forma de oscilații autoîntreținute.

Pentru valori $a < a_2$, $-1/G'(a)$ se găsește la stînga locului funcției de transfer $G(j\omega)$ și nu este ocolit de acesta, funcționarea pare stabilă, prin aceea că oscilațiile mărimii reglate tind către acelea corespunzătoare lui a_2; dacă această valoare e atinsă, oscilațiile se stabilizează și păstrează această amplitudine maximă.

Trebuie observat că punctul de funcţionare corespunzator lui a_1 corespunde regimului *critic* de funcţionare; într-adevăr, pentru $a > a_1$, funcţionarea sistemului este stabilă, iar pentru $a < a_1$, funcţionarea sistemului e instabilă.

11.4.4.4. Oscilaţii de relaxare. Experienţa lui PAUL JANET. Fie un generator de curent continuu G, cu excitaţie în serie, rotit cu o viteză constantă şi care alimentează un motor M, cu excitaţie separată, funcţionînd în gol (fig. 11.53).

Generatorul fiind rotit cu o viteză constantă, forţa sa electromotoare este proporţională cu fluxul; din cauza saturaţiei fierului, fluxul nu este proporţional cu curentul; forţa electromotoare a generatorului poate fi reprezentată aproximativ prin relaţia

$$e_g = k_1 i - k_2 i^3.$$

Forţa contra-electromotoare a motorului, a cărui excitaţie este constantă, este proporţională cu viteza sa de rotaţie

$$e_m = k_3 \Omega_m.$$

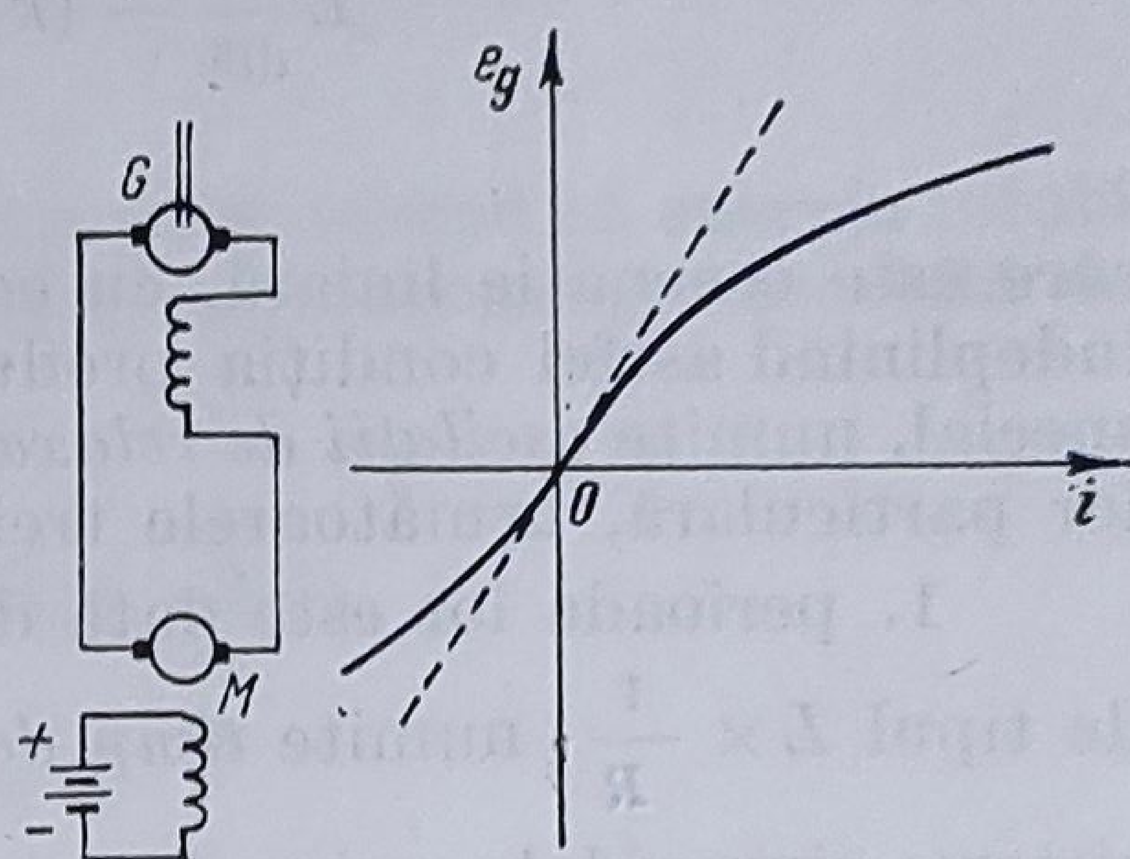


Fig. 11.53. Schema de montaj şi caracteristica generatorului.

Aplicînd teorema a II-a a lui KIRCHHOFF circuitului, se obţine

$$k_1 i - k_2 i^3 = k_3 \Omega_m + L \frac{di}{dt} + Ri, \tag{11.39}$$

în care i este curentul debitat de generator în circuit, R şi L rezistenţa şi inductanţa totală a acestuia.

Puterea absolută de motor la mersul acestuia în gol, dacă se neglijează toate pierderile, este consumată pentru accelerarea părţii rotative. Dacă J este momentul de inerţie al rotorului motorului, energia cinetică a acestuia este $\frac{1}{2} J\Omega^2_m$ şi deci ecuaţia puterilor este

$$k_3 \Omega_m i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J \Omega^2_m\right) = J\Omega_m \frac{d\Omega_m}{dt}$$

de unde

$$\frac{d\Omega_m}{dt} = \frac{k_3}{J} i. \tag{11.40}$$

Derivînd ecuaţia (11.39) în raport cu timpul şi ţinînd seama de relaţia (11.40) se obţine

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} - (k_1 - R - 3k_2 i^2) \frac{di}{dt} + \frac{k_3^2}{J} i = 0. \tag{11.41}$$

Pentru valori mici ale lui i, al doilea termen al parantezei este foarte mic şi poate fi neglijat, ţinînd seama de ecuaţia (11.39)

$$k_1 - R > 0,$$

ecuaţia (11.41) se poate scrie

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} - (k_1 - R)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{k_3^2}{J} i = 0, \tag{11.42}$$

care este o ecuaţie liniară, cu coeficientul termenului de ordinul întîi negativ, îndeplinind astfel condiţia producerii de oscilaţii autoîntreţinute cu un caracter special, numite *oscilaţii de relaxare**. Aceste oscilaţii prezintă, în afară de forma lor particulară, următoarele trei caractere fizice importante :

1. perioada lor este dată de un produs de două mărimi de tipul CR, sau de tipul $L \times \frac{1}{R}$, numite *timp de relaxare*, în loc de a fi dată, ca perioada unui sistem sinusoidal, prin rădăcina pătrată a produsului a două mărimi de tipul LC;

2. se sincronizează foarte uşor cu o forţă electromotoare sinusoidală de frecvenţă oricît de diferită de a lor, însă, dacă perioada lor poate varia astfel uşor între limite destul de largi, amplitudinea lor rămîne practic constantă ;

3. sub influenţa unei forţe electromotoare periodice de frecvenţă cu mult mai mare decît a lor, ele adoptă o frecvenţă care este un *submultiplu* exact al frecvenţei forţei electromotoare impusă, realizînd astfel un demultiplicator de frecvenţă.

Punînd

$$\Omega = \frac{k^3}{\sqrt{JL}} \quad \text{şi} \quad \xi = \frac{k_1 - R}{k_3}\sqrt{\frac{J}{L}},$$

ecuaţia (11.41) se poate scrie

$$\frac{1}{\Omega}\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} - \frac{k_1 - R}{L\Omega}\left(1 - \frac{3k_2}{k_1 - R} i^2\right)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \Omega i = 0.$$

Dacă, rezistenţa negativă,

$$k_1 - R <<< L\Omega = k_3\sqrt{\frac{J}{L}},$$

* Vezi [10] pag. 671.

atunci coeficientul

$$\frac{k_1 - R}{L\Omega} <<< 1,$$

termenul al doilea este foarte mic şi soluţia ecuaţiei (11.41) este foarte apropiată de

$$i = I_0 \sin \Omega\, t\ ;$$

regimul de funcţionare este sensibil reprezentat de o oscilaţie periodică sinusoidală de perioadă $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

Amplitudinea I_0 a acestei oscilaţii se determină scriind că energia totală cheltuită în timpul unei perioade este nulă. Puterea instantanee absorbită de sistem este dată de relaţia

$$ui = (k_1 i - k_2 i^3) i = k_1 i^2 \left(1 - \frac{k_2}{k_1} i^2\right)$$

şi deci ecuaţia energetică corespunzătoare este

$$\int_0^T k_1 I_0^2 \sin^2 \Omega\, t \left(1 - \frac{k_2}{k_1} I_0^2 \sin^2 \Omega t\right) \mathrm{d}t = 0,$$

de unde rezultă

$$I_0 = 2 \sqrt{\frac{k_1}{3k_2}},$$

astfel, încît expresia căutată a curentului este

$$i = 2 \sqrt{\frac{k_1}{3k_2}} \sin \Omega\, t.$$

Curentul i schimbîndu-şi sensul în mod periodic, rezultă că şi viteza motorului

$$\Omega_m = \frac{k_3}{J} \int i \,\mathrm{d}t,$$

va varia periodic şi deci motorul se va roti astfel, cînd într-un sens, cînd în celălalt.

În practică însă $\xi >>>$ şi perioada oscilaţiilor de relaxare are valoarea aproximativă*

$$T' = \frac{2\xi}{\Omega} = 2\, \frac{k_1 - R}{k_3^2} J,$$

fiind astfel proporţională cu momentul de inerţie al motorului.

* Vezi [10] pag. 671.

PARTEA A IV-a

PROPAGAREA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE

Capitolul XII

TEORIA LINIILOR LUNGI

12.1. STUDIUL LINIILOR LUNGI ÎN REGIM CUASISTAŢIONAR

12.1.1. GENERALITĂŢI

În studiul circuitelor de curent alternativ, efectuat în capitolele precedente, s-a făcut aproximaţia că diversele forme de energie sînt concentrate în anumite porţiuni ale circuitului, existînd independent unele de altele* : circuitele echivalente corespunzătoare sînt constituite din elemente cu parametrii respectivi concentraţi. În aceste condiţii, în fiecare din elementele circuitului, curentul îşi păstrează în permanenţă constantă valoarea sa efectivă şi defazajul său relativ, din momentul în care el pătrunde în circuit prin borna sa de intrare pînă în momentul cînd îl părăseşte prin borna de ieşire.

Această aproximaţie nu mai poate fi făcută, atunci cînd se studiază o linie electrică lungă de transmitere a energiei electrice. O linie electrică lungă nu poate fi reprezentată numai printr-o simplă impedanţă, decît numai dacă se neglijează curentul său capacitiv şi pierderile datorite imperfecţiei izolaţiei sale ; de asemenea, un lanţ de izolatori nu poate fi reprezentat printr-un lanţ de condensatoare decît dacă se neglijează curenţiii inductivi respectivi etc.

Rezultă dar, că în studiul unei linii lungi nu se poate face aproximarea concentrării parametrilor ei în diverse puncte, ci este necesar a se stabili modul cum se face transmiterea curentului alternativ printr-un circuit avînd în acelaşi timp atît rezistenţă cît şi inductanţă şi capacitate repartizate uniform de-a lungul întregului circuit.

Cu ajutorul rezultatelor obţinute, se va putea examina eroarea ce se face, în cazul cînd la studiul unei linii lungi se presupun diverşii parametri concentraţi în anumite puncte ale ei ; ca o consecinţă, vor putea fi stabilite condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească o linie pentru a se putea face studiul ei în ipoteza că parametrii săi sînt concentraţi precum şi modul de stabilire a circuitului său echivalent.

În consecinţă, studiul unei linii lungi de transmitere a energiei electrice se va face, în ipoteza că aceasta posedă simultan o anumită rezistenţă, o anumită conductanţă, o anumită inductanţă şi o anumită capacitate, fiecare din aceşti parametri fiind uniform răspîndiţi de-a lungul întregii linii, linia fiind presupusă omogenă.

În cazul unei linii electrice monofazate sau polifazate simetrice, parcursă de un sistem de curenţi cu componenta homopolară nulă, se poate considera

---

* Vezi 4.3.3.2.

numai un singur circuit constituit cu unul din conductorii liniei şi un conductor neutru, situat în centrul geometric al sistemului de conductori. Întrucît s-a presupus că suma curenţilor de întoarcere, care ar străbate acest conductor, este nulă, conductorul neutru poate fi înlocuit printr-o linie geometrică.

Tensiunea care intervine în circuitul considerat este $\frac{U}{\sqrt{3}}$ în cazul unei linii trifazate şi $\frac{U}{2}$ în cazul unei linii monofazate, U fiind tensiunea de linie.

Parametrii liniei electrice lungi sînt definiţi pentru acest circuit.

12.1.2. PARAMETRII LINIILOR ELECTRICE LUNGI

12.1.2.1. **Rezistenţa lineică.** *Rezistenţa pe unitatea de lungime* sau *rezistenţa lineică*, a unei linii electrice lungi, este rezistenţa uniform răspîndită r, definită prin pierderile prin efect JOULE $r\,dx\,i^2$, disipate într-un element de linie infinit mic dx, parcurs de un curent de pulsaţie egală cu aceea a regimului considerat şi avînd o intensitate efectivă egală cu 1 A de-a lungul întregului element de circuit.

Valoarea kilometrică a acestei rezistenţe este dată de relaţia

$$r = k\frac{\rho}{s} \quad \Omega/\text{km} \qquad (12.1)$$

în care ρ este rezistivitatea, în $\frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{km}}$;

s — secţiunea efectivă a conductorului, în mm^2;

k — un factor corectiv, care ţine seama de cablarea conductorului, de efectul pelicular*, de săgeată etc.

Pentru conductoare construite din materiale nemagnetice, valoarea acestui factor este $k = 1{,}01$ pentru conductoare cilindrice masive şi $k = 1{,}02 \div 1{,}05$ pentru conductoare cablate.

Pentru conductoare cablate din oţel-aluminiu, calculul rezistenţei se face tot cu relaţia (12.1), aplicată însă numai la coroana de aluminiu, factorul k avînd aceleaşi valori; trebuie ţinut seama că inima de oţel a cablului este o cauză de pierderi suplimentare.

Valoarea rezistenţei electrice este influenţată de variaţiile curentului şi de condiţiile meteorologice, prin încălzirea pe care o exercită asupra conductorului.

12.1.2.2. **Conductanţa lineică.** *Conductanţa pe unitatea de lungime* sau *conductanţa lineică*, a unei linii electrice lungi este conductanţa uniform răspîndită g, definită prin puterea activă $g\,dx\,u^2$ pierdută într-un element de linie infinit mic dx din cauza defectelor de izolaţie sau a curenţilor de deplasare, atunci cînd între conductorul de ducere şi conductorul fictiv de întoarcere există o diferenţă de potenţial de 1 V de-a lungul elementului dx.

---

* Vezi Cap. XIV.

Valoarea kilometrică a acestei conductanțe se obține din relația de definiție și este

$$g = \frac{p}{U_0^2} \cdot 10^{-3} \text{ S/km},$$

în care p sînt pierderile de dispersiune totale pe km de conductă simplă, în kW;

U_0 este tensiunea efectivă pe fază, în kV.

Conductanța este o mărime care nu se poate determina decît experimental; ea variază în general de-a lungul liniei, atît din cauza stării liniei cît și din cauza condițiilor meteorologice și a variației tensiunii. În practică, pentru conductanță se iau valori între

$$g = 0{,}97 \cdot 10^{-8} - 27 \cdot 10^{-8} \text{ S/km}.$$

12.1.2.3. **Inductanța lineică.** *Inductanța pe unitatea de lungime* sau *inductanța lineică**, a unei linii electrice lungi este inductanța uniform răspîndită l, definită prin puterea reactivă $l\,\mathrm{d}x\,\omega\,i^2$ absorbită într-un element de linie infinit mic $\mathrm{d}x$, parcurs de un curent electric avînd o intensitate efectivă de 1 A de-a lungul întregului element, prin producerea fluxului magnetic care îmbrățișează acest element.

Valoarea kilometrică a acestei inductanțe se calculează cu relația

$$l = \left(\lambda + 2 \ln \frac{2D}{d}\right)\mu_r \cdot 10^{-4} = \left(\lambda + 4{,}6 \lg \frac{2D}{d}\right)\mu_r \cdot 10^{-4} \text{ H/km} \qquad (12.2)$$

în care d este diametrul conductorului, în m;

D — distanța medie geometrică între conductoarele liniei, în m și este dată de relația

$$D = \sqrt[3]{D_{12} \cdot D_{23} \cdot D_{31}},$$

$D_{jk}(j \neq k = 1,2,3)$ fiind distanțele reale, în m, între diversele conductoare ale liniei;

λ — un factor proporțional cu inductanța internă a conductorului; el este egal cu 0,5 dacă densitatea de curent este uniform repartizată pe întreaga secțiune plină a conductorului (cazul curentului continuu și a curenților alternativi de frecvență foarte joasă) și tinde către zero cînd curenții electrici caută să se localizeze la suprafața conductorului din cauza efectului pelicular**. În cazul conductoarelor eterogene (conductoarele de oțel-aluminiu) și la frecvențele industriale se poate lua $\lambda = 0{,}1$;

μ_r — este permeabilitatea relativă a mediului dintre conductoare.

În cazul sistemelor polifazate, din cauza așezării nesimetrice a conductoarelor față de pămînt, este necesar a se face o transpunere*** a acestora pentru a se obține o uniformizare cît mai bună a acestei inductanțe.

---

* sau inductanța de serviciu

** Vezi 3.4.5.

*** Vezi 1.5.7.4. și 3.4.5.

Pentru o linie aeriană trifazată, cu un singur circuit, valoarea medie a inductanţei de serviciu este cuprinsă între

$$l = 1{,}2 \cdot 10^{-3} - 1{,}45 \cdot 10^{-3} \text{ H/km},$$

iar pentru un cablu subteran ea este aproximativ

$$l = 0{,}487 \cdot 10^{-3} \text{ H/km}.$$

12.1.2.4. Capacitatea lineică. *Capacitatea pe unitatea de lungime* sau *capacitatea lineică* * a unei linii electrice lungi, este capacitatea uniform răspîndită c, definită prin puterea reactivă $cdx\omega u^2$ produsă de elementul de linie infinit mic dx, supus tensiunii efective de 1 V, prin curenţii de deplasare din dielectricul care separă conductoarele liniei.

Valoarea kilometrică a acestei capacităţi se calculează cu relaţia **

$$c = \frac{10^{-6}\,\varepsilon_r}{18 \ln \dfrac{2D}{d}} = \frac{2{,}41\,\varepsilon_r}{\lg \dfrac{2D}{d}} \cdot 10^{-8} \text{ F/m}, \qquad (12.3)$$

diversele mărimi avînd aceleaşi semnificaţii ca şi în cazul expresiei inductanţei lineice iar ε_r este permitivitatea relativă a mediului dintre conductoare.

Dacă se ţine seama de prezenţa solului, expresia capacităţii lineice este

$$c = \frac{10^{-6}\,\varepsilon_r}{18 \ln \dfrac{2D}{d} \dfrac{2H}{\sqrt{4H^2 + D^2}}} = \frac{2{,}41\,\varepsilon_r}{\lg \dfrac{2D}{d} \dfrac{2H}{\sqrt{4H^2 + D^2}}} 10^{-8}, \text{F/km} \qquad (12.4)$$

în care H este distanţa medie a liniei faţă de pămînt şi se calculează cu relaţia

$$H = h - \frac{2}{3} f,$$

unde h este înălţimea conductorului faţă de pămînt la punctul de suspensie şi f săgeata conductorului în deschiderea respectivă ***.

Valoarea medie a capacităţii lineice pentru o linie lungă aeriană trifazată, cu un singur circuit, este cuprinsă între

$$c = 0{,}008 \cdot 10^{-3} - 0{,}0095 \cdot 10^{-3} \text{ F/km};$$

pentru un cablu subteran trifazat această valoare este

$$c = 0{,}023 \cdot 10^{-3} \text{ F/km}.$$

---

* sau capacitatea de serviciu (vezi 1.5.7.).

** Vezi 1.5.7.

*** Expresiile (12.3) şi (12.4) se deduc din relaţiile (1.141) şi respectiv (1.138), în care linia trifilară se consideră ca o linie bifilară, distanţa dintre cele două conductoare fictive fiind luată media geometrică a distanţei dintre cele trei conductoare. Vezi şi 1.5.7.4.

OBSERVAȚIE. În cazul liniilor de foarte înaltă tensiune (peste 220 kV), conductoarele liniilor se realizează din mai multe fire, obținîndu-se astfel, *conductoare în fascicul*. Fiecare fază este astfel formată din două, trei sau patru conductoare așezate astfel, încît să permită o anumită simetrie (fig. 12.1). Prin acest aranjament se reduce posibilitatea producerii efectului corona * prin aceea că, la egalitate de secțiune de conductor, cîmpul electric la suprafața acestora se reduce.

Formulele de calcul (12.2), (12.3) și (12.4) rămîn valabile și în acest caz cu condiția de a se înlocui diametrul d al conductorului cu acel dat de relația

$$d' = \sqrt[n]{2^{n-1}\ R^{n-1}\ nd}$$

numit *diametrul echivalent* al conductorului, în care R este raza arcului pe care sînt așezate conductoarele liniei, în metri, n numărul acestor conductoare și d diametrul unui conductor, în metri.

Pentru un fascicul cu trei conductoare, se obține

$$d' = \sqrt[3]{12\ d\ R^2}.$$

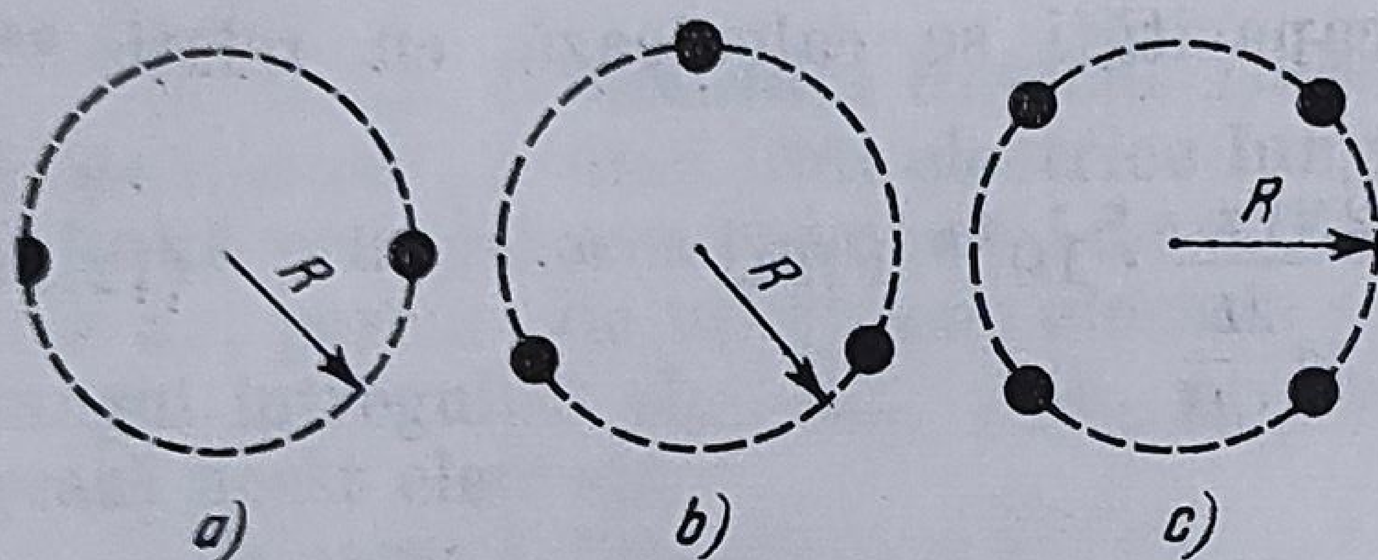


Fig. 12.1. Fascicul de conductoare.
a) cu doi conductori; b) cu trei conductori; c) cu patru conductori

12.1.2.5. **Impedanța lineică.** Dacă circuitul considerat este parcurs de un curent de pulsație ω, se definește impedanța pe unitatea de lungime sau *impedanța lineică* a liniei prin expresia

$$\underline{Z} = r + \mathrm{j}\, l\omega = r + \mathrm{j}\xi\ \ \Omega/\mathrm{km}, \tag{12.5}$$

avînd modulul

$$Z = \sqrt{r^2 + l^2\,\omega^2} = \sqrt{r^2 + \xi^2}$$

și argumentul

$$\psi_Z = \mathrm{arc\,tg}\ \frac{\xi}{r}.$$

Pentru frecvența de 50 Hz și pentru o linie aeriană cu un singur circuit, ținînd seama de valoarea medie a inductanței, valoarea reactanței lineice este cuprinsă între

$$l\omega = \xi = 0{,}38 - 0{,}46\ \ \Omega/\mathrm{km}.$$

Pentru o linie cu două circuite valoarea corespunzătoare crește cu 2 % — 8 %.

12.1.2.6. **Admitanța lineică.** Dacă tensiunea aplicată sistemului are pulsația ω, se definește admitanța pe unitatea de lungime sau *admitanța lineică* a liniei prin expresia

$$\underline{Y} = g + \mathrm{j}\, c\,\omega = g + \mathrm{j}b\ \ \mathrm{S/km}, \tag{12.6}$$

* Vezi 9.4.4.2.

avînd modulul

$$y = \sqrt{g^2 + c^2\omega^2} = \sqrt{g^2 + b^2}$$

şi argumentul

$$\psi_y = \text{arc tg}\frac{b}{g}.$$

12.1.2.7. **Linie electrică aeriană, cu conductoare simple, funcţionînd în regim dezechilibrat.** Pentru o linie electrică aeriană, cu conductoare simple, funcţionînd în regim dezechilibrat, reactanţele directă şi inversă sînt egale * şi pot fi calculate cu ajutorul valorilor obţinute din relaţiile (12.2) şi (12.3). În ceea ce priveşte sistemul homopolar, atît rezistenţele, cît şi inductanţele şi capacităţile sînt diferite faţă de cele corespunzătoare sistemelor direct şi invers; mai mult, ele diferă şi în raport cu modul de constituire al sistemului trifazat, dacă sistemul are un conductor de întoarcere izolat sau nu de pămînt.

După cum s-a arătat **, circulaţia curenţilor homopolari implică existenţa unei căi de întoarcere, care poate fi un al patrulea conductor — conductorul neutru — sau chiar pămîntul. Regimul homopolar de funcţionare a unui circuit se obţine legînd în paralel conductoarele celor trei faze şi alimentînd cu o sursă monofazată circuitul format din aceste conductoare şi conductorul neutru (fig. 12.2). Prin definiţie ***, impedanţa homopolară este egală cu triplul raportului dintre tensiunea U_0 şi curentul pe fază I_0.

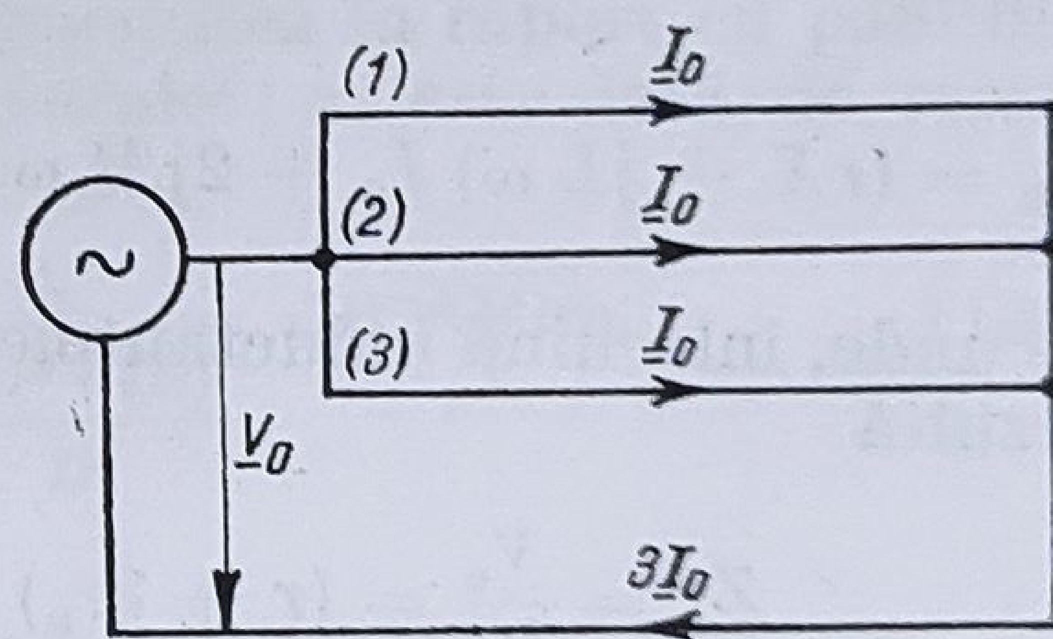


Fig. 12.2. Sistem homopolar.

Calculul acestei impedanţe se face diferit după cum conductorul neutru este izolat de pămînt sau este constituit de acesta.

a) *Conductorul de întoarcere este izolat de pămînt.* Pentru calculul impedanţei homopolare există în literatură diverse metode; una dintre aceste metode**** constă în atribuirea fiecărui conductor al liniei a unei rezistenţe proprii fictive, a unei inductanţe proprii fictive şi a unei inductanţe mutuale fictive între conductori, luaţi doi cîte doi. Dacă X este lungimea totală a liniei, în km, şi se presupune că linia a fost simetrizată prin transpunere, parametrii care intervin în calcul sînt următorii:

Pentru *conductorul de fază* avînd *raza echivalentă* ***** a'

rezistenţa: $R = rX \;\; \Omega;$

inductanţa proprie: $L = 4{,}6\, X \left(\lg \frac{2X}{a'} - 1\right) \cdot 10^{-4}\text{H}.$

---

* Vezi 8.4.5.1.
** Vezi 8.3.4.2.
*** Vezi [73] pag. 202; vezi şi 8.3.9.4.
**** Vezi [73] pag. 203.
***** Raza echivalentă este $a' = 0{,}78\, a$, pentru un conductor plin, omogen şi nemagnetic şi $a' = 0{,}95\, a$, pentru un conductor oţel-aluminiu, a fiind raza efectivă a conductorului exprimată în metri.

Pentru *conductorul neutru* avînd *raza echivalentă b'*

$$\text{rezistența}: \quad R_n = r_n X \quad \Omega;$$

$$\text{inductanța proprie}: \quad L_n = 4{,}6X\left(\lg\frac{2X}{b'} - 1\right).10^{-4} \quad \text{H}.$$

Inductanțele mutuale :

$$\text{între faze}: M = 4{,}6\ X\left(\lg\frac{2X}{D} - 1\right).10^{-4} \quad \text{H}$$

între fază și conductorul neutru :

$$M_n = 4{,}6\ X\left(\lg\frac{2X}{D_n} - 1\right).10^{-4}\text{H},$$

în care D și D_n sînt distanțele medii geometrice între conductoarele de fază și între acestea și conductorul neutru.

Aplicînd teorema a doua a lui KIRCHHOFF circuitului din figura 12.2 se obține

$$\underline{V}_0 = (rX + \text{j}L\ \omega)\ \underline{I}_0 + 2\text{j}M\ \omega\ \underline{I}_0 - \text{j}M_n\omega.3\underline{I}_0 + (r_nX + \text{j}L_n\ \omega)3\underline{I}_0 - 3\text{j}M_n\omega\ \underline{I}_0,$$

de unde, înlocuind inductanțele proprii și mutuale cu expresiile date mai înainte, rezultă

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{V}_0}{\underline{I}_0} = (r + 3r_n)\ X + \text{j}\omega 13{,}8\ X\lg\frac{D_n^2}{b'\sqrt[3]{a'D^2}}\cdot 10^{-4}\ \Omega$$

și deci, impedanța lineică

$$\underline{Z}_0 = (r + 3r_n) + \text{j}\omega 13{,}8\lg\frac{D_n^2}{b'\sqrt[3]{a'D^2}}\cdot 10^{-4}\ \Omega/\text{km}.$$

b) Conductorul de întoarcere este pămîntul *. În acest caz — în primă aproximație — se poate înlocui pămîntul cu un conductor fictiv așezat în pămînt la adîncimea

$$h_s = \frac{1640}{\sqrt{\sigma\cdot\omega}} \quad \text{m}$$

în care σ este conductivitatea, exprimată în S/m, a unui pămînt avînd o rezistență lineică

$$r_s = \frac{\pi\omega}{2}\cdot 10^{-4} \quad \Omega/\text{km}.$$

---

* Vezi [73] p. 204.

Trecerea prin acest conductor fictiv a unui curent $3\underline{I}_0$ induce în fiecare din conductoarele de fază o forță electromotoare egală cu $-\mathrm{j}M_s\omega\cdot 3\underline{I}_0$, în care :

$$M_s = 4{,}6\,X\left(\lg\frac{2X}{h_s} - 1\right).10^{-4}\ \mathrm{H}.$$

Aplicînd cea de a doua teoremă a lui KIRCHHOFF circuitului din figura 12.2 se obține în acest caz

$$\underline{V}_0 = (rX + \mathrm{j}\omega L')\underline{I}_0 + 2\mathrm{j}M\omega\underline{I}_0 - \mathrm{j}M_s\omega.3\underline{I}_0 + r_sX.3\underline{I}_0$$

și se deduce expresia impedanței homopolare lineice

$$\underline{Z}_0 = \left(r + \frac{3}{2}\pi\,.\,\omega\,.\,10^{-4}\right) + \mathrm{j}\omega 13{,}8\lg\frac{h_s}{\sqrt[3]{a'D^2}}.10^{-4}\ \ \Omega/\mathrm{km}.$$

Această relație este valabilă, cu foarte bună aproximație, în cazul cînd linia a fost transpusă în mod regulat (foarte bine simetrizată) și pămîntul este omogen.

12.1.2.8. **Capacitatea homopolară lineică** *. Se definește capacitatea homopolară lineică pentru o linie trifazată simetrizată prin transpunere și fără *fir de gardă***, ca fiind a treia parte din capacitatea în raport cu pămîntul a ansamblului celor trei conductoare legate în paralel; ea este dată de relația

$$c_0 = \frac{10^{-6}\,\varepsilon_r}{18\ln\dfrac{4H\,(4H^2+D^2)}{d\cdot D^2}} = \frac{2{,}41\,\varepsilon_r}{\lg\dfrac{4H}{d}\cdot\dfrac{(4H^2+D^2)}{D^2}}\cdot 10^{-4}\,\mathrm{F/m.} \qquad (12.7)$$

12.1.2.9. **Capacitatea aparentă lineică sau capacitatea de serviciu**, este capacitatea unui conductor de fază, singur alimentat, față de pămînt *** ; expresia ei este dată de relația ****

$$c_a = \frac{10^{-6}\,\varepsilon_r}{18\ln\dfrac{4H}{d}} = \frac{2{,}41\,\varepsilon_r}{\lg\dfrac{4H}{d}}\cdot 10^{-8}\ \ \mathrm{F/km.} \qquad (12.8)$$

OBSERVAȚIE. Între relațiile (12.4), (12.7) și (12.8) există relația

$$\frac{1}{c_a} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{c_0} + \frac{2}{c}\right),$$

ușor de verificat.

---

* Vezi [73] pag. 205.

** Se numește fir de gardă, conductorul montat pe o linie de înaltă tensiune, legat la pămînt, care servește la protejarea liniei contra supratensiunilor atmosferice.

*** Vezi 1.5.7.4.

**** Vezi 1.5.7.2.

12.1.3. ECUAȚIILE LINIILOR LUNGI

12.1.3.1. **Forma generală a ecuațiilor.** Fie o linie AB, de lungime totală X și avînd parametrii săi uniform răspîndiți de-a lungul ei (fig. 12.3). Să presupunem că funcționarea liniei este astfel, încît sensul curenților este de la A către B; fie u_1, i_1, u_2, i_2 tensiunile și curenții la cele două extremități.

În ipoteza făcută, în cazul cînd defazajul φ_2 dintre curentul i_2 și tensiunea u_2, de la extremitatea B, este în așa fel, încît $\cos \varphi_2 > 0$, energia activă este transmisă de la extremitatea A, care este astfel *extremitatea sursă* către extremitatea B, care este *extremitatea receptor*; dacă însă $\cos \varphi_2 < 0$, atunci energia activă circulă de la B către A, cele două extremități schimbîndu-și rolurile.

Fig. 12.3. Circuitul echivalent al unei linii lungi.

Fig. 12.4. Element de linie lungă.

În toate cele ce urmează se presupune $\cos \varphi_2 > 0$ și deci extremitatea B receptoare.

Să considerăm un element de linie mn de lungime $\mathrm{d}x$, situat la distanța x de extremitatea B a liniei (fig. 12.4). Fie $u + \mathrm{d}u$ și $i + \mathrm{d}i$, valoarea instantanee a tensiunii, respectiv a curentului la intrarea în acest element și u și i, valoarea instantanee a tensiunii, respectiv a curentului la ieșirea din element. Considerînd elementul de linie mn ca un cuadripol în T și aplicînd ecuațiile corespunzătoare, se obține

$$u + \mathrm{d}u = u + \left(ri + l\,\frac{\partial i}{\partial t}\right)\mathrm{d}x,$$

$$i + \mathrm{d}i = \left(gu + c\,\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathrm{d}x + i,$$

de unde rezultă

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= ri + l\,\frac{\partial i}{\partial t}, \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= gu + c\,\frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \qquad (12.9)$$

care reprezintă ecuațiile de funcționare a liniilor lungi.

Eliminînd, pe rînd, mai întîi pe i și apoi pe u, ecuațiile (12.9) pot fi puse sub forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= rgu + (rc + lg)\,\frac{\partial u}{\partial t} + lc\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= rgi + (rc + lg)\,\frac{\partial u}{\partial t} + lc\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.10)$$

Ecuațiile (12.10) definesc complet tensiunea sau curentul de-a lungul liniei electrice lungi; ele se mai numesc și *ecuațiile telegrafiștilor.*

În practică, ținînd seama de unele proprietăți speciale ale liniilor electrice, ecuațiile (12.10) pot fi simplificate, putînd astfel conduce la o rezolvare mai ușoară a lor;

— În cazul liniilor perfect izolate, $r \ll$ și $g \ll$ și deci pot fi neglijate; în acest caz ecuațiile (12.10) devin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = lc\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = lc\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

ecuații de tip D'ALEMBERT.

— În cazul liniilor aeriene $r \ll$ și $c \ll$ și pot fi neglijate, astfel că ecuațiile (12.10) devin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = lg\,\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = lg\,\frac{\partial i}{\partial t}.$$

— În cazul liniilor formate din cabluri subterane, $l \ll$ și $g \ll$, putînd fi neglijați; ecuațiile (12.10) devin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = rc\,\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = rc\,\frac{\partial i}{\partial t}.$$

12.1.3.2. **Forma ecuațiilor în cazul unui regim periodic alternativ sinusoidal staționar.** În cazul cînd regimul energetic al liniei este alternativ sinusoidal, utilizînd mărimile complexe, ecuațiile (12.9) pot fi scrise

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\underline{U}}{\mathrm{d}x} &= r\underline{I} + \mathrm{j}l\omega\underline{I} = \underline{z}\,\underline{I},\\ \frac{\mathrm{d}\underline{I}}{\mathrm{d}x} &= g\underline{U} + \mathrm{j}c\omega\,\underline{U} = \underline{y}\,\underline{U}.\end{aligned}\right\} \tag{12.11}$$

Eliminînd între aceste ecuații mai întîi pe $\underline{I}$ și apoi pe $\underline{U}$, se obține

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{U}}{\mathrm{d}x^2} = \underline{z}\,\underline{y}\,\underline{U} \tag{12.12}$$

și

$$\frac{d^2\underline{I}}{dx^2} = \underline{z}\,\underline{y}\,\underline{I} \tag{12.13}$$

În aceste ecuații, $\underline{z}$ și $\underline{y}$ sînt impedanța lineică și admitanța lineică a liniei, definite în paragrafele 12.1.2.5. și 12.1.2.6.

12.1.4. INTEGRAREA ECUAȚIEI LINIILOR LUNGI ÎN CAZUL UNUI REGIM ALTERNATIV SINUSOIDAL STAȚIONAR

12.1.4.1. Soluțiile generale. Notînd

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{z}\,\underline{y}}, \tag{12.14}$$

ecuația (12.12) devine

$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2\,\underline{U},$$

care este o ecuație diferențială liniară de ordinul doi în $\underline{U}$ și a cărei soluție generală este

$$\underline{U} = \underline{M}\,\varepsilon^{\underline{\gamma}x} + \underline{N}\,\varepsilon^{-\underline{\gamma}x}. \tag{12.15}$$

Derivînd pe $\underline{U}$, astfel obținut, în raport cu x și introducînd această derivată în prima ecuație din sistemul (12.11) se găsește

$$\underline{I} = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{z}}\left(\underline{M}\,\varepsilon^{\underline{\gamma}x} - \underline{N}\,\varepsilon^{-\underline{\gamma}x}\right) = \frac{1}{\underline{Z}_c}\left(\underline{M}\,\varepsilon^{\underline{\gamma}x} - \underline{N}\,\varepsilon^{-\underline{\gamma}x}\right), \tag{12.16}$$

în care s-a notat

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{z}}{\underline{\gamma}} = \sqrt{\frac{\underline{z}}{\underline{y}}}. \tag{12.17}$$

Relațiile (12.15) și (12.16) constituie soluțiile generale ale sistemului (12.11); aceste soluții depind de două constante de integrare, $\underline{M}$ și $\underline{N}$, care urmează a fi determinate în condiții particulare ale liniei; se vede ușor că aceste soluții se compun din doi termeni:

— unul din acești termeni $\underline{M}\,\varepsilon^{\underline{\gamma}x}$, respectiv $\frac{\underline{M}}{\underline{Z}_c}\,\varepsilon^{\underline{\gamma}x}$, are modulul maxim la sursă ($x = X$) și *scade* pe măsură ce ne apropiem de receptor, avînd valoarea minimă în acest punct ($x = 0$); el reprezintă o undă de tensiune, sau de curent, care se propagă de la sursă către receptor. Această undă se numește *unda directă*;

— al doilea dintre acești termeni $\underline{N}\,\varepsilon^{-\underline{\gamma}x}$, respectiv $\frac{\underline{N}}{\underline{Z}_c}\,\varepsilon^{-\underline{\gamma}x}$, are valoarea maximă la receptor ($x = 0$) și scade pe măsură ce ne apropiem de sursă, avînd

valoarea minimă în acest punct ($x = X$); el constituie o undă de tensiune sau de curent care se propagă de la receptor către sursă. Această undă se numeşte *unda inversă* sau *unda reflectată* *.

12.1.4.2. Constanta de propagare. Reluînd expresia (12.14),

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{z}\,\underline{y}} = \sqrt{(r + \mathrm{j}\, l\omega)\,(g + \mathrm{j}c\omega)}, \tag{12.14}$$

mărimea respectivă, fără dimensiuni, se numeşte *constanta de propagare a liniei*. Ea reprezintă variaţia pe care o suferă amplitudinea şi faza undei de tensiune, respectiv de curent, cînd parcurge 1 km de linie **.

Expresia constantei de propagare poate fi pusă sub diverse forme, fiecare dintre ele avînd importanţă în studiul liniilor lungi.

a) Punînd

$$\underline{\gamma} = \gamma\,\underline{|\delta}\,,$$

se găseşte uşor valoarea modulului şi argumentului în funcţie de parametrii liniei; vom avea

$$\gamma = \sqrt[4]{(r^2 + l^2\omega^2)\,(g^2 + c^2\omega^2)} \tag{12.18}$$

şi

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\text{arc tg}\,\frac{l\omega}{r} + \text{arc tg}\,\frac{c\omega}{g}\right). \tag{12.19}$$

b) Punînd $\underline{\gamma} = \alpha + \mathrm{j}\beta$, (12.20)

rezultă

$$(\alpha + \mathrm{j}\beta)^2 = (r + \mathrm{j}l\omega)\,(g + \mathrm{j}c\omega)$$

sau

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2\mathrm{j}\alpha\beta = (rg - lc\omega^2) + \mathrm{j}\,(rc\omega + gl\omega)$$

şi deci,

$$\alpha^2 - \beta^2 = rg - lc\omega^2,$$

$$2\alpha\beta = (rc + gl)\omega\,;$$

rezolvînd acest sistem în raport cu α şi β, se găseşte:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{(r^2 + l^2\omega^2)\,(g^2 + c^2\omega^2)} + \frac{1}{2}\,(gr - cl\omega^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}\,zy + \frac{1}{2}\,(gr - \xi b)} \tag{12.21}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\,zy - \frac{1}{2}\,(rg - \xi b)}\,. \tag{12.22}$$

---

* Justificarea acestor denumiri se va vedea în paragraful 12.1.5.1.
** Justificarea acestei definiţii se va vedea în paragraful 12.1.4.3.

Partea reală a constantei de propagare, α, a cărei valoare în funcţie de parametrii liniei este dată de relaţia (12.21), se numeşte *constanta de atenuare a liniei* şi este legată de variaţia amplitudinii de tensiune sau de curent, pe unitatea de lungime. Ea este egală cu logaritmul natural al raportului dintre două valori ale amplitudinii tensiunii, respectiv ale curentului, existînd în două puncte ale liniei situate la 1 km unul de altul.

Într-adevăr, să considerăm din relaţia (12.15) numai unda directă. Vom avea

$$\underline{U}_d = \underline{M}\ \varepsilon^{\underline{\gamma}x} = \underline{M}^{(\alpha+j\beta)x} = \underline{M}\,\varepsilon^{\alpha x}\,(\cos\beta x + j\sin\beta x), \tag{12.23}$$

a cărei modul este

$$U_d = M\ \varepsilon^{\alpha x}.$$

Punînd

$$U_{d_1} = M\,\varepsilon^{\alpha x_1} \text{ la distanţa } x_1 \text{ şi } U_{d_2} = M\,\varepsilon^{\alpha x_2} \text{ la distanţa } x_2,$$

rezultă

$$\alpha = \ln\frac{U_{d_1}}{U_{d_2}}$$

deoarece $x_1 - x_2 = 1$, care justifică definiţia de mai sus; α se măsoară în radiani hiperbolici/km sau în neperi/km.

Partea complexă a constantei de propagare, β, a cărei valoare în funcţie de parametrii liniei este dată de relaţia (12.22), se numeşte *constanta de distorsiune a liniei* şi exprimă variaţia fazei undei de tensiune, sau a celei de curent, pe unitatea de lungime a liniei. Ea este deci, unghiul între fazorii de tensiune, respectiv de curent, corespunzători tensiunii sau curentului existînd în două puncte ale liniei situate la 1 km unul de altul; β se măsoară în radiani/km sau în grade/km.

c) Punînd

$$\underline{\gamma}x = \underline{\theta} = \theta_1 + j\theta_2,$$

$\underline{\theta}$ se numeşte *unghiul complex al liniei*.

Comparînd cu relaţia (12.20), rezultă

$$\underline{\theta} = \alpha x + j\beta x$$

şi deci,

$$\theta_1 = \alpha x \text{ şi } \theta_2 = \beta x,$$

de unde

$$\alpha = \frac{\theta_1}{x} \text{ şi } \beta = \frac{\theta_2}{x}.$$

Considerînd din nou unda directă, relaţia (12.23) transcrisă în funcţie de unghiul complex al liniei devine

$$\underline{U}_d = \underline{M}\,\varepsilon^{\theta_1}(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2).$$

Din această expresie, rezultă că θ_1 acţionează asupra modulului amplitudinii tensiunii — sau curentului — şi exprimă *atenuarea* pe care o suferă unda de tensiune — sau de curent — atunci cînd parcurge pe linie o distanţă de lungime x; constanta de atenuare este deci atenuarea liniei pe unitatea de lungime a ei.

Mărimea θ_2 (partea complexă a lui $\underline{\theta}$) acţionează asupra argumentului, respectiv asupra fazei tensiunii — sau curentului — şi exprimă *întîrzierea unghiulară spaţială* sau *distorsiunea*, pe care unda de tensiune — sau de curent o suferă atunci cînd parcurge pe linie o distanţă de lungime x; constanta de distorsiune a liniei este deci distorsiunea liniei pe unitatea de lungime a ei.

În cazurile particulare întîlnite în practică, diversele mărimi definite mai sus capătă forme mai simple.

a) Linie fără pierderi. În acest caz $r = 0$, $g = 0$ şi expresiile de mai sus devin

$$\alpha = 0, \theta_1 = 0, \beta = \sqrt{\xi b} = \omega \sqrt{lc}, \theta_2 = \omega x \sqrt{lc},$$

şi deci,

$$\underline{\gamma} = j\,\beta = j\sqrt{\xi b} \text{ şi } \underline{\theta} = jx\sqrt{\xi b}.$$

Punînd * :

$$v = \frac{1}{\sqrt{lc}}$$

expresia lui β poate fi scrisă

$$\beta = \frac{\omega}{v}, \tag{12.24}$$

expresie care are numeroase aplicaţii.

În cazul unei linii aeriene, pentru care $f = 50$ Hz şi $\mu_r = \varepsilon_r = 1$, se găseşte

$$\beta = 1{,}05 \cdot 10^{-3} \text{ rad/km}.$$

b) *Linie aeriană industrială*. În acest caz $\xi > r$ şi $b > g$; expresia (12.14) a constantei de propagare poate fi pusă sub forma

$$\underline{\gamma} = j\sqrt{\xi b}\sqrt{1 + \frac{r}{j\xi}} \cdot \sqrt{1 + \frac{g}{jb}}. \tag{12.25}$$

---

* Dimensional expresia $\sqrt{lc}$ are dimensiunile inversului unei viteze. Dacă presupunem în expresia inductanţei lineice $\lambda = 0$, atunci avem

$$lc = 2 \ln \frac{2D}{d} \mu_r \cdot 10^{-4} \cdot \frac{10^{-6}\varepsilon_r}{18 \ln \frac{2D}{d}} = \frac{10^{-10}}{9} \mu_r \varepsilon_r$$

şi deci

$$v = 3 \cdot 10^5 \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \text{ km/s}.$$

Dezvoltînd în serie cei doi radicali, se obţine

$$\sqrt{1+\frac{r}{j\xi}} \cong 1+\frac{1}{2}\frac{r}{j\xi} \text{ şi } \sqrt{1+\frac{g}{jb}} \cong 1+\frac{1}{2}\frac{g}{jb},$$

astfel că expresia (12.25) devine

$$\underline{\gamma}=\frac{r}{2}\sqrt{\frac{b}{\xi}}+\frac{g}{2}\sqrt{\frac{\xi}{b}}+j\left(\sqrt{\xi b}-\frac{1}{4}\frac{gr}{\sqrt{\xi b}}\right).$$

Conform relaţiei (12.20) se obţine:

$$\alpha=\frac{r}{2}\sqrt{\frac{b}{\xi}}+\frac{g}{2}\sqrt{\frac{\xi}{b}} \cong \frac{1}{2}\frac{r}{Z_c} \quad \text{rad. hip/km}$$

şi

$$\beta=\sqrt{\xi b}-\frac{1}{4}\frac{rg}{\sqrt{\xi b}} \cong \sqrt{\xi b} \quad \text{rad/km}$$

ţinînd seama de relaţia (12.22) şi de faptul, că în baza ipotezelor făcute, al doilea termen este foarte mic faţă de primul şi poate fi neglijat.

c) Linie constituită din cabluri subterane. În acest caz, se poate admite că $g = 0$ şi $\xi = 0$; expresia (22.14) a constantei de propagare devine *

$$\underline{\gamma}=\sqrt{jrb}=\sqrt{j}\cdot\sqrt{rb}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{rb}$$

astfel că:

$$\alpha=\sqrt{\frac{rb}{2}} \text{ rad. hip/km}; \quad \beta=\sqrt{\frac{rb}{2}} \text{ rad/km.}$$

d) Linie satisfăcînd condiţia lui HEAVISIDE. Condiţia lui HEAVISIDE pentru o linie electrică este exprimată prin relaţia **

$$\frac{r}{\xi}=\frac{g}{b}. \tag{12.26}$$

Ţinînd seama de această relaţie, expresiile (12.21), şi (12.22) devin

$$\alpha=\sqrt{rg} \text{ rad. hip/km}; \quad \beta=\sqrt{\xi b} \text{ rad./km,}$$

după cum se poate verifica uşor.

---

* Deoarece $j = 1\underline{\left|\frac{\pi}{2}\right.}$, rezultă $\sqrt{j}=1\underline{\left|\frac{\pi}{4}\right.}=\cos\frac{\pi}{4}+j\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}$.

** Vezi 12.1.5.1.

12.1.4.3. Impedanța caracteristică Mărimea exprimată de relația (12.17)

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{z}}{\underline{y}}} = \sqrt{\frac{r + \mathrm{j}l\omega}{g + \mathrm{j}c\omega}}, \tag{12.17}$$

care apare în soluțiile ecuațiilor diferențiale ale liniilor lungi, se numește *impedanța caracteristică* sau *impedanța naturală* a liniei *.

Impedanța caracteristică fiind o mărime complexă, ea poate fi pusă sub forma

$$\underline{Z}_c = Z_c \underline{|\psi}$$

în care, modulul respectiv, argumentul exprimați în funcție de parametrii liniei au forma

$$Z_c = \sqrt[4]{\frac{r^2 + l^2\omega^2}{g^2 + c^2\omega^2}} \tag{12.27}$$

și

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\text{arc tg}\frac{l\omega}{r} - \text{arc tg}\frac{c\omega}{g}\right). \tag{12.28}$$

Dacă se pune impedanța caracteristică sub forma

$$\underline{Z}_c = Z_{1c} + \mathrm{j}Z_{2c},$$

printr-un calcul algebric elementar se găsește **

$$Z_{1c} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{z}{y} + \frac{rg + \xi b}{g^2 + b^2}\right)} \tag{12.29}$$

și

$$Z_{2c} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{z}{y} - \frac{rg + \xi b}{g^2 + b^2}\right)}. \tag{12.30}$$

Aceste expresii capătă forme mai simple în diverse cazuri particulare, întîlnite în practică.

a) Linii fără pierderi. În acest caz $r=0$ și $g = 0$;

$$Z_{1c} = \sqrt{\frac{\xi}{b}} = \sqrt{\frac{l}{c}} \text{ și } Z_{2c} = 0.$$

Rezultă dar, că în cazul liniilor fără pierderi, impedanța caracteristică este o mărime reală. Ea se mai numește și *impedanța de undă*.

---

* Semnificația fizică a acestei mărimi se va vedea în paragraful 12.1.4.3.

** Se ridică la pătrat această expresie și se compară cu pătratul expresiei (12.17); se obțin două ecuații cu două necunoscute care dau expresia celor doi parametri.

Ţinînd seama de relaţiile (12.2) şi (12.3) care dau inductanţa lineică şi capacitatea lineică a unei linii, făcînd aproximaţia neglijării inductanţei interne a conductorului se obţine

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{2 \ln \frac{2D}{d} \mu_r 10^{-4}}{\frac{10^{-6} \varepsilon_r}{18 \ln \frac{2d}{D}}}} = 0{,}6 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \ln \frac{2D}{d} \ \Omega.$$

b) Linie aeriană industrială, În acest caz pierderile nu mai sînt neglijabile ; pentru tensiuni mai mari de 60 kV se poate lua în medie

$$\underline{Z}_c \cong 400 \underline{|-5° \div -10°}.$$

c) Linie construită din cabluri subterane. În acest caz $g = 0$ şi $\xi = 0$; expresia (12.17) devine *

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{r}{jb}} = \sqrt{-j}\sqrt{\frac{r}{b}} = \sqrt{\frac{r}{b}} \underline{|-45°}.$$

În practică, se poate lua în medie

$$\underline{Z}_c = 40 \underline{|-45°} \ \Omega.$$

d) Linie foarte bine izolată. În acest caz $g \ll c\omega$ şi deci

$$\text{arc tg} \frac{c\omega}{g} \cong \frac{\pi}{2};$$

expresia (12.28) a argumentului impedanţei caracteristice devine

$$\psi = -\frac{1}{2} \text{arc tg} \frac{r}{l\omega}. \tag{12.31}$$

12.1.5. INTERPRETAREA FIZICĂ A SOLUŢIILOR GENERALE

12.1.5.1. Primul aspect fizic al soluţiilor. Soluţiile ecuaţiilor (12.11) fiind

$$\underline{U} = \underline{M}\, \varepsilon^{\underline{\gamma} x} + \underline{N}\, \varepsilon^{-\underline{\gamma} x} \tag{12.15}$$

şi

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_c} (\underline{M}\, \varepsilon^{\underline{\gamma} x} - \underline{N}\, \varepsilon^{-\underline{\gamma} x}), \tag{12.16}$$

---

* Deoarece $-j = \underline{|-90}$ şi deci $\sqrt{-j} = \underline{|-45°}$.

pentru determinarea constantelor de integrare $\underline{M}$ şi $\underline{N}$, să considerăm situaţia particulară de funcţionare la extremitatea receptoare a liniei ($x = 0$); în acest caz $\underline{U} = \underline{U}_2$ şi $\underline{I} = \underline{I}_2$.

Făcînd în relaţiile (12.15) şi (12.16) $x = 0$, se obţine

$$\underline{M} = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2) = M\,\underline{|\mu}; \quad \underline{N} = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{Z}_c \underline{I}_2) = N\,\underline{|\nu}. \qquad (12.32)$$

Ţinînd seama de aceste relaţii şi de expresia (12.20) a constantei de propagare, soluţiile generale ale ecuaţiilor liniilor lungi se pot pune sub forma mai explicită

$$\left.\begin{aligned} \underline{U} &= M\,\varepsilon^{\alpha x}\,\underline{|\beta x + \mu} + N\,\varepsilon^{-\alpha x}\,\underline{|-\beta x + \nu}; \\ \underline{I} &= \frac{M}{Z_c}\,\varepsilon^{\alpha x}\,\underline{|\beta x + \mu - \psi} - \frac{N}{Z_c}\varepsilon^{-\alpha x}\,\underline{|-\beta x + \nu - \psi}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.33)$$

Alegînd originea de timp astfel, încît ea să coincidă cu momentul cînd unda directă de tensiune pleacă din extremitatea sursă A ($x = X$) cu amplitudinea maximă, dacă $U'\sqrt{2}$ este această amplitudine, atunci prima relaţie (12.33) se poate scrie

$$\sqrt{2}\,M\,\varepsilon^{\alpha X} = U'\sqrt{2}; \quad \beta X + \mu = 0,$$

de unde rezultă

$$M = U'\,\varepsilon^{-\alpha X}; \quad \mu = -\beta X$$

şi relaţiile (12.33) devin

$$\left.\begin{aligned} \underline{U} &= U'^{-\alpha(X-x)}\,\underline{|-\beta(X-x)} + U''\,\varepsilon^{-\alpha x}\,\underline{|-\beta x + \nu}; \\ \underline{I} &= \frac{U'^{-\alpha(X-x)}}{Z_c}\,\underline{|-\beta(X-x) - \psi} - \frac{U''}{Z_c}\,\varepsilon^{-\alpha x}\,\underline{|-\beta x + \nu - \psi}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.34)$$

Din aceste relaţii, se deduc expresiile valorilor instantanee ale tensiunii şi curentului; se găseşte

$$\left.\begin{aligned} u &= U'\,\sqrt{2}\;\varepsilon^{-\alpha(X-x)}\cos[\omega t - \beta(X-x)] + U''\,\sqrt{2}\;\varepsilon^{-\alpha x}\cos(\omega t + \nu - \beta x) \\ i &= \frac{U'}{Z_c}\sqrt{2}^{-\alpha(X-x)}\cos[\omega t - \beta(X-x) - \psi] - \frac{U''}{Z_c}\sqrt{2}\;\varepsilon^{-\alpha x}\cos(\omega t + \nu - \psi - \beta x). \end{aligned}\right\} \qquad (12.35)$$

Rezultă că fiecare undă, de curent şi de tensiune, este compusă din cîte două *unde mobile*, care se propagă *în sensuri contrare* cu aceeaşi viteză v. Într-adevăr, să considerăm unda de tensiune; la timpul t_1 şi la distanţa x_1, cele două componente ale ei vor avea valorile

$$U_d = U'\,\sqrt{2}^{-\alpha(X-x)}\,\cos[\omega t_1 - \beta(X - x_1)]$$

și

$$U_r = U'' \sqrt{2}^{-\alpha x_1} \cos(\omega t_1 + \nu - \beta x_1).$$

Cu aproximația factorului exponențial, pentru ca tensiunea să aibă aceeași amplitudine la timpul $t_1 + dt$ și la distanța $x_1 + dx$, trebuie ca

$$\omega(t_1 + dt) - \beta[X - (x_1 + dx)] = \omega t_1 - \beta(X - x_1)$$

și

$$\omega(t_1 + dt) + \nu - \beta(x_1 + ds) = \omega t_1 + \nu - \beta x_1,$$

de unde rezultă

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{\beta},$$

pentru unda u_d și

$$\frac{dx}{dt} = +\frac{\omega}{\beta},$$

pentru unda u_r.

Totul se petrece ca și cum unda de tensiune u_d se deplasează de-a lungul liniei, în sensul x-lor *descrescători* (de la capătul generator către capătul receptor) cu viteza constantă

$$v = \frac{\omega}{\beta}, \tag{12.36}$$

iar unda de tensiune u_r se deplasează de-a lungul liniei, în sensul x-lor *crescători* (de la capătul receptor către capătul generator) cu aceeași viteză constantă v.

La aceleași concluzii se ajunge și în ceea ce privește unda de curent.

Rezultă deci, că regimul poate fi considerat ca suprapunerea a două unde mobile, care se propagă în sensuri contrarii cu aceeași viteză constantă v (fig. 12.5), numită *viteza de fază*.

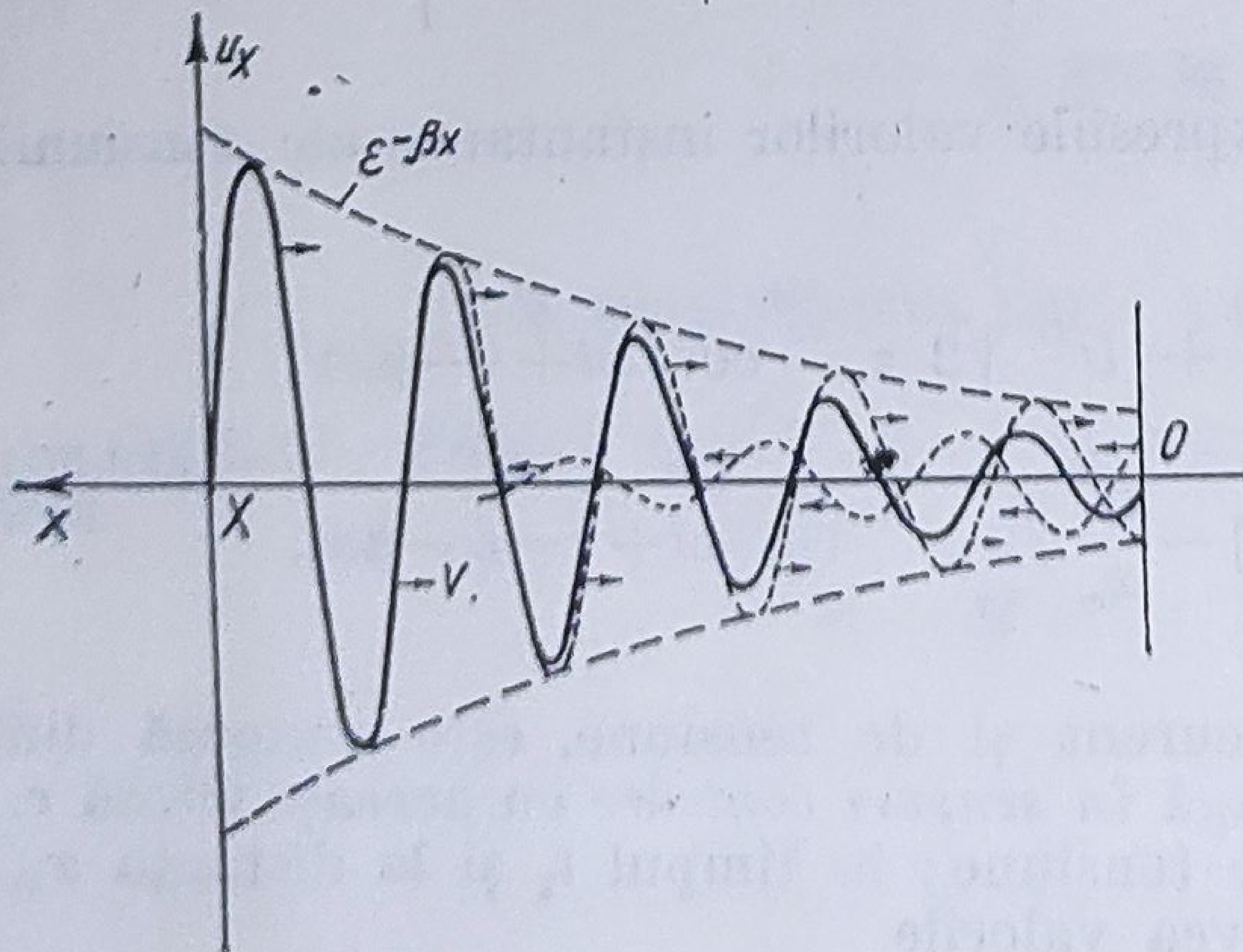


Fig. 12.5. Propagarea unei tensiuni alternative de-a lungul unei linii lungi, omogene.

Prima undă de tensiune pleacă de la sursă ($x = X$) cu amplitudinea $U'\sqrt{2}$; ea este însoțită de o undă de curent, de amplitudine $\frac{U'}{Z_c}\sqrt{2}$, defazată cu unghiul ψ în urma undei de tensiune. Amplitudinile acestor unde scad exponențial pe măsură ce se depărtează de sursă, astfel că, la distanța x aceste amplitudini sînt

$$U'\sqrt{2}\ \varepsilon^{-\alpha(X-x)} \text{ și } I'\sqrt{2} = \frac{U'}{Z_c}\varepsilon^{-\alpha(X-x)}.$$

Această undă se numește *unda directă*, de tensiune sau de curent.

A doua undă de tensiune pleacă de la receptor cu amplitudinea $U''\sqrt{2}$ şi este însoţită de o undă de curent, de amplitudine $\frac{U''}{Z_c}\sqrt{2}$, defazată cu unghiul $\pi-\psi$ faţă de unda de tensiune; amplitudinile acestor unde scad exponenţial, astfel, că la distanţa x de staţia receptoare, ele sînt

$$U''\sqrt{2}\,\varepsilon^{-\alpha x} \quad \text{şi} \quad I''\sqrt{2} = \frac{U''}{Z_c}\,\varepsilon^{-\alpha x}.$$

Această undă se numeşte *unda reflectată*, de tensiune sau de curent.

Dat fiind că s-a luat ca origine de timp momentul cînd undele directe pleacă de la capătul sursă ($x = X$), unda reflectată pleacă din capătul receptor ($x = 0$) cu o întîrziere $-\frac{\nu}{\omega}$, dedusă din

$$\omega t + \nu = \omega\left[t - \left(-\frac{\nu}{\omega}\right)\right].$$

Rezultanta celor două unde poate fi fundamental diferită de undele componente şi aceasta cu atît mai mult, cu cît cele două unde au amplitudinile comparabile, cum ar fi, de exemplu în cazul liniilor scurte. În cazul liniilor lungi, unda reflectată are o amplitudine mică în raport cu aceea a undei directe, care impune astfel aspectul său undei rezultante (fig. 12.5).

Raportul dintre amplitudinea tensiunii şi curentului a fiecărui tren de unde — directe sau reflectate — este constant şi egal cu modulul impedanţei caracteristice a liniei; defazajul între aceste două unde este de asemenea, constant şi este egal cu argumentul impedanţei caracteristice *.

Ecuaţiile (12.35) pot fi interpretate geometric. Să considerăm unda de tensiune: primul termen, corespunzînd undei directe,

$$u = \varepsilon^{-\alpha(X-x)}\,U'\sqrt{2}\cos\,[\omega t - \beta(X-x)],$$

poate fi reprezentat în fiecare punct al liniei şi pentru acelaşi moment cu un fazor. Luînd ca origine de fază fazorul corespunzînd originii liniei (la sursă) $x = X$, modulul fazorului reprezentativ va fi

$$U'_0 = U'.$$

În acelaşi moment, fazorul reprezentativ al tensiunii la distanţa $X-x_1$ de origine este reprezentat de un fazor de modul

$$U'\,\varepsilon^{-\alpha(X-x_1)}$$

şi defazat în urmă cu unghiul $\beta(X-x_1)$; la o altă distanţă x_2, fazorul corespunzător va avea modulul

$$U'\,\varepsilon^{-\alpha(X-x_2)}$$

* Vezi par. 12.1.4.3.

şi va fi defazat cu unghiul $\beta(X-x_2)$ etc. Componenta U_1 a tensiunii este deci reprezentată de-a lungul întregii linii de un ansamblu de fazori a căror extremitate este aşezată pe o spirală logaritmică şi a căror argumente sînt proporţionale cu distanţa ce separă fiecare punct de origine (fig. 12.6).

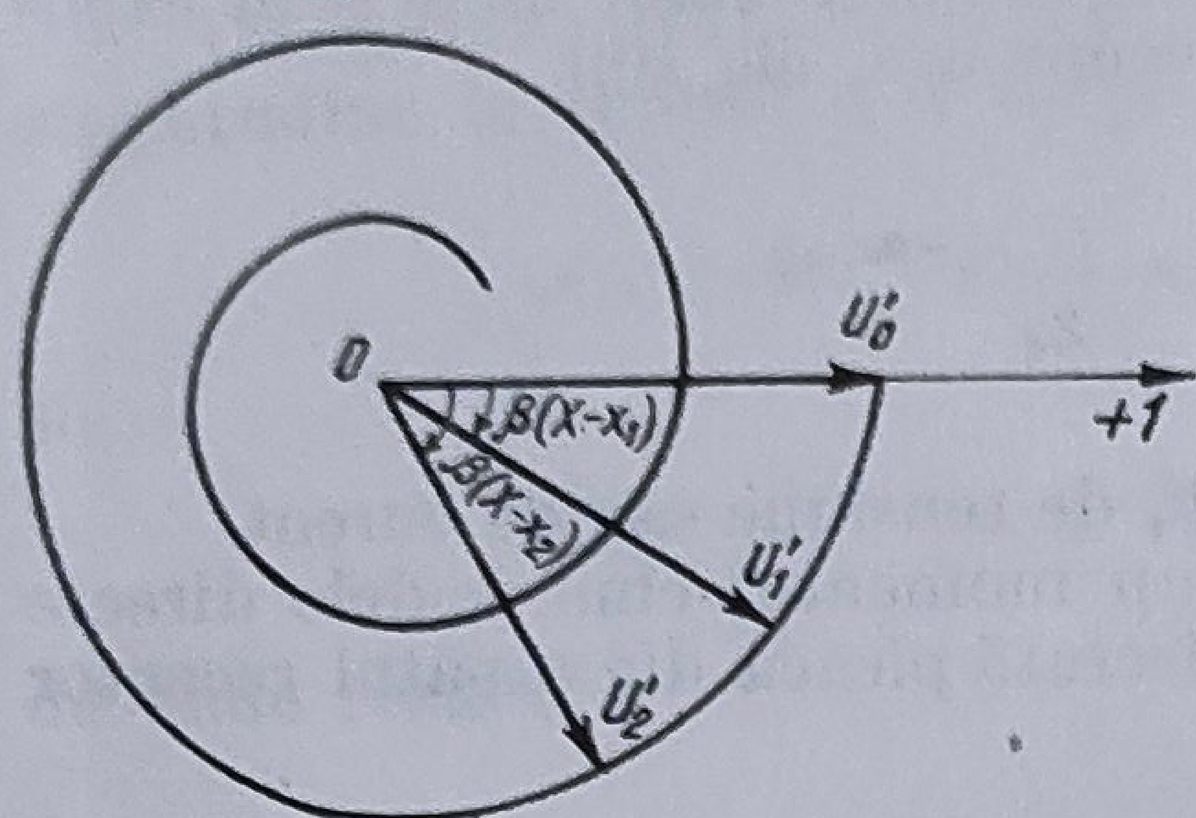


Fig. 12.6. Reprezentarea grafică a variaţiei amplitudinii şi fazei undei directe de tensiune.

De-a lungul liniei există puncte în care tensiunile, sau curenţii respectivi au aceeaşi fază; fie λ distanţa dintre două asemenea puncte. Va trebui să avem

$$\beta(X-x) = \beta[X-(x+\lambda)] = \beta(X-x) - 2\pi$$

şi rezultă

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \tag{12.37}$$

Distanţa λ astfel definită se numeşte *lungimea de undă* a undei de tensiune, respectiv de curent; ea este aceeaşi atît pentru unda directă cît şi pentru unda reflectată.

Înmulţind numărătorul şi numitorul relaţiei (12.37) cu ω şi ţinînd seama de relaţiile (4.6) şi (12.36) se obţine

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{f}.$$

Astfel, pentru o linie aeriană industrială fără pierderi * $f = 50$ Hz, $v = 3.10^5$ km/s şi deci

$$\lambda = \frac{3.10^5}{50} = 6\,000 \text{ km}.$$

Al doilea termen, corespunzînd undei reflectate,

$$u_2 = \varepsilon^{-\alpha x} U'' \sqrt{2} \cos(\omega t + \nu - \beta x)$$

se reprezintă în acelaşi mod, cu deosebirea că la extremitatea *receptor*

$$\underline{U}_0'' = U'' \underline{|\nu}.$$

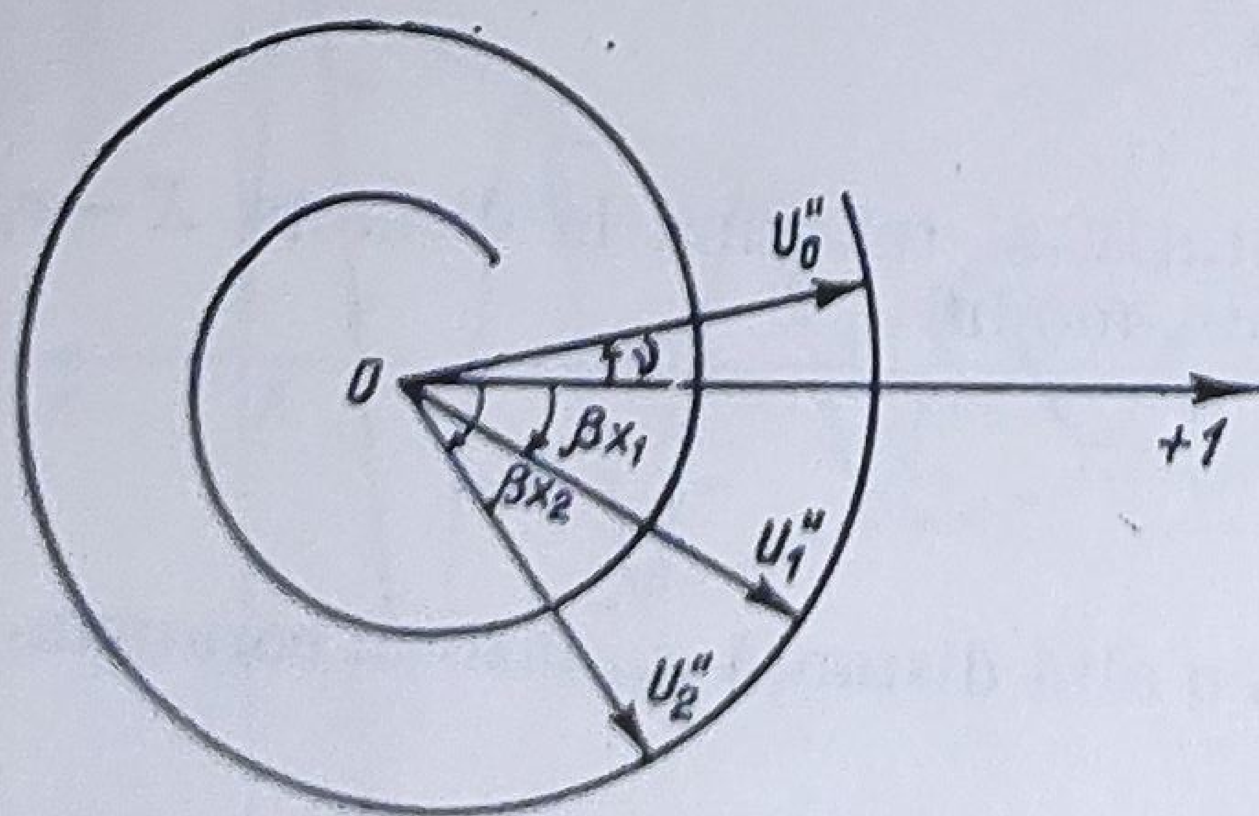


Fig. 12.7. Reprezentarea grafică a variaţiei amplitudinii şi fazei undei reflectate de tensiune.

Construcţia diagramei se efectuează în acelaşi mod, ca şi pentru cazul precedent (fig. 12.7), lungimea de undă fiind aceeaşi λ.

În ceea ce priveşte undele de curent, reprezentarea lor este analoagă.

O reprezentare intuitivă se poate face reprezentînd variaţia fazorilor respectivi cu ajutorul unei imagini spaţiale, în care extremitatea acestor fazori se găsesc pe o elice logaritmică a cărui pas este egal cu lungimea de undă λ a liniei.

* Vezi 12.1.4.2. a).

În figura 12.8 este redată această reprezentare pentru fazorul undei directe de tensiune; pentru ceilalți fazori reprezentarea este analoagă.

Raportul dintre amplitudinea undelor directe și reflectate — de tensiune și de curent — este determinat de impedanța de sarcină legată la extremitatea receptoare a liniei; într-adevăr, din relațiile (12.15) și (12.32) se deduce:

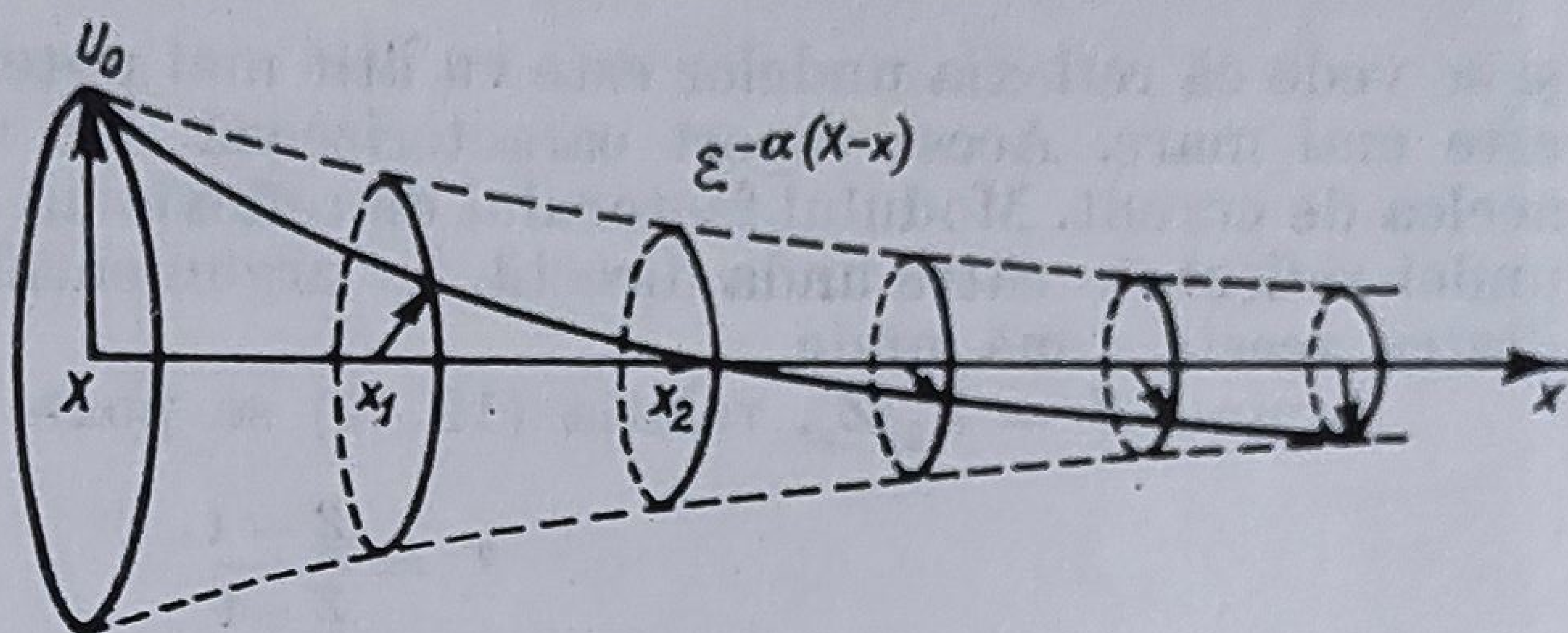


Fig. 12.8. Reprezentarea spațială a variației fazorului undei directe de tensiune.

pentru tensiune

$$\left.\begin{aligned}\underline{U}_d &= \frac{1}{2}\underline{U}_2\left(1 + \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_2}\right)\\ \underline{U}_r &= \frac{1}{2}\underline{U}_2\left(1 - \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{12.38}$$

și pentru curent

$$\left.\begin{aligned}\underline{I}_d &= \frac{1}{2}\underline{I}_2\left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_c}\right)\\ \underline{I}_r &= \frac{1}{2}\underline{I}_2\left(1 - \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_c}\right).\end{aligned}\right\} \tag{12.39}$$

În cazul particular, cînd impedanța sarcinii este egală cu impedanța caracteristică a liniei

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c$$

rezultă

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_c\, \underline{I}_2,$$

și deci

$$\underline{U}_d = \underline{U}_2 \text{ și } \underline{U}_r = 0$$

respectiv

$$\underline{I}_r = \underline{I}_2 \text{ și } \underline{I}_r = 0$$

ceea ce înseamnă că în acest caz undele reflectate sînt nule și nu există decît undele directe; altfel spus, nu există reflexie de unde la extremitatea receptoare a liniei.

O linie închisă pe impedanța sa caracteristică, se zice că funcționează în *regim caracteristic* sau că este *adaptată* *.

---

* Vezi 12.1.6.6.

Se definește *factor de reflexie* corespunzător impedanței de sarcină $\underline{Z}_2$, raportul

$$\underline{r} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_c \underline{I}_2}{\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c} = r \underline{|\theta} \quad (12.40)$$

și se vede că reflexia undelor este cu atît mai puternică cu cît diferența $\underline{Z}_2 - \underline{Z}_c$ este mai mare. Acest raport caracterizează atît undele de tensiune cît și pe acelea de curent. Modulul factorului de reflexie dă raportul dintre amplitudinea undei reflectate către unda directă, iar argumentul acestuia definește defazajul dintre aceste două unde.

Punînd $\underline{Z} = \underline{Z}_2/\underline{Z}_c$, relația (12.40) se poate scrie

$$\underline{r} = \frac{\underline{Z} - 1}{\underline{Z} + 1}$$

și este ușor de văzut că locul geometric al afixului mărimii $\underline{r}$ cînd $\underline{Z}$ variază ca modul și argument, este un cerc *. Pentru construirea lui se scrie această relație sub forma

$$\underline{r} = \frac{\underline{Z} - 1}{\underline{Z} + 1} = 1 - \frac{2}{\underline{Z} + 1} = 1 - \frac{2}{1 + R + jX}.$$

În această relație, atît R cît și X sînt variabile. Locul geometric respectiv se obține construind inversele dreptelor $1 + R + jX$ corespunzînd lui R constant $[R \in (0, \infty)]$ și lui X constant $[X \in (-\infty, +\infty)]$; rezultatele obținute se înmulțesc cu -2, la care se adaugă apoi 1. Procedînd în acest mod se găsește, pentru R constant o familie de cercuri cu centrul pe axa reală, toate tangente în punctul $+1$ la o dreaptă paralelă cu axa complexă; această familie de cercuri are ca limită cercul corespunzător valorii $R = 0$, care are diametrul cel mai mare și care trece prin punctul -1. Pentru X constant, se găsește o familie de cercuri cu centrul pe o dreaptă perpendiculară în punctul 1 pe axa reală și toate tangente în acest punct la axa reală (fig. 12.9). Dia-

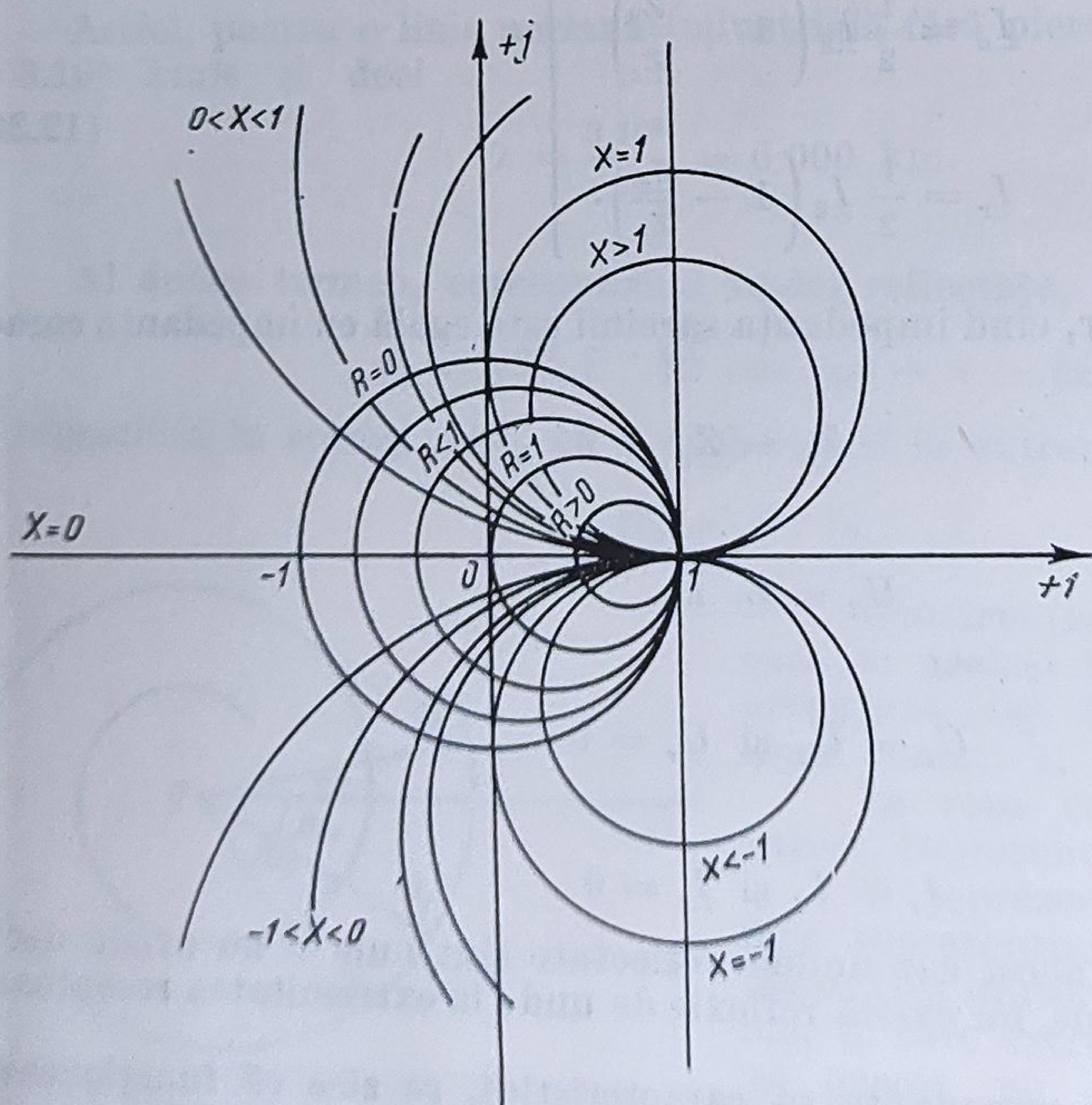


Fig. 12.9. Construcția diagramei lui SMITH.

* Vezi 6.6.3.3.

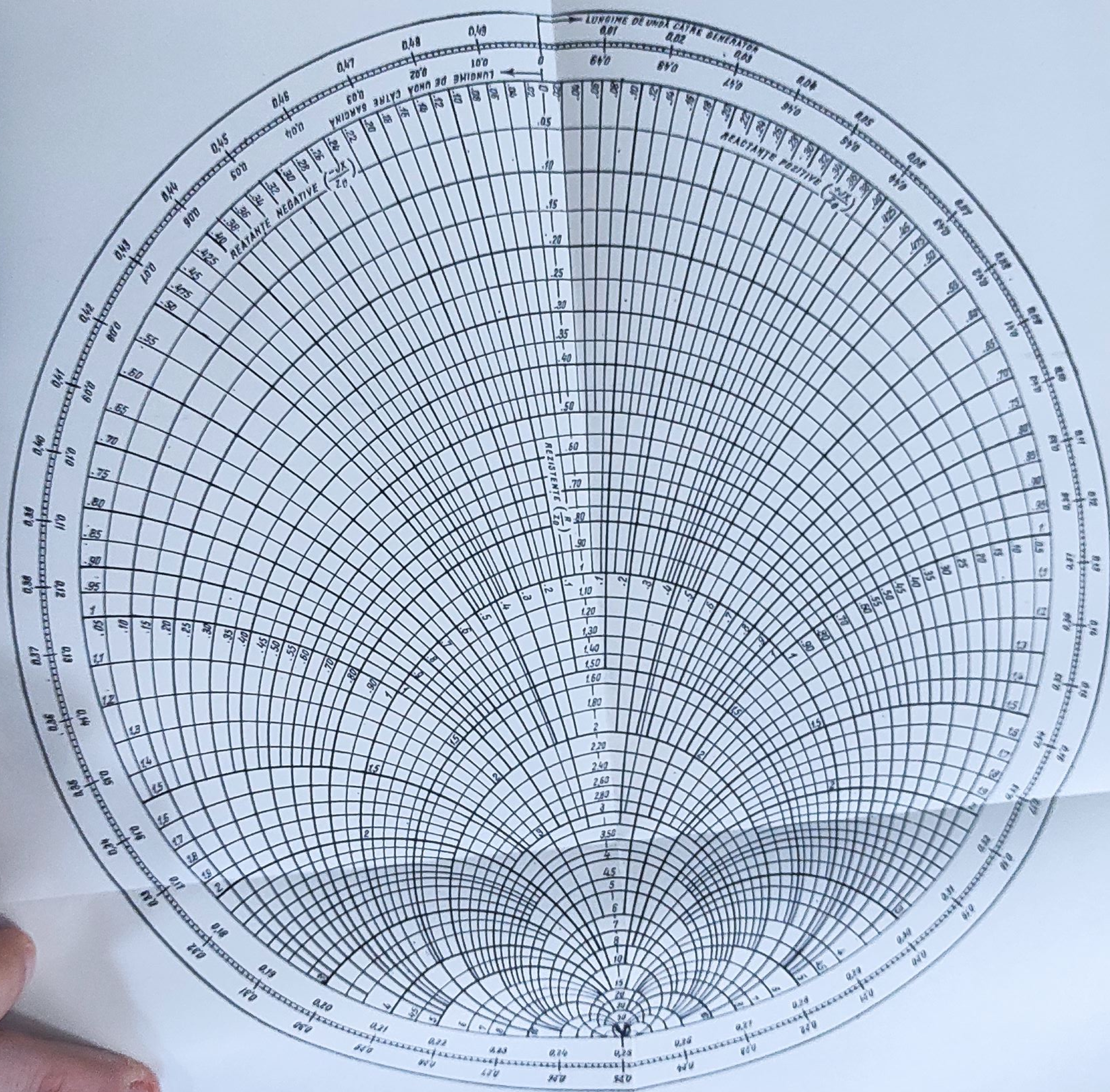


Fig. 12.10. Abaca Smith.

grama astfel obținută poartă numele de *abaca lui* SMITH (fig. 12.10) și are numeroase aplicații în practică de calculul liniilor electrice lungi; ea este însă astfel orientată încît *axa rezistențelor* să fie orizontală, cercul cel mare are centrul în punctul $1+j0$ și raza egală cu unitatea.

Dacă $\underline{Z} = R \pm jX$ este o impedanță oarecare, se determină impedanța relativă (sau redusă)

$$\underline{Z}_r = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_c} = \frac{R}{Z_c} \pm j\,\frac{X}{Z_2},$$

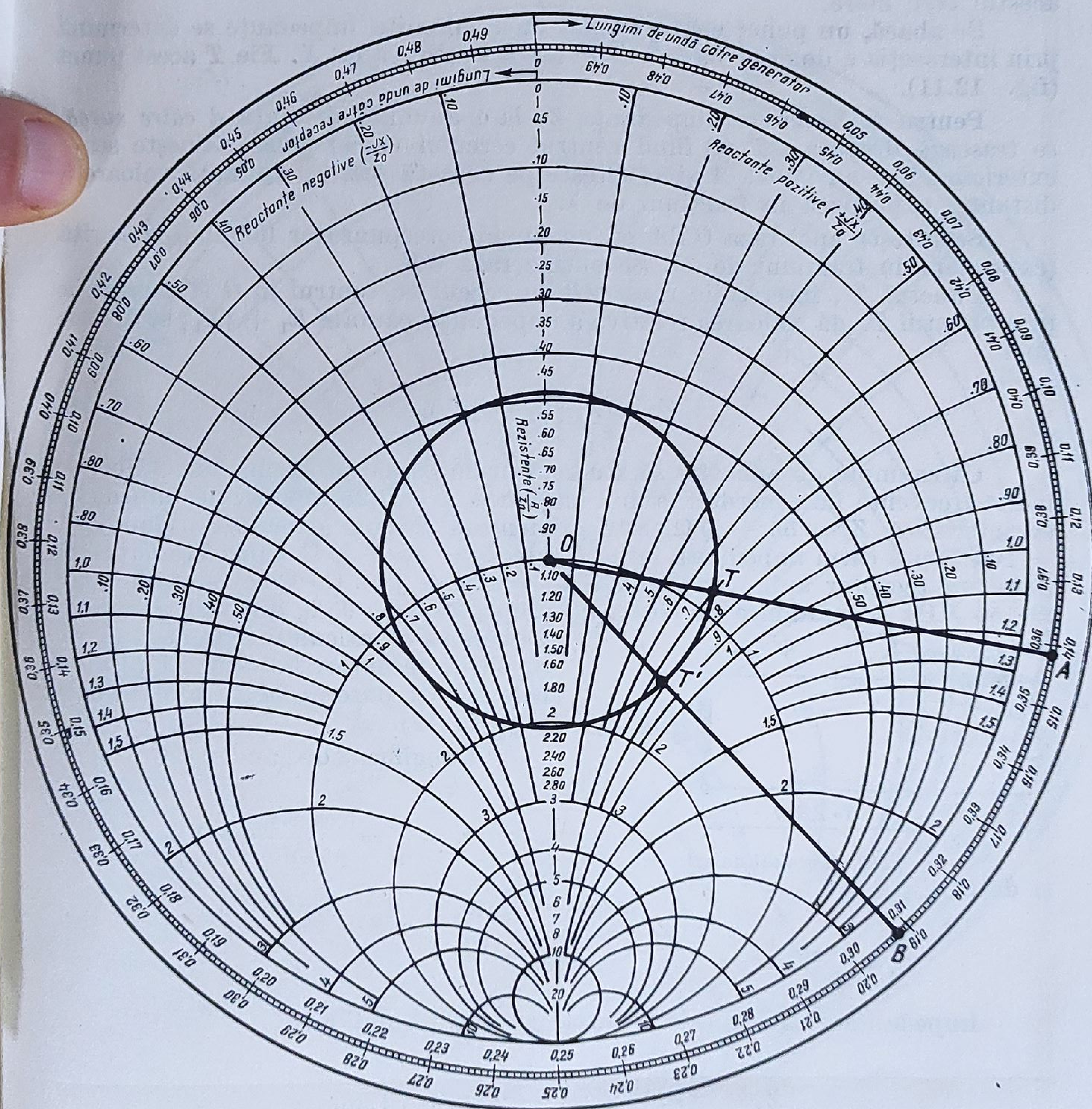


Fig. 12.11. Schema de utilizare a abacei SMITH.

valorile lui R/Z_c se citesc pe diametrul orizontal iar cele ale lui $\frac{X}{Z_c}$ se citesc pe cercurile de reactanță constantă.

Scările periferice exterioare indică două elemente:

1. *Lungimile de linie* exprimate în funcție de lungimea de undă λ, *spre generator* — rotind în sensul acelor unui ceasornic — pornind de la punctul 0°, sau *spre receptor* — rotind în sens contrar mersului acelor unui ceasornic.

2. *Unghiurile de defazaj de-a lungul liniei*. Valoarea coeficientului de reflexie $\underline{r}$ este dată, pentru orice punct al abacei, prin distanța radială a acestui punct la centrul cercului mare (pentru care $R/Z_c = 1$), luînd ca unitate raza acestui cerc mare.

Pe abacă, un punct corespunzînd unei anumite impedanțe se determină prin intersecția a două cercuri: cercul lui R și acela a lui X. Fie T acest punct (fig. 12.11).

Pentru a determina impedanța $\underline{Z}_c$ la o anumită distanță *d către sursă*, se trasează dreapta OT (O fiind centrul cercului mare) pînă întîlnește scara exterioară într-un punct A și se citește pe această scară o anumită valoare a distanței exprimată în fracțiuni de λ.

Se rotește apoi raza OTA cu un unghi corespunzător lungimii d dorită (exprimată în fracțiuni de λ). Se obține raza OB.

Punctul T', intersecția razei OB cu cercul cu centrul în O și care trece prin punctul T, dă valoarea relativă a impedanței căutate $R_1 + jX_1$; se deduce apoi

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_c (R_1 + jX_1).$$

Ca exemplu de aplicație să studiem următoarea problemă *: O linie de înaltă frecvență fără pierderi, avînd lungimea $X = 2,25$ m și avînd impedanța caracteristică $Z_c = 55 + j0\ \Omega$, este alimentată de un generator avînd $E = 100$ V și a cărui impedanță internă este $\underline{Z}_s = 40 + j0\ \Omega$. Linia are cuplat la ieșire un receptor avînd impedanța $\underline{Z}_2 = 115 + j\,75\ \Omega$. Frecvența este $f = 150$ MHz și se admite că viteza de propagare este 95% din viteza luminii. Se cere să se calculeze curentul $\underline{I}_2$ absorbit de receptor, tensiunea $\underline{U}_2$ la bornele sale și puterea pe care o absoarbe (fig. 12.12).

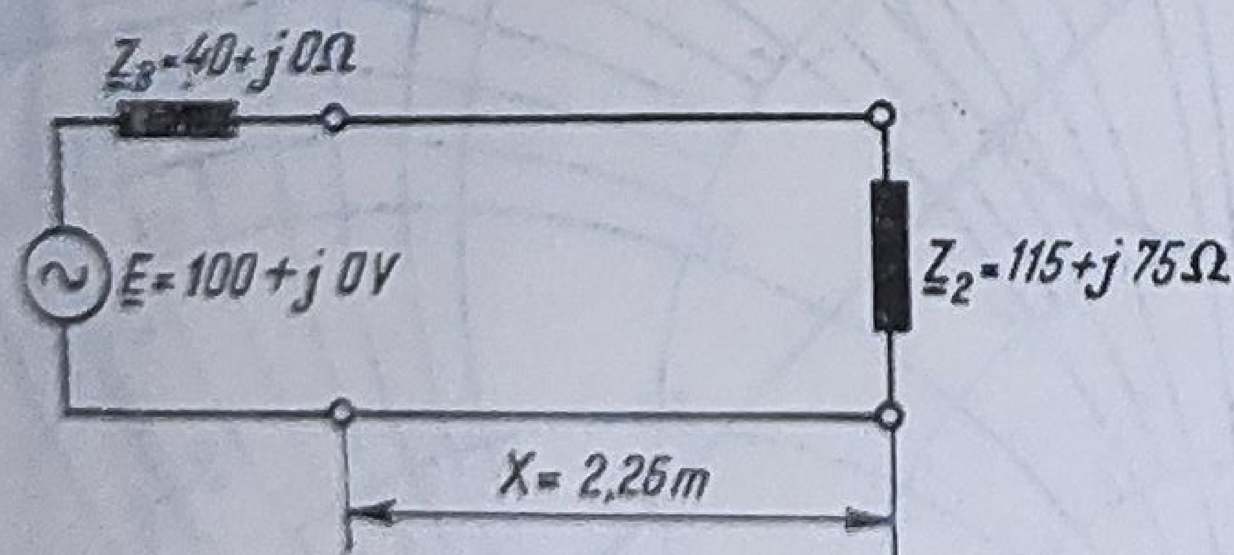


Fig. 12.12. Circuitul de calculat.

Lungimea de undă este

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0,95 \cdot 3 \cdot 10^8}{150 \cdot 10^6} = 1,9 \text{ m}$$

și deci

$$\frac{X}{\lambda} = \frac{2,25}{1,90} = 1,184$$

Impedanța relativă (sau redusă) a receptorului este

$$\underline{Z}_r = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_c} = \frac{115 + j\,75}{55} = 2,09 + j\,1,36.$$

* Vezi pentru alte aplicații de exemplu [77] pag. 323.

Aşezînd pe abacă punctul D corespunzător acestei impedanţe şi ducînd raza OD se găseşte la periferie punctul A' care corespunde distanţei 0,212 λ (fig. 12.13). Rotind raza OA' *spre sursă* cu 1,184 λ *sau cu* 0,184 λ ceea ce e tot una, corespunzătoare lungimii totale a liniei, se obţine

$$0{,}212\lambda + 0{,}184\ \lambda = 0{,}396\ \lambda$$

care determină punctul D'. Ducînd raza OD' şi luînd $OC = OD$, se găseşte

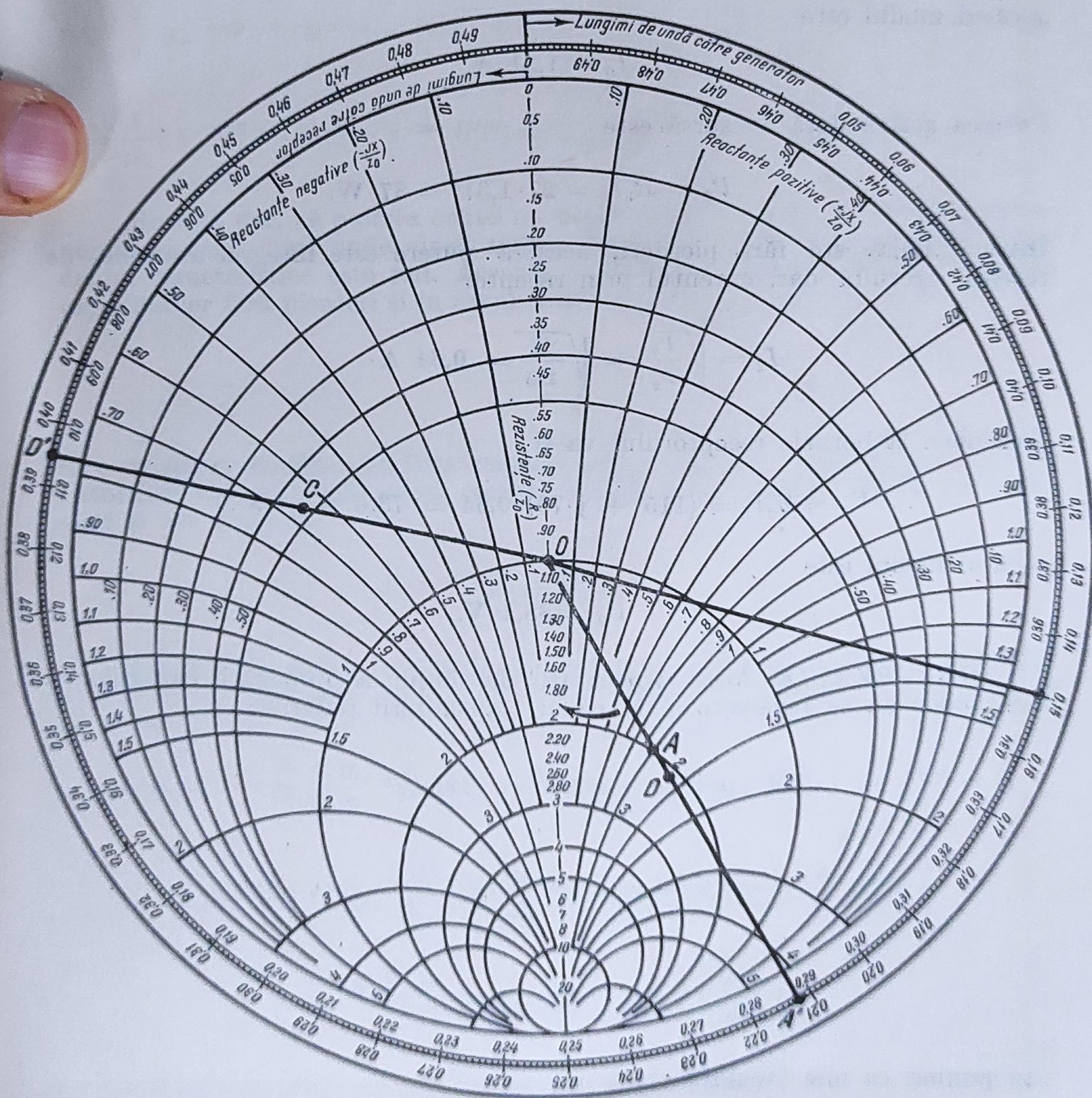


Fig. 12.13. Aplicarea abacei SMITH la circuitul dat.

că punctul C corespunde impedanței relative 0,49—j 0,65. În consecință,

$$\underline{Z}_0 = (0{,}49 - \mathrm{j}\ 0{,}65)\cdot 55 = 27 - \mathrm{j}\ 35{,}8\ \Omega$$

care este impedanța de intrare a liniei pe care debitează sursa.

Curentul dat de sursă va fi

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_0} = \frac{100}{40 + \mathrm{j}\,(27 - \mathrm{j}\,35{,}8)} = 1{,}16 + \mathrm{j}\ 0{,}62\ \mathrm{A}$$

a cărui modul este

$$I_0 = 1{,}31\ \mathrm{A}.$$

Puterea activă dată de sursă este

$$P_0 = R_0 I_0^2 = 27\cdot 1{,}31^2 = 37\ \mathrm{W}.$$

Întrucît linia este fără pierderi, această putere este integral absorbită de receptor, rezultă dar, curentul prin receptor

$$I_2 = \sqrt{\frac{P_0}{R_2}} = \sqrt{\frac{47}{115}} = 0{,}64\ \mathrm{A}\cdot$$

Tensiunea la bornele receptorului va fi

$$\underline{V}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = (115 + \mathrm{j}\ 75)\cdot 0{,}64 = 73{,}6 + \mathrm{j}\ 48\ \mathrm{V}$$

a cărui modul este

$$V_2 = 88{,}4\ \mathrm{V}.$$

OBSERVAȚIE. Acest aspect atît de simplu a propagării curenților și tensiunilor nu se regăsește și în cazul transmiterii puterilor

$$\underline{S} = \underline{UI}^* = (\varepsilon^{\alpha x} M \underline{|\mu + \beta x} + \varepsilon^{-\alpha x} N \underline{|\nu - \beta x})\cdot(\varepsilon^{\alpha x}\frac{M}{Z_c}\underline{|-\mu - \beta x + \psi} -$$

$$- \varepsilon^{-\alpha x}\cdot\frac{N}{Z_c}\underline{|-\nu + \beta x + \psi}) = \varepsilon^{2\alpha x}\frac{M^2}{Z_c}\underline{|\gamma} - \frac{MN}{Z_c}\underline{|\mu - \nu + 2\beta x + \psi} +$$

$$+ \frac{MN}{Z_c}\underline{|-\mu + \nu - 2\beta x + \psi} - \frac{N^2}{Z_c}\varepsilon^{-2\alpha x}\underline{|\psi},$$

sau punînd ca mai înainte

$$\mu = -\beta X,\quad M = U'\varepsilon^{-\alpha x}\ \text{și}\ N = U''$$

se obține

$$\underline{S} = \frac{1}{Z_c}\left[\frac{1}{2}\ \varepsilon^{-2\alpha(X-x)}\ U'^2 \underline{|\psi} - \frac{1}{2}\ U'\ U''\ \varepsilon^{-\alpha x}\ \underline{|-\nu-\beta(X-2x)+\psi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ U'\ U''\ \varepsilon^{-\alpha x}\ \underline{|\nu+\beta(X-2x)+\psi} - \frac{1}{2}\ U''^2\ \varepsilon^{-2\alpha x}\ \underline{|\psi}\right],$$

de unde rezultă

$$P = \frac{1}{2Z_c}\{(\varepsilon^{-2\alpha(X-x)}\ U'^2 - \varepsilon^{-2\alpha x}\ U''^2)\cos\psi - 2U'U''\varepsilon^{\alpha X}\sin[\beta(X-2x)+\nu]\sin\psi\},$$

$$Q = \frac{1}{2Z_c}\{(\varepsilon^{-2\alpha(X-x)}\ U'^2 - \varepsilon^{-2\alpha x}\ U''^2)\sin\psi + 2\,U'U''\ \varepsilon^{\alpha X}\sin[\beta(X-2x)+\nu]\cos\psi\}.$$

Rezultă dar, că *puterea activă* nu poate fi separată în doi termeni, corespunzători celor două unde, decît numai dacă $\psi = 0$, adică argumentul impedanței caracteristice este nul. Aceasta se realizează dacă $r = 0$ și $g = 0$, în cazul liniilor fără pierderi și în cazul transmisiunilor de radio, sau dacă

$$\frac{l}{r} = \frac{c}{g},$$

care constituie condiția lui Heaviside și corespunde unei linii funcționînd fără distorsiuni *. În ambele aceste cazuri, impedanța caracteristică este o mărime reală și are expresia

$$Z_c = \sqrt{\frac{l}{c}}\,.$$

12.1.5.2. **Al doilea aspect fizic al soluțiilor.** Ținînd seama de expresiile (12.32) ale parametrilor de integrare ale ecuațiilor generale (12.11), soluțiile (12.15) și (12.16) ale acestor ecuații pot fi scrise:

$$\underline{U} = \underline{U}_2\,\frac{\varepsilon^{\underline{\gamma}x} + \varepsilon^{-\underline{\gamma}x}}{2} + \underline{Z}_c\underline{I}_2\,\frac{\varepsilon^{\underline{\gamma}x} - \varepsilon^{-\underline{\gamma}x}}{2}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}\,\frac{\varepsilon^{\underline{\gamma}x} - \varepsilon^{-\underline{\gamma}x}}{2} + \underline{I}_2\,\frac{\varepsilon^{\underline{\gamma}x} + \varepsilon^{-\underline{\gamma}x}}{2}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2\,\mathrm{ch}\,\underline{\gamma}\,x + \underline{Z}_c\,\underline{I}_2\,\mathrm{sh}\,\underline{\gamma}\,x \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}\,\mathrm{sh}\,\underline{\gamma}\,x + \underline{I}_2\,\mathrm{ch}\,\underline{\gamma}\,x. \end{aligned}\right\} \qquad (12.41)$$

* Vezi 12.1.6.6.

La originea liniei, $x = X$, tensiunea și curentul vor fi

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} X + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} X \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} X + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} X. \end{aligned}\right\} \tag{12.42}$$

Făcînd ca sistemul să funcționeze în gol la receptor, ceea ce se obține din ecuațiile (12.14) în care se face $\underline{I}_2 = 0$; se obține

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_0 &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x, \\ \underline{I}_0 &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x. \end{aligned}\right\} \tag{12.43}$$

Făcînd acum ca linia să funcționeze în scurtcircuit ($\underline{U}_2 = 0$) se găsește

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_{sc} &= \underline{Z}_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} x \\ \underline{I}_{sc} &= \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x \end{aligned}\right\} \tag{12.44}$$

astfel, că funcționarea liniei poate fi considerată ca rezultînd din suprapunerea acestor două stări limită de funcționare (teorema lui BLONDEL):

$$\underline{U} = \underline{U}_0 + \underline{U}_{sc} \text{ și } \underline{I} = \underline{I}_0 + \underline{I}_{sc}.$$

Luînd $\underline{U}_2$ ca origine de fază și punînd

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta,\ \underline{Z}_c = Z_c \underline{|\psi},\ \underline{I}_2 = I_2 \underline{|\varphi_2},$$

se obține

$$\operatorname{ch} \underline{\gamma} x = \frac{1}{2}\left[\varepsilon^{(\alpha+j\beta)x} + \varepsilon^{-(\alpha+j\beta)x}\right] = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\alpha x}\, \varepsilon^{j\beta x} + \varepsilon^{-\alpha x}\, \varepsilon^{-j\beta x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\varepsilon^{\alpha x} \underline{|\beta x} + \varepsilon^{-\alpha x} \underline{|-\beta x}\right]$$

și

$$\operatorname{sh} \underline{\gamma} x = \frac{1}{2}\left[\varepsilon^{(\alpha+j\beta)x} - \varepsilon^{-(\alpha+j\beta)x}\right] = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\alpha x}\, \varepsilon^{j\beta x} - \varepsilon^{-\alpha x}\, \varepsilon^{-j\beta x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\alpha x} \underline{|\beta x} - \varepsilon^{-\alpha x} \underline{|-\beta x}\right).$$

Introducînd aceste valori în expresiile (12.42) şi (12.43) se obţine

$$\underline{U}_0 = \frac{1}{2}\,\underline{U}_2\,[(\mathrm{ch}\,\alpha x + \mathrm{sh}\,\alpha x)\,\underline{|\beta x} + (\mathrm{ch}\,\alpha x - \mathrm{sh}\,\alpha x)\,\underline{|-\beta x}];$$

$$\underline{I}_0 = \frac{1}{2}\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}\,[(\mathrm{ch}\,\alpha x + \mathrm{sh}\,\alpha x)\,\underline{|\beta x - \psi} - (\mathrm{ch}\,\alpha x - \mathrm{sh}\,\alpha x)\,\underline{|-\beta x - \psi};$$

$$\underline{U}_{sc} = \frac{1}{2}\,Z_c I_2\,[(\mathrm{ch}\,\alpha x + \sin\alpha x)\,\underline{|\beta x + \psi + \varphi_2} - (\mathrm{ch}\,\alpha x - \mathrm{sh}\,\alpha x)\,\underline{|-\beta x + \psi + \varphi_2}];$$

$$\underline{I}_{sc} = \frac{1}{2}\,I_2\,[(\mathrm{ch}\,\alpha x + \mathrm{sh}\,\alpha x)\,\underline{|\beta x + \varphi_2} + (\mathrm{ch}\,\alpha x - \mathrm{sh}\,\alpha x)\,\underline{|-\beta x + \varphi_2}].$$

Din aceste relaţii se pot scrie imediat valorile instantanee corespunzătoare

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= U_2\sqrt{2}\,[\mathrm{ch}\,\alpha x + \cos\beta x\cos\omega t - \mathrm{sh}\,\alpha x\sin\beta x\sin\omega t];\\ u_{sc} &= Z_c I_2\sqrt{2}\,[\mathrm{sh}\,\alpha x\cos\beta x\cos(\omega t + \psi + \varphi_2) - \mathrm{ch}\,\alpha x\sin\beta x\sin(\omega t + \psi + \varphi_2)];\end{aligned}\right\}\quad(12.45)$$

$$\left.\begin{aligned} i_0 &= \frac{U_2}{Z}\sqrt{2}\,[\mathrm{sh}\,\alpha x\cos\beta x\cos(\omega t - \psi) - \mathrm{ch}\,\alpha x\sin\beta x\sin(\omega t - \psi)];\\ i_{sc} &= I_2\sqrt{2}\,[\mathrm{ch}\,\alpha x\cos\beta x\cos(\omega t + \varphi_2) - \mathrm{sh}\,\alpha x\sin\beta x\sin(\omega t + \varphi_2)].\end{aligned}\right\}\quad(12.46)$$

Fiecare dintre aceste patru combinaţii, corespunzînd tensiunii respectiv curentului, reprezintă două mărimi alternative în spaţiu şi timp avînd fiecare, în diversele puncte ale liniei, aceeaşi fază, dar amplitudinea variind cu distanţa (fig. 12.14).

Aceste mărimi sînt unde staţionare; distanţa care separă două maxime de acelaşi semn, cu alte cuvinte distanţa care separă două puncte ale liniei unde amplitudinea reia aceeaşi valoare (abstracţie făcînd de factorii ch αx şi sh αx) este astfel, încît

$$\cos\beta x = \cos\beta(x + \lambda) \text{ şi } \sin\beta x = \sin\beta(x + \lambda)$$

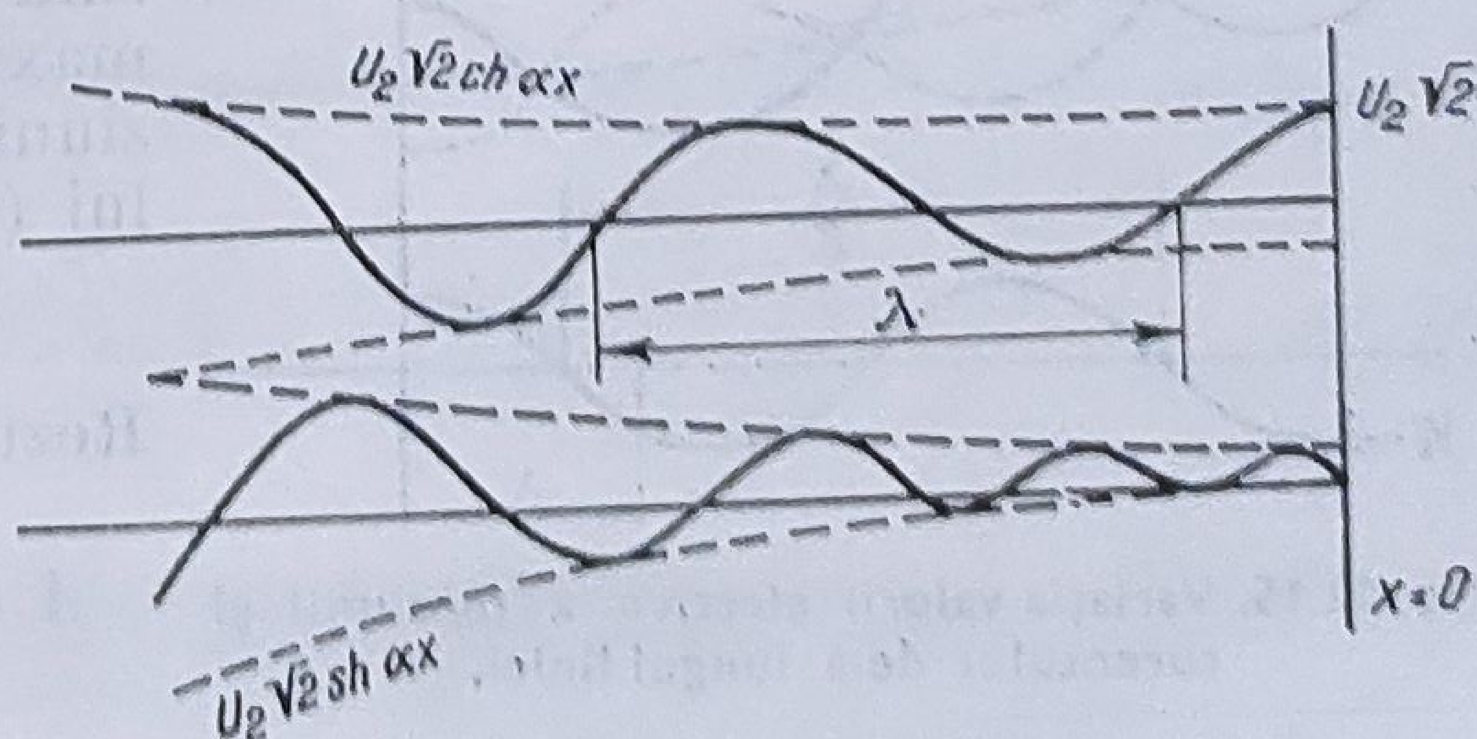
rezultă

$$\lambda\beta = 2\pi$$

şi deci

$$= \frac{2\pi}{\beta},$$

care este tocmai lungimea de undă a liniei.



12.14. Undele staţionarea de tensiune

Astfel că atît curentul cît şi tensiunea, pot fi considerate ca suprapunerea respectivă a celor patru unde, două cîte două decalate unele în raport cu celelalte, însă toate avînd aceeaşi lungime de undă.

În cazul liniilor electrice de transmitere a energiei electrice, lungimea lor este în general mică în raport cu lungimea lor de undă; în consecinţă, în acest caz nu se poate vorbi de unde staţionare. În cazul liniilor de telecomunicaţii, la care frecvenţele sînt mult mai ridicate, lungimea de undă este în general mult mai mică decît lungimea liniei.

12.1.5.3. Valoarea efectivă a curenţilor şi tensiunilor de-a lungul liniei. Pornind de la relaţiile

$$u = u_0 + u_{sc} \quad \text{şi} \quad i = i_0 + i_{sc},$$

valorile efective ale acestor mărimi se obţin calculînd rădăcina pătrată a sumei pătratelor coeficienţilor lui cos ωt şi sin ωt, împărţiţi cu $\sqrt{2}$, din relaţiile (12.44) şi (12.45). Făcînd aceste calcule se găseşte *

$$U^2 = [A \operatorname{ch} 2\alpha x + B \operatorname{sh} 2\alpha x] - [C \cos 2\beta x + D \sin 2\beta x] = V - W$$

$$Z_c^2 I^2 = [A \operatorname{ch} 2\alpha x + B \operatorname{sh} 2\alpha x] + [C \cos \beta 2x + D \sin 2\beta x] = V + W$$

în care,

$$A = \frac{1}{2}[Z_c^2 I_2^2 + U_2^2]; \quad B = Z_c I_2 U_2 \cos(\psi + \varphi_2),$$

$$C = \frac{1}{2}[Z_c^2 I_2^2 - U_2^2]; \quad D = Z_c I_2 U_2 \sin(\psi + \varphi_2).$$

Pentru un regim dat la sosire, mărimea

$$V = A \operatorname{ch} 2\alpha x + B \operatorname{sh} 2\alpha x$$

este o funcţie ce creşte permanent cu x, adică de la receptor către generator.

Mărimea

$$W = C \cos 2\beta x + D \sin 2\beta x$$

se scade din V — în expresia lui U^2 — sau se adaugă lui V — în expresia curentului $Z_c^2 I^2$; este o funcţie sinusoidală, cu perioada spaţială $\frac{2\pi}{2\beta} = \frac{\lambda}{2}$, prezentînd astfel, de-a lungul liniei o serie de maxime şi de minime, maximul tensiunii corespunzînd la minimul curentului (fig. 12.15).

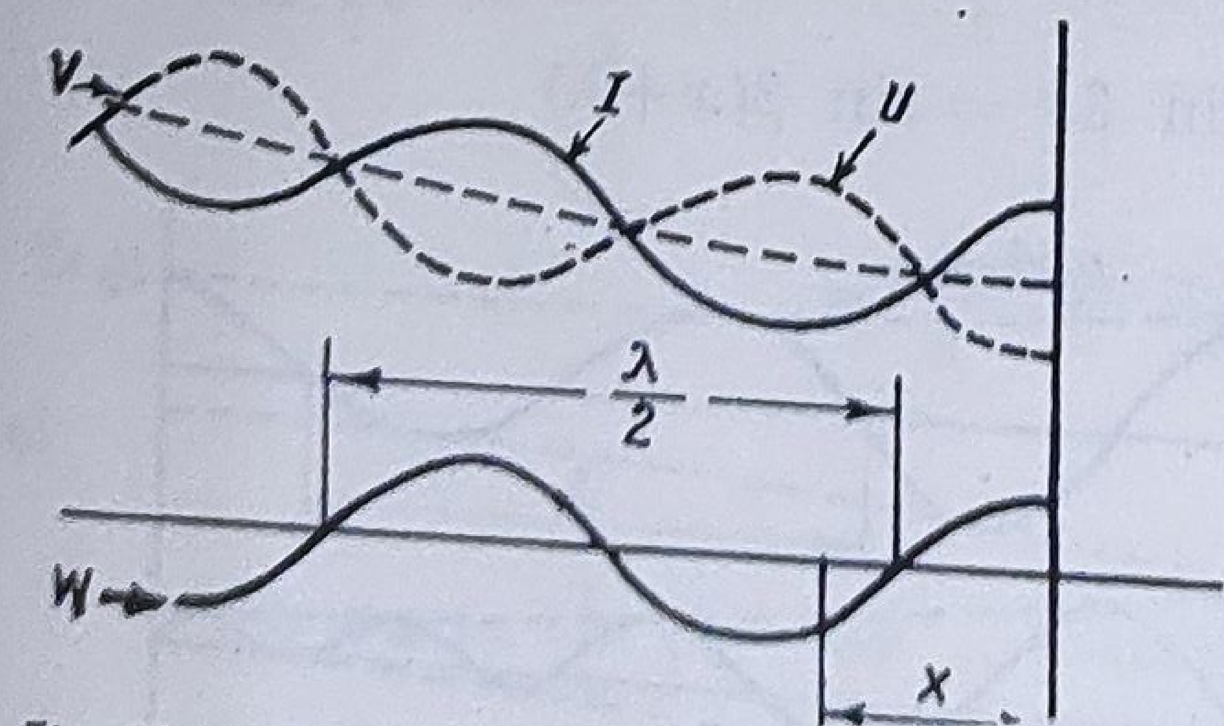


Fig. 12.15. Variaţia valorii efective a tensiunii şi curentului de-a lungul liniei.

Cazuri particulare :

— *Linia funcţionînd în gol* : $I_2 = 0$.

Rezultă

$$A = \frac{U_2^2}{2}, \quad C = -\frac{U_2^2}{2}, \quad B = D = 0$$

* Vezi [107] pag. 404—405.

şi

$$U_0^2 = \frac{U_2^2}{2}(\text{ch } 2\alpha x + \cos 2\beta x),$$

$$I_0^2 = \frac{U_2^2}{2Z_c^2}(\text{ch } 2\alpha x - \cos 2\beta x).$$

— *Linia funcţionînd în scurtcircuit*: $U_2 = 0$. Rezultă

$$A = C = \frac{Z_c^2 I_2^2}{2}\ ;\ B = D = 0$$

şi

$$U_{sc}^2 = \frac{Z_c^2 I_2^2}{2}(\text{ch } 2\alpha x - \cos 2\beta x),$$

$$I_{sc}^2 = \frac{I_2^2}{2}(\text{ch } 2\alpha x + \cos 2\beta x).$$

12.1.6. FUNCŢIONAREA ŞI PROPRIETĂŢILE GENERALE ALE LINIILOR DE TRANSMITERE DE ENERGIE ELECTRICĂ

12.1.6.1. Ecuaţiile şi diagrama generală a unei linii de transmitere a energiei electrice. Ecuaţiile (12.42), care dau expresia tensiunii şi curentului la sursă în funcţiile de mărimile corespunzătoare de la receptor:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \text{ ch } \underline{\gamma} X + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \text{ sh } \underline{\gamma} X,$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \text{sh } \underline{\gamma} X + \underline{I}_2 \text{ ch } \underline{\gamma} X,$$

în care X este lungimea liniei, reprezintă ecuaţiile unui cuadripol, coeficienţii respectivi îndeplinind condiţia cerută pentru un cuadripol pasiv *

$$\text{ch}^2 \underline{\gamma} X - \text{sh}^2 \underline{\gamma} X = 1.$$

Ţinînd seama de expresiile constantei de propagare $\underline{\gamma}$ şi a impedanţei caracteristice, precum şi că

$$\underline{\gamma} X = \sqrt{X(r + \mathrm{j} l \omega)\, X(g + \mathrm{j} c\omega)} = \sqrt{\underline{Z} \cdot \underline{Y}} \tag{12.47}$$

şi

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{X(r + \mathrm{j}l\omega)}{X(g + \mathrm{j}c\,\omega)}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}},$$

* Vezi 6.4.4.2.

cei patru parametri care reprezintă linia respectivă vor avea expresiile următoare

$$
\left.
\begin{aligned}
&\underline{A} = \underline{D} = \operatorname{ch}\sqrt{\underline{Z}\cdot\underline{Y}}\\
&\underline{B} = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}}\operatorname{sh}\sqrt{\underline{Z}\cdot\underline{Y}} = \underline{Z}\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\underline{Z}\cdot\underline{Y}}}{\sqrt{\underline{Z}\cdot\underline{Y}}},\\
&\underline{C} = \sqrt{\frac{\underline{Y}}{\underline{Z}}}\operatorname{sh}\sqrt{\underline{Z}\cdot\underline{Y}} = \underline{Y}\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\underline{Z}\cdot\underline{Y}}}{\sqrt{\underline{Z}\cdot\underline{Y}}}.
\end{aligned}
\right\} \quad (12.48)
$$

Dezvoltînd în serie funcţiile din membru doi *, expresiile (12.46) se pot scrie

$$
\begin{aligned}
&\underline{A} = \underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{2!} + \frac{\underline{Z}^2\,\underline{Y}^2}{4!} + \dots\\
&\frac{\underline{B}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{C}}{\underline{Y}} = 1 + \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{3!} + \frac{\underline{Z}^2\,\underline{Y}^2}{5!} + \dots
\end{aligned}
\quad (12.49)
$$

Numărul de termeni ce urmează a fi reţinuţi din aceste serii depindă direct de lungimea liniei; într-adevăr din relaţia (12.47) rezultă imediat ce $\underline{Z}\,\underline{Y} = \underline{\gamma}^2 X^2$. Aceste serii fiind foarte rapid convergente, în cazul liniilor electrice industriale funcţionînd la frecvenţa de 50 Hz şi în consecinţă, primii trei termeni sînt suficienţi.

Pentru exemplificare, să considerăm o linie aeriană perfect izolată ori fără pierderi $(r = 0,\ g = 0)$; în aceste condiţii

$$\underline{z}\,\underline{y} = \mathrm{j}^2\,\omega^2\,cl = -\,\omega^2\,cl.$$

Însă, produsul cl este egal cu inversul pătratului vitezei luminii, care este aproximativ egală cu 3.10^5 km/s, iar, pentru frecvenţa industrială de 50 Hz rezultă $\omega = 314\ \mathrm{s}^{-1}$. Rezultă deci,

$$\underline{Z}\,\underline{Y} = X^2\,\underline{z}\,\underline{y} = -\,1{,}1.10^{-6}\,X^2.$$

Pentru diverse valori ale lungimii liniei X se obţin rezultatele din tabloul 12.1, în care au fost reţinuţi numai primii trei termeni.

Din tabloul 12.1 rezultă că modulul mărimilor $\underline{A}$ şi $\frac{\underline{B}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{C}}{\underline{Y}}$ scade atunci cînd lungimea liniei creşte, cu atît mai mult cu cît linia este mai lungă.

Dacă se calculează acum lungimea liniei pentru care un termen al seriilor din relaţiile (12.48) rămîne mai mic decît o anumită valoare dată, spre exemplu

---

* Se cunosc dezvoltările: $\operatorname{ch}\sqrt{\underline{Z}\,\underline{Y}} = 1 + \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{2!} + \frac{\underline{Z}^2\,\underline{Y}^2}{4!} + \dots$

$$\operatorname{sh}\sqrt{\underline{Z}\,\underline{Y}} = \sqrt{\underline{Z}\,\underline{Y}}\left(1 + + \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{3!} + \frac{\underline{Z}^2\,\underline{Y}^2}{6!} + \dots\right).$$

Tabloul 12.1

Lungimea liniei X km	$\frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{2!}$	$\frac{\underline{Z}^2\underline{Y}^2}{4!}$	$\underline{A}$	$\frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{3!}$	$\frac{\underline{Z}^2\underline{Y}^2}{5!}$	$\frac{\underline{B}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{C}}{\underline{Y}}$
100	−0,0055	—	0,9945	−0,0018	—	0,9982
200	−0,0220	0,0001	0,9781	−0,0073	—	0,9927
300	−0,0495	0,0004	0,9509	−0,0165	0,0001	0,9836
400	−0,0880	0,0013	0,9133	−0,0293	0,0003	0,9700
500	−0,1375	0,0032	0,8657	−0,0458	0,0006	0,9548
600	−0,1980	0,0065	0,8085	−0,0660	0,0013	0,9353
700	−0,2695	0,0121	0,7426	−0,0898	0,0024	0,9126
800	−0,3520	0,0207	0,6687	−0,1173	0,0041	0,8868
900	−0,4455	0,0331	0,5876	−0,1485	0,0066	0,8581
1000	−0,5500	0,0504	0,5004	−0,1833	0,0101	0,8268

0,01, se găseşte că se poate lua pentru parametrii cuadripolului echivalent al liniei electrice, valorile date în tabloul 12.2*.

Tabloul 12.2

Lungimea maximă a liniei km	Parametrii cuadripolului
135	$\underline{A} = 1$
650	$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{2!}$
230	$\frac{\underline{B}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{C}}{\underline{Y}} = 1$
1 000	$\frac{\underline{B}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{C}}{\underline{Y}} = 1 + \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{3!}$

În mod practic termenii de forma $\underline{Z}^2\underline{Y}^2$ nu intervin decît în cazul unor linii foarte ungi.

Trebuie observat, că aceste rezultate nu sînt decît aproximative, întrucît în ipoteza făcută ($r = 0,\ g = 0$) argumentul constantei de propagare este $\delta = \frac{\pi}{2}$, în realitate însă, $\delta < \frac{\pi}{2}$. De asemenea, trebuie ţinut seama, că toate consideraţiile făcute mai înainte s-au făcut pentru o frecvenţă de 50 Hz; ţinînd seama că $\underline{\gamma}$ este proporţional cu frecvenţa, atunci cînd aceasta creşte, termenii dezvoltărilor în serie (12.49) cresc mult mai rapid cu ordinul lor şi este deci necesar să se reţină termeni mai mulţi pentru linii de aceeaşi lungime.

OBSERVAŢIE. Studiul funcţionării unei linii electrice de transmitere a energiei electrice se poate face deci, utilizînd toate metodele folosite la studiul unui cuadripol **. Printre acestea, se utilizează în mod curent, diagrama tensiunilor — sau cu un singur pol de tensiune —, metoda analitică folosind schemele echivalente π şi T, precum şi aceea a separării puterilor la cele două extremităţi (metoda Boucherot)***. Trebuie observat, că diagrama tensiunilor con-

* Vezi [73] pag. 216.
** Vezi 6.4.4.
*** Vezi 6.1.4.1.

struită pentru o anumită linie este un instrument de calcul foarte util, care dă foarte repede toate elementele caracteristice corespunzătoare unui anumit regim de funcționare.

Circuitele π și T sînt utile atît pentru calculul analitic al liniei, cît și pentru faptul că ele dau posibilitatea modelării liniei respective într-un laborator.

12.1.6.2. **Circuitele π și T echivalente ale unei linii date.** Ecuațiile de funcționare ale unei linii electrice lungi fiind acelea ale unui cuadripol, o linie electrică poate fi înlocuită printr-o schemă echivalentă în π sau în T; pentru aceasta este suficient să se scrie impedanțele corespunzătoare în funcție de parametrii cuadripolului *.

Astfel, pentru schema în π (fig. 12.16), ținînd seama că

$$\underline{Z}_\pi = \underline{B} \quad \text{și} \quad \underline{Y}_\pi = \frac{\underline{A}-1}{\underline{B}},$$

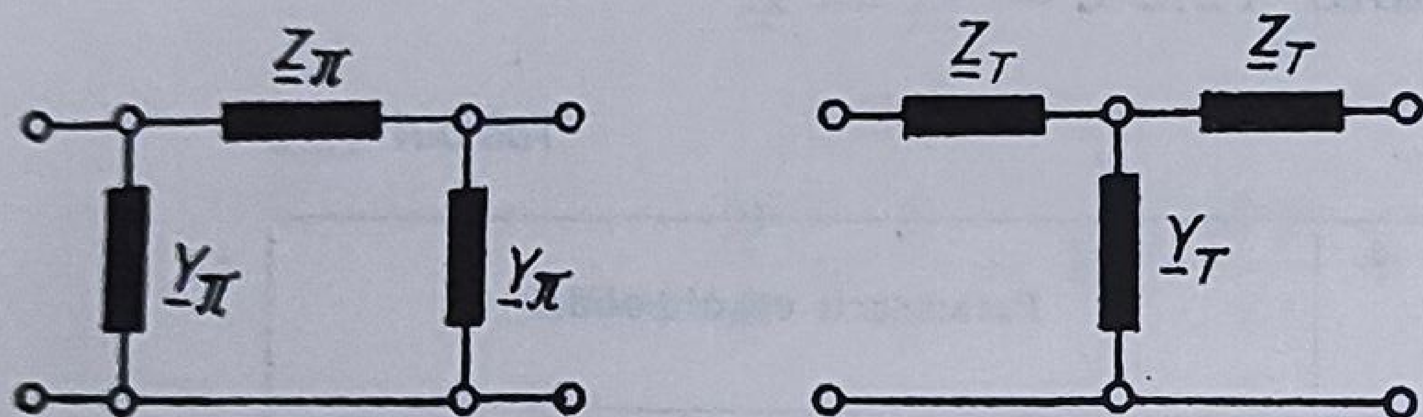


Fig. 12.16. Cuadripolii π și T echivalenți ai unei linii electrice de transmitere a energiei electrice.

precum și de relațiile (12.47), se obține

$$\underline{Z}_\pi = \underline{Z}\,\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\underline{Z}\,\underline{Y}}}{\sqrt{\underline{Z}\,\underline{Y}}}\,;\ \underline{Y}_\pi = \frac{\underline{Y}}{2}\,\frac{\mathrm{tg\,h}\dfrac{\sqrt{\underline{Z}\,\underline{Y}}}{2}}{\dfrac{\sqrt{\underline{Z}\,\underline{Y}}}{2}}. \tag{12.50}$$

În același mod, pentru schema în T se găsește

$$\underline{Z}_T = \frac{\underline{A}-1}{\underline{C}} = \frac{\underline{Z}}{2}\,\frac{\mathrm{tgh}\dfrac{\sqrt{\underline{Z}\,\underline{Y}}}{2}}{\dfrac{\sqrt{\underline{Z}\,\underline{Y}}}{2}}\,;\quad \underline{Y}_T = \underline{C} = \underline{Y}\,\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\underline{Z}\,\underline{Y}}}{\sqrt{\underline{Z}\,\underline{Y}}}. \tag{12.51}$$

Din relațiile (12.50) și (12.51) rezultă că impedanțele și admitanțele, corespunzînd celor două circuite echivalente π și T ale unei linii lungi diferă de impedanța și admitanța totală $-\underline{Z}$ și $\underline{Y}-$ a liniei numai prin factorii

$$\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\underline{Z}\,\underline{Y}}}{\sqrt{\underline{Z}\,\underline{Y}}} = 1 + \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{3\,!} + \frac{\underline{Z}^2\,\underline{Y}^2}{5\,!} + \ldots$$

$$\frac{\mathrm{tg\,h}\dfrac{\sqrt{\underline{Z}\,\underline{Y}}}{2}}{\dfrac{\sqrt{\underline{Z}\,\underline{Y}}}{2}} = 1 - \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{12} + \frac{\underline{Z}^2\,\underline{Y}^2}{296} - \ldots$$

* Vezi 6.4.4.9.

Din aceste relații se poate vedea în ce condiții se poate neglija repartiția uniformă a constantelor lineice ale liniei și a admite că impedanța totală este localizată la mijlocul liniei, admitanța corespunzătoare fiind localizată, în două jumătăți egale la cele două extremități ale liniei (circuitul în π) sau admitanța totală este localizată întreagă la mijlocul liniei între două impedanțe egale fiecare cu jumătate din impedanța totală a liniei așezate la extremitățile liniei (circuitul în T). Pentru aceasta este suficient să se poată neglija termenul $\frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{6} > \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{12}$ față de unitate. În acest caz, se obține

$$\underline{Z}_\pi = 2\,\underline{Z}_T = \underline{Z} \quad \text{și} \quad 2\,\underline{Y}_\pi = \underline{Y}_T = \underline{Y}.$$

Făcînd un calcul analog cu cel făcut mai înainte, pentru o linie aeriană fără pierderi, se poate vedea că termenii în $\underline{Z}^2\,\underline{Y}^2$ pot fi neglijați pentru linii avînd lungimea pînă la 1000 km. Valorile aproximative a celor doi factori corespunzătoare pînă la această distanță sînt date în tabloul 12.3.

Rezultă din acest tablou, făcînd un calcul invers că, pentru a obține în calcule o aproximație de 1/100 termenii în $\underline{Z}\,\underline{Y}$ pot fi neglijați pentru linii avînd o lungime pînă la aproximativ 230 km.

Tabloul 12.3

Lungimea liniei X km	$1 + \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{6}$	$1 - \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{12}$
100	0,9988	1,0009
200	0,9927	1,0037
300	0,9835	1,0083
500	0,9542	1,0229
1000	0,8147	1,0917

12.1.6.3. **Altă formă a soluțiilor ecuațiilor liniilor lungi.** Reluînd soluțiile generale (12.15) și (12.16) ale ecuațiilor liniilor lungi, acestea pot fi scrise succesiv

$$\underline{U} = \underline{M}\,\varepsilon^{\underline{\gamma} x} + \underline{N}\,\varepsilon^{-\underline{\gamma} x} = \underline{M}\,(\text{ch}\,\underline{\gamma}\,x + \text{sh}\,\underline{\gamma} x) + \underline{N}\,(\text{ch}\,\underline{\gamma} x - \text{sh}\,\underline{\gamma}\,x) =$$

$$= (\underline{M}+\underline{N})\,\text{ch}\,\underline{\gamma}\,x + (\underline{M}-\underline{N})\,\text{sh}\,\underline{\gamma} x = (\underline{M}-\underline{N})\left(\frac{\underline{M}+\underline{N}}{\underline{M}-\underline{N}}\,\text{ch}\,\underline{\gamma} x + \text{sh}\,\underline{\gamma} x\right).$$

Ținînd seama de relațiile (12.32) și punînd

$$\frac{\underline{M}+\underline{N}}{\underline{M}-\underline{N}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c\,\underline{I}_2} = \text{tgh}\,\underline{\gamma}\,\underline{n},$$

relația precedentă se poate scrie

$$\underline{U} = \underline{m}\,\text{sh}\,\underline{\gamma}\,(x + \underline{n}), \tag{12.52}$$

unde s-a notat

$$\underline{m} = \frac{\underline{M}-\underline{N}}{\text{ch}\,\underline{\gamma}\,\underline{n}} = \frac{\underline{Z}_c\,\underline{I}_2}{\text{ch}\,\underline{\gamma}\underline{n}}.$$

În același mod se găsește

$$\underline{I} = \frac{\underline{m}}{\underline{Z}_c}\,\text{ch}\,\underline{\gamma}\,(x + \underline{n}). \tag{12.53}$$

La extremitatea receptor a liniei ($x = 0$), relațiile (12.52) și (12.53) devin

$$\underline{U}_2 = \underline{m} \text{ sh } \underline{\gamma} \, n,$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{m}}{\underline{Z}_c} \text{ ch } \underline{\gamma} \, n.$$

Eliminînd parametrul $\underline{m}$ între aceste relații și relațiile precedente, se obține

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \frac{\text{sh } \underline{\gamma} \, (x + n)}{\text{sh } \underline{\gamma} (n)} \tag{12.54}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_2 \frac{\text{ch } \underline{\gamma} (x + n)}{\text{ch } \underline{\gamma} \, n} \tag{12.55}$$

o formă a soluției ecuațiilor lungi, utilă în aplicațiile practice și analoagă cu soluțiile ce se obțin în fenomenul pelicular *.

12.1.6.4. **Funcționarea unei linii electrice în gol.** În cazul funcționării în gol, impedanța de sarcină $\underline{Z}_2 = \infty$ și curentul de ieșire este nul ($\underline{I}_2 = 0$). În aceste condiții, ecuațiile (12.42), de funcționare ale liniei, devin

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_{10} &= \underline{U}_2 \text{ ch } \underline{\gamma} X = \underline{A} \, \underline{U}_2 \\ \underline{I}_{10} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \text{ ch } \underline{\gamma} \, X = \underline{C} \, \underline{U}_2. \end{aligned}\right\} \tag{12.56}$$

Să examinăm mărimile caracteristice de funcționare ale liniei electrice în aceste condiții.

Tensiunea. Diferența relativă a tensiunilor la cele două extremități este

$$\frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_{10}}{\underline{U}_2} = 1 - \text{ch } \underline{\gamma} \, X = 1 - \underline{A} \, .$$

În ipoteza făcută mai înainte și anume a unei linii perfect izolată și fără pierderi ($r=0$, $g = 0$), s-a calculat valoarea parametrului $\underline{A}$ (Tab. 12.1). Se poate determina astfel, variația acestei diferențe de tensiune în funcție de lungimea liniei (Tab. 12.4)

Tabloul 12.4

Lungimea liniei X km	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
1 – A	0,0055	0,0219	0,0491	0,0867	0,1343	0,1915	0,2574	0,3313	0,4124	0,4996

După cum s-a arătat mai înainte, pentru o linie electrică a cărei lungime nu depășește 630 km, se pot neglija, cu o eroare mai mică de 1%, termenii

* Vezi 14.1.2.2.

de gradul doi şi mai mare din dezvoltarea în serie a funcţiilor hiperbolice; în cazul liniei considerate se poate scrie

$$\underline{Z} = \mathrm{j}\omega l X \quad \text{şi} \quad \underline{Y} = \mathrm{j}\omega c\, X$$

şi deci *

$$\frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_{10}}{\underline{U}_2} = -\frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{2} = \frac{\omega^2 lc\, X^2}{2} \cong 0{,}55 . 10^{-6}\, X^2. \tag{12.57}$$

Rezultă dar, că în primă aproximaţie, la mersul în gol a unei linii electrice se produce întotdeauna o creştere a tensiunii la receptor faţă de tensiunea la sursă; valoarea relativă a creşterii de tensiune este proporţională cu pătratul lungimii liniei şi este sensibil aceeaşi, pentru orice linie electrică industrială.

Curentul. Din a doua relaţie (12.56) rezultă

$$\underline{I}_{10} = \underline{C}\,\underline{U}_2 = \frac{\underline{C}}{\underline{A}}\,\underline{U}_{10},$$

sau ţinînd seama de relaţiile (12.49).,

$$\underline{I}_{10} = \underline{Y}\,\underline{U}_{10}\,\frac{1 + \dfrac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{3\,!} + \dfrac{\underline{Z}^2\underline{Y}^2}{5\,!} + \ldots}{1 + \dfrac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{2\,!} + \dfrac{\underline{Z}^2\underline{Y}^2}{4\,!} + \ldots}.$$

Cu aceleaşi aproximaţii făcute, această relaţie poate fi scrisă

$$\underline{I}_{10} = \mathrm{j}\, c\omega X\, \underline{U}_{10}\,\frac{1 - \dfrac{\omega^2 lc\, X^2}{6}}{1 - \dfrac{\omega^2 lc\, X^2}{2}} \tag{12.58}$$

Rezultă dar, că în primă aproximaţie, *curentul de încărcare* a liniei este pur capacitiv, defazat deci cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de tensiunea de alimentare.

Se observă uşor, că acest curent este o funcţie de pătratul lungimii liniei. Punînd

$$\frac{1 - \dfrac{\omega^2 lc\, X^2}{6}}{1 - \dfrac{\omega^2 lc\, X^2}{2}} = \mathrm{f}(X^2), \tag{12.59}$$

relaţia (12.58) se poate scrie

$$\underline{I}_0 = \mathrm{j}\, c\omega\, X\, \underline{U}_1\, \mathrm{f}(X^2).$$

În consecinţă, curentul de mers în gol sau curentul de încărcare a liniei este egal — în primă aproximaţie — cu curentul de încărcare a unui condensator

* Vezi 12.1.6.1.

a cărui capacitate este egală cu capacitatea totală a liniei şi căruia i se aplică tensiunea liniei la sursă $\underline{U}_1$, multiplicată cu o constantă care este o funcţie de pătratul lungimii liniei electrice respective.

În tabloul 12.5 este dată valoarea acestei funcţii pentru diverse lungimi de linie, pînă la 1000 km.

Tabloul 12.5

Lungimea liniei X km	100	200	300	400	00	600	700	800	900	1000
$f(X^2)$	1,0036	1,0151	1,0350	1,0539	1,1075	1,1166	1,2482	1,3654	1,5405	1,8222
$f^{-1}(X^2)$	0,9964	0,9852	0,9662	0,9489	0,9029	0,8956	0,8012	0,7324	0,6816	0,5488

Puterile activă şi reactivă. Calculînd aceste puteri la extremitatea *sursă* se obţine

$$\underline{S}_{10} = P_{10} + \mathrm{j}\, Q_{10} = \underline{U}_{10}\underline{I}^*_{10} = \underline{A}\, \underline{C}^*\, U_2^2 = \frac{\underline{C}^*}{\underline{A}^*}\, U_{10}^2 . \tag{12.60}$$

În ipoteza considerată (linie care nu depăşeşte 630 km) şi în ipotezele făcute în acest caz, *puterea activă* la sursă este foarte mică şi poate fi neglijată; *putera reactivă* pe fază la sursă, *absorbită* deci de linia electrică, este aproximativ dată de relaţia

$$\mathrm{j}\, Q_{10} = U_{10}^2 \frac{\underline{C}^*}{\underline{A}^*} = U_{10}^2 \frac{\left(1 + \dfrac{\underline{Z}^*\underline{Y}^*}{3\,!}\right)\underline{Y}^*}{1 + \dfrac{\underline{Z}^*\underline{Y}^*}{2!}} = -\,\mathrm{j}\omega\, C\, X\, U_{10}^2\, \frac{1 - \dfrac{\omega^2\, lc\, X^2}{6}}{1 - \dfrac{\omega^2\, lc\, X^2}{2}},$$

sau ţinînd seama de relaţia (12.59),

$$Q_1 = -\,\omega\, c\, X\, U_{10}^2\, \mathrm{f}(X^2). \tag{12.61}$$

Rezultă deci, că linia electrică funcţionînd în gol *produce* o putere reactivă, care este echivalentă cu aceea pe care ar produce-o un condensator de capacitate cX căruia i s-ar aplica tensiunea liniei la sursă $\underline{U}_1$ multiplicată cu o constantă care este o funcţie de pătratul lungimii liniei electrice respective.

Dacă se notează*

$$\underline{A} = A\,\underline{|\varepsilon} \qquad \text{şi} \qquad \underline{C} = C\,\underline{|\eta - \psi},$$

ψ fiind argumentul impedanţei caracteristice, expresiile celor două puteri, activă şi reactivă, la sursă vor fi

$$P_{10} = A C U_2^2 \cos(\varepsilon + \psi - \eta) = \frac{C}{A}\, U_{10}^2 \cos(\varepsilon + \psi - \eta),$$

$$Q_{10} = A C U_2^2 \sin(\varepsilon + \psi - \eta) = \frac{C}{A}\, U_{10}^2 \sin(\varepsilon + \psi - \eta).$$

* Vezi [106] p. 12.

Aceste expresii dau cu mai multă precizie valoarea celor două puteri. Ţinînd seamă că în general ε e foarte mic şi pozitiv, ψ e foarte mic şi negativ, iar η este foarte aproape de $\frac{\pi}{2}$, puterea activă P_1 este foarte mică şi corespunde pierderilor prin conductanţă şi pierderilor prin efect JOULE produse de trecerea curentului capacitiv prin linie; puterea reactivă este *negativă*, cum rezultă şi din relaţia (12.61), îndreptată deci spre capătul de alimentare. *O linie electrică funcţionînd în gol se comportă deci ca un generator de putere reactivă pe care o furnizează sistemului de alimentare a liniei.*

12.1.6.5. **Funcţionarea unei linii electrice în scurtcircuit.** Acest caz limită de funcţionare a unei linii electrice nu este interesant pentru practică, el nefiind realizat decît în cazuri cu totul excepţionale, cum ar fi, de exemplu, în timpul încercărilor de recepţie. El este totuşi examinat pentru interesul teoretic pe care îl prezintă.

În cazul funcţionării în scurtcircuit, impedanţa de sarcină a receptorului este nulă ($\underline{Z}_2 = 0$) şi tensiunea la bornele receptorului este de asemenea nulă ($\underline{U}_2 = 0$). Ecuaţiile de funcţionare ale liniei electrice (12.42) devin în acest caz

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_{1\,sc} &= \underline{Z}_c\, \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} X = \underline{B}\, \underline{I}_2 \\ \underline{I}_{1\,sc} &= \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} X = \underline{A}\, \underline{I}_2 . \end{aligned}\right\} \tag{12.62}$$

Să examinăm — şi în acest caz — mărimile caracteristice ale liniei electrice în aceste condiţii.

Curentul. Din relaţiile (12.62) se deduce imediat

$$\underline{I}_{1\,sc} = \frac{\underline{A}}{\underline{B}}\, \underline{U}_{1\,sc} ,$$

sau ţinînd seama de relaţiile (12.49),

$$\underline{I}_{1\,sc} = \frac{\underline{U}_{1\,sc}}{\underline{Z}} \, \frac{1 + \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{2!} + \frac{\underline{Z}^2\underline{Y}^2}{4!} + \ldots}{1 + \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{3!} + \frac{\underline{Z}^2\underline{Y}^2}{5!} + \ldots}$$

Făcînd aceleaşi aproximaţii ca şi pentru cazul precedent ($r = 0$, $g = 0$), linie a cărei lungime nu depăşeşte 630 km pentru ca aproximaţia făcută să nu depăşească 1 %), expresia curentului se poate scrie

$$\underline{I}_{1\,sc} = \frac{\underline{U}_{1\,sc}}{\mathrm{j}\omega l X} \, \frac{1 - \frac{\omega^2 l c X^2}{2}}{1 - \frac{\omega^2 l c X^2}{6}} = -\,\mathrm{j}\, \frac{\underline{U}_{1\,sc}}{\omega l X}\, \mathrm{f}^{-1}(X^2),$$

unde $\mathrm{f}^{-1}(X^2)$ este inversa expresiei definită de relaţia (12.59). Rezultă dar, că în primă aproximaţie, curentul absorbit de linie de la sursă este de data aceasta

pur inductiv defazat cu $\frac{\pi}{2}$ față de tensiunea de alimentare și a cărui mărime depinde de lungimea liniei. În acest caz, linia poate fi asemuită cu o inductanță, avînd reactanța egală cu reactanța totală a liniei $\omega l X$, căruia i se aplică la borne tensiunea liniei la sursă $\underline{U}_1$ multiplicată cu o constantă, care este o funcție de pătratul lungimii liniei electrice respective.

Puterile activă și reactivă. Calculul acestor puteri la extremitatea *sursă* dă — pentru fiecare fază —

$$\underline{S}_{1sc} = P_{1sc} + \mathrm{j}\, Q_{1sc} = \underline{U}_{1sc}\, \underline{I}^*_{1sc} = \underline{A}^* \underline{B}\, I_2^2 = \frac{\underline{B}}{\underline{A}} I^2_{1sc} \qquad (12.63)$$

În ipoteza făcută, *puterea activă* la sursă este foarte mică și se poate neglija. *Puterea reactivă* pe fază la sursă, *absorbită* de linia electrică, este dată aproximativ de relația

$$\mathrm{j}\, Q_{1sc} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}}\, I^2_{1sc} = I^2_{1sc}\, \frac{\underline{Z}\left(1 + \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{3\,!}\right)}{1 + \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{2\,!}} = \mathrm{j}\omega\, l X I^2_{1sc}\, \frac{1 - \frac{\omega^2 l c X^2}{6}}{1 - \frac{\omega^2 l c X^2}{2}},$$

sau ținînd seama de relația (12.59), se obține

$$Q_{1sc} = \omega l X I^2_{1sc}\, \mathrm{f}(X^2).$$

În consecință, o linie electrică în scurtcircuit *absoarbe* o putere reactivă care este echivalentă cu aceea pe care ar absorbi-o o inductanță, a cărei valoare este lX, care ar fi străbătută de curentul absorbit de linie la sursă $\underline{I}_1$, multiplicat cu o constantă care este o funcție de pătratul lungimii liniei electrice respective; această constantă este identică cu aceea care apare în cazul determinării aceleiași mărimi, atunci cînd linia funcționează în gol.

Notînd în acest caz*

$$\underline{A} = A\, \underline{|\varepsilon} \qquad \text{și} \qquad \underline{B} = B\, \underline{|\eta + \psi},$$

ψ fiind și de data aceasta argumentul impedanței caracteristice, expresiile celor două puteri, activă și reactivă, la sursă vor fi

$$P_{1sc} = A B I_2^2 \cos(\eta + \psi - \varepsilon) = \frac{B}{A} I^2_{1sc} \cos(\eta + \psi - \varepsilon),$$

$$Q_{1sc} = A B I_2^2 \sin(\eta + \psi - \varepsilon) = \frac{B}{A} I^2_{1sc} \sin(\eta + \psi - \varepsilon).$$

Și în acest caz, ca și în cazul funcționării în gol, puterea activă P_{1sc}, absorbită de linie este foarte mică și corespunde pierderilor prin conductanță

* Vezi [106] pag. 12.

şi acelea prin efect JOULE produse de trecerea curentului inductiv prin linie; puterea reactivă este pozitivă. *O linie electrică funcţionînd în scurtcircuit se comportă ca un receptor de putere reactivă, pe care o absoarbe de la sistemul de alimentare.*

12.1.6.6. Funcţionarea unei linii electrice în regim caracteristic*. Reluînd ecuaţiile generale (12.41) de funcţionare a unei linii electrice

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch}\underline{\gamma} x + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \operatorname{sh}\underline{\gamma}\, x,$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh}\underline{\gamma} x + \underline{I}_2 \operatorname{ch}\underline{\gamma} x,$$

să presupunem că linia alimentează un receptor, a cărui impedanţă este egală cu impedanţa caracteristică a liniei, adică

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_c\, \underline{I}_2 .$$

Luînd tensiunea la receptor ca origine de fază, rezultă imediat că

$$\varphi_2 = -\,\psi.$$

În aceste condiţii, ecuaţiile liniei se pot scrie

$$\left.\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 (\operatorname{ch} \underline{\gamma}\, x + \operatorname{sh} \underline{\gamma}\, x) = \underline{U}_2\, \varepsilon^{\underline{\gamma} x} \\ \underline{Z}_c \underline{I} &= \underline{U}_2 (\operatorname{ch} \underline{\gamma}\, x + \operatorname{sh} \underline{\gamma}\, x) = \underline{U}_2\, \varepsilon^{\underline{\gamma} x} = \underline{Z}_c \underline{I}_2 \varepsilon^{\underline{\gamma} x} . \end{aligned}\right\} \qquad (12.64)$$

Rezultă, că *de-a lungul întregii linii* raportul dintre tensiunea $\underline{U}$ şi curentul $\underline{I}$ este constant şi egal cu impedanţa caracteristică a liniei

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}_c \quad \text{şi deci} \quad \frac{U}{I} = Z_c \quad \text{şi} \quad \varphi = -\,\psi. \qquad (12.65)$$

Luînd modulul expresiilor (12.64) se vede că valoarea efectivă a acestora este

$$U = U_2\, \varepsilon^{\alpha x} \quad \text{şi} \quad I = I_2\, \varepsilon^{\alpha x};$$

ele variază deci exponenţial de-a lungul liniei.

La originea liniei ($x = X$) vom avea

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2\, \varepsilon^{\underline{\gamma} X} \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_2\, \varepsilon^{\underline{\gamma} X} \quad \text{şi} \quad \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_c . \end{aligned}\right\} \qquad (12.66)$$

---

* Vezi şi 12.1.5.1.

Dacă se exprimă acum valoarea tensiunii şi a curentului într-un punct oarecare, în funcţie de tensiunea $\underline{U}_1$ de la sursă şi luînd această tensiune ca origine de fază, se obţine

$$\left.\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1\, \varepsilon^{-\underline{\gamma}\,(X-x)} = \varepsilon^{-\alpha\,(x-X)}\, U_1 \underline{|-\beta\,(X-x)}, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c}\, \varepsilon^{-\underline{\gamma}\,(X-x)} = \varepsilon^{-\alpha(X-x)}\, \frac{U_1}{Z_c} \underline{|-\beta\,(X-x)-\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{12.67}$$

Atît curentul, cît şi tensiunea pot fi reprezentate fazorial printr-un singur fazor al cărui modul scade exponenţial cu distanţa de la sursă către receptor, argumentul respectiv variind proporţional cu distanţa respectivă; variaţia fazorului de curent urmează aceeaşi lege, însă el este defazat cu unghiul ψ în urma tensiunii (fig. 12.17).

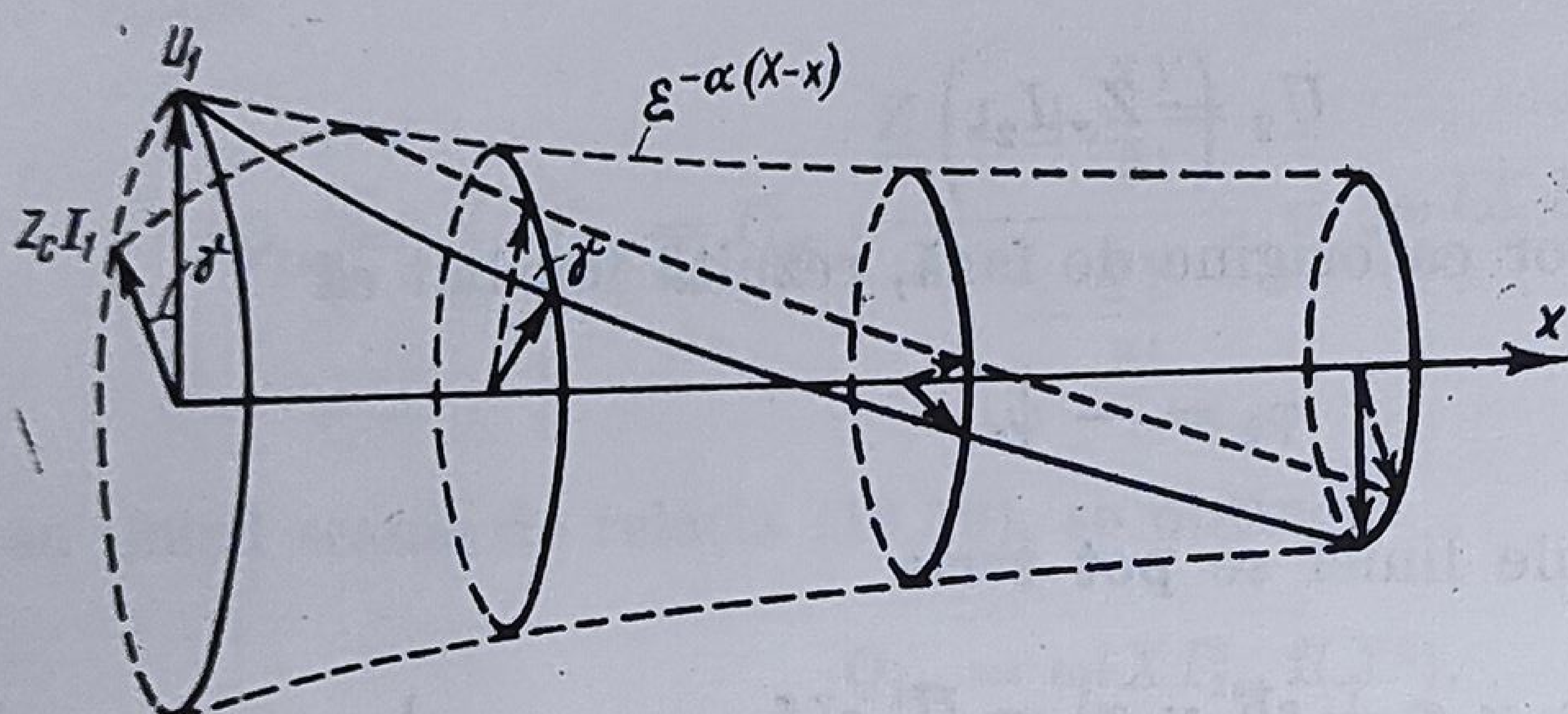


Fig. 12.17. Variaţia tensiunii şi curentului de-a lungul unei linii electrice adaptate.

Pornind de la relaţiile (12.67) se pot scrie imediat expresiile valorilor instantanee ale tensiunii şi curentului într-un punct oarecare al liniei în funcţie de mărimile corespunzătoare la capătul sursă a liniei:

$$u = \varepsilon^{-\alpha\,(X-x)}\, U_1 \sqrt{2} \cos\,[\omega t - \beta\,(X-x)]$$

$$i = \varepsilon^{-\alpha\,(X-x)}\, \frac{U_1}{Z_c} \sqrt{2} \cos\,[\omega t - \beta(X-x) - \psi].$$

Tensiunea şi curentul de-a lungul liniei sînt astfel reprezentate printr-o singură undă mobilă, unda reflectată anulîndu-se.

Puterea într-un punct oarecare a liniei se poate calcula uşor; ţinînd seama de relaţiile (12.65) se obţine

$$\underline{S} = P_c + \mathrm{j}\, Q_c = \underline{U}\, \underline{I}^* = \frac{U^2}{Z_c} (\cos\psi + \mathrm{j}\sin\psi).$$

Se găseşte astfel:

a) La extremitatea sursă a liniei ($x = X$)

$$P_{1c} = \frac{U_1^2}{Z_c} \cos\psi; \quad Q_{1c} = \frac{U_1^2}{Z_c} \sin\psi.$$

*b) Într-un punct oarecare al liniei**

$$P_c = \frac{U^2}{Z_c} \cos \psi = P_{1c}\, \varepsilon^{-2\alpha(X-x)} ;$$

$$Q_c = \frac{U^2}{Z_c} \sin \psi = Q_{1c}\, \varepsilon^{-2\alpha(X-x)}$$

c) La extremitatea receptor a liniei ($x = 0$)

$$P_{2c} = \frac{U_2^2}{Z_2} \cos \psi = P_{1c}\, \varepsilon^{-2\alpha X}$$

$$Q_{2c} = \frac{U_2^2}{Z_c} \sin \psi = Q_{1c}\, \varepsilon^{-2\alpha X}.$$

Puterea activă de la extremitatea receptoare a liniei

$$P_{2c} = \frac{U_2^2}{Z_c} \cos \psi$$

poartă numele de *puterea caracteristică* sau *puterea naturală* a liniei.

În cazul cînd argumentul impedanţei caracteristice este nul, tensiunea şi curentul sînt în fază de-a lungul întregii linii. Ţinînd seama de relaţia (12.28) care defineşte acest argument

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\text{arc tg}\frac{l\,\omega}{r} - \text{arc tg}\frac{c\,\omega}{g}\right);$$

el va fi nul dacă $r = g = 0$, adică în cazul unei linii fără pierderi, sau dacă

$$\frac{r}{l} = \frac{g}{c},$$

această din urmă condiţie fiind cunoscută sub numele de condiţia lui HEAVISIDE.

În cazul particular al unei linii perfecte, pentru care g este neglijabil şi $r \ll l\omega$ şi poate fi de asemenea neglijat, atunci**

$$\alpha = 0;\ \beta = \omega\sqrt{lc};\ Z_c = \sqrt{\frac{l}{c}};\ \psi = 0.$$

Regimul caracteristic de funcţionare este realizat în acest caz dacă curentul $\underline{I}_2$ la sosire este în fază cu tensiunea $\underline{U}_2$ la sosire şi este egal cu $\frac{U_2}{Z_c}$ şi în consecinţă, dacă puterea aparentă la sosire este egală cu puterea activă

$$\underline{S} = P = \frac{U_2^2}{Z_c};$$

* Ţinînd seama de relaţiile (12.67).
** Vezi 12.1.4.2. *a*).

Curenții și tensiunea păstrează de-a lungul liniei aceeași valoare ca la sosire, oricare ar fi βx și în consecință, oricare ar fi lungimea liniei și frecvența ei.

Viteza de propagare a undei este

$$v = \frac{\omega}{\beta} \frac{1}{\sqrt{lc}}.$$

Regimul caracteristic fiind atins, pentru fiecare punct al liniei

$$U = Z_c I = \sqrt{\frac{l}{c}} I$$

și deci

$$\frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} L I^2;$$

rezultă că energia reactivă inductivă este compensată în fiecare punct al liniei de energia reactivă capacitivă. Se zice că linia este autocompensată.

Din cele examinate mai înainte, se pot deduce proprietățile esențiale ale funcționării unei linii electrice lungi, în regim caracteristic :

1. Valorile efective ale tensiunii și curentului scad exponențial de-a lungul liniei, de la extremitatea sursă către receptor, constanta de atenuare fiind * $\alpha = \frac{1}{2} \frac{r}{Z_c}$.

2. Raportul dintre valorile efective ale tensiunii și curentului de-a lungul liniei este constant și egal cu impedanța caracteristică, iar defazajul între acestea este de asemenea constant și egal cu argumentul impedanței caracteristice, luat cu semnul schimbat.

3. Curentul și tensiunea se prezintă ca unde mobile care se propagă de la sursă către receptor, fără a fi reflectată la această extremitate.

4. Toate aceste rezultate sînt independente de frecvența tensiunii și curentului.

5. Puterile activă și reactivă variază exponențial de-a lungul liniei, descrescînd de la extremitatea sursă către extremitatea receptor, factorul de amortizare 2α fiind dublul constantei de atenuare.

6. În liniile industriale, puterea reactivă este foarte mică, ea fiind proporțională cu $\sin\psi$. Puterea activă, numită *puterea caracteristică* sau *puterea naturală* a liniei, este foarte apropiată de puterea ce s-ar obține dacă $\cos\psi = 1$.

7. Calculînd pierderile de putere activă și reactivă, acestea sînt :

$$\begin{cases} p = P_{1c} - P_{2c} = \frac{U_1^2}{Z_c} \cos\psi \left(1 - \varepsilon^{-2\alpha X}\right) \cong \frac{U_1^2}{Z_c} \left(1 - \varepsilon^{-2\alpha X}\right); \\ q = Q_{1c} - Q_{2c} = \frac{U_1^2}{Z_c} \sin\psi \left(1 - \varepsilon^{-2\alpha X}\right) \cong 0. \end{cases}$$

Pierderile de putere reactivă sînt într-o linie industrială, foarte mici; aceasta se datorează faptului că o linie electrică, funcționînd în regim caracteristic, se autocompensează. Linia se comportă astfel ca o rezistență pură.

---

* Vezi 12.1.4.2, *b*.

8. Puterea caracteristică nu depinde decît de tensiune, de modulul impedanţei caracteristice, foarte puţin de frecvenţă şi este independentă de lungime.

Puterea naturală sau caracteristică constituie o dată foarte importantă pentru liniile electrice, susceptibilă să fixeze, în fiecare caz particular, tensiunea de serviciu a liniei.

Impedanţele caracteristice ale liniilor aeriene, precum şi cele ale liniilor subterane, nevariind decît între limite foarte mici, puterea naturală a oricărui sistem de transmisie nu depinde, pînă la urmă, decît de tensiunea de serviciu. Astfel, dacă presupunem că:

$$Z_c = 400\ \Omega \text{ pentru liniile aeriene,}$$
$$Z_c = 40\ \Omega \text{ pentru cabluri subterane,}$$

atunci puterea naturală în funcţie de tensiunea de serviciu este dată în tabloul 12.6

Tabloul 12.6

Tensiunea de serviciu kV	Puterea naturală MW	
	aerian	subteran
35	2,2	22
60	9	90
110	30	300
220	120	1200
300	225	2250
380	360	—
400	400	—

12.1.6.7. **Linia electrică foarte lungă.** Să reluăm ecuaţiile generale (12.41)

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} x$$

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_c} \underline{U}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} x + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x.$$

Dacă linia este foarte lungă, astfel, încît de la o anumită distanţă X_1 de la extremitatea liniei $\varepsilon^{-\underline{\gamma} X_1}$ poate fi neglijat faţă de $\varepsilon^{\underline{\gamma} X_1}$, atunci se poate lua

$$\operatorname{ch} \underline{\gamma} X_1 = \operatorname{sh} \underline{\gamma} X_1 = \frac{1}{2} \varepsilon^{\underline{\gamma} X_1},$$

ecuaţiile de funcţionare ale liniei devenind

$$\underline{U}_{X_1} = \frac{1}{2} (\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2)\ \varepsilon^{\underline{\gamma} X_1}$$

$$\underline{Z}_c \underline{I}_{X_1} = \frac{1}{2} (\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2)\ \varepsilon^{\underline{\gamma} X_1}$$

de unde,

$$\underline{U}_{X_1} = \underline{Z}_c \underline{I}_{X_1}$$

totul se petrece în acest caz ca şi cum de la această distanţă, linia devine o simplă impedanţă egală cu impedanţa caracteristică. Pe de altă parte, curentul

şi tensiunea cresc exponenţial către extremitatea generatoare, deoarece

$$|\varepsilon^{\underline{\gamma} X_1}| = \varepsilon^{\alpha X_1} \,|(\cos \beta X_1 + \mathrm{j} \sin \beta X_1)| = \varepsilon^{\alpha X_1}.$$

O linie foarte lungă se comportă deci ca şi o linie electrică funcţionînd pe impedanţa sa caracteristică şi are aceleaşi proprietăţi ca şi aceasta.

Posibilitatea ca o linie electrică industrială să poată funcţiona în aceste condiţii — adică fără undă reflectată —, depinde în primul rînd de lungimea X a liniei şi apoi de valoarea constantei de atenuare α, care pentru o linie industrială, este egală aproximativ cu $\frac{1}{2}\frac{r}{Z_c}$ radhip/km. Astfel, în cazul unei linii lungi industriale la frecvenţa de 50 Hz, rezistenţa sa lineică este cuprinsă între 0,06 — 0,10 Ω/km iar impedanţa sa caracteristică este $Z_c = 400\ \Omega$. În aceste condiţii se găseşte că $\alpha \cong 10^{-4}$ radhip/km. Pentru a avea însă $\mathrm{ch}\, x \cong \mathrm{sh}\, x$ este necesar şi suficient ca* $x > 6{,}3$ şi deci, în cazul unei linii industriale, trebuie ca $X_1 > 6{,}3 . 10^4$ km, ceea ce în mod practic nu se poate realiza. Condiţiile de funcţionare ale unei linii lungi — fără undă reflectată — sînt însă îndeplinite de liniile de telecomunicaţii pentru care frecvenţa este cuprinsă între 50 şi 200 kHz. La această frecvenţă apare efectul pelicular** în conductoare şi constanta de atenuare a acestor linii poate fi multiplicată printr-un coeficient egal cu 50 sau 100, astfel că unda reflectată poate fi neglijată la linii avînd o lungime numai de cîteva sute de km.

12.1.6.8. **Transmisia prin linii sfert de undă.** Dacă lungimea X a unei linii este egală cu un sfert din lungimea de undă a undelor de tensiune, respectiv de curent, care se propagă pe această linie, linia corespunzătoare se numeşte *linie sfert de undă*. Asemenea linii se pot întîlni în mod curent în cazul liniilor telefonice sau telegrafice. Ele se întîlnesc mai rar în cazul liniilor electrice industriale; în acest caz, o asemenea linie poate fi realizată în mod artificial prin intercalarea în serie, la intervale spaţiale egale, de inductanţe şi capacităţi dimensionate corespunzător. Pentru o linie industrială cu $f = 50$ Hz, lungimea normală a unei linii sfert de undă este de 1500 km.

Dacă ecuaţiile (12.41) se face

$$X = \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\pi}{2},$$

se obţine***

$$\left.\begin{aligned} -\mathrm{j}\, \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \,\mathrm{sh}\, \alpha X + \underline{X}_c \underline{I}_2 \,\mathrm{ch}\, \alpha X, \\ -\mathrm{j}\, \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \mathrm{ch}\, \alpha X + \underline{I}_2 \,\mathrm{sh}\, \alpha X, \end{aligned}\right\} \qquad (12.68)$$

care reprezintă ecuaţiile de funcţionare ale unei linii sfert de undă.

* Vezi [139] pag. 47.

** Care produce creşterea rezistenţei electrice a conductoarelor. Vezi 14.1.2.3.

*** Deoarece

$$\mathrm{ch}\, \underline{\gamma} X = \mathrm{ch}\,(\alpha + \mathrm{j}\beta) X = \mathrm{ch}\, \alpha X \cos\beta X + \mathrm{j}\ \mathrm{sh}\, \alpha X \sin \beta X$$

şi

$$\mathrm{sh}\, \underline{\gamma} X = \mathrm{sh}\,(\alpha + \mathrm{j}\beta) X = \mathrm{sh}\, \alpha X \cos \beta X + \mathrm{j}\ \mathrm{ch}\alpha X \sin \beta X,$$

în cazul liniilor sfert de undă rezultă

$$\mathrm{ch}\, \underline{\gamma} X = \mathrm{j}\ \mathrm{sh}\, \alpha X,$$
$$\mathrm{sh}\, \underline{\gamma} X = \mathrm{j}\ \mathrm{ch}\, \alpha X.$$

Să examinăm cazul unei linii la care pierderile sînt neglijabile ($r = 0$, $g = 0$); în acest caz*

$$\alpha = 0\,;\ \operatorname{sh} \alpha X = 0,\ \operatorname{ch} \alpha X = 1\,;\ \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{l}{c}}\,\underline{|0}.$$

şi ecuaţiile (12.68) devin

$$\left.\begin{array}{l}\underline{U}_1 = \underline{Z}_c \underline{I}_2 \underline{\left| + \frac{\pi}{2} \right.}\,;\quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \underline{\left| + \frac{\pi}{2} \right.}\end{array}\right\} \tag{12.69}$$

Rezultă din aceste ecuaţii, că în cazul considerat, tensiunea la o extremitate este egală cu curentul la cealaltă extremitate, multiplicat cu impedanţa caracteristică a sistemului. Dacă tensiunea U_2 este menţinută constantă la receptor, curentul la sursă este de asemenea constant şi viceversa : dacă se menţine constantă tensiunea U_1 la sursă, atunci curentul la receptor este constant. În consecinţă, o linie funcţionînd în sfert de undă, cu pierderi neglijabile, transformă o transmisie de energie cu tensiune constantă într-una cu curent constant sau invers.

Pentru a putea efectua pe o asemenea linie o transmisie de energie, în care să se menţină la receptor o tensiune constantă U_2, este necesar ca la sursă să se menţină un curent constant. Acest lucru este însă imposibil de efectuat cu maşinile sincrone care se utilizează astăzi în mod curent în centralele electrice, ele neputînd fi cuplate în serie. Pentru realizarea unei asemenea transmisiuni trebuie prevăzute în centrală instalaţii speciale care să transforme în centrală tensiunea constantă în curent constant.

La mersul în gol ($I_2 = 0$) tensiunea la sursă este nulă ; ea creşte cu sarcina şi devine egală cu tensiunea la receptor, cînd pe linie se transmite puterea naturală a ei $\frac{U_2^2}{Z_c}$.

Într-adevăr, în acest caz

$$P_2 = \frac{U_2^2}{Z_c}\,;\quad I_2 = \frac{P_2}{U_2} = \frac{U_2}{Z_c}\,;\quad U_2 = Z_c I_2 = U_1.$$

Dacă puterea absorbită de receptor este mai mare decît puterea naturală a liniei, atunci tensiunea la sursă devine mai mare decît tensiunea la receptor.

Pentru a mări puterea transmisă este necesar a se micşora impedanţa caracteristică ceea ce se obţine prin mărirea capacităţii liniei ; aceasta are o serie de dezavantaje printre care micşorarea randamentului sursei din cauza creşterii intensităţii curentului care trebuie menţinut constant.

O linie sfert de undă nu prezintă deci nici un avantaj faţă de o linie obişnuită cu tensiune constantă ; în afară de aceasta, o asemenea linie nu poate fi utilizată la interconexiuni şi din ea nu se pot face derivaţii pentru eventualele distribuţii de energie electrică de-a lungul traseului său.

---

* Vezi 12.1.4.2. *a*).

12.1.6.9. **Transmisia prin linii jumătate de undă.** În cazul unei linii a cărei lungime este egală cu jumătate din lungimea undei de tensiune, respectiv de curent, care se propagă pe această linie, atunci

$$X = \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\beta},$$

rezultă

$$\beta X = \pi, \quad \cos\beta X = -1, \quad \sin\beta X = 0,$$

$$\mathrm{ch}\,\underline{\gamma} X = -\mathrm{ch}\,\alpha X, \qquad \mathrm{sh}\,\underline{\gamma} X = -\mathrm{sh}\,\alpha X$$

şi deci, ecuaţiile liniei devin :

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= -\underline{U}_2\,\mathrm{ch}\,\alpha X - \underline{Z}_c\underline{I}_2\,\mathrm{sh}\,\alpha X, \\ \underline{I}_1 &= -\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}\,\mathrm{sh}\,\alpha X - \underline{I}_2\,\mathrm{ch}\,\alpha X. \end{aligned}\right\} \tag{12.70}$$

În cazul unei linii cu pierderile neglijabile ($r = 0$, $g = 0$) rezultă $\alpha = 0$ şi ecuaţiile (12.70) devin

$$\underline{U}_1 = -\underline{U}_2 \text{ şi } \underline{I}_1 = -\underline{I}_2.$$

În acest caz, pentru orice sarcină a liniei atît tensiunile, cît şi curenţii sînt egali şi în opoziţie de fază, la cele două extremităţi ale liniei.

Dacă se menţine tensiunea constantă la receptor (şi în consecinţă şi la sursă), tensiunea la mijlocul liniei va fi nulă la mersul în gol. În acest punct, tensiunea va creşte cu sarcina şi va atinge o valoare egală cu tensiunea la receptor atunci, cînd puterea transmisă este egală cu puterea naturală a liniei ; la mijlocul liniei jumătate de undă, totul se petrece ca în originea liniei sfert de undă ; o linie jumătate de undă poate fi considerată ca formată din două linii sfert de undă legate în serie.

Trebuie observat, că punctul de tensiune nulă a liniei nu se află la mijlocul liniei decît la mersul în gol a acesteia ; pe măsură ce sarcina creşte, creşte tensiunea la mijlocul liniei şi deci punctul de tensiune nulă se deplasează către extremitatea sursă a liniei.

O linie jumătate de undă, deşi nu mai pune problemele puse de o linie sfert de undă, prezintă totuşi acelaşi mare dezavantaj de a nu putea fi folosită în sisteme în care urmează să se facă o distribuţie de energie electrică de-a lungul ei.

12.1.6.10. **Liniile electrice industriale obişnuite.** Lungimea obişnuită a unei linii lungi — între o sursă şi un receptor — depăşeşte arareori 600 km, adică 1/10 din lungimea de undă corespunzătoare frecvenţei de 50 Hz. Studiul funcţionării acestor linii se face cu ajutorul relaţiilor (12.42), care sînt acelea ale unui cuadripol, aşa după cum s-a arătat în paragrafele precedente*. După cum

* Vezi 12.1.6.1. — 12.1.6.6.

s-a arătat, pentru anumite lungimi maxime de linii se pot face anumite simplificări în calculul parametrilor cuadripolului, aproximaţia rămînînd suficientă şi mai mică de 1/100. Astfel:

— pentru o linie electrică de 50 Hz, cu o lungime de cel mult 650 km se poate lua

$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{2!}; \quad \frac{\underline{B}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{C}}{\underline{Y}} = 1 + \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{3!}; \tag{12.71}$$

— pentru o linie electrică de 50 Hz, cu o lungime de cel mult 135 km se pot lua

$$\underline{A} = 1; \quad \underline{B} = \underline{Z}; \quad \underline{C} = \underline{Y} \tag{12.72}$$

şi ecuaţiile (12.42) pot fi puse sub forma simplă

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z}\,\underline{I}_2, \qquad \underline{I}_1 = \underline{Y}\,\underline{U}_2 + \underline{I}_2, \tag{12.73}$$

care corespund schemelor echivalente din figura 12.18, aplicabilă una tensiunii (*a*) şi cealaltă curentului (*b*);

— pentru o linie electrică de 50 Hz, dar de lungime sub 100 km şi a cărei tensiune este de cel mult 100 kV, termenul $\underline{Y}\,\underline{U}_2$ poate fi neglijat faţă de curentul de încărcare $\underline{I}_2$; ecuaţiile (12.73) se reduc la acelea ale unui dipol de impedanţă $\underline{Z}$,

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z}\,\underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2$$

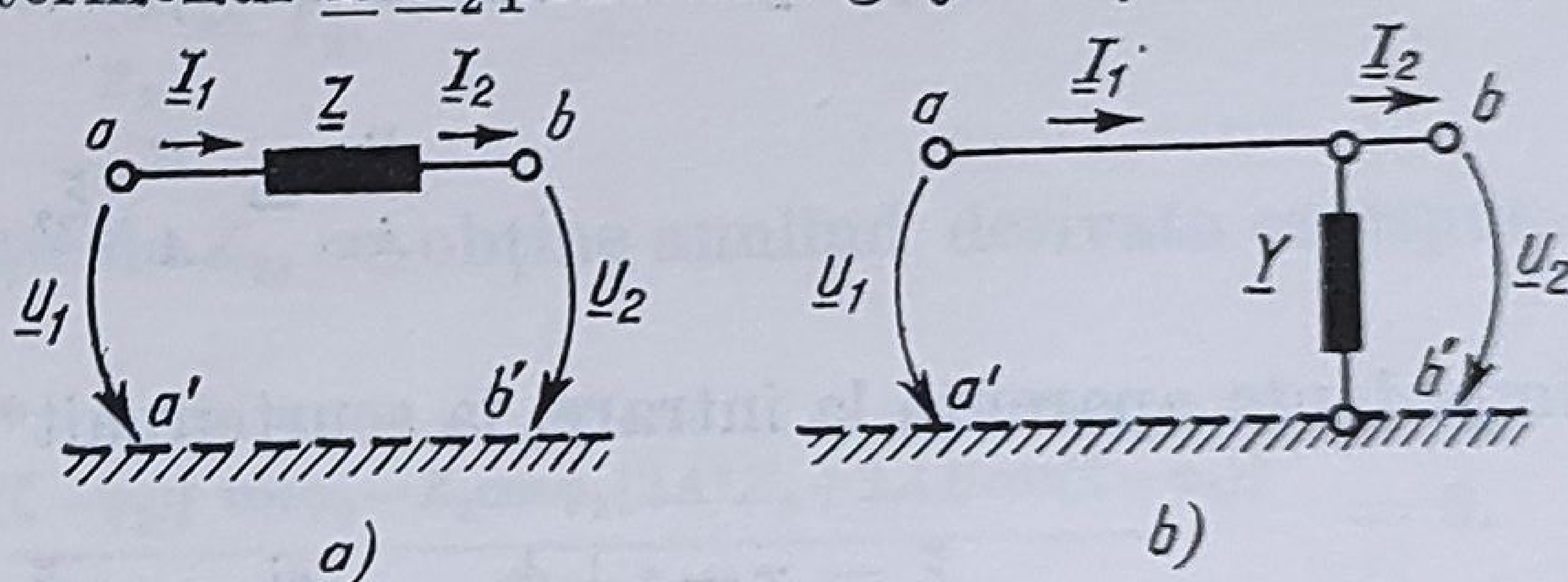


Fig. 12.18. Cuadripolul echivalent al unei linii electrice scurte

a cărui studiu se face aşa cum s-a arătat mai înainte*.

Trebuie observat că expresiile aproximative (12.51) şi (12.72) nu mai sînt parametrii unui cuadripol, ei nemaisatisfăcînd relaţia (6.104)

$$\underline{A}^2 - \underline{B}\,\underline{C} = 1.$$

Cuadripolul echivalent al liniei trebuie înlocuit prin doi cuadripoli — unul de tensiune şi unul de curent — legaţi în lanţ, obţinîndu-se astfel un cuadripol gama (Γ) sau gama întors (⅂). Rezultatele obţinute din studiul unei linii cu ajutorul acestor ecuaţii simplificate rămîn valabile în limita aproximaţiilor făcute.

12.1.6.11. Puterea maximă ce se poate transmite, în curent alternativ, printr-o linie electrică.** Considerînd ecuaţiile de funcţionare ale unei linii lungi (12.42) scrise sub forma

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}\,\underline{U}_2 + \underline{B}\,\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\,\underline{U}_2 + \underline{A}\,\underline{I}_2 \end{aligned}\right\} \tag{12.74}$$

---

* Vezi 6.4.5.

** Vezi [106] pag. 11.

parametrii respectivi fiind definiţi prin relaţiile (12.48), respectiv (12.49), între care se poate scrie

$$\underline{A}^2 - \underline{B}\,\underline{C} = 1.$$

Folosind argumentele indicate de BLONDEL

$$\underline{A} = A\,|\underline{\varepsilon}; \qquad \underline{B} = B\,|\underline{\eta + \psi}; \qquad \underline{C} = C\,|\underline{\eta - \psi};$$

raportul

$$\sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{B}{C}}\,|\underline{\psi}$$

reprezintă impedanţa caracteristică*

$$\underline{Z}_c = Z_c.$$

Raportul

$$\frac{\underline{C}}{\underline{A}} = \frac{C}{A}\,|\underline{\xi}$$

reprezintă admitanţa aparentă la intrare, la mers în gol iar raportul

$$\frac{\underline{B}}{\underline{A}} = \frac{B}{A}\,|\underline{\xi},$$

impedanţa aparentă la intrare, la scurtcircuit**, în care

$$\xi = \eta - \varepsilon + \psi \quad \text{şi} \quad \xi = \eta - \varepsilon - \psi.$$

Diagrama acestui cuadripol se construieşte obişnuit***, presupunînd curentul $\underline{I}_2$ defazat cu φ_2 în urma tensiunii (fig. 12.19).

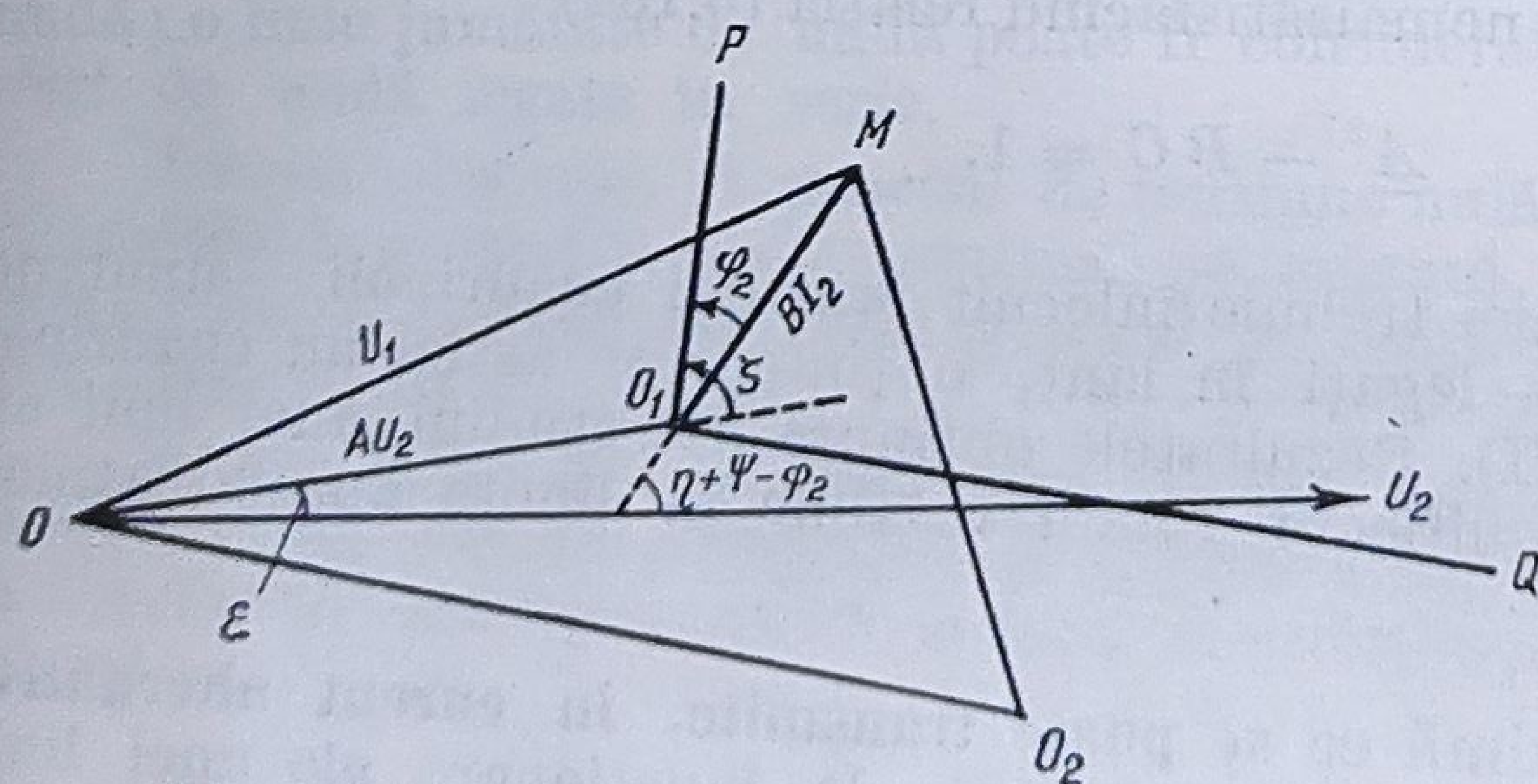


Fig. 12.19. Diagrama unei linii lungi.

Din triunghiul OO_1M rezultă

$$U_1^2 = (AU_2)^2 + (BI_2)^2 + 2ABU_2I_2 \cos(\zeta - \varphi_2). \tag{12.75}$$

* Vezi 6.4.4.8.
** Vezi 6.4.4.3.
*** Vezi 6.4.4.14.

Punînd $\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_2 = Z_2 \ \underline{|\varphi_2}$, impedanţa aparentă a circuitului receptor, expresia (12.75) se poate scrie

$$\left(\frac{U_1}{I_2}\right)^2 = (AZ_2)^2 + B^2 + 2ABZ_2 \cos(\zeta - \varphi_2)$$

şi puterea activă la sosire

$$P_2 = U_2 I_2 \cos\varphi_2 = Z_2 I_2^2 \cos\varphi_2 = \frac{U_2^2}{Z_2^2} Z_2 \cos\varphi_2$$

are ca expresie

$$P_2 = U_1^2 \frac{Z_2 \cos\varphi_2}{A^2 Z_2^2 + B^2 + 2ABZ_2 \cos(\zeta - \varphi_2)},$$

deoarece

$$\frac{U_2}{Z_2} = I_2.$$

Maximul acestei expresii, în funcţie de Z_2, se obţine anulînd derivata corespunzătoare. Se obţine

$$\frac{1}{U_1^2}\frac{dP_2}{dZ_2} = \frac{[A^2Z_2^2 + B^2 + 2ABZ_2 \cos(\zeta-\varphi_2)]\cos\varphi_2 - Z_2\cos\varphi_2[2A^2Z_2 + 2AB\cos(\zeta-\varphi_2)]}{[A^2Z_2^2 + B^2 + 2ABZ_2\cos(\zeta-\varphi_2)]^2} = 0.$$

Dezvoltînd se găseşte

$$A^2Z_2^2 \cos\varphi_2 + B^2\cos\varphi_2 + 2ABZ_2\cos(\zeta-\varphi_2)\cos\varphi_2 - 2A^2Z_2^2\cos\varphi_2 -$$

$$- 2ABZ_2\cos(\zeta-\varphi_2)\cos\varphi_2 = B^2\cos\varphi_2 - A^2Z_2^2\cos\varphi_2$$

şi rezultă

$$Z_2 = \frac{B}{A},$$

adică egală cu modulul impedanţei aparentă la intrare a sistemului la funcţionarea în scurtcircuit*, ζ fiind argumentul acestei impedanţe.

Puterea maximă corespunzătoare este deci

$$P_{2max} = U_1^2 \frac{\cos\varphi_2}{2AB[1 + \cos(\zeta - \varphi_2)]}.$$

---

* Din relaţiile (12.74) rezultă pentru $\underline{U}_2 = 0$

$$\frac{\underline{U}_{1sc}}{\underline{I}_{1sc}} = \underline{Z}_{1sc} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}}$$

Căutînd acum maximul acestei expresii în funcţie de φ_2, se găseşte

$$\frac{1}{U_1^2}\frac{dP_{2max}}{d\varphi_2} = \frac{-\sin\varphi_2 \cdot 2AB\,[1+\cos(\zeta-\varphi_2)] - \cos\varphi_2 \cdot 2AB\sin(\zeta-\varphi_2)}{(2AB)^2\,[1+\cos(\zeta-\varphi_2)]^2} = 0$$

sau

$$-2AB\,[1+\cos(\zeta-\varphi_2)]\sin\varphi_2 - 2\,AB\cos\varphi_2\sin(\zeta-\varphi_2) = 0,$$

de unde

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\sin(\zeta-\varphi_2)}{1+\cos(\zeta-\varphi_2)} = -\frac{2\sin\frac{\zeta-\varphi_2}{2}\cos\frac{\zeta-\varphi_2}{2}}{2\cos^2\frac{\zeta-\varphi_2}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{\zeta-\varphi_2}{2}$$

şi deci :

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_2-\zeta}{2} \qquad \text{sau} \qquad \varphi_2 = -\zeta;$$

în consecinţă, puterea maximum maximorum care poate fi transmisă prin linia considerată este

$$P_{2max\ max} = \frac{U_1^2}{4AB\cos\zeta}.$$

Scoţînd din relaţia (12.75) valoarea raportului $\frac{U_1}{U_2}$ în funcţie de Z_2 şi φ_2 se obţine

$$\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 = A^2 + \frac{B^2}{Z_2^2} + \frac{2AB}{Z_2}\cos(\zeta-\varphi_2),$$

sau punînd valorile care dau maximul maximorul puterii transmise, rezultă

$$\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 = A^2 + A^2 + 2A^2\cos 2\zeta = 2A^2\,[1+\cos 2\zeta] = 4\,A^2\cos^2\zeta$$

şi deci,

$$\frac{U_1}{U_2} = 2A\cos\zeta.$$

Privitor la puterea maximă ce se poate transmite printr-o linie electrică A. Blondel a enunţat următoarea teoremă :

În orice linie electrică de curent alternativ, avînd rezistenţă, impedanţă şi capacitate, puterea la sosire trece printr-un maxim pentru o anumită valoare Z_{2m} a impedanţei de utilizare ; modulul acestei impedanţe este egal cu modulul impedanţei aparente la mersul în scurtcircuit $\frac{B}{A}$, iar argumentul său este egal dar de semn contrar cu argumentul acestei impedanţe. Acest maxim este proporţional cu pătratul tensiunii la plecare.

Această teoremă nu are decît o valoare de calcul, puterea transportabilă maximă, fiind limitată de condiții de securitate și economice : condițiile de putere maximă conduc la pierderi inadmisibile în linie și sînt foarte îndepărtate de acelea care corespund unui randament optim.

12.1.6.12. Randamentul unei linii electrice de transmisie a energiei electrice în curent alternativ* . Pornind de la ecuațiile (12.74) ale cuadripolului care dau funcționarea unei linii, în funcție de elementele de la intrare sau de la ieșire**, se obține puterea aparentă corespunzătoare

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1\underline{I}_1^* = f_1(U_2, I_2); \qquad \underline{S}_2 = \underline{U}_2\underline{I}_2^* = f_2(U_1, I_1),$$

de unde se deduce

$$\begin{cases} P_1 = ACU_2^2 \cos\xi + ABI_2^2 \cos\zeta + P_2(A^2 + BC\cos 2\psi) + BCQ_2 \sin 2\psi \\ Q_1 = -ACU_2^2 \sin\xi + ABI_2^2 \sin\zeta + Q_2(A^2 - BC\cos 2\psi) + BCP_2 \sin 2\psi \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} P_2 = -ACU_1^2 \cos\xi - ABI_1^2 \cos\zeta + P_1(A^2 + BC\cos 2\psi) + BCQ_1 \sin 2\psi \\ Q_2 = ACU_1^2 \sin\xi - ABI_1^2 \sin\zeta + Q_1(A - BC\cos 2\psi) + BCP_1 \sin 2\psi. \end{cases}$$

Randamentul liniei se poate exprima prin relația

$$\eta = -\frac{AC}{P_1}U_1^2\cos\zeta - \frac{ABP_1}{U_1^2}\cos\zeta - \frac{ABQ_1^2}{U_1^2P_1}\cos\zeta + A^2 + BC\left(\cos 2\psi + \frac{Q_1}{P_1}\sin 2\psi\right).$$

Randamentul maxim maximorum este

$$\eta_{max\ max} = \frac{1}{A^2 + BC(\cos 2\psi - \sin 2\psi \operatorname{ctg}\varphi_2)}.$$

Acest randament nu are decît valoare de calcul, deoarece conduce la transmiteri de puteri cu mult prea mici, incompatibile cu cheltuielile făcute : nu poate ajuta la alegerea tensiunii de serviciu.

Alegerea modului de transmisie cel mai avantajos rezultă dintr-un studiu de optimizare judicios între randamentul, puterea transportată, tensiune și reglaj.

12.2. STUDIUL LINIILOR LUNGI ÎN REGIM TRANZITORIU

12.2.1. GENERALITĂȚI

Ecuațiile generale (12.9) care reprezintă funcționarea unei linii lungi, cu parametri uniform repartizați de-a lungul ei, rămîn valabile și în cazul funcționării acestora într-un regim nestaționar, în regim tranzitoriu.

* Vezi [106] pag. 19
** Vezi 6.4.4.16

Studiul regimului tranzitoriu de funcționare a liniilor lungi se poate face utilizînd metoda clasică a suprapunerii unui regim liber, peste regimul forțat de funcționare a sistemului, determinarea constantelor de integrare făcîndu-se prin fixarea condițiilor inițiale. Pentru găsirea regimului liber, se poate utiliza metoda mărimilor complexe* . Această metodă prezintă însă serioase dificultăți în cazul aplicării în practică la studiul complet a unui regim tranzitoriu.

Studiul complet al regimurilor tranzitorii a liniilor lungi se face foarte comod folosind transformata LAPLACE** ; această metodă va fi folosită în expunerea ce urmează.

Există și alte metode cu ajutorul cărora se poate rezolva regimul tranzitoriu al liniilor lungi, metode ce presupun anumite aproximații, în general compatibile cu rezultatele urmărite.

12.2.2. ECUAȚIILE LINIILOR ELECTRICE LUNGI ÎN REGIM TRANZITORIU

12.2.2.1. **Forma generală a ecuațiilor.** Ecuațiile (12.9), în care se pun în evidență cei doi parametri, x și t, se pot scrie

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = ri\,(x,\,t) + l\,\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i\,(x,t)}{\partial x} = gu\,(x,\,t) + c\,\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial t}$$

Aplicînd transformata LAPLACE acestor două ecuații se găsește :

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \varepsilon^{-st}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,dt = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \varepsilon^{-st}\,(u,x,t)\,dt = \frac{\partial\,\mathcal{L}u(x,t)}{\partial x} = (r+ls)\mathcal{L}i\,(x,t) - li(x,0)\,;\\ &\frac{\partial \mathcal{L}i(x,t)}{\partial x} = (g+cs)\,\mathcal{L}u\,(x,t) - cu\,(x,0). \end{aligned}\right\}\quad(12.76)$$

Derivînd una din ecuații în raport cu x și înlocuind-o în cealaltă ecuație, rezultă

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \mathcal{L}u(x,t)}{\partial x^2} = (r+ls)\,(g+cs)\,\mathcal{L}u\,(x,\,t) - (r+ls)\,cu\,(x,\,0)\,;\\ &\frac{\partial^2 \mathcal{L}i(x,t)}{\partial x^2} = (r+ls)\,(g+cs)\,\mathcal{L}i\,(x,\,t) - (g+cs)\,li\,(x,\,0). \end{aligned}\right\}\quad(12.77)$$

Relațiile (12.77) reprezintă transformata LAPLACE a ecuației telegrafiștilor.

12.2.2.2. **Soluțiile generale ale ecuațiilor liniilor lungi în transformata LAPLACE ***.** Punînd

$$\gamma^2 = (r+ls)\;(g+cs), \tag{12.78}$$

* Vezi par. 7.4. și [73] pag. 254
** Vezi par. 10.4.
*** Pentru ușurarea scrisului, în tot ce urmează se va scrie $u(x,t)=u$, $u(x,0)=u_0$ etc.

care se numeşte *constantă de propagare operaţională*, prima ecuaţie din (12.77) se poate scrie

$$\frac{d^2 \mathfrak{L}u}{dx^2} = \gamma^2 \, \mathfrak{L}u - (r + ls)\, cu_0. \tag{12.79}$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$\mathfrak{L}u = M \varepsilon^{\gamma x} + N \varepsilon^{-\gamma x}$$

sau

$$\mathfrak{L}u = A \operatorname{ch}\gamma x + B \operatorname{sh}\gamma x,$$

în care s-a notat

$$A = M + N \qquad \text{şi} \qquad B = M - N.$$

Fie $(\mathfrak{L}u)_0$ o soluţie particulară a ecuaţiei (12.79); rezultă imediat din (12.79)

$$0 = \gamma^2 (\mathfrak{L}u)_0 - (r + ls)\, cu_0$$

şi deci,

$$(\mathfrak{L}u)_0 = \frac{r + ls}{\gamma^2} cu_0 = \frac{c}{g + cs} u_0,$$

astfel, că soluţia ecuaţiei (12.79) este

$$\mathfrak{L}u = A \operatorname{ch}\gamma x + B \operatorname{sh}\gamma x + \frac{c}{g + cs} u_0. \tag{12.80}$$

Derivînd ecuaţia (12.80) în raport cu x şi introducînd această expresie în prima ecuaţie (12.76) se obţine

$$\mathfrak{L}i = -\frac{\gamma}{r + ls} (A \operatorname{sh}\gamma x + B \operatorname{ch}\gamma x) + \frac{1}{r + ls} i_0. \tag{12.81}$$

Ţinînd seama de relaţia (12.78), se poate scrie

$$\frac{r + ls}{\gamma} = \sqrt{\frac{r + ls}{g + cs}} = Z_c, \tag{12.82}$$

care se numeşte *impedanţa caracteristică operaţională* a liniei. Cu aceasta, ecuaţia (12.81) devine

$$\mathfrak{L}i = -\frac{1}{Z_c} (A \operatorname{sh}\gamma x + B \operatorname{ch}\gamma x) + \frac{1}{r + ls} i_0. \tag{12.83}$$

Expresiile (12.80) şi (12.83) constituie soluţiile operaţionale ale problemei, care dau imaginea tensiunii şi curentului într-un punct al liniei situat la distanţa x de extremitatea receptoare a liniei.

Pentru ca soluţiile să fie unice, este necesar ca Z_c şi γ să nu aibă decît cîte o singură valoare ; în acest scop se ia numai valoarea pentru care

$$\mathcal{R}e\,(\gamma) > 0 \qquad \text{şi} \qquad \arg\gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

În aceste condiţii, relaţia (12.82) determină o singură valoare pentru Z_c.

Pentru determinarea constantelor de integrare, A şi B, se presupune că tensiunea liniei la *sursă* (la intrare) este u_1, iar la ieşire, linia are conectat un receptor a cărui impedanţă operaţională este $Z(s)$. În aceste condiţii rezultă

$$\text{la } x = X \qquad (\mathcal{L}u)_{x=X} = \mathcal{L}u_1$$

şi

$$\text{la } x = 0 \qquad (\mathcal{L}u)_{x=0} = Z(s)\mathcal{L}i_2 = \mathcal{L}u_2,$$

unde $\mathcal{L}i_2$ este imaginea curentului absorbit de impedanţa $Z(s)$ iar $\mathcal{L}u_2$ este imaginea tensiunii la bornele acestei impedanţe.

Introducînd aceste valori, pe rînd în ecuaţia (12.80) şi (12.83) se obţine

$$\mathcal{L}u_1 = A\,\mathrm{ch}\gamma X + B\,\mathrm{sh}\gamma X + \frac{c}{g+cs}u_0$$

$$Z(s)\,\mathcal{L}i_2 = \frac{Z(s)}{Z_c}B + Z(s)\frac{1}{R+ls}i_0 = A + \frac{c}{g+cs}u_0 = \mathcal{L}u_2,$$

de unde se deduce

$$A = \frac{\dfrac{Z(s)}{Z_c}\mathcal{L}u_1 - \dfrac{c}{g+cs}u_0\left[\dfrac{Z(s)}{Z_c} + \mathrm{sh}\,\gamma\,X\right] + Z(s)\dfrac{1}{r+ls}i_0\,\mathrm{sh}\,\gamma\,X}{\mathrm{sh}\,\gamma\,X + \dfrac{Z\,(s)}{Z_c}\mathrm{ch}\,\gamma\,X}$$

şi

$$B = \frac{\mathcal{L}u_1 - \dfrac{c}{g+cs}u_0\left[1 - \mathrm{ch}\gamma X\right] - Z(s)\dfrac{1}{r+ls}i_0\,\mathrm{ch}\,\gamma\,X}{\mathrm{sh}\,\gamma\,X + \dfrac{Z(s)}{Z_c}\mathrm{ch}\,\gamma\,X}.$$

În cazul particular cînd condiţiile iniţiale sînt nule, $u_0 = 0$ şi $i_0 = 0$, atunci valorile parametrilor respectivi devin

$$A = \frac{\dfrac{Z(s)}{Z_c}\mathcal{L}u_1}{\mathrm{sh}\gamma X + \dfrac{Z(s)}{Z_c}\mathrm{ch}\gamma X} \qquad \text{şi} \qquad B = \frac{\mathcal{L}u_1}{\mathrm{sh}\gamma X + \dfrac{Z(s)}{Z_c}\mathrm{ch}\gamma X}.$$

Cu aceste valori — deci în cazul condițiilor inițiale nule — imaginile tensiunii și curentului într-un punct oarecare al liniei sînt date de relațiile

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}u &= \frac{\operatorname{sh}\gamma x + \dfrac{Z(s)}{Z_c}\operatorname{ch}\gamma x}{\operatorname{sh}\gamma X + \dfrac{Z(s)}{Z_c}\operatorname{ch}\gamma X}\,\mathfrak{L}u_1 \\ \text{și} \qquad & \\ \mathfrak{L}i &= \frac{\dfrac{Z(s)}{Z_c}\operatorname{sh}\gamma x + \operatorname{ch}\gamma x}{\operatorname{sh}\gamma X + \dfrac{Z(s)}{Z_c}\operatorname{ch}\gamma X}\cdot\frac{\mathfrak{L}u_1}{Z_c}. \end{aligned}\right\} \tag{12.84}$$

Expresiile (12.84) rezolvă orice problemă de regim tranzitoriu pe o linie electrică de transmitere a energiei electrice, oricare ar fi forma tensiunii aplicate liniei la sursă, condițiile inițiale fiind nule.

Ca exemplu de aplicație se va examina cazul simplu a două tipuri de linii și anume, linii fără pierderi ($r = 0$ și $g = 0$) și linii îndeplinind condiția lui HEAVISIDE $\left(\frac{r}{g} = \frac{l}{c}\right)$.

12.2.2.3. Linie electrică, fără pierderi, deschisă la o extremitate, căreia i se aplică la cealaltă extremitate o tensiune de formă treaptă. Este evident că, pentru o astfel de linie, condițiile inițiale sînt nule. Să presupunem deci, că linia este deschisă la extremitatea receptor adică $Z(s) = \infty$ și că la extremitatea sursă se aplică brusc tensiunea constantă E ($u_1 = E$), corespunzătoare, de exemplu, căderii unui trăznet. În aceste condiții, ecuațiile de funcționare ale liniei (12.84) devin

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}u &= \frac{\operatorname{ch}\gamma x}{\operatorname{ch}\gamma X}\cdot\frac{E}{s} \\ \mathfrak{L}i &= \frac{\operatorname{sh}\gamma x}{s\operatorname{ch}\gamma X}\cdot\frac{E}{Z_c}. \end{aligned}\right\} \tag{12.85}$$

În acest caz, din relațiile (12.78) și (12.82) rezultă

$$\gamma = s\sqrt{lc} \qquad \text{și} \qquad Z_c = \sqrt{\frac{l}{c}}.$$

Fie să determinăm originalul tensiunii u; prima relație (12.85) arată că imaginea acestei tensiuni este de forma $\frac{V(s)}{sW(s)}$ și găsirea originalului respectiv se face aplicînd teorema dezvoltării lui HEAVISIDE*

$$u = \frac{V(0)}{W(0)} + \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{V(s_i)}{s_i W'(s_i)}\,\varepsilon^{s_i t}$$

* Vezi 10. 2. 1. 3.

Pentru problema care se studiază

$$V(s) = E \operatorname{ch} \gamma x = E \operatorname{ch} s \sqrt{lc}\, x = E \operatorname{ch} s \frac{x}{\tau},$$

$$W(s) = \operatorname{ch} \gamma X = \operatorname{ch} s \sqrt{lc}\, X = \operatorname{ch} s \tau,$$

$$W'(s) = X \operatorname{sh} \gamma X \frac{\partial \gamma}{\partial s} = X \sqrt{lc} \operatorname{sh} s \sqrt{lc}\, X = \tau \operatorname{sh} s \tau,$$

în care s-a notat

$$X \sqrt{lc} = \tau.$$

Rezultă imediat

$$V(0) = E \quad \text{şi} \quad W(0) = 1.$$

Rădăcinile numitorului expresiilor din relaţiile (12.85) sînt date de ecuaţia

$$\operatorname{ch} \gamma X = 0$$

care este satisfăcută pentru

$$X = j\,(2n + 1) \frac{\pi}{2},$$

şi rezultă

$$s_n = j \frac{2n+1}{\tau} \cdot \frac{\pi}{2}, \qquad n \in (-\infty, +\infty).$$

Vom avea deci

$$V(s_n) = E \operatorname{ch} j \frac{2n+1}{X\sqrt{lc}} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{lc}\, x = E \cos\left[(2n+1) \cdot \frac{x}{X} \frac{\pi}{2}\right],$$

$$W'(s_n) = X \sqrt{lc} \operatorname{sh} j \frac{2n+1}{X\sqrt{lc}} \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{lc}\, X = jX\sqrt{lc} \sin(2n+1) \frac{\pi}{2} = j(-1)^n \cdot \tau$$

şi

$$e^{s_n t} = \exp j\,(2n+1) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{\tau} = \cos \alpha_n + j \sin \alpha_n$$

unde

$$\alpha_n = (2n+1) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{\tau}.$$

Ţinînd seama că

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \underline{N} = \sum_{0}^{\infty} (\underline{N} + \underline{N}^*) = 2 \Sigma \,\mathcal{Re}\, \underline{N},$$

rezultă că originalul căutat al tensiunii u într-un punct oarecare situat la distanţa x de extremitatea receptoare a liniei este dat de relaţia

$$\left.\begin{aligned} u &= E\left[1 + 2\sum_0^\infty \mathcal{R}e \frac{\cos\,(2n+1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{x}{X}}{\mathrm{j}\,\frac{2n+1}{\pi}\,\frac{\pi}{2}\,\mathrm{j}(-1)^n\,\tau} \exp \mathrm{j}\,(2n+1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{t}{\tau}\right] = \\ &= E\left[1 - \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\left[(2n+1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{x}{X}\right] \cos\left[(2n+1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{t}{\tau}\right]\right]. \\ &\text{În acelaşi mod se găseşte} \\ i &= \frac{E}{Z_c}\,\frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \sin\left[(2n+1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{x}{X}\right] \sin\left[(2n+1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{t}{\tau}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (12.86)$$

Din relaţiile (12.86) se vede, că atît curentul cît şi tensiunea sînt formate din unde nesinusoidale, atît în timp, cît şi în spaţiu. Undele respective pot fi interpretate ca fiind constituite din armonici impare de timp avînd amplitudinea variabilă în spaţiu, aceste amplitudini avînd acelaşi rang ca şi rangul armonicii de timp corespunzătoare. Frecvenţa diverselor armonici de timp este

$$f_n = \frac{2n+1}{4X\sqrt{lc}}, \qquad n \in [0, \infty),$$

iar pentru armonicile spaţiale, frecvenţa corespunzătoare este

$$F_n = \frac{2n+1}{4X}, \qquad n \in [0, \infty).$$

Este uşor de văzut, că toate armonicile de curent sînt în cuadratură faţă de armonicile corespunzătoare de tensiune şi în urma acestora; situaţia este analoagă şi pentru amplitudinea fiecărei armonici de curent faţă de amplitudinea de tensiune, primele fiind în cuadratură spaţială faţă de cele de tensiune şi în urma acestora.

Transformînd produsele de cosinus şi de sinus în sume, relaţiile (12.86) pot fi scrise

$$\left.\begin{aligned} u &= E\left\{1 - \frac{2}{\pi}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}\left[\cos\,(2n+1)\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{X} - \frac{t}{\tau}\right) + \cos\,(2n+1)\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{X} + \frac{t}{\tau}\right)\right]\right\} \\ &\text{şi} \\ i &= \frac{E}{Z_c}\cdot\frac{2}{\pi}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}\left[\cos\,(2n+1)\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{X} - \frac{t}{\tau}\right) - \cos\,(2n+1)\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{X} + \frac{t}{\tau}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (12.97)$$

Rezultă dar, că fiecare armonică este formată din cîte două unde călătoare — una directă și una reflectată —, *toate* armonicile avînd *aceeași viteză de propagare* și anume,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_d = -\frac{X}{\tau} = -\frac{1}{\sqrt{lc}} \text{ și } \left(\frac{dx}{dt}\right)_r = \frac{X}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{lc}},$$

adică foarte apropiate de viteza luminii. În consecință, *viteza de grup* * a undelor

---

* Propagarea energiei electromagnetice de-a lungul unei linii electrice cu constante repartizate nu se mai face de data aceasta printr-o singură undă, ci printr-un grup de unde, care au frecvențe diferite și care în general au și amplitudinea variabilă. Este deci un sistem de unde — de curenți și de tensiune — nesinusoidale atît în timp, cît și în spațiu. Dacă linia este fără distorsiuni, undele corespunzătoare tuturor componentelor se deplasează cu aceeași viteză de-a lungul liniei și se poate spune că oscilația rezultantă (unda nesinusoidală) se deplasează și ea cu aceeași viteză, care este viteza de fază; în orice punct al liniei, oscilația rezultantă va avea aceeași formă ca și oscilația aplicată la intrare.

Dacă viteza de fază a fiecărei unde variază cu frecvența, diversele armonici care compun unda nesinusoidală se deplasează cu viteze diferite și în orice punct al liniei oscilația rezultantă va avea altă formă decît oscilația aplicată la intrare; în acest caz, nu se mai poate aplica noțiunea de viteză de fază pentru oscilația rezultantă.

Pentru propagarea acestor unde nesinusoidale — corespunzînd oscilațiilor rezultante se definește *viteza de grup*, după cum urmează: să considerăm — pentru simplificare — un grup format din două unde sinusoidale, avînd frecvențele ω_1 și ω_2 foarte apropiate și aceeași amplitudine (se neglijează amortizarea), care se propagă pe o linie electrică lungă. Vom avea deci

$$y = A\,[\cos(\omega_1 t - \beta_1 x) + \cos(\omega_2 t - \beta_2 x)] = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t - \frac{\beta_1-\beta_2}{2}x\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{\beta_1+\beta_2}{2}x\right),$$

una rezultantă, fiind astfel o undă de frecvență $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ modulată prin frecvența $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ (vezi 9.2.2.5). În ipoteza făcută, se poate lua

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \cong \omega \text{ și } \frac{\beta_1+\beta_2}{2} \cong \beta$$

și expresia de mai sus se poate scrie

$$y = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t - \frac{\beta_1-\beta_2}{2}x\right)\cos(\omega t - \beta x),$$

care reprezintă o undă de frecvență ω care se propagă pe linie cu viteza de fază ω/β; amplitudinea oscilației variază și ea cu timpul și cu distanța, avînd o variație periodică de frecvență egală cu diferența dintre cele două frecvențe. Ea se propagă cu viteza

$$v_1 = \frac{\omega_1-\omega_2}{\beta_1-\beta_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta},$$

care este însăși viteza de propagare a undei modulate. Limita acestei viteze cînd $\Delta\omega$ tinde către zero se numește viteza de grup și este definită de relația

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}.$$

Viteza de grup coincide cu viteza de fază atunci cînd β este proporțional cu frecvența, adică în cazul unei linii fără distorsiuni.

La aceleași concluzii se poate ajunge și atunci cînd se presupune că pe linie se transmite un grup

de tensiune şi curent este aceeaşi cu *viteza de fază* a fiecărei armonici. Se mai observă, de asemenea, că, pe cînd undele *reflectate* ale diverselor armonici de tensiune şi curent sînt *în fază*, undele *directe* ale diverselor armonici de tensiune şi curent sînt *în opoziţie*.

În ipoteza făcută ($r = 0$ şi $g = 0$) undele de tensiune şi curent, definite de relaţiile (12.86) şi (12.87), vor oscila necontenit.

12.2.2.4. Linie electrică deschisă la o extremitate, îndeplinind condiţia lui HEAVISIDE, căreia i se aplică la cealaltă extremitate o tensiune de formă treaptă. Ca un al doilea exemplu de calcul se va examina cazul unei linii îndeplinind condiţia lui HEAVISIDE (12.26), deschisă la extremitatea receptor adică $Z(s) = \infty$ şi căreia i se aplică la extremitatea sursă o tensiune de formă treaptă ($U_1 = E$).

În cazul unei linii electrice industriale de foarte mare tensiune, conductanţa g variază între limite foarte mari, în funcţie de condiţiile atmosferice; într-adevăr acestea influenţează în acelaşi timp producerea fenomenului corona în jurul conductoarelor precum şi pierderile prin conductibilitate superficială a izolatorilor. În consecinţă, în prima aproximaţie şi pentru un studiu calitativ, se poate presupune că parametrii lineici ai liniei îndeplinesc condiţia lui HEAVISIDE.

Pentru a concretiza cele afirmate mai înainte, fie o linie trifazată de 225 kV pentru care parametrii lineici corespunzători * sînt:

$$r = 0{,}11\ \Omega/\text{km la } 20°\text{C şi } 50\ \text{Hz};\quad l = 2{,}05\cdot 10^{-3}\ \text{H/km};\quad c = 8{,}45\cdot 10^{-9}\ \text{F/km}.$$

La tensiunea nominală de 225 kV între faze, pierderile minime, pe timp uscat, datorite fenomenului corona şi izolatoarelor sînt de cel puţin 250 W/km de linie trifazată **; în condiţii atmosferice foarte defavorabile aceste pierderi pot fi de 100 de ori mai mari. Ţinînd seama că aceste pierderi sînt date de relaţia

$$p_c = 3g\,U^2,$$

conductanţa lineică poate fi cuprinsă între $5\cdot 10^{-9}$ şi $5\cdot 10^{-7}$ siemens/km.

Din condiţia lui HEAVISIDE, aplicată valorilor indicate mai sus, rezultă

$$g = \frac{rc}{l} = \frac{0{,}11\cdot 8{,}45\cdot 10^{-9}}{2{,}05\cdot 10^{-3}} = 4{,}5\cdot 10^{-7}\ \text{S/km},$$

valoare foarte apropiată de limita superioară, calculată mai sus.

---

de oscilaţii de aceeaşi amplitudine, de frecvenţe apropiate, care diferă între ele cu aceeaşi mărime $\Delta\omega$.

Viteza de grup reprezintă şi viteza de propagare a energiei electrice, aceasta fiind cuprinsă între două noduri a undei modulatoare.

Timpul de propagare a grupului de unde este

$$t = \frac{l}{v_g} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\omega}{v}\right)}{\mathrm{d}\omega},$$

fiind astfel variabil cu frecvenţa.

Vezi şi [77] pag. 291, [87] pag. 106, [297] pag. 3.

* Vezi 12.1.2.

** Vezi [73] pag. 271.

39 – c. 229

În practică, dacă tensiunea tranzitorie depășește tensiunea nominală, ceea ce se întîmplă întotdeauna la punerea bruscă sub tensiune a unei linii, tensiunea putînd ajunge în acest caz aproape de dublul tensiunii nominale, pierderile cresc mai repede decît pătratul tensiunii, chiar pe timp uscat, putînd ajunge la valori de cîteva ori mai mari decît maximele indicate și, în consecință, conductanța lineică este mult mai mare decît cea calculată. Acest fenomen este mult mai accentuat dacă se studiază regimul tranzitoriu produs de o supratensiune de origine atmosferică * a cărei amplitudine este de mai multe ori mai mare decît tensiunea nominală a liniei. Pe de altă parte, rezistența lineică a liniei este ea însăși mai mare decît cea calculată la frecvența normală de 50 Hz, aceasta din cauza efectului pelicular din conductor **; în afară de aceasta, ea depinde de frecvență. În consecință, ținînd seama că regimul tranzitoriu este format dintr-o infinitate de unde mobile cu frecvențe crescînde ***, rezistența crește cu rangul undei mobile. Astfel, rezistența lineică r și conductanța lineică g nu mai pot fi considerate, constante, ele depinzînd de însăși forma regimului tranzitoriu. În special, rezistența r este o funcție de timp, deci de variabila s. În aceste condiții, în locul parametrilor lineici constanți se utilizează parametrii tranzitorii corespunzători ****.

Pentru studierea problemei propuse, se vor utiliza aceleași ecuații (12.85); punînd

$$\frac{r}{l} = \frac{g}{c} = \delta,$$

din relațiile (12.78) și (12.82) rezultă :

$$\gamma = \sqrt{(r + \mathrm{s}l)(g + \mathrm{s}c)} = (\mathrm{s} + \delta)\sqrt{lc}\,; \quad Z_c = \sqrt{\frac{r + \mathrm{s}l}{g + \mathrm{s}c}} = \sqrt{\frac{l}{c}}\,.$$

Pentru a găsi originalul tensiunii de linie, se aplică teorema dezvoltării a lui HEAVISIDE pentru care, în acest caz

$$\mathrm{V}(\mathrm{s}) = E\,\mathrm{ch}\,\gamma x = E\,\mathrm{ch}\,(\mathrm{s} + \delta)\sqrt{lc}\,x = E\,\mathrm{ch}\,(\mathrm{s} + \delta)\frac{x}{X}\,\tau,$$

$$\mathrm{W}(\mathrm{s}) = \mathrm{ch}\,\gamma x = \mathrm{ch}\,(\mathrm{s} + \delta)\,\tau,$$

$$\mathrm{W}'(\mathrm{s}) = X\,\mathrm{sh}\,\gamma x\frac{\partial\gamma}{\partial \mathrm{s}} = \tau\,\mathrm{sh}\,(\mathrm{s} + \delta)\,\tau,$$

în care s-a notat

$$X\sqrt{lc} = \tau.$$

Rezultă

$$\mathrm{V}(0) = E\,\mathrm{ch}\,\delta\,\frac{x}{X}\,\tau\,; \quad \mathrm{W}(0) = \mathrm{ch}\,\delta\,\tau.$$

---

* Vezi [73] pag. 291
** Vezi 14.1.2.3.
*** Vezi relația (12.87)
**** Vezi [242]

Rădăcinile numitorului expresiilor (12.85) sînt date în acest caz de ecuația

$$\operatorname{ch}(s+\delta)\tau = 0,$$

care este satisfăcută pentru

$$(s_n+\delta)\tau = j(2n+1)\frac{\pi}{2} \quad [n \in (-\infty, +\infty)]$$

și rezultă

$$s_n = j\frac{2n+1}{\tau}\frac{\pi}{2} - \delta.$$

Cu aceasta, se obține

$$W'(s_n) = \tau \operatorname{sh}\left[j\frac{2n+1}{\tau}\cdot\frac{\pi}{2} - \delta + \delta\right]t = \tau \operatorname{sh} j(2n+1)\frac{\pi}{2} =$$

$$= j(-1)^n\tau. \quad [n \in (-\infty, +\infty)].$$

Ținînd seama că

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \underline{N} = \sum_{0}^{\infty} (\underline{N} + \underline{N}^*) = 2\sum_{0}^{\infty} \mathfrak{R}\, \underline{N},$$

rezultă

$$V(s_n) = E \operatorname{ch}(s+\delta)\tau\frac{x}{X} = E\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{X}$$

și

$$\varepsilon^{s_n t} = \exp\left(j\frac{2n+1}{\tau}\frac{\pi}{2} - \delta\right)t = \exp j(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{t}{4}\cdot \exp(-\delta t) =$$

$$= \varepsilon^{-\delta t}\left[\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau} + j(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau}\right].$$

În consecință

$$u = E\left[\frac{\operatorname{ch}\delta\tau\frac{x}{X}}{\operatorname{ch}\delta\tau} + 2\sum_{0}^{\infty}\mathfrak{R}\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{X}}{\left[j\frac{2n+1}{\tau}\frac{\pi}{2} - \delta\right]j(-1)^n\tau}\varepsilon^{-\delta t}\varepsilon^{j(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau}}\right] =$$

$$= E\left[\frac{\operatorname{ch}\delta\tau\frac{x}{X}}{\operatorname{ch}\delta\tau} - \frac{4}{\pi}\varepsilon^{-\delta t}\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{X}\,\mathfrak{R}\frac{\exp j(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau}}{(2n+1)+j\frac{2}{\pi}\delta\tau}\right].$$

Punind

$$(2n+1)+j\frac{2}{\pi}\delta\tau = T_n\,\varepsilon^{j\varphi_n} = T_n(\cos\varphi_n + j\sin\varphi_n),$$

se obține

$$\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{\delta\tau}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$$

și

$$T_n = \sqrt{(2n+1)^2 + \left(\frac{2}{\pi}\delta\tau\right)^2}$$

și deci,

$$\Re\frac{\exp j(2n+1)\frac{2}{\pi}\frac{t}{\tau}}{(2n+1)+j\frac{2}{\pi}\delta\tau} = \frac{\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau} - \varphi_n\right]}{\sqrt{(2n+1)^2 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\delta^2\tau^2}}$$

astfel, că originalul căutat al tensiunii este

$$u = E\left[\frac{\operatorname{ch}\delta\tau\frac{x}{X}}{\operatorname{ch}\delta\tau} - \frac{4}{\pi}\varepsilon^{-\delta t}\sum_0^\infty(-1)^n\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{X}\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau} - \varphi_n\right]}{\sqrt{(2n+1)^2 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\delta^2\tau^2}}\right].$$

Expresia curentului se determină în același mod. În acest caz, W(s) și W'(s) sînt aceleași ca și pentru tensiune, dar

$$V(s) = \frac{E}{Z_c}\operatorname{sh}\gamma x = \frac{E}{Z_c}\operatorname{sh}(s+\delta)\tau\frac{x}{X}$$

și deci,

$$V(s_n) = \frac{E}{Z_c}\operatorname{sh}\left[j\frac{2n+1}{\tau}\frac{\pi}{2} - \delta + \delta\right]\tau\frac{x}{X} = j\frac{E}{Z_c}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{X}$$

și

$$V(0) = \frac{E}{Z_c}\operatorname{sh}\delta\tau\frac{x}{X}.$$

Calculînd se găsește

$$i = \frac{E}{Z_c}\left[\frac{\operatorname{sh}\delta\tau\frac{x}{X}}{\operatorname{ch}\delta\tau} + \frac{4}{\pi}\varepsilon^{-\delta t}\sum_0^\infty(-1)^n\frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{X}\right]\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau} - \varphi_n\right]}{\sqrt{(2n+1)^2 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\delta^2\tau^2}}\right]$$

(12.89)

Este ușor de văzut, că dacă $r = 0$ și $g = 0$ (cazul liniei fără pierderi) rezultă $\delta = 0$ și $\varphi_n = 0$; se găsesc astfel relațiile (12.85).

Din relațiile (12.88) și (12.89) rezultă că și în cazul cînd linia satisface condițiile lui HEAVISIDE, atît unda de tensiune, cît și unda de curent sînt nesinusoidale, atît în timp cît și în spațiu; fiecare armonică este însă defazată cu argumentul φ_n, care depinde de ordinul armonicii. Undele respective pot fi interpretate ca fiind constituite din armonici impare de timp avînd amplitudinea variabilă în spațiu, rangul lor fiind același cu al armonicilor de timp corespunzătoare. Diversele armonici de timp au și în acest caz frecvența

$$f_n = \frac{2n+1}{4X\sqrt{lc}}, \quad n \in [0, \infty),$$

iar cele spațiale

$$F_n = \frac{2n+1}{4X}, \quad n \in [0, \infty).$$

Toate aceste armonici se amortizează cu același factor de amortizare.

În afară de aceasta, și în acest caz, toate armonicile de curent sînt în cuadratură față de armonicile de tensiune și anume în urma acestora, ele avînd însă același defazaj φ_n; aceeași situație se găsește și la amplitudinile corespunzătoare ale diverselor armonici, primele fiind în cuadratură spațială față de cele de tensiune și în urma acestora.

Transformînd produsele funcțiilor trigonometrice în sume, relațiile (12.88) și (12.89) se pot descrie

$$u = E\left[\frac{\operatorname{ch}\delta\tau\,\dfrac{x}{X}}{\operatorname{ch}\delta\tau} - \right.$$

$$\left. -\frac{2}{\pi}\varepsilon^{-\delta t}\sum_0^\infty(-1)^n\frac{\cos\left[(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{x}{X}-\dfrac{t}{\tau}\right)+\varphi_n\right]+\cos\left[(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{x}{X}+\dfrac{t}{\tau}\right)-\varphi_n\right]}{\sqrt{(2n+1)^2+\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^2\delta^2\tau^2}}\right]$$

și

$$i = \frac{E}{Z_c}\left[\frac{\operatorname{sh}\delta\tau\,\dfrac{x}{X}}{\operatorname{ch}\delta\tau} + \right.$$

$$\left. +\frac{2}{\pi}\varepsilon^{-\delta t}\sum_0^\infty(-1)^n\frac{\cos\left[(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{x}{X}-\dfrac{t}{\tau}\right)+\varphi_n\right]-\cos\left[(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{x}{X}+\dfrac{t}{\tau}\right)-\varphi_n\right]}{\sqrt{(2n+1)^2+\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^2\delta^2\tau^2}}\right]$$

În consecință, și în cazul liniilor îndeplinind condiția lui HEAVISIDE, fiecare armonică este formată din cîte două unde călătoare — una directă și una reflectată — *toate* armonicile avînd aceeași *viteză de propagare* și anume

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_d = -\frac{X}{\tau} = -\frac{1}{\sqrt{lc}} \text{ și } \left(\frac{dx}{dt}\right)_r = \frac{X}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{lc}},$$

deci, foarte apropiate de viteza luminii ; și în acest caz, viteza de grup este aceeași cu viteza de fază, atît pentru unda de tensiune cît și pentru cea de curent. Toate armonicile se amortizează în timp cu același factor de amortizare δ. Se observă de asemenea că undele *reflectate* ale diverselor armonici de curent sînt *respectiv în fază* și defazate *înainte* cu argumentul φ_n față de originea de timp, undele *directe* sînt *respectiv în opoziție* și defazate în *urmă* cu același argument φ_n față de originea de timp.

Este ușor de văzut că dacă $r = 0$ și $g = 0$, rezultă $\delta = 0$ și $\varphi_n = 0$ și se regăsesc relațiile (12.87) corespunzătoare liniei fără pierderi.

Capitolul XIII
LANŢURI DE CUADRIPOLI

13.1. LANŢURI DE CUADRIPOLI FUNCŢIONÎND ÎN REGIM PERMANENT CUASISTAŢIONAR

13.1.1. DEFINIŢII

Un lanţ de cuadripoli este o structură formată dintr-un număr oarecare de cuadripoli pasivi legaţi astfel, încît bornele de ieşire ale cuadripolului de rangul m să fie legate la bornele de intrare ale cuadripolului de rangul $m+1$ ($m = 1, 2, \ldots, n$) (fig. 13.1).

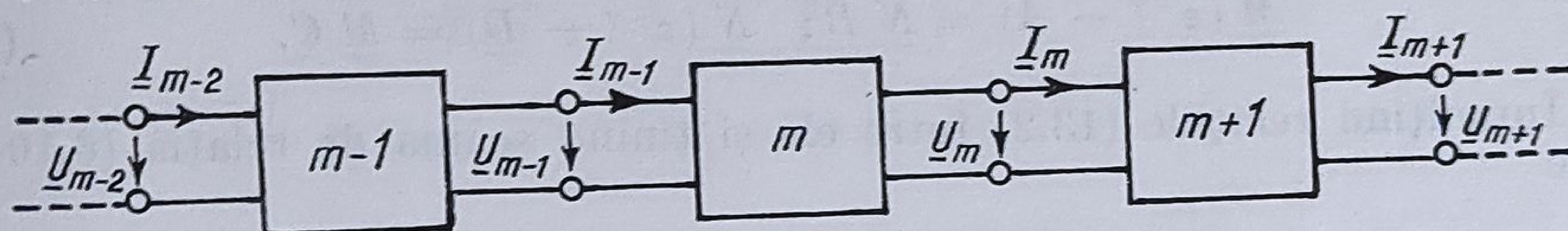


Fig. 13.1. Lanţ de cuadripoli.

În cazul cînd cuadripolii sînt identici, lanţul de cuadripoli este *omogen*. Dacă fiecare cuadripol care alcătuieşte lanţul este şi simetric, atunci lanţul de cuadripoli este *simetric şi omogen*.

Prin analogie cu cuadripolii simpli *, se convine să se considere ca borne de intrare în lanţul de cuadripoli, bornele avînd indicele cel mai mic (0 sau 1), iar ca borne de ieşire, bornele avînd indicele cel mai mare; sensul normal de transmitere a energiei electrice se consideră deci sensul stînga-dreapta.

13.1.2. ECUAŢIILE UNUI LANŢ DE CUADRIPOLI ÎN REGIM PERMANENT

13.1.2.1. **Stabilirea ecuaţiilor unui cuadripol.** Să considerăm un lanţ de cuadripoli omogen; ecuaţiile de funcţionare ale cuadripolului de rangul m sînt:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_{m-1} &= \underline{A}\,\underline{U}_m + \underline{B}\,\underline{I}_m, \\ \underline{I}_{m-1} &= \underline{C}\,\underline{U}_m + \underline{D}\,\underline{I}_m \end{aligned}\right\} \quad (13.1)$$

în care s-au notat cu $m-1$ bornele de intrare şi cu m bornele de ieşire ale acestui cuadripol.

Ecuaţiile (13.1) sînt valabile pentru toate valorile întregi ale lui m în intervalul $m \in (1, n)$; ele constituie un sistem de ecuaţii cu diferenţe finite şi determină pe $\underline{U}_m$ şi $\underline{I}_m$ în funcţie de variabila discretă m.

* Vezi 6.4.4.

Soluțiile acestor ecuații sînt de forma *:

$$\underline{U}_m = \underline{M}\, \varepsilon^{m\underline{\gamma}} \text{ și } \underline{I}_m = \underline{N}\, \varepsilon^{m\underline{\gamma}},$$

în care $\underline{M}$, $\underline{N}$ și $\underline{\gamma}$ sînt mărimi complexe, independente de m, diferite de zero și care urmează a fi determinate; în aceste expresii m poate lua și valoarea zero, corespunzînd elementelor de intrare în cuadripolul de rangul 1, tensiunea și curentul corespunzătoare fiind $\underline{U}_0$ și $\underline{I}_0$.

Introducînd aceste valori în ecuațiile (13.1) se obține

$$\underline{M}\, \varepsilon^{(m-1)\underline{\gamma}} = \underline{A}\, \underline{M}\, \varepsilon^{m\underline{\gamma}} + \underline{B}\, \underline{N}\, \varepsilon^{m\underline{\gamma}},$$

$$\underline{N}\, \varepsilon^{(m-1)\underline{\gamma}} = \underline{C}\, \underline{M}\, \varepsilon^{m\underline{\gamma}} + \underline{D}\, \underline{N}\, \varepsilon^{m\underline{\gamma}},$$

sau, după simplificarea cu $\varepsilon^{m\underline{\gamma}}$,

$$\underline{M}\,(\varepsilon^{-\underline{\gamma}} - \underline{A}) = \underline{N}\,\underline{B}; \quad \underline{N}\,(\varepsilon^{-\underline{\gamma}} - \underline{D}) = \underline{M}\,\underline{C}. \tag{13.2}$$

Înmulțind relațiile (13.2) între ele și ținînd seama de relația (6.104) se obține

$$\varepsilon^{-2\underline{\gamma}} - (\underline{A} + \underline{D})\, \varepsilon^{-\underline{\gamma}} + 1 = 0, \tag{13.3}$$

o ecuație reciprocă cu rădăcinile

$$\varepsilon^{-\underline{\gamma}} = \frac{\underline{A}+\underline{D}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\underline{A}+\underline{D}}{2}\right)^2 - 1}; \quad \varepsilon^{\underline{\gamma}} = \frac{\underline{A}+\underline{D}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\underline{A}+\underline{D}}{2}\right)^2 - 1} \tag{13.4}$$

căci

$$\varepsilon^{\underline{\gamma}}\, \varepsilon^{-\underline{\gamma}} = 1.$$

Soluțiile sistemului (13.1) sînt deci :

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_m &= \underline{M}_1 \varepsilon^{-m\underline{\gamma}} + \underline{M}_2 \varepsilon^{m\underline{\gamma}} \\ \text{și} \qquad \underline{I}_m &= \underline{N}_1\, \varepsilon^{-m\underline{\gamma}} + \underline{N}_2 \varepsilon^{m\underline{\gamma}}. \end{aligned}\right\} \tag{13.5}$$

Constantele $\underline{M}$ și $\underline{N}$ trebuie să satisfacă relațiile (13.2) adică

$$\frac{\underline{M}}{\underline{N}} = \frac{\underline{A}}{\varepsilon^{-\underline{\gamma}} - \underline{A}} = \frac{\varepsilon^{-\underline{\gamma}} - \underline{D}}{\underline{C}} = Z.$$

Din ecuația (13.3) se deduce

$$\frac{1}{2}\,(\varepsilon^{\underline{\gamma}} + \varepsilon^{-\underline{\gamma}}) = \text{ch}\, \underline{\gamma} = \frac{\underline{A}+\underline{D}}{2}. \tag{13.6}$$

* Vezi [122] pag. 287.

Cosinusul hiperbolic fiind o funcţie pară, ecuaţia (13.6) are două soluţii egale şi de semn contrar $\underline{\gamma}_1 = \underline{\gamma}$ şi $\underline{\gamma}_2 = -\underline{\gamma}$. La aceste valori ale lui $\underline{\gamma}$ corespund două valori pentru raportul $\underline{M}_2/\underline{N}$. Să notăm deci,

$$\frac{\underline{M}_1}{\underline{N}_1} = \underline{Z}_1 \quad \text{şi} \quad \frac{\underline{M}_2}{\underline{N}_2} = -\underline{Z}_2,$$

dimensiunile acestor rapoarte fiind evident acelea ale unor impedanţe. Este uşor de văzut, că de fapt, $\underline{Z}_1$ reprezintă impedanţa caracteristică a lanţului de cuadripoli în sensul *stînga-dreapta* (intrare-ieşire), iar $\underline{Z}_2$ reprezintă impedanţa caracteristică a lanţului de cuadripoli în sensul *dreapta-stînga* (ieşire-intrare). Într-adevăr, calculînd se găseşte:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{B}}{\varepsilon^{-\underline{\gamma}} - \underline{A}} = \frac{\underline{B}}{\frac{\underline{A}+\underline{D}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\underline{A}+\underline{D}}{2}\right)^2 - 1} - \underline{A}} = \frac{1}{2\underline{C}}\left[(\underline{A}-\underline{D}) + \sqrt{(\underline{A}-\underline{D})^2 - 4\,\underline{B}\,\underline{C}}\right]$$

şi

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{B}}{\varepsilon^{\underline{\gamma}} - \underline{A}} = \frac{\underline{B}}{\frac{\underline{A}+\underline{D}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\underline{A}+\underline{D}}{2}\right)^2 - 1} - \underline{A}} = \frac{1}{2\underline{C}}\left[(\underline{A}-\underline{D}) - \sqrt{(\underline{A}-\underline{D})^2 - 4\underline{B}\,\underline{C}}\right].$$

Ori, se ştie, că * rădăcinile care dau valorile impedanţelor caracteristice pentru cele două sensuri de funcţionare ale unui cuadripol sînt două cîte două egale şi de semn contrar, valabile fiind numai acele rădăcini pentru care partea reală este pozitivă sau nulă. Aceasta justifică semnul minus atribuit lui $\underline{Z}_2$.

Rezultă,

$$\underline{N}_1 = \frac{\underline{M}_1}{\underline{Z}_1} \quad \text{şi} \quad \underline{N}_2 = -\frac{\underline{M}_2}{\underline{Z}_2},$$

astfel, că relaţiile (13.5) pot fi scrise:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_m &= \underline{M}_1\,\varepsilon^{-m\underline{\gamma}} + \underline{M}_2\,\varepsilon^{m\underline{\gamma}}, \\ \underline{I}_m &= \frac{\underline{M}_1}{\underline{Z}_1}\,\varepsilon^{-m\underline{\gamma}} - \frac{\underline{M}_2}{\underline{Z}_2}\,\varepsilon^{m\underline{\gamma}}. \end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$

Pentru determinarea lui $\underline{M}_1$ şi $\underline{M}_2$ se face $m = 0$ în relaţiile (13.7) şi se obţine

$$\underline{U}_0 = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 \quad \text{şi} \quad \underline{I}_0 = \frac{\underline{M}_1}{\underline{Z}_1} - \frac{\underline{M}_2}{\underline{Z}_2},$$

* Vezi 6.4.4.8.

de unde rezultă :

$$\underline{M}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} (\underline{U}_0 + \underline{Z}_2 \underline{I}_0) \; ; \; \underline{M}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} (\underline{U}_0 - \underline{Z}_1 \underline{I}_0). \tag{13.8}$$

În aceste expresii $\underline{U}_0$ şi $\underline{I}_0$ reprezintă tensiunea şi curentul la bornele de intrare ale cuadripolului de rang 1, respectiv la bornele de intrare ale lanţului de cuadripoli. Introducînd acum valorile lui $\underline{M}_1$ şi $\underline{M}_2$ în relaţiile (13.7) se obţine

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_m &= \left(\text{ch}\, m\underline{\gamma} + \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \text{sh}\, m\underline{\gamma}\right)\underline{U}_0 - \frac{2\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \text{sh}\, m\underline{\gamma} \cdot \underline{I}_0, \\ \underline{I}_m &= -\frac{2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \text{sh}\, m\underline{\gamma} \cdot \underline{U}_0 + \left(\text{ch}\, m\underline{\gamma} - \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \text{sh}\, m\underline{\gamma}\right) \underline{I}_0. \end{aligned}\right\} \tag{13.9}$$

Ecuaţiile (13.8) reprezintă ecuaţiile unui lanţ de cuadripoli omogen şi dau tensiunea şi curentul la *bornele de ieşire* ale cuadripolului de rangul m în funcţie de tensiunea şi curentul la *bornele de intrare* ale lanţului şi de parametrii unui cuadripol; în particular, dacă $m = n$, se obţine tensiunea şi curentul la bornele de ieşire ale lanţului de cuadripoli.

Scriind acum mărimile de *intrare* în funcţie de mărimile de *ieşire*, ecuaţiile lanţului de cuadripoli devin :

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_0 &= \left(\text{ch}\, m\underline{\gamma} - \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \text{sh}\, m\underline{\gamma}\right)\underline{U}_m + \frac{2\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \text{sh}\, m\underline{\gamma} \cdot \underline{I}_m, \\ \underline{I}_0 &= \frac{2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \text{sh}\, m\underline{\gamma} \cdot U_m + \left(\text{ch}\, m\underline{\gamma} + \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \text{sh}\, m\underline{\gamma}\right) \underline{I}_m. \end{aligned}\right\} \tag{13.10}$$

13.1.2.2. **Interpretarea fizică a rezultatelor.** Să considerăm un lanţ omogen de cuadripoli (fig. 13.1). O undă simplă, de tensiune sau de curent, este caracterizată prin aceea, că trecînd de la un cuadripol de rang m la următorul, de rang $m + 1$, mărimea ei este multiplicată cu un acelaşi factor complex $\underline{\lambda}$; rezultă deci, că mărimile de ieşire pot fi exprimate în funcţie de mărimile de intrare, cu ajutorul acestui factor

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_{m-1} &= \underline{\lambda}\, \underline{U}_m, \\ \underline{I}_{m-1} &= \underline{\lambda}\, \underline{I}_m. \end{aligned}\right\} \tag{13.11}$$

Introducînd aceste valori în ecuaţiile (13.1) se obţine sistemul de ecuaţii

$$\left.\begin{aligned} \underline{\lambda}\, \underline{U}_m &= \underline{A}\, \underline{U}_m + \underline{B}\, \underline{I}_m, \\ \underline{\lambda}\, \underline{I}_m &= \underline{C}\, \underline{U}_m + \underline{D}\, \underline{I}_m, \end{aligned}\right\} \tag{13.12}$$

care este un sistem omogen în $\underline{U}_m$ şi $\underline{I}_m$ şi care este compatibil dacă

$$\begin{vmatrix} \underline{A} - \underline{\lambda} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} - \underline{\lambda} \end{vmatrix} = \underline{\lambda}^2 - (\underline{A} + \underline{D})\,\underline{\lambda} + 1 = 0 \tag{13.13}$$

întrucît $\underline{AD} - \underline{BC} = 1$. Este uşor de văzut, că cele două rădăcini $\underline{\lambda}_1$ şi $\underline{\lambda}_2$ sînt valorile proprii ale matricei coeficienţilor sistemului de ecuaţii (13.12); ele sînt

$$\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2 = \frac{\underline{A} + \underline{D}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\underline{A} + \underline{D}}{2}\right)^2 - 1}.$$

Ţinînd seama de relaţiile (13.4), putem scrie imediat

$$\underline{\lambda}_1 = \varepsilon^{-\underline{\gamma}} \quad \text{şi} \quad \underline{\lambda}_2 = \varepsilon^{\underline{\gamma}}.$$

Dacă $|\underline{\lambda}| = 1$, se obţine o propagare *pură*, fără atenuare; dacă $|\underline{\lambda}| < 1$ avem o propagare de la *stînga la dreapta* cu atenuare progresivă în acest sens; dacă $|\underline{\lambda}| > 1$, atunci propagarea se produce de la *dreapta la stînga* cu atenuarea progresivă în acelaşi sens.

Prin analogie cu liniile lungi * parametrul $\underline{\gamma}$ se numeşte *constantă de propagare* şi este de forma

$$\underline{\lambda} = \alpha + j\beta. \tag{13.14}$$

Partea reală a constantei de propagare α, se numeşte *constantă de atenuare* (sau numai atenuarea) *pe cuadripol*. Produsul

$$n\alpha = \alpha_T,$$

în care n este numărul total al cuadripolilor care formează lanţul de cuadripoli, se numeşte *constanta de atenuare totală* (sau numai *atenuarea totală*) *a lanţului de cuadripoli*.

Atenuarea tensiunilor sau curenţilor se exprimă, în practică, fie prin logaritmul natural al raportului dintre două valori ale acestei mărimi

$$\alpha_T = \ln \frac{U_0}{U_n}$$

şi se măsoară în *neperi* (Np), fie prin logaritmul zecimal al aceluiaşi raport înmulţit cu 20,

$$\alpha_T = 20 \lg \frac{U_0}{U_n}$$

şi se măsoară în *decibeli* (db).

---

* Vezi 12.1.4.2.

În tabloul 13.1 este dată corespondența dintre aceste unități de măsură.

Tabloul 13.1

$\frac{U_0}{U_n}$	1	10	100	1000
α_T Np	0	2,3	4,6	6,9
α_T db	0	20	40	60

Acest lucru se exprimă spunînd că „cele două tensiuni diferă cu α_T Np, respectiv db" sau că „între tensiunea de intrare în lanțul de cuadripoli și aceea de ieșire există o atenuare de atîția neperi sau decibeli".

Mărimea β din partea complexă a constantei de propagare, se *numește constanta de distorsiune* (sau numai *distorsiunea*) *pe cuadripol* și exprimă variația fazei undei de tensiune — respectiv de curent — pe cuadripol; ea este deci, unghiul între fazorii de tensiune — respectiv de curent — corespunzători tensiunii sau curentului, existînd la intrarea și la ieșirea dintr-un cuadripol; distorsiunea se măsoară în radiani sau în grade. Produsul

$$n\beta = \beta_T,$$

în care n e numărul total al cuadripolilor care formează lanțul de cuadripoli se numește *constanta de distorsiune totală* (sau numai *distorsiunea totală*) *a lanțului de cuadripoli* *.

Ținînd seama de aceste definiții, rezultă, că pentru $\alpha = 0$, propagarea se face fără atenuare; în acest caz

$$\underline{\lambda}_1 = \varepsilon^{-j\beta} \quad \text{și} \quad \underline{\lambda}_2 = \varepsilon^{j\beta}$$

și $|\underline{\lambda}| = 1$, așa cum s-a indicat și mai înainte.

Pentru $\alpha \neq 0$ și pozitiv, rădăcina $\underline{\lambda}_1$ corespunde propagării undelor de la stînga la dreapta (intrare-ieșire) iar rădăcina $\underline{\lambda}_2$ unei propagări a undelor de la dreapta la stînga (ieșire-intrare).

Să presupunem că în lanțul de cuadripoli există un regim permanent de curenți și tensiuni — fără amortizare — definit de relațiile (13.11) și (13.13); în fiecare punct** al lanțului de cuadripoli se poate scrie

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}.$$

* Parametrii α și β se determină din relațiile (13.6) și (13.14).
** La punctele de interconectare ale diverșilor cuadripoli.

Din relaţia (13.12) se deduce

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{B}}{\underline{\lambda} - \underline{A}} = \frac{\underline{\lambda} - \underline{D}}{\underline{C}} . \qquad (13.15)$$

Cele două soluţii $\underline{\lambda}_1$ şi $\underline{\lambda}_2$, corespunzătoare celor două sensuri de propagare pe lanţul de cuadripoli, dau două valori posibile pentru $\underline{Z}$, care nu sînt altceva decît impedanţele caracteristice ale lanţului de cuadripoli corespunzătoare celor două sensuri de propagare. Rezultă

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{B}}{\underline{\lambda} - \underline{A}} = \frac{\underline{B}}{\frac{\underline{A} + \underline{D}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\underline{A} + \underline{D}}{2}\right)^2 - 1} - \underline{A}} = \frac{2\underline{B}\left[(\underline{D} - \underline{A}) - \sqrt{(\underline{A} + \underline{D})^2 - 4}\right]}{(\underline{D} - \underline{A})^2 - (\underline{A} + \underline{D})^2 + 4} =$$

$$= \frac{1}{2\underline{C}}\left[(\underline{A} - \underline{D}) + \sqrt{(\underline{A} - \underline{D})^2 + 4\underline{B}\,\underline{C}}\right] = \underline{Z}_c ,$$

care este expresia impedanţei caracteristice în sensul intrare-ieşire (stînga — dreapta) *.

În acelaşi mod se găseşte

$$\underline{Z}_2 = -\underline{Z}_c = \underline{\zeta}_c ,$$

semnul minus interpretîndu-se în sensul, că această impedanţă caracteristică este corespunzătoare sensului de propagare ieşire — intrare (dreapta — stînga).

Să considerăm o porţiune limitată din lanţul de cuadripoli, formată din cuadripolii de rang m, $m + 1, \ldots, m + p$, pe care să o închidem la *dreapta* la ieşire, pe impedanţa caracteristică $\underline{Z}_c$. Totul se petrece ca şi cum am avea un lanţ de cuadripoli nelimitat la dreapta **, a cărei impedanţă aparentă la intrare este tot $\underline{Z}_c$.

Dacă se leagă o impedanţă caracteristică $\underline{\zeta}_c$ la *stînga* lanţului de cuadripoli, la intrare, lanţul de cuadripoli va funcţiona ca un lanţ nelimitat la stînga şi care prezintă la dreapta, la ieşire, o impedanţă aparentă egală cu $\underline{\zeta}_c$.

Raţionamentul făcut conduce la ideea descompunerii undelor de tensiune şi de curent, fiecare în cîte două unde, care se propagă în sens invers, unde directă şi inversă de tensiune şi unde directă şi inversă de curent. Pentru a arăta aceasta, să reluăm ecuaţiile (13.7). Scriind valorile lui $\underline{M}_1$ şi $\underline{M}_2$ definite de expresiile (13.8) sub forma

$$\underline{M}_1 = M_1 \underline{|\mu_2} \quad \text{şi} \quad \underline{M}_2 = M_2 \underline{|\mu_2} ,$$

şi ţinînd seama de expresia (13.14) a constantei de propagare, ecuaţiile (13.7) se pot scrie:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_m &= M_1 \varepsilon^{-m\alpha} \underline{|-m\beta + \mu_1} + M_2 \varepsilon^{m\alpha} \underline{|m\beta + \mu_2} \\ \underline{I}_m &= \frac{M_1}{Z_1} \varepsilon^{-m\alpha} \underline{|-m\beta + \mu_1 - \psi_1} - \frac{M_2}{Z_2} \varepsilon^{m\alpha} \underline{|m\beta + \mu_2 - \psi_2} \end{aligned}\right\} \qquad (13.16)$$

---

* Vezi 6.4.4.8.

** Vezi [17] pag. 114.

Alegînd originea de timp astfel, încît ea să coincidă cu momentul în care unda directă de tensiune pleacă din extremitatea stîngă, adică la intrarea în lanțul de cuadripoli, cu amplitudinea maximă, dacă $U_0\sqrt{2}$ este această amplitudine, atunci $m = 1$ și se poate scrie:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\, M_1\, \varepsilon^{-\alpha} = U_0\sqrt{2}\,, \\ -\beta + \mu_1 = 0, \end{cases}$$

de unde, rezultă

$$M_1 = U_0\varepsilon^{\alpha}\,; \quad \mu_1 = \beta.$$

Notînd

$$M_2 = U'_n\,,$$

relațiile (13.16) pot fi scrise

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_m &= U_0\, \varepsilon^{-(m-1)\alpha}\, \underline{|-\beta(m-1)} + U'_n\, \varepsilon^{m\alpha}\, \underline{|m\beta+\mu_2}\,, \\ \underline{I}_m &= \frac{U_0}{Z_1}\, \varepsilon^{-(m-1)\alpha}\, \underline{|-\beta(m-1)-\psi_1} - \frac{U'_n}{Z_2}\, \varepsilon^{m\alpha}\, \underline{|m\beta+\mu_2-\psi_2}\,. \end{aligned}\right\} \quad (13.17)$$

Din aceste relații se deduc expresiile valorilor instantanee ale tensiunii și curentului; se găsește:

$$\left.\begin{aligned} u_m &= U_0\sqrt{2}\, \varepsilon^{-(m-1)\alpha} \cos\,[\omega t - \beta(m-1)] + U'_m\sqrt{2}\, \varepsilon^{m\alpha} \cos\,(\omega t + m\beta + \mu_2), \\ i_m &= \frac{U_0}{Z_1}\sqrt{2}\, \varepsilon^{-(m-1)\alpha} \cos[\omega t - \beta(m-1) - \psi_1] - \frac{U'_n}{Z_2}\sqrt{2}\, \varepsilon^{m\alpha} \cos\,(\omega t + m\beta + \mu_2 - \psi_2). \end{aligned}\right\} \quad (13.18)$$

Rezultă deci, că fiecare undă, de tensiune și de curent, este compusă din cîte două *unde mobile* care se propagă în *sensuri contrarii* cu aceeași viteză v. Aceste unde sînt armonici în raport cu timpul care variază continuu; în raport cu m, care variază discret, undele au un caracter spectral, spectrele respective avînd o repartiție sinusoidală. În ceea ce privește amplitudinea acestor unde aceasta crește sau descrește exponențial avînd de asemenea un caracter spectral.

Cu aproximația factorului exponențial, pentru ca cele patru unde — de tensiune și de curent — să aibă respectiv aceleași amplitudini la timpurile t și $t + \Delta t$ — la bornele cuadripolilor de rangul m și $m + \Delta m$, este necesar ca*

$$\omega(t + \Delta t) - \beta(m + \Delta m - 1) - \psi_1 = \omega t - \beta(m-1) - \psi_1 \quad (13.19)$$

și

$$\omega(t + \Delta t) + \beta(m + \Delta m) + \mu_2 - \psi_2 = \omega t + \beta m + \mu_2 - \psi_2, \quad (13.20)$$

* Pentru undele de tensiune ψ_1, respectiv ψ_2, sînt nule.

unde ψ_1 și ψ_2 au valorile din ecuațiile (13.18). Din relația (13.19) rezultă

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta},$$

iar din relația (13.20) rezultă

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -\frac{\omega}{\beta}.$$

Ținînd seama că cea mai mică valoare pe care o poate lua m este 1, mărimea

$$v = \frac{1}{\Delta t} = \pm \frac{\omega}{\beta}$$

se numește * *viteza de propagare* a undelor de tensiune și de curent, de-a lungul lanțului de cuadripoli.

Rezultă deci, că cele două unde componente ale undelor de tensiune și de curent, exprimate prin relațiile (13.18) se propagă de-a lungul lanțului de cuadripoli în sensuri diferite, dar cu aceeași viteză :

— undele

$$u_{md} = U_0 \sqrt{2}\ \varepsilon^{-(m-1)\alpha} \cos [\omega t - (m-1)\beta]$$

și

$$i_{md} = \frac{U_0}{Z_1} \sqrt{2}\ \varepsilon^{-(m-1)\alpha} \cos [\omega t - (m-1)\beta - \psi_1]$$

se numesc *unde directe* și se propagă în direcția stînga-dreapta, de la intrarea în lanțul de cuadripoli către ieșirea din lanțul de cuadripoli;

— undele

$$u_{mi} = U'_n \sqrt{2}\ \varepsilon^{m\alpha} \cos (\omega t + m\beta + \mu_2)$$

și

$$i_{mi} = -\frac{U}{Z_2} \sqrt{2}\ \varepsilon^{m\alpha} \cos (\omega t + m\beta + \mu_2 - \psi_2)$$

se numesc *unde reflectate* și se propagă în direcția dreapta-stînga, de la ieșirea din lanțul de cuadripoli către intrarea în lanțul de cuadripoli.

În consecință, într-un lanț de cuadripoli omogen, undele de tensiune și curent se pot descompune fiecare în cîte două unde care se propagă de-a lungul lanțului de cuadripoli, într-un sens sau într-altul, cu o viteză constantă ; amplitudinile lor se atenuează, pentru fiecare din ele în sensul de propagare corespunzător, după o exponențială avînd constanta de atenuare α, adică, raportul amplitudinilor tensiunilor sau curenților la bornele de intrare și de ieșire ale unui cuadripol din lanțul respectiv este egal cu ε^{α}.

---

* Vezi [20].

În ceea ce priveşte undele de curent, pentru unda directă amplitudinea ei este egală cu amplitudinea undei directă de tensiune împărţită la modulul impedanţei $\underline{Z}_1$, definită de relaţiile (13.15) şi este defazată în urmă cu argumentul ψ_1 al acestei impedanţe faţă de unda de tensiune respectivă ; amplitudinea undei reflectată de curent este egală cu amplitudinea undei reflectată de tensiune împărţită la modulul impedanţei $\underline{Z}_2$, definită de aceleaşi relaţii (13.15), defazajul său fiind înaintea undei de tensiune cu unghiul $\pi - \psi_2$, ψ_2 fiind argumentul impedanţei respective. La trecerea prin fiecare cuadripol al lanţului, defazajul dintre undele de curent şi tensiune creşte — într-un sens sau altul — cu un unghi egal cu constanta de distorsiune β.

Descompunerea undelor de tensiune sau curent în unde directe şi unde reflectate se poate face şi în cazul unui singur cuadripol.

13.1.3. CAZURI PARTICULARE DE FUNCŢIONARE ALE UNUI LANŢ DE CUADRIPOLI

13.1.3.1. Lanţul de cuadripoli omogen şi simetric. În cazul unui lanţ de cuadripoli omogen şi simetric avem

$$\underline{A} = \underline{D} \quad \text{şi} \quad \varepsilon^{\pm\underline{\gamma}} = \underline{A} \pm \sqrt{\underline{A}^2 - 1}\,.$$

Rezultă :

$$\text{ch}\,\underline{\gamma} = \underline{A}\,; \quad \frac{\underline{M}}{\underline{N}} = -\frac{\underline{B}}{\text{sh}\,\underline{\gamma}}\,;$$

pentru $\underline{\gamma}_1 = -\underline{\gamma}$ se obţine

$$\frac{\underline{M}_1}{\underline{N}_1} = \frac{\underline{B}}{\text{sh}\,\underline{\gamma}} = \frac{\underline{B}}{\sqrt{\text{ch}^2\underline{\gamma} - 1}} = \frac{\underline{B}}{\underline{C}} = \underline{Z}_c\,;$$

pentru $\underline{\gamma}_2 = \underline{\gamma}$ se obţine

$$\frac{\underline{M}_2}{\underline{N}_2} = -\frac{\underline{B}}{\text{sh}\,\gamma} = -\sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = -\underline{Z}_c\,.$$

Mărimea

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}$$

se numeşte *impedanţa caracteristică* (sau *impedanţa de undă*, sau *impedanţa iterativă*) a lanţului de cuadripoli omogen şi simetric prin analogie cu mărimea corespunzătoare definită în cazul unui cuadripol simplu simetric* sau în cazul

---

* Vezi 6.4.4.8.

unei linii lungi *. În acest caz, ecuaţiile (13.9) şi (13.10) devin pentru lanţul de cuadripoli omogen şi simetric

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_m &= \underline{U}_0 \operatorname{ch} m\underline{\gamma} - \underline{Z}_c \underline{I}_0 \operatorname{sh} m \underline{\gamma}, \\ \underline{I}_m &= -\frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} m \underline{\gamma} + \underline{I}_0 \operatorname{ch} m \underline{\gamma} \end{aligned}\right\} \quad (13.21)$$

şi

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_0 &= \underline{U}_m \operatorname{ch} m \underline{\gamma} + \underline{Z}_c \underline{I}_m \operatorname{sh} m \underline{\gamma}, \\ \underline{I}_0 &= \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} m \underline{\gamma} + \underline{I}_m \operatorname{ch} m \underline{\gamma}. \end{aligned}\right\} \quad (13.22)$$

13.1.3.2. **Lanţ de cuadripoli omogen şi simetric închis pe impedanţa caracteristică.** Dacă la ieşirea din ultimul cuadripol al unui lanţ de cuadripoli omogen se conectează o impedanţă oarecare $\underline{Z}_n$, atunci între tensiunea şi curentul corespunzătoare ieşirii din lanţul de cuadripoli există relaţia

$$\underline{U}_n = \underline{Z}_n \underline{I}_n. \quad (13.23)$$

În cazul unui lanţ de cuadripoli omogen şi simetric, dacă una din cele patru mărimi — $\underline{U}_0$, $\underline{I}_0$, $\underline{U}_n$, $\underline{I}_n$ — este dată, cu ajutorul relaţiilor (13.22) şi (13.23) se pot determina şi celelalte trei mărimi necunoscute.

Dacă impedanţa de încărcare a lanţului de cuadripoli este egală cu impedanţa sa caracteristică

$$\underline{Z}_n = \underline{Z}_c,$$

atunci ecuaţiile (13.22) iau forma simplă

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_0 &= \underline{U}_n \; \varepsilon^{n\underline{\gamma}} \\ \underline{I}_0 &= \underline{I}_n \; \varepsilon^{n\underline{\gamma}} \end{aligned}\right\} \quad (13.24)$$

şi rezultă

$$\frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} = \frac{\underline{U}_n}{\underline{I}_n} = \underline{Z}_c \quad (13.25)$$

adică, impedanţa aparentă la bornele de intrare ale lanţului de cuadripoli este egală cu impedanţa sa caracteristică, întocmai ca şi în cazul unui cuadripol simplu.

Ţinînd seama de relaţia (13.25), în cazul cînd cuadripolul este legat pe impedanţa sa caracteristică, din relaţiile (13.8) rezultă

$$\underline{M}_2 = 0$$

şi deci, undele reflectate de tensiune şi de curent sînt nule.

* Vezi 12.1.4.3.

Din relațiile (13.24) se poate deduce

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_n &= \underline{U}_0\ \varepsilon^{-n\underline{\gamma}} \\ \underline{I}_n &= \underline{I}_0\ \varepsilon^{-n\underline{\gamma}}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (13.26)$$

Ținînd seama de expresia (13.14) a constantei de propagare, relațiile (13.25) arată că amplitudinea tensiunii și curentului scad exponențial de-a lungul lanțului de cuadripoli.

13.1.4. APLICAȚII

13.1.4.1. **Linia electrică lungă.** Pentru a modela o linie electrică lungă, aceasta se înlocuiește cu un lanț de cuadripoli în T sau în π care, prin reducerea impedanțelor serie, respectiv paralel, se transformă într-un lanț de cuadripoli de tip Γ sau Γ întors * (fig. 13.2).

Impedanța de intrare a unei celule oarecare a lanțului rămîne identică cu ea însăși astfel, că în cazul unui lanț format din foarte multe celule, dacă

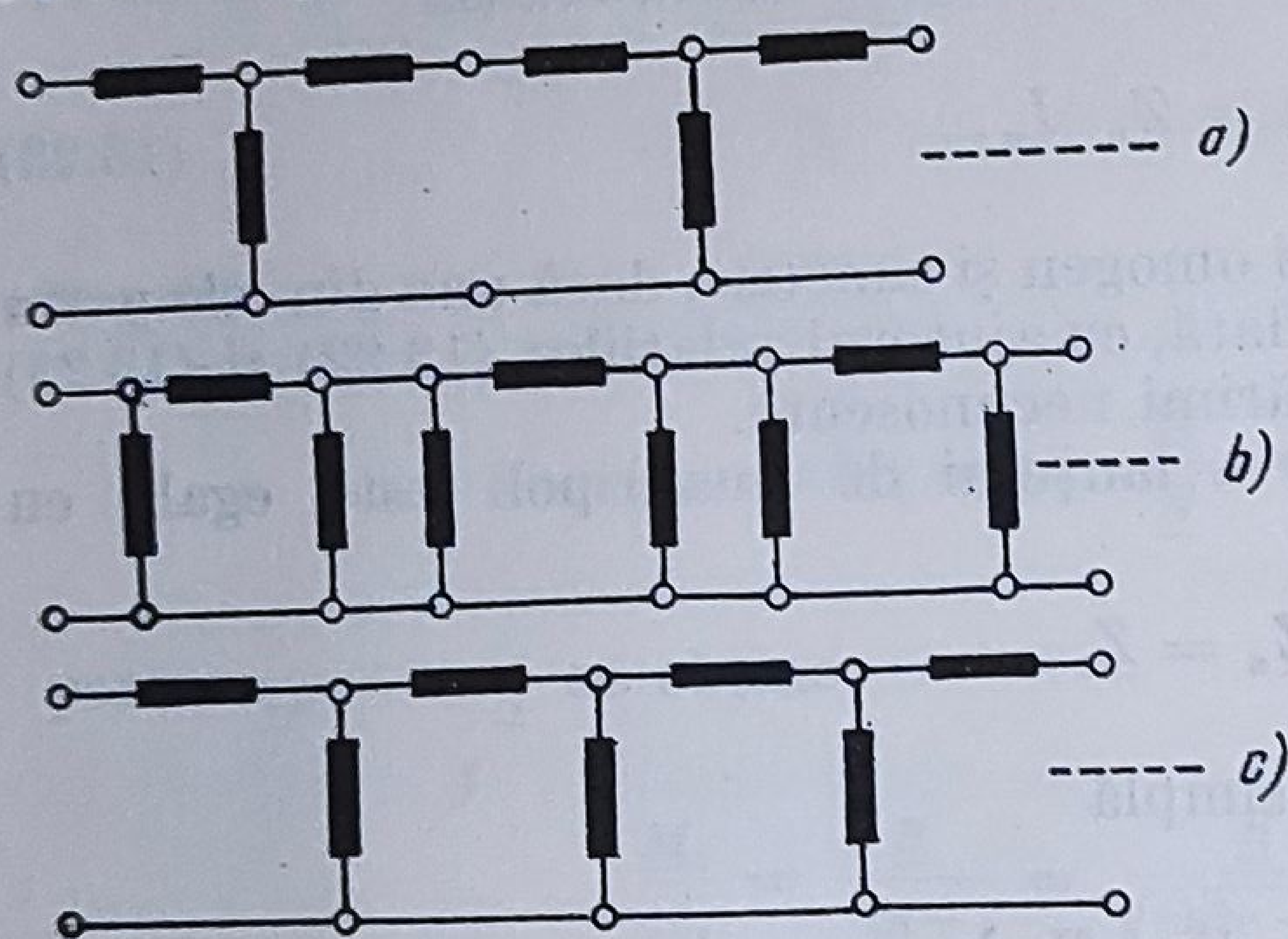


Fig. 13.2. Structură de linie lungă:
a) lanț de cuadripoli T ; b) lanț de cuadripoli π ; lanț de cuadripoli Γ.

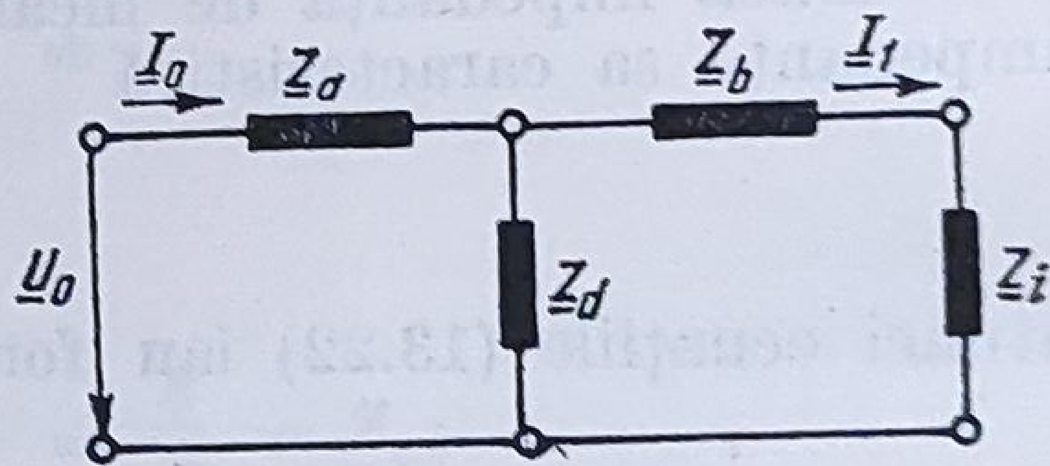


Fig. 13.3. Lanțul de cuadripoli redus.

dorim să ne oprim la o celulă de un anumit rang, este suficient să se înlocuiască restul celulelor cu o impedanță egală cu impedanța $\underline{Z}_i$ de intrare în lanț. Să ne oprim la prima celulă; schema echivalentă a lanțului este dată în figura 13.3. Aplicînd metoda buclelor, ecuațiile de funcționare ale acestui circuit sînt

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_0 &= (\underline{Z}_a + \underline{Z}_d)\,\underline{I}_0 - \underline{Z}_d\,\underline{I}_1 \\ 0 &= \quad - \underline{Z}_d\underline{I}_0 + (\underline{Z}_b + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i)\,\underline{I}_1. \end{aligned}\right\} \qquad (13.27)$$

Din a doua ecuație rezultă

$$\frac{\underline{I}_0}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{Z}_b + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i}{\underline{Z}_d} = \frac{I_0}{I_1}\underline{|\varphi} = \varepsilon^{\alpha}\,\underline{|\varphi}\ , \qquad (13.28)$$

factorul de atenuare al curentului cuadripolului considerat.

* Vezi [20]

Ţinînd seama de relaţia (13.28), din prima ecuaţie (13.27) se deduce expresia impedanţei aparentă la intrarea în lanţul de cuadripoli :

$$\underline{Z}_{0i} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} = \underline{Z}_a + \underline{Z}_d \frac{\underline{Z}_b + \underline{Z}_i}{\underline{Z}_b + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i} = \underline{Z}_i = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \qquad (13.29)$$

întrucît, conform celor arătate, impedanţa de intrare în lanţul de cuadripoli este aceeaşi oricare ar fi celula la care ne oprim. Rezultă dar, că impedanţa $\underline{Z}_i$ nu este altceva, decît impedanţa caracteristică a cuadripolului considerat. Expresia ei, în funcţie de parametrii acestui cuadripol se deduce din relaţia (13.29) şi este

$$\underline{Z}_i = \frac{+(\underline{Z}_b - \underline{Z}_d) \pm \sqrt{(\underline{Z}_b - \underline{Z}_d)^2 + 4\,[\underline{Z}_a(\underline{Z}_b + \underline{Z}_d) + \underline{Z}_b\,\underline{Z}_d]}}{2} = \underline{Z}_c,$$

relaţie cunoscută*.

13.1.4.2. Repartiţia tensiunilor de-a lungul unui lanţ de izolatori. Fie un lanţ de izolatori al unei linii de înaltă tensiune format din n elemente (fig. 13.4,a).

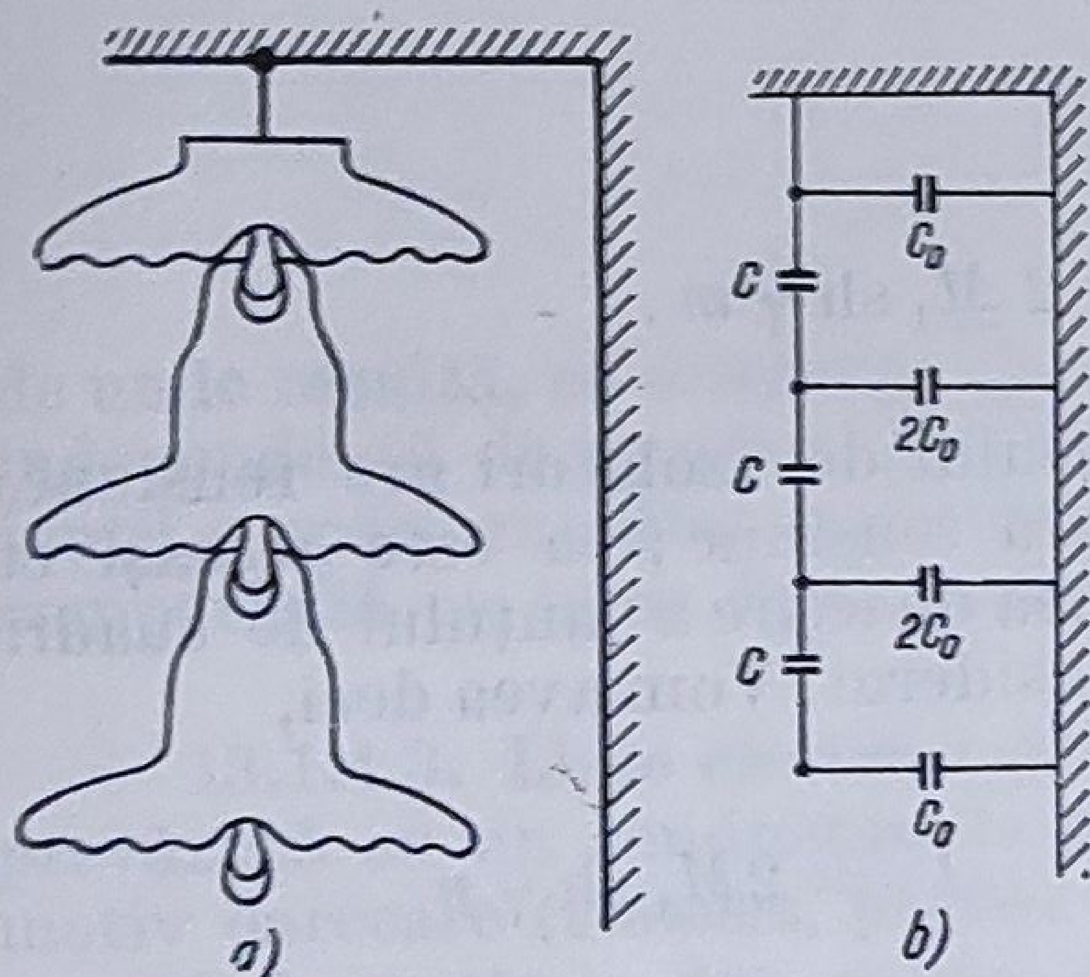


Fig. 13.4. Lanţ de izolatori: *a)* şi circuitul electric echivalent *b)*.

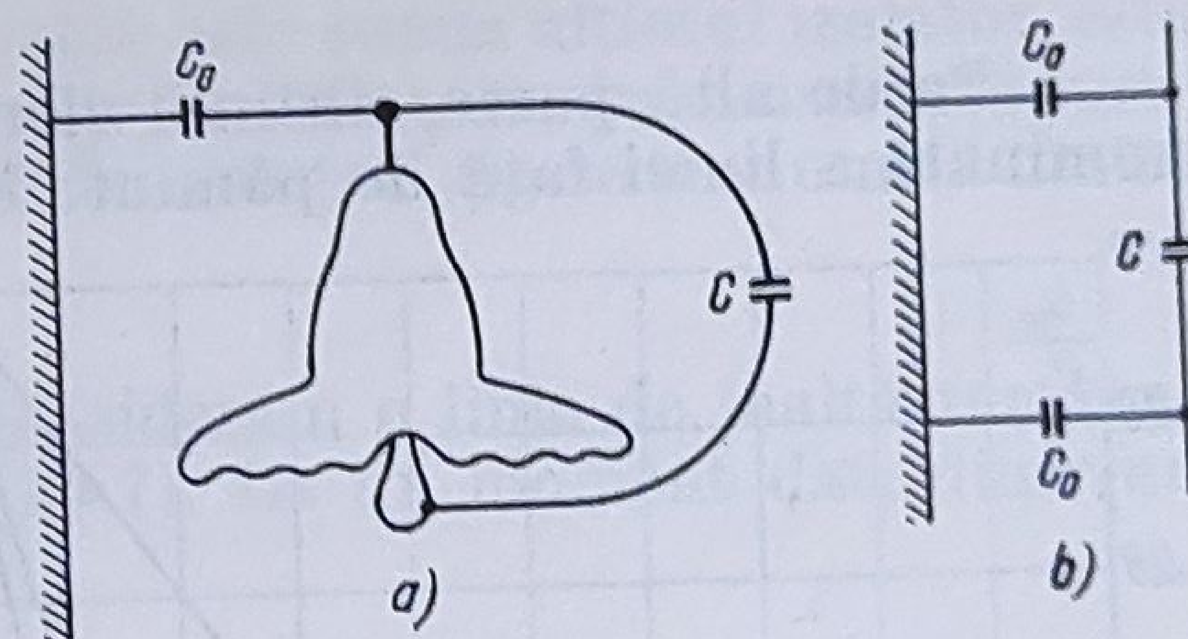


Fig. 13.5. Element de izolator: *a)* şi circuitul său echivalent *b)*.

Fiecare element al acestui lanţ de izolatori are o capacitate C între două armături consecutive şi capacitatea C_0 între armătură şi stîlp (pămînt) (fig. 13.5,a) ; pentru fiecare element se poate construi un circuit echivalent sub forma unui cuadripol în π (fig. 13.5,b). Circuitul echivalent al lanţului de izolatori poate fi asemuit cu un lanţ de cuadripoli în π (fig. 13.4,b) pentru care

$$\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}\,C\omega} \quad \text{şi} \quad \underline{Y} = \mathrm{j}\,2C_0\,\omega\,.$$

Din relaţiile (13.4), ţinînd seama de relaţiile (13.14) şi (13.6), precum şi de relaţia (6.139), rezultă

$$\mathrm{ch}\,\underline{\gamma} = \mathrm{ch}\,(\alpha + \mathrm{j}\beta) = \frac{\underline{A} + \underline{D}}{2} = 1 + \underline{Y}\,\underline{Z} = 1 + \frac{2C_0}{C} = \lambda\,, \qquad (13.30)$$

* Vezi 6.4.4.8., relaţia (6.131)

λ fiind un număr real și mai mare ca 1. Dezvoltînd cosinusul hiperbolic se obține

$$\mathrm{ch}\,\alpha \cos\beta + j\,\mathrm{sh}\,\alpha \sin\beta = \lambda,$$

ecuație care este satisfăcută pentru

$$\mathrm{ch}\,\alpha \cos\beta = \lambda; \quad \mathrm{sh}\,\alpha \sin\beta = 0.$$

Din a doua ecuație rezultă $\mathrm{sh}\,\alpha = 0$ și $\sin\beta = 0$. Prima soluție nu corespunde întrucît în acest caz $\mathrm{ch}\,\alpha = 1$ și $\cos\beta = \lambda > 1$ ceea ce nu este posibil. Luînd $\sin\beta = 0$, rezultă $\cos\beta = 1$ și deci

$$\mathrm{ch}\,\alpha = \lambda.$$

Luînd $\beta = 0$, din relațiile (13.30) rezultă

$$\underline{\gamma} = \alpha.$$

Lanțul de izolatori fiind suspendat de stîlp, tensiunea de intrare în lanțul de cuadripoli este nulă ($\underline{U}_0 = 0$ și $m = 0$) prima relație (13.5) dă

$$\underline{M}_1 = -\underline{M}_2$$

și deci

$$\underline{U}_m = \underline{M}_1 (\varepsilon^{\underline{\gamma} m} - \varepsilon^{-\underline{\gamma} m}) = 2\,\underline{M}_1\,\mathrm{sh}\,\gamma\, m.$$

Pe de altă parte, ultimul element al lanțului de izolatori are tensiunea nominală a liniei față de pămînt. Fie $\underline{U}$ această tensiune; ea este aceeași cu tensiunea de ieșire a lanțului de cuadripoli considerat. Vom avea deci,

$$\underline{U} = 2\underline{M}_1\,\mathrm{sh}\,\gamma\, n$$

și rezultă

$$\underline{U}_m = U \frac{\mathrm{sh}\,\underline{\gamma}\, m}{\mathrm{sh}\,\underline{\gamma}\, n} = U \frac{\mathrm{sh}\,\alpha\, m}{\mathrm{sh}\,\alpha\, n}, \qquad (13.31)$$

care dă distribuția de tensiune în raport cu pămîntul pe armăturile fiecărui izolator al lanțului, parametrul α fiind determinat prin relația (13.30) cînd se cunoaște raportul capacităților $\frac{C_0}{C}$. În figura 13.6 este reprezentată această distribuție de tensiune la un izolator cu $n = 10$ elemente și pentru raportul capacităților $\frac{C_0}{C} = 0;\ 0{,}025;\ 0{,}05;\ 0{,}25$. Rezultă din această diagramă că, cu

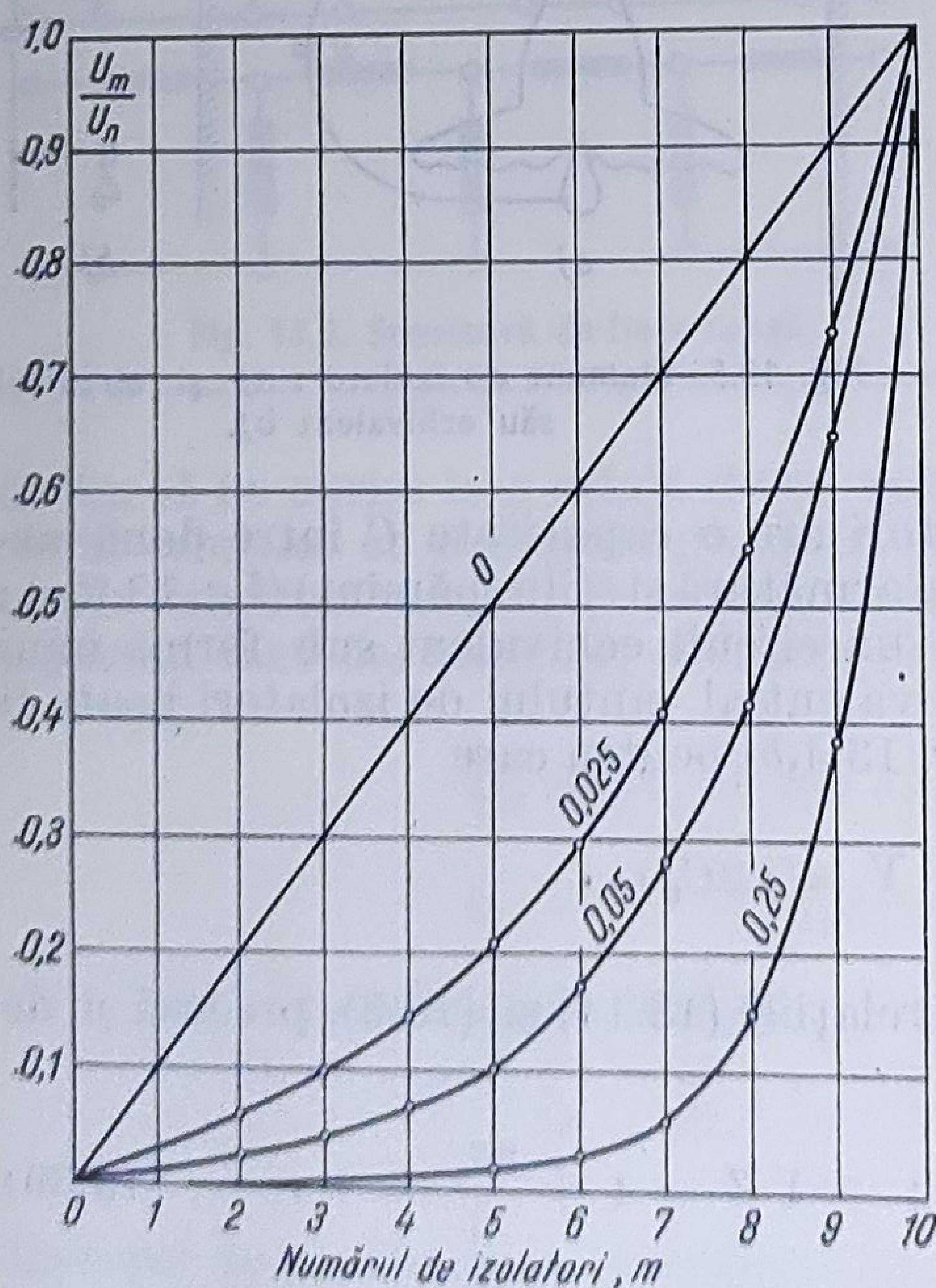


Fig. 13.6. Repartiția tensiunii pe un lanț de izolatori.

cît raportul $\frac{C_0}{C}$ este mai mic cu atît distribuţia tensiunii pe lanţul de izolatori se apropie mai mult de o dreaptă.

Diferenţa de potenţial aplicată unui element al lanţului de izolatori este

$$\Delta U_m = U_m - U_{m-1} = \frac{U}{\operatorname{sh} \alpha_n} [\operatorname{sh} \alpha m - \operatorname{sh} \alpha (m-1)],$$

numărătoarea făcîndu-se de sus în jos. Pentru ultimul izolator ($m = n$) se obţine

$$\Delta U_m = U\left[1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha (n-1)}{\operatorname{sh} \alpha n}\right]. \qquad (13.32)$$

Pentru izolatoare foarte lungi ($n \gg$) se poate lua $\operatorname{sh} \alpha n = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha n}$ şi relaţia (4.125) devine

$$\frac{\Delta U_m}{U} = 1 - \varepsilon^{-\alpha},$$

de unde rezultă, că diferenţa de potenţial la care este supus ultimul izolator este independentă de numărul elementelor lanţului de izolatori; în consecinţă, este inutil a mări numărul elementelor unui lanţ de izolatori peste o anumită limită compatibilă cu buna funcţionare a liniei.

13.1.4.3. Linie electrică defectă. Să considerăm o linie de înaltă tensiune prevăzută cu un conductor de gardă (fig. 13.7). La un moment dat, dintr-un motiv oarecare (trăznet, punere la pămînt a unei faze etc.), din cauza capacităţii liniei, sau din cauza altor legături, apare un curent de scurgere la pămînt prin stîlp. Din cauza rezistenţei mari de punere la pămînt a stîlpului, R_s, poate să apară la baza stîlpului o tensiune mare. Din cauza prezenţei conductorului de gardă, prin care se poate scurge în ambele părţi ale liniei o parte din curentul de punere la pămînt, această tensiune este mult redusă. Căile de curent constituie un circuit lanţ, sub forma unui cuadripol în T, care are impedanţele longitudinale $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = R_c$ (rezistenţa conductorului de gardă între doi stîlpi) şi impedanţa transversală $\frac{1}{\underline{Y}} = R_s$. Dacă linia este lungă*, atunci schema echivalentă a punctului de pătrundere a curentului în stîlp este aceea din figura 13.8. Relaţia (6.137) ne dă imediat valoarea impedanţei caracteristice. Linia

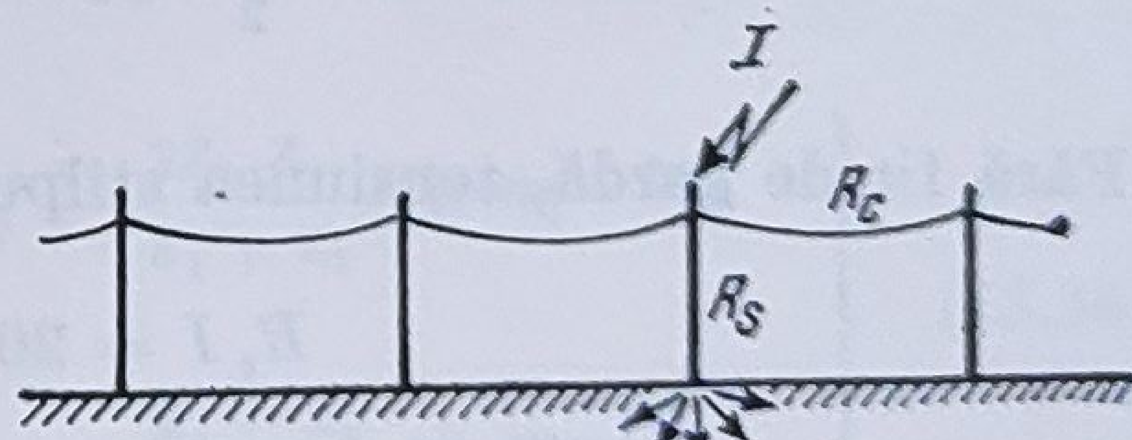


Fig. 13.7. Linie electrică cu fir conductor de gardă.

* Înlocuită printr-un lanţ de cuadripoli.

fiind considerată ca fiind formată din cuadripoli în T, pentru care $\underline{C} = \underline{Y}$, $\underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Y}$, se obține

$$\underline{Z}_c' = \underline{Z}_e' = \sqrt{R_e R_s}\sqrt{2 + \frac{R_e}{R_s}}. \qquad (13.33)$$

Tensiune a stîlpului față de pămînt este

$$U = \frac{1}{2} Z_c' I ;$$

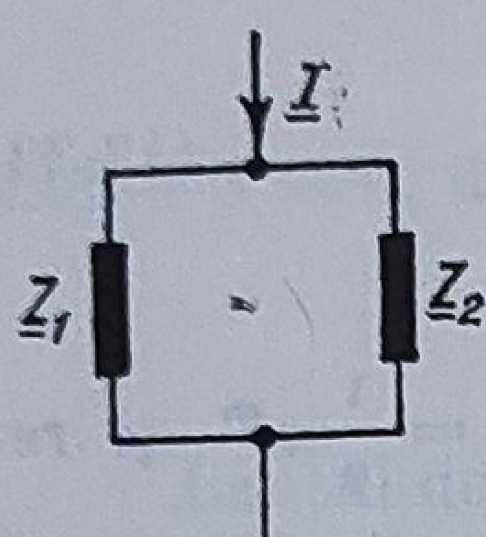


Fig. 13.8. Circuitul echivalent la locul defectului.

prin stîlp trece curentul

$$I_s = \frac{U}{R_s}$$

iar prin conductorul de gardă se scurge, în fiecare parte, curentul $I_c = \frac{1}{2}(I - I_s)$.

Pentru a ne da seama de efectul conductorului de gardă, să examinăm următorul exemplu numeric :* $R_c = 1\Omega$, $R_s = 20\Omega$, $I = 100$ A. Din relația (13.33) rezultă

$$Z_c = \sqrt{20}\sqrt{2 + \frac{1}{20}} = 6{,}4\ \Omega.$$

Avem apoi,

$$U = \frac{1}{2} I Z_c = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 6{,}4 = 320 \text{ V}.$$

Fără fir de gardă, tensiunea stîlpului față de pămînt este

$$R_s I = 20 \times 100 = 2000 \text{ V}.$$

Din cauza conductorului de gardă, prin stîlp se va scurge numai curentul

$$I_s = \frac{U}{R_s} = \frac{320}{20} = 16 \text{ A} ;$$

firul de gardă conduce în cele două părți curenți egali cu

$$\frac{1}{2}(I - I_s) = 42 \text{ A}.$$

* Vezi [161] pag. 419.

13.2. LANȚURI DE CUADRIPOLI FUNCȚIONÎND ÎN REGIM TRANZITORIU

13.2.1. ECUAȚIILE UNUI LANȚ DE CUADRIPOLI FUNCȚIONÎND ÎN REGIM TRANZITORIU

În cazul cuadripolilor pasivi și liniari, dacă condițiile inițiale ale variabilelor — curenți și tensiuni — sînt nule, atunci ecuațiile generale ale cuadripolilor la funcționarea în regim tranzitoriu au aceeași structură ca și în cazul funcționării în regim permanent. Ele se obțin aplicînd transformarea lui LAPLACE (10.30) ecuațiilor generale ale cuadripolului (6.103). Se găsește astfel

$$\mathcal{L}u_1 = A\mathcal{L}u_2 + B\mathcal{L}i_2,$$

$$\mathcal{L}i_1 = C\mathcal{L}u_2 + D\mathcal{L}i_2,$$

între coeficienții acestui cuadripol existînd evident relația de legătură (6.104)

$$AD - BC = 1.$$

Pentru un lanț de cuadripoli, pasiv, liniar și omogen, ecuațiile cuadripolului de rangul m din structură vor avea forma

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}u_{m-1} &= A\mathcal{L}u_m + B\mathcal{L}i_m, \\ \mathcal{L}i_{m-1} &= C\mathcal{L}u_m + D\mathcal{L}i_m, \end{aligned}\right\} \qquad (13.34)$$

notațiile fiind aceleași ca în cazul regimului permanent*. Ecuațiile (13.34) avînd aceeași structură ca și ecuațiile (13.1) din cazul regimului permanent, rezolvarea lor se va face în același mod ca și în cazul regimului permanent. Se va găsi astfel:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}u_m &= \left(\operatorname{ch} m\gamma + \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\operatorname{sh} m\gamma\right)\mathcal{L}u_0 - \frac{2Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}\operatorname{sh} m\gamma \cdot \mathcal{L}i_0, \\ \mathcal{L}i_m &= -\frac{2}{Z_1 + Z_2}\operatorname{sh} m\gamma \cdot \mathcal{L}u_0 + \left(\operatorname{ch} m\gamma - \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\operatorname{sh} m\gamma\right)\mathcal{L}i_0. \end{aligned}\right\} \qquad (13.35)$$

Scriind acum mărimile de *intrare* în funcție de mărimile de *ieșire*, ecuațiile (13.35) devin

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}u_0 &= \left(\operatorname{ch} m\gamma - \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\operatorname{sh} m\gamma\right)\mathcal{L}u_m + \frac{2Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}\operatorname{sh} m\gamma \cdot \mathcal{L}i_0, \\ \mathcal{L}i_0 &= \frac{2}{Z_1 + Z_2}\operatorname{sh} m\gamma \cdot \mathcal{L}u_m + \left(\operatorname{ch} m\gamma + \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\operatorname{sh} m\gamma\right)\mathcal{L}i_0. \end{aligned}\right\} \qquad (13.36)$$

---

* Vezi p. 13.1.2.1.

În cazul unui lanț de cuadripoli care este omogen și simetric, ecuațiile (13.35) și (13.36) devin

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}u_m &= \mathfrak{L}u_0 \text{ ch } m\gamma - Z_c \mathfrak{L}i \text{ sh } m\gamma, \\ \mathfrak{L}i_m &= -\frac{\mathfrak{L}u_0}{Z_c} \text{ sh } m\gamma + \mathfrak{L}i_0 \text{ ch } m\gamma \end{aligned}\right\} \quad (13.37)$$

și

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}u_0 &= \mathfrak{L}u_m \text{ ch } m\gamma + Z_c \mathfrak{L}i_0 \text{ sh } m\gamma, \\ \mathfrak{L}i_0 &= \frac{\mathfrak{L}u_m}{Z_c} \text{ sh } m\gamma + \mathfrak{L}i_0 \text{ ch } m\gamma. \end{aligned}\right\} \quad (13.38)$$

Trebuie să observăm, că în toate relațiile scrise în acest paragraf mărimile respective sînt scrise *operațional*, adică de forma*

$$a + sb,$$

în care a și b sînt numere reale, iar $s = \sigma + j\omega$, cu condiția $\mathfrak{R}(s) > 0$.

13.2.2. CAZURI PARTICULARE

13.2.2.1. **Lanț de cuadripoli cuplat la ieșire pe o impedanță Z(s).** Pentru simplificare, să considerăm ecuațiile (13.37) de funcționare ale unui lanț de cuadripoli pasivi, omogen și simetric și să presupunem că la ieșire el are legată o impedanță oarecare Z(s). În acest caz

$$\mathfrak{L}u_m = Z(s)\, \mathfrak{L}i_n$$

și ecuațiile (13.37) dau

$$\mathfrak{L}u_0 \text{ ch } n\gamma - Z_c \mathfrak{L}i_0 \text{ sh } n\gamma = -\frac{Z(s)}{Z_c} \mathfrak{L}u_0 \text{ sh } n\gamma + Z(s)\, \mathfrak{L}i_0 \text{ ch } n\gamma.$$

de unde rezultă

$$\mathfrak{L}i_0 = \frac{Z_c \text{ch } n\gamma + Z(s) \text{ sh} n\gamma}{Z(s) \text{ ch} n\gamma + Z_c \text{sh } n\gamma} \cdot \frac{\mathfrak{L}u_0}{Z_c}.$$

Introducînd această valoare în ecuațiile (13.37), după efectuarea unor calcule elementare se obține

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}u_m &= \frac{Z(s) \text{ sh } (n-m)\gamma + Z_c \text{ sh } (n-m)\gamma}{Z(s) \text{ch } n\gamma + Z_c \text{ sh } n\gamma} \cdot \mathfrak{L}\, u_0, \\ L i_m &= \frac{Z(s) \text{ sh } (n-m)\gamma + Z_c \text{ ch } (n-m)\gamma}{Z(s) \text{ ch } n\gamma + Z_c \text{ sh } n\gamma} \cdot \frac{\mathfrak{L}u_0}{Z_c}. \end{aligned}\right\} \quad (13.39)$$

---

* Vezi 10.4.1.

Ecuațiile (13.39) sînt suficiente pentru rezolvarea oricărei probleme de regim tranzitoriu în funcționarea unui lanț de cuadripoli pasivi, simetric și omogen, obținîndu-se răspunsul la bornele de ieșire ale cuadripolului de rangul m din lanț, atunci cînd la bornele de intrare în lanț se aplică un semnal u_0 oarecare.

13.2.2.2. Lanț de cuadripoli în gol la ieșire, căruia i se aplică la intrare o tensiune oarecare. Considerînd tot cazul lanțului de cuadripoli pasiv, omogen și simetric, făcînd în relațiile (13.39)

$$Z\ (s) = \infty$$

se obține:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}u_m &= \frac{\operatorname{ch}(n-m)\ \gamma}{\operatorname{ch} n\ \gamma}\ \mathcal{L}u_0, \\ \mathcal{L}i_m &= \frac{\operatorname{sh}(n-m)\ \gamma}{\operatorname{ch}\ n\ \gamma}\ \frac{\mathcal{L}u_0}{Z_c}. \end{aligned}\right\} \tag{13.40}$$

În particular, la ieșirea din lanțul de cuadripoli, $m=n$, vom avea

$$\mathcal{L}u_n = \frac{\mathcal{L}u_0}{\operatorname{ch} n\gamma} \quad \text{și} \quad \mathcal{L}i_n = 0.$$

13.2.2.3. Lanț de cuadripoli în scurtcircuit la ieșire, căruia i se aplică la intrare o tensiune oarecare. Pentru lanțul de cuadripoli pasiv, simetric și omogen, din ecuațiile (13.39), în care se face de data aceasta

$$Z\ (s) = 0,$$

se obține

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}u_m &= \frac{\operatorname{sh}(n-m)\ \gamma}{\operatorname{sh} n\gamma}\ \mathcal{L}u_0, \\ \mathcal{L}i_m &= \frac{\operatorname{ch}(n-m)\ \gamma}{\operatorname{sh} n\gamma}\ \frac{\mathcal{L}u_0}{Z_c}. \end{aligned}\right\} \tag{13.41}$$

La ieșirea din lanțul de cuadripoli, $m=n$, se obține

$$\mathcal{L}u_n = 0 \quad \text{și} \quad \mathcal{L}i_n = \frac{\mathcal{L}u_0}{Z_0 \operatorname{sh}\ n\ \gamma},$$

ceea ce verifică ipoteza făcută.

13.2.2.4. Lanț de cuadripoli cuplat la ieșire pe impedanța sa caracteristică și căruia i se aplică la intrare o tensiune oarecare. Considerînd același lanț de cuadripoli, simetric și omogen, dacă în ecuațiile (13.39) se face

$$Z\ (s) = Z_c,$$

ecuaţiile respective devin

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}u_m &= \frac{\mathcal{L}u_0}{\operatorname{ch} m\gamma + \operatorname{sh} m\gamma} = \mathcal{L}u_0 \varepsilon^{-m\gamma} .\\ \mathcal{L}i_m &= \frac{1}{\operatorname{ch} m\gamma + \operatorname{sh} m\gamma} \cdot \frac{\mathcal{L}u_0}{Z_c} = \frac{\mathcal{L}u_0}{Z_c} \varepsilon^{-m\gamma} .\end{aligned}\right\} \tag{13.42}$$

Trebuie să observăm că şi în regimul tranzitoriu

$$\frac{\mathcal{L}u_m}{\mathcal{L}i_m} = Z_c ,$$

ca şi în cazul regimului permanent şi că, şi în acest caz, nu există undă reflectată.

1.3.2.3. EXEMPLE DE APLICAŢIE

13.2.3.1. **Aplicarea unei tensiuni treaptă la bornele unui lanţ de cuadripoli, omogen şi simetric, format din impedanţe fără pierderi şi cuplat la ieşire pe o impedanţă neinductivă.** Pentru a arăta modul de rezolvare a regimului tranzitoriu de funcţionare a unui lanţ de cuadripoli, se va considera cazul simplu a unui lanţ de cuadripoli identici, fiecare format dintr-o bobină de inductanţă L şi un condensator de capacitate C (fig. 13.9). Acest lanţ de cuadripoli este cuplat la ieşire pe o

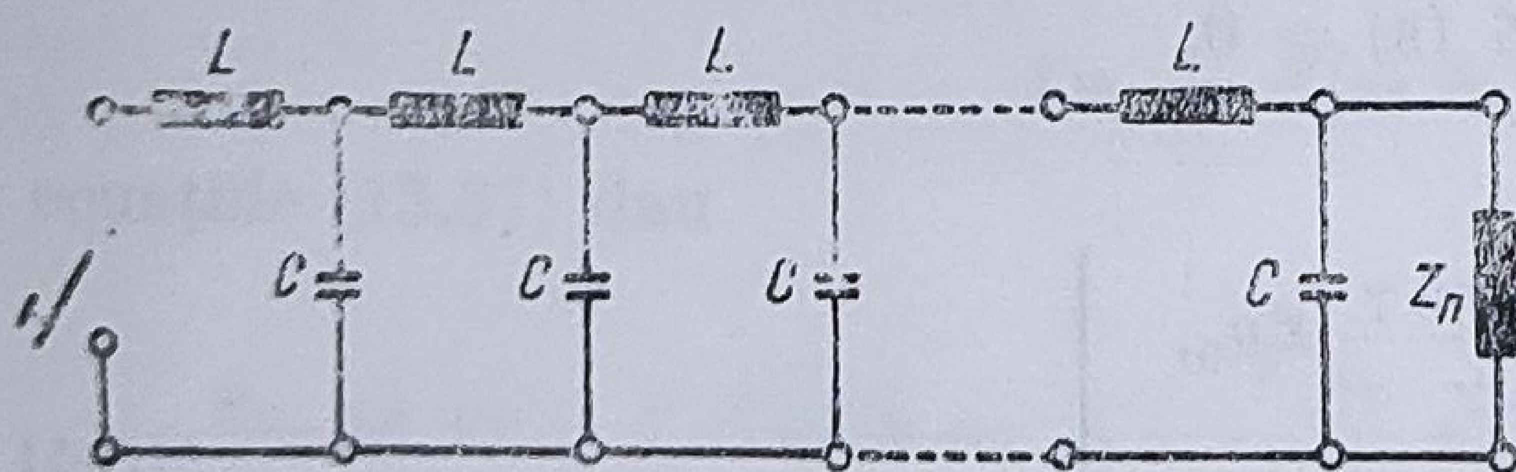


Fig. 13.9. Lanţ de cuadripoli nedisipativ.

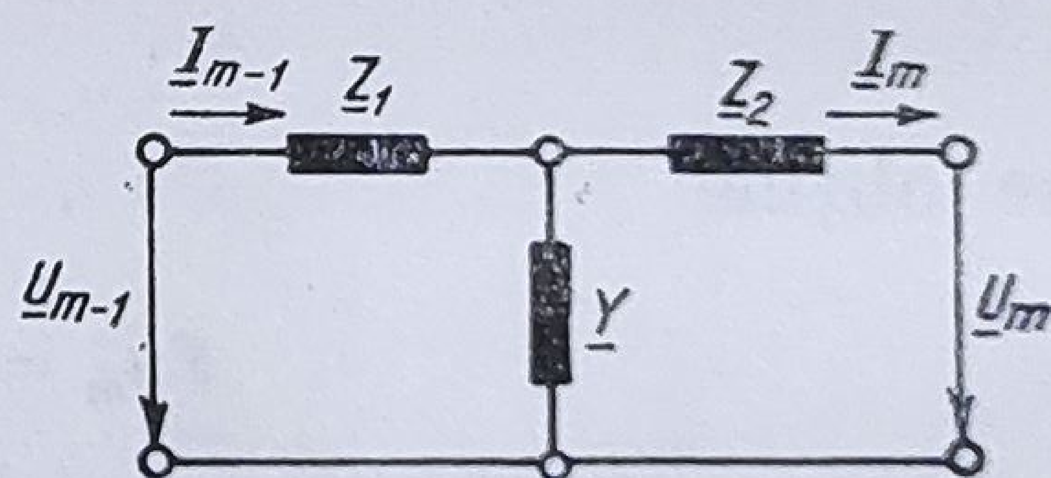


Fig. 13.10. Circuitul echivalent în T a unui cuadripol gama întors.

impedanţă neinductivă Z_n şi la timpul $t=0$ i se aplică tensiunea constantă E. Se presupune că la timpul $t=0$, valorile iniţiale ale curentului şi tensiunii sînt nule*. Ne propunem să găsim expresia tensiunii şi curentului la bornele de ieşire ale cuadripolului de rangul m, respectiv la extremitatea de ieşire a lanţului.

Fiecare celulă din lanţul de cuadripoli poate fi înlocuită cu un cuadripol în T, nesimetric (fig. 13.10) pentru care

$$Z_1 = sL, \qquad Z_2 = 0, \qquad Y = sC,$$

* Cazul particular studiat nu restrînge generalitatea problemei — metoda de urmat fiind aceaşi; se simplifică numai calculele.

astfel încît, parametrii cuadripolului sînt*:

$$\left.\begin{aligned} A &= 1 + Z_1 Y = 1 + s^2 LC, \\ B &= Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y = sL, \\ C &= Y = sC, \\ D &= 1 + Z_2 Y = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (13.43)$$

Ţinînd seama că, în condiţiile problemei expresia imaginii tensiunii este de forma

$$\mathcal{L} u_m = \frac{\mathrm{V(s)}}{\mathrm{s\,W'(s)}},$$

originalul căutat este dat de a doua teoremă a dezvoltării lui HEAVISIDE**

$$u_m = \frac{\mathrm{V(o)}}{\mathrm{W(o)}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{V(s_i)}}{\mathrm{s_i\,W'\,(s_i)}}\, \varepsilon^{s_i t} \quad . \qquad (10.72)$$

În cazul problemei studiate

$$\mathrm{V(s)} = [Z_n \operatorname{ch}(n-m)\gamma + Z_c \operatorname{sh}(n-m)\gamma]\, E,$$

$$\mathrm{W(s)} = Z_n \operatorname{ch} n\gamma + Z_c \operatorname{sh} n\gamma,$$

$$\gamma = \mathrm{f(s)},$$

$$\mathrm{W'(s)} = n(Z_n \operatorname{sh} n\gamma + Z_c \operatorname{ch} n\gamma)\, \frac{\partial \gamma}{\partial \mathrm{s}}.$$

Din relaţia (13.6), ţinînd seama de relaţiile (13.43), rezultă

$$\operatorname{ch} \gamma = 1 + \frac{1}{2} s^2 LC \cdot \qquad (13.44)$$

În consecinţă, pentru $s = 0$, $\operatorname{ch} \gamma = 1$ şi deci $\gamma = 0$, astfel că

$$\mathrm{V(0)} = Z_n E \quad \text{şi} \quad \mathrm{W(0)} = Z_n;$$

rezultă

$$\frac{\mathrm{V\,(o)}}{\mathrm{W(o)}} = E.$$

Să găsim acum rădăcinile ecuaţiei

$$Z_n \operatorname{ch} n\gamma + Z_c \operatorname{sh} n\gamma = 0$$

---

* Vezi 6.4.4.9.
** Vezi 10.4.4.5.

sau

$$\text{th}\, n\gamma = -\frac{Z_n}{Z_c}.$$

Punînd

$$\frac{Z_n}{Z_c}\, \text{j}\, \text{tg}\, \xi \qquad \left(\text{j} = 1\Big|\frac{\pi}{2} = \sqrt{-1}\right) \tag{13.45}$$

se obţine

$$\frac{1}{\text{j}}\, \text{tg}\, \text{j}\, n\, \gamma = -\text{j}\, \text{tg}\, \xi$$

sau

$$\text{tg}\, \text{j}\, n\gamma = \text{tg}\, \xi,$$

de unde, rezultă

$$\gamma_i = -\text{j}\left(\frac{\xi}{r} + \frac{i\pi}{n}\right) = \text{j}\left(\frac{i\pi}{n} - \frac{\xi}{n}\right)\ (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Introducînd această valoare în relaţia (13.44) se obţine

$$\text{ch}\left[\text{j}\left(\frac{i\,\pi}{n} - \frac{\xi}{n}\right)\right] = \cos\left(\frac{i\,\pi}{n} + \frac{\xi}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2}\, s_i^2\, LC,$$

de unde, rezultă

$$s_i^2 = \frac{2}{LC}\left[\cos\left(\frac{i\,\pi}{n} - \frac{\xi}{\pi}\right) - 1\right] = -\frac{4}{LC}\sin^2\left(\frac{i\pi}{n} + \frac{\xi}{n}\right)$$

şi deci

$$s_i = \pm\, \text{j}\, \frac{2}{\sqrt{LC}}\, \sin\left(\frac{i\pi}{n} + \frac{\xi}{n}\right). \tag{13.46}$$

Este uşor de văzut că suma din formula lui HEAVISIDE trebuie făcută pentru valorile lui $i \in (-\infty,\ \infty)$, însă nu toate aceste valori dau soluţii distincte. Într-adevăr, pentru $\pm\, i$ se obţin aceleaşi valori pentru s_i^2. De asemenea, există valori ale lui i pentru care valorile lui s_i^2 încep să se repete ; pentru aceasta trebuie ca

$$\sin^2\left(\frac{i + r}{2n}\,\pi + \frac{\xi}{2n}\right) = \sin^2\left(\frac{i - r}{2n}\,\pi + \frac{\xi}{2n}\right) \tag{13.47}$$

ceea ce are loc pentru*

$$r = 2n.$$

---

* Într-adevăr, din relaţia (13.47) rezultă

$$\frac{i + r}{2n}\,\pi + \frac{\xi}{2n} - \left(\frac{i - r}{2n}\,\pi + \frac{\xi}{2n}\right) = 2\pi$$

de unde $r = 2n$.

Ţinînd seama de cele ce preced, se poate scrie

$$u_m = \frac{V(0)}{W(0)} + \sum_{i=0}^{n} \frac{V(s_i)}{s_i W(s_i)} \varepsilon^{s_i t} + \sum_{i=0}^{n} \frac{V(-s_i)}{-s_i W(-s_i)} \varepsilon^{-s_i t} . \tag{13.48}$$

Avem apoi

$$V(s_i) = [Z_n \operatorname{ch}(n-m)\gamma + Z_c \operatorname{sh}(n-m)\gamma] E =$$

$$= \left[Z_n \operatorname{ch}(n-m)\, j\left(\frac{i\pi}{n} + \frac{\xi}{n}\right) + Z_c \operatorname{sh}(n-m)\left[-j\left(\frac{i\pi}{n} + \frac{\xi}{n}\right)\right]\right] E =$$

$$= \left[Z_n \cos\frac{n-m}{n}(i\pi + \xi) - j Z_c \sin\frac{n-m}{n}(i\pi + \xi)\right] E$$

şi

$$V(s_i) = V(-s_i);$$

într-adevăr, dacă ţinem seama de expresia (13.46) a rădăcinilor lui s_i notînd cu s_i' rădăcina cu semnul plus şi cu s_i'' rădăcina cu semnul minus, atunci

$$s_i = s_i' \quad \text{şi} \quad -s_i = s_i''.$$

Din relaţia (13.44) se deduce

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s} = \frac{s\, LC}{\operatorname{sh}\gamma}$$

şi deci

$$W'(s) = n\, LC\, s \left(Z_n \frac{\operatorname{sh} n\gamma}{\operatorname{sh}\gamma} + Z_c \frac{\operatorname{ch} n\gamma}{\operatorname{sh}\gamma}\right).$$

Însă

$$\operatorname{sh} n\gamma = \operatorname{sh}\left[-j\left(\frac{i\pi}{n} + \frac{\xi}{n}\right) n\right] = -j \sin(i\pi + \xi),$$

$$\operatorname{ch} n\gamma = \operatorname{ch}\left[-j\left(\frac{i\pi}{n} + \frac{\xi}{n}\right) n\right] = \cos(i\pi + \xi),$$

$$\operatorname{sh}\gamma = \operatorname{sh}\left[-j\left(\frac{i\pi}{n} + \frac{\xi}{n}\right)\right] = -j \sin\frac{i\pi + \xi}{n}.$$

Rezultă :

$$s_i W'(s_i) = n\, LC\, s_i^2 \left[Z_n \frac{\sin(i\pi + \xi)}{\sin\frac{i\pi + \xi}{n}} + j Z_c \frac{\cos(i\pi + \xi)}{\sin\frac{i\pi + \xi}{n}} \right]$$

şi este evident

$$sW'(s) = -sW'(-s).$$

În consecinţă, relaţia (13.48) devine

$$u_m = \frac{V(0)}{W(0)} + 2\sum_{i=0}^{n} \frac{V(s_i)}{s_i W'(s_i)} \operatorname{ch} s_i t.$$

Vom avea apoi,

$$\frac{V(s_i)}{s_i W'(s_i)} = -\frac{E}{n} \cdot \frac{Z_n \cos \frac{n-m}{n}(i\pi + \xi) - j Z_c \sin \frac{n-m}{n}(i\pi + \xi)}{4 \sin^2 \frac{i\pi + \xi}{2n} \cdot \dfrac{[Z_n \sin(i\pi + \xi) + j Z_c \cos(i\pi + \xi)]}{\sin \frac{i\pi + \xi}{n}}}.$$

Această relaţie se mai poate simplifica ; într-adevăr, după efectuarea unor calcule simple avem

$$\frac{4 \sin \frac{i\pi + \xi}{2n}}{\sin \frac{i\pi + \xi}{n}} = 2 \operatorname{tg} \frac{i\pi + \xi}{2n},$$

$$Z_n \cos \frac{n-m}{n}(i\pi + \xi) - j Z_c \sin \frac{n-m}{n}\left(i\pi + \xi\right) =$$

$$= j \frac{Z_c}{\cos \xi} \cos\left(\frac{n-m}{n} i\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{m}{n}\xi\right).$$

$$Z_n \sin(i\pi + \xi) + j Z_c \cos(i\pi + \xi) = (-1)^i j \frac{Z_c}{\cos \xi},$$

astfel, că se obţine

$$\frac{V(s_i)}{s_i W(s_i)} = -\frac{E}{n}(-1)^i \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{i\pi + \xi}{2n} \cos\left(\frac{n-m}{n} \cdot i\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{m}{n}\xi\right).$$

Punînd acum

$$\Omega_i = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{i\pi + \xi}{2n},$$

rezultă

$$\operatorname{ch} s_i t = \operatorname{ch} j \Omega_i i t = \cos \Omega_i t.$$

În consecinţă, expresia căutată a tensiunii este

$$u_m = E\left[1 - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \operatorname{ctg} \frac{i\pi + \xi}{2n} \cos\left(\frac{n-m}{n} \cdot i\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{m}{n}\xi\right) \cos \Omega_1 t\right]. \quad (13.49)$$

13.2.3.2. Cazuri particulare. 1. *Lanț de cuadripoli funcționînd în gol la ieșire*. În acest caz $Z_n = \infty$ și din relația (13.45) rezultă $\operatorname{tg}\xi = \infty$ și deci $\xi = \frac{\pi}{2}$. Relația (13.49) devine astfel

$$U_m = E\left[1 - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \operatorname{ctg}\frac{2i+1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cos\frac{n-m}{n}(2i+1)\frac{\pi}{4}\cos\Omega_i t\right]$$

în care

$$\Omega_i = \frac{2}{\sqrt{LC}}\sin\frac{2i+1}{n}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

La extremitatea lanțului de cuadripoli, $m = n$, expresia tensiunii de ieșire este

$$U_n = E\left[1 - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \operatorname{ctg}\left(\frac{2i+1}{n}\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cos\Omega_i t\right].$$

În figura 13.11 au fost date curbele de variație a tensiunii la extremitatea unui lanț de cuadripoli, care modelează o linie de

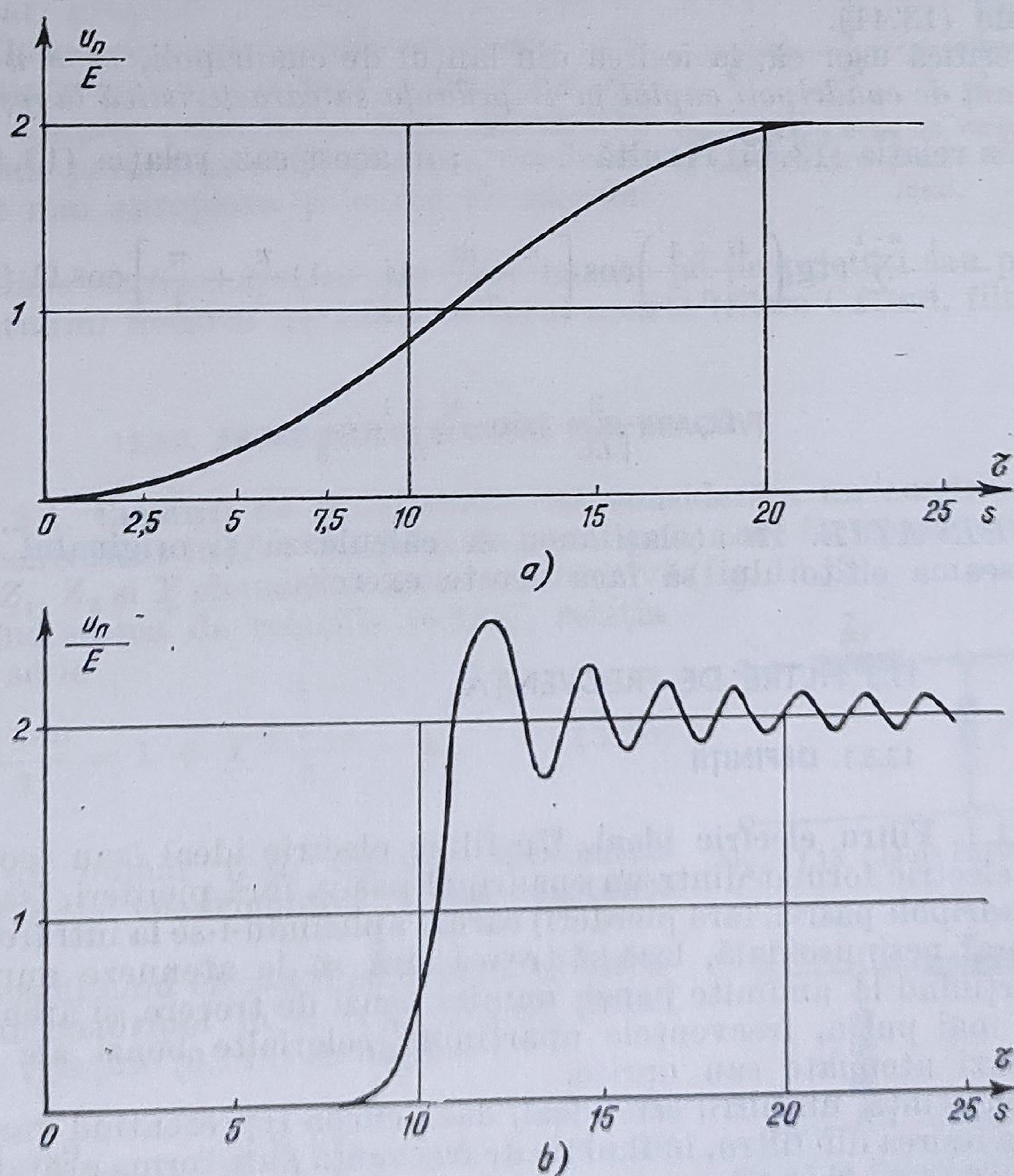


Fig. 13.11. Variația tensiunii la bornele de ieșire ale unui lanț de cuadripoli, la un semnal treaptă: *a)* pentru $n = 1$; *b)* pentru $n = 2$.

1000 km, de 400 kV, căreia i se aplică la intrare o tensiune treaptă $E = 10^6$V, linia fiind în gol*.

Este uşor de văzut că se ajungea la acelaşi rezultat, dacă se căuta originalul primei expresii din relaţiile (13.40).

2. *Lanţ de cuadripoli funcţionînd în scurtcircuit la ieşire.* În acest caz, $Z_n = 0$, $\text{tg}\ \xi = 0$ şi rezultă $\xi = 0$. Relaţia (13.49) devine

$$U_m = E\left[1 - \frac{m}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\text{ctg}\,\frac{i\,\pi}{2n}\sin\frac{im\pi}{n}\cos\Omega_i\,t\right],$$

în care,

$$\Omega_i = \frac{2}{\sqrt{LC}}\sin\frac{4i+1}{n}\cdot\frac{\pi}{8}$$

şi deoarece

$$\frac{V(0)}{W(0)} = \lim_{\gamma\to 0} E\,\frac{\text{sh}\,(n-m)}{\text{sh}\ n\,\gamma} = \left(1 - \frac{m}{n}\right)E.$$

Rezultatul se poate obţine direct, dacă se caută originalul primei expresii din relaţiile (13.41).

Se verifică uşor că, la ieşirea din lanţul de cuadripoli, $m = n$ şi $U_n = 0$.

3. *Lanţ de cuadripoli cuplat pe impedanţa sa caracteristică la ieşire.* Făcînd $Z_n = Z_c$, din relaţia (13.45) rezultă $\xi = \frac{\pi}{4}$; în acest caz, relaţia (13.49) se scrie

$$U_m = E\left[1 - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\text{ctg}\left(\frac{4i+1}{n}\right)\cos\left[\frac{n-m}{n}(4i+1)\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right]\cos\Omega_i\,t,\right]$$

în care

$$\Omega_i = \frac{2}{\sqrt{LC}}\sin\frac{4i+1}{n}\cdot\frac{\pi}{8}.$$

OBSERVAŢIE. În acelaşi mod se calculează şi originalul curenţilor; lăsăm în seama cititorului să facă aceste exerciţii.

13.3 FILTRE DE FRECVENŢĂ

13.3.1. DEFINIŢII

13.3.1.1. **Filtru electric ideal.** Un filtru electric ideal (sau teoretic) este un circuit electric format dintr-un cuadripol pasiv, fără pierderi, (sau dintr-un lanţ de cuadripoli pasivi, fără pierderi) căruia aplicîndu-i-se la intrare o tensiune u_1, în general nesinusoidală, lasă să treacă fără să le atenueze anumite frecvenţe aparţinînd la anumite benzi, numite benzi de trecere, şi atenuează, mai mult sau mai puţin, frecvenţele aparţinînd celorlalte benzi ale spectrului, numite benzi atenuate sau oprite.

În consecinţă, un filtru este ideal, dacă curba reprezentînd variaţiile tensiunii u_2, la ieşirea din filtru, în funcţie de frecvenţa f are forma arătată în figura 13.12.

* Vezi [21].

Frecvenţele f_1 şi f_2 se numesc frecvenţele de tăiere; în general $f_1 < f_2$.

Dacă $f_1 = 0$, filtrul se numeşte *trece jos*; dacă $f_2 \to \infty$, filtru se numeşte *trece sus*; dacă $f_1 \neq 0$ şi $f_2 \neq \infty$, filtrul se numeşte *trece bandă*; un filtru trece jos combinat într-un anumit mod cu un filtru trece sus, realizează un filtru *opreşte-bandă*.

13.3.1.2. **Filtru electric real.** Un filtru electric real sau un filtru de frecvenţă real este un circuit electric format dintr-un cuadripol pasiv (sau dintr-un lanţ de cuadripoli pasivi) căruia, aplicîndu-i-se la intrare o tensiune nesinusoidală u_1, lasă să treacă cu o slabă atenuare undele avînd o anumită frecvenţă şi atenuează foarte mult undele a căror frecvenţă aparţine restului spectrului de frecvenţă al undei de tensiune.

În cazul unui filtru electric real, nu se poate realiza niciodată curba ideală din figura 13.12. Pentru a se obţine o curbă cît mai apropiată de cea ideală se fac diverse combinaţii de circuite electrice. Există astfel, o mare diversitate de filtre electrice reale, în raport cu problema ce trebuie rezolvată.

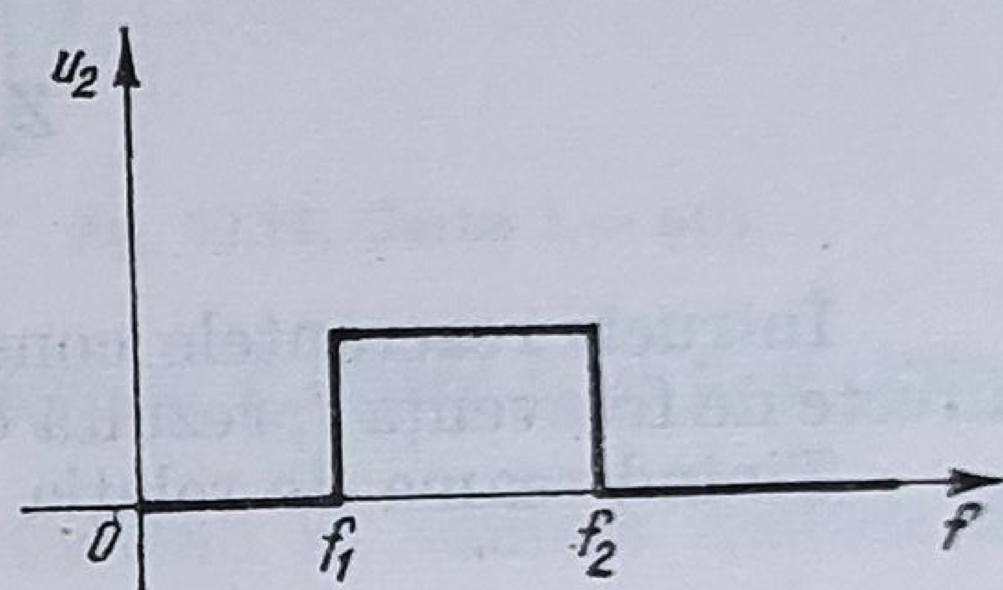


Fig. 13.12. Curba de variaţie a tensiunii la bornele de ieşire în cazul unui filtru ideal.

Filtrele electrice reale pot fi clasificate în două mari grupe:

a) Filtre multicelulare pur reactive sau filtre compuse dintr-un anumit număr de celule sau semicelule simple, cuplate în lanţ, ansamblul acestor celule permiţînd obţinerea unei curbe de răspuns cît mai apropiate de curba de răspuns ideală.

b) Filtre electrice diverse sau filtre bazate pe proprietăţi sau pe structuri speciale, studiul fiecărui tip fiind cu totul aparte (filtre CAUER, filtre cu cuarţ etc.) *.

13.3.2. FILTRE MULTICELULARE PUR REACTIVE

13.3.2.1. **Condiţii de funcţionare.** Să considerăm un cuadripol în T (sau circuitul echivalent în T a lanţului de cuadripoli) care formează un filtru electric şi fie $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ şi $\underline{Y}$ elementele sale constituitive (fig. 13.13).

Ţinînd seama de relaţiile (6.139), relaţia (13.6) se scrie

$$\operatorname{ch} \underline{\gamma} = \frac{\underline{A} + \underline{D}}{2} = 1 + \underline{Y}\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2} = \lambda', \qquad (13.50)$$

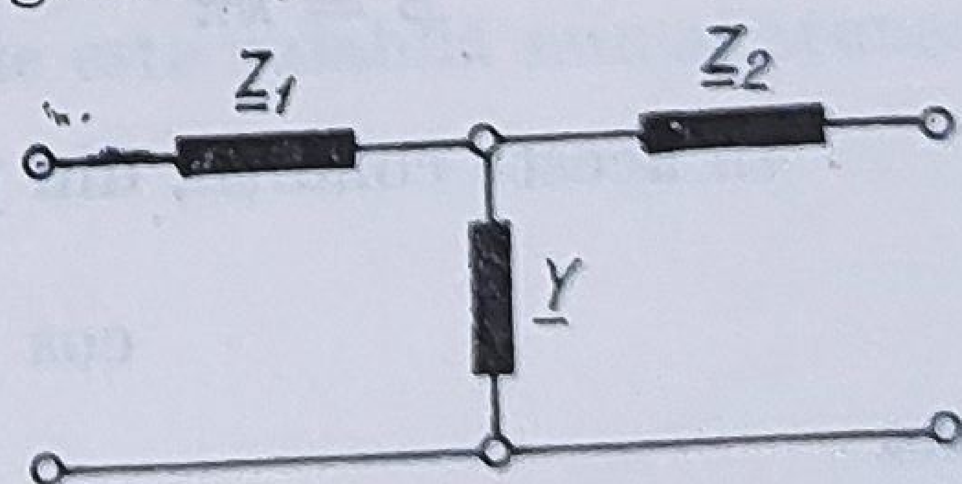


Fig. 13.13. Celulă de filtru electric în T.

λ' fiind un număr real, întrucît elementele constitutive ale cuadripolului T sînt reactanţe pure.

În cazul cînd circuitul echivalent al filtrului este un cuadripol în π (fig. 13.14), ţinînd seama de relaţiile (6.141) se obţine

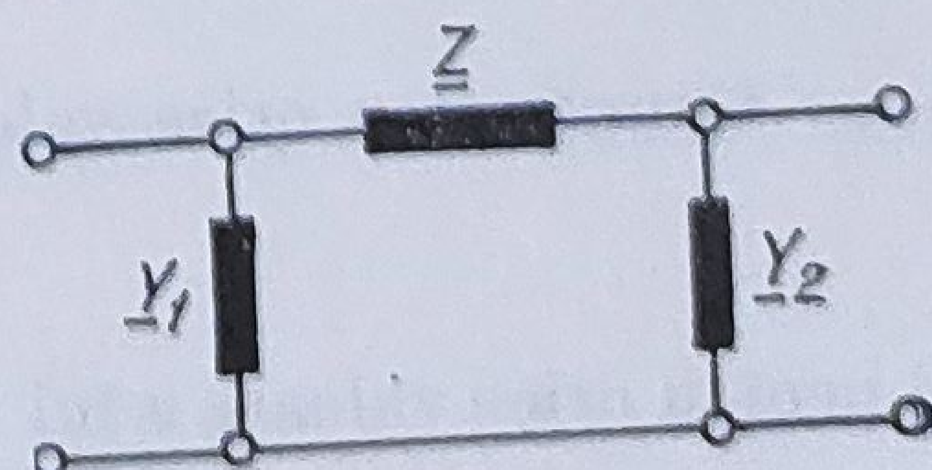


Fig. 13.14. Celulă de filtru electric în π.

$$\operatorname{ch} \underline{\gamma} = \frac{\underline{A} + \underline{D}}{2} = 1 + \underline{Z}\frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{2} = \lambda''. \qquad (13.51)$$

---

* Vezi pentru aceasta [77] sau [265].

În cazul cînd cuadripolii sînt şi simetrici, se obţine, pentru ambele tipuri de cuadripoli aceeaşi expresie; pentru ch $\underline{\gamma}$ şi anume

$$\text{ch}\ \underline{\gamma} = \underline{A} = 1 + \underline{Z}\,\underline{Y} = \lambda. \tag{13.52}$$

Cele două tipuri de cuadripoli se deosebesc însă prin impedanţa lor caracteristică şi anume,

— pentru circuitul în T, ţinînd seama de relaţiile (6.139),

$$\underline{Z}_{cT} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}}\ \sqrt{2 + \underline{Y}\,\underline{Z}} \tag{13.53}$$

— pentru circuitul în π, ţinînd seama de relaţiile (6.141),

$$\underline{Z}_{c\pi} = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2 + \underline{Y}\,\underline{Z}}}. \tag{13.54}$$

Întrucît reactanţele constitutive ale cuadripolului (T sau π) sînt funcţii directe de frecvenţa f, rezultă că şi λ este o funcţie de această frecvenţă.

Ţinînd seama de relaţia (13.14), expresia (13.50) poate fi scrisă*

$$\text{ch}\ \underline{\gamma} = \text{ch}\ \alpha \cos\beta + \text{j}\ \text{sh}\ \alpha \sin\beta = \lambda,$$

de unde, separînd părţile reale de cele complexe rezultă

$$\text{ch}\ \alpha \cos\beta = \lambda; \qquad \text{sh}\ \alpha \sin\beta = 0. \tag{13.55}$$

A doua din aceste ecuaţii este satisfăcută pentru

$$\alpha = 0, \text{ dacă } \beta \neq k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

sau pentru

$$\beta = k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n), \text{ dacă } \alpha \neq 0.$$

În aceste condiţii, din prima ecuaţie (13.55) rezultă

$$\cos\beta = \lambda, \text{ dacă } \alpha = 0, \tag{13.56}$$

sau

$$\text{ch}\ \alpha = \pm\lambda, \text{ dacă } \beta = k\pi.\ (k = 0, 1, 2 \ldots, n) \tag{13.57}$$

Cum pentru orice valoare a lui β

$$|\cos\beta| \leqslant 1$$

şi pentru orice valoare a lui α

$$\text{ch}\ \alpha \geqslant 1,$$

* Raţionamentul este acelaşi, fie că se aplică relaţiilor (13.50), (13.51) sau (13.52).

rezultă că soluțiile (13.56) ale sistemului (13.55) corespund cazului cînd λ este cuprins în intervalul -1 și $+1$, iar soluțiile (13.55) cazului cînd λ se găsește în afara acestui interval.

Pentru a găsi interpretarea soluțiilor obținute, să figurăm valoarea parametrului λ în funcție de frecvență și să trasăm și dreptele $\lambda = \pm 1$ (fig. 13.15).

În cazul soluțiilor (13.56), atenuarea este nulă; în consecință, curenții alternativi, pentru care frecvențele sînt astfel încît $\lambda \in (-1, 1)$, vor trece prin filtru fără a suferi vreo atenuare a amplitudinii lor. Regiunea în care atenuarea este nulă se numește *domeniul de permeabilitate* a filtrului și ea este cuprinsă între frecvențele f_1 și f_2, f_3 și f_4 (fig. 13.15).

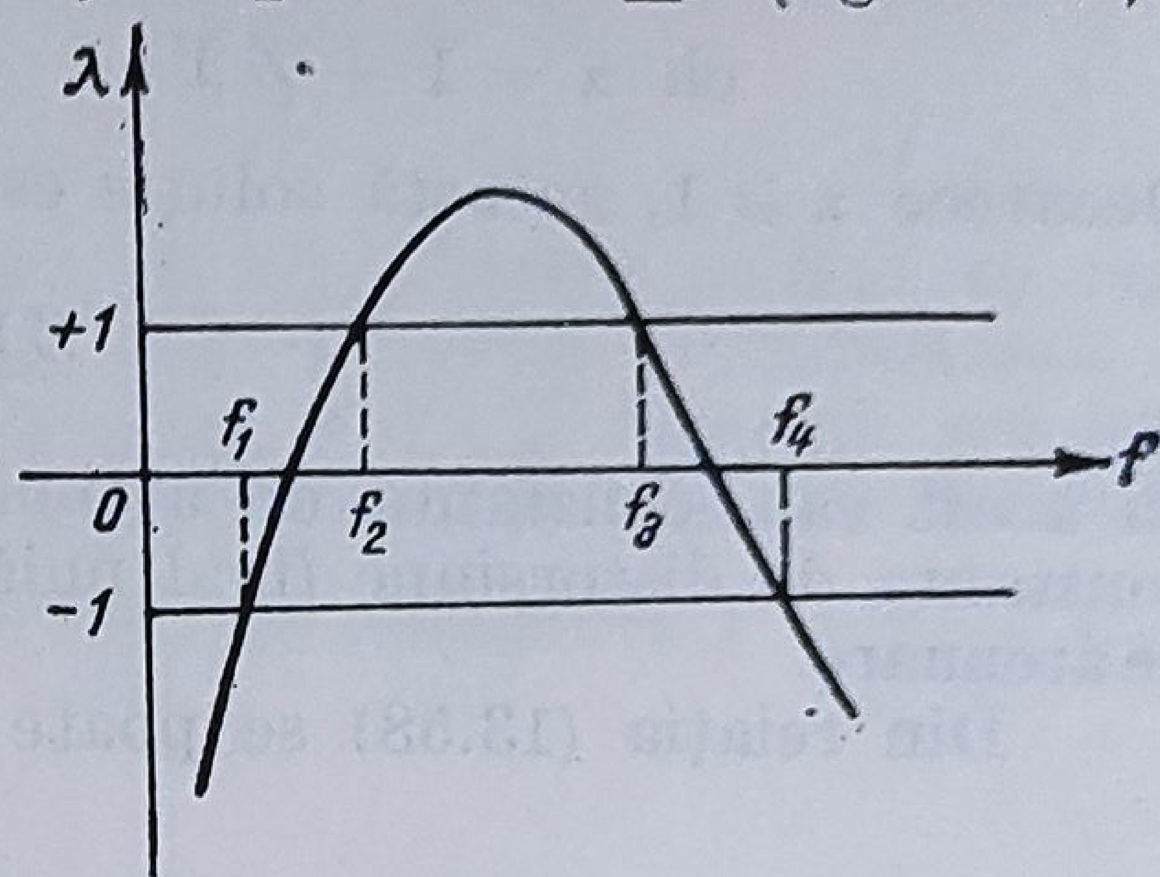


Fig. 13.15. Curba $\lambda = \varphi(f)$.

În cazul soluțiilor (13.57), atenuarea poate avea orice valoare, amplitudinile undelor respective putînd fi reduse oricît de mult, chiar anulate. Această regiune de funcționare a filtrului se numește *domeniul de zăvorîre* și este cuprinsă între frecvențele zero și f_1, între f_2 și f_3 și între f_4 și infinit (fig. 13.15).

Limitele de demarcație între aceste două domenii se numesc *limitele de frecvență* sau *frecvențele de tăiere*.

Funcționarea unui filtru poate fi interpretată și în funcție de impedanțele care alcătuiesc celula sa* . Reluînd relațiile (13.55), pe care să le scriem sub forma

$$\operatorname{ch} \alpha \cos \beta = 1 + \underline{Z}\,\underline{Y}; \quad \operatorname{sh} \alpha \sin \beta = 0,$$

se pot distinge trei cazuri de funcționare a filtrului.

Cazul I corespunde soluțiilor (13.56)

$$\alpha = 0; \quad \cos \beta = 1 + \underline{Z}\,\underline{Y}.$$

Întrucît $-1 \leqslant \cos \beta \leqslant 1$, rezultă că această soluție este valabilă numai atunci, cînd sînt satisfăcute inegalitățile

$$-2 \leqslant \underline{Z}\,\underline{Y} \leqslant 0$$

sau

$$-1 \leqslant \frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{2} \leqslant 0;$$

în acest caz atenuarea este nulă și defazarea undei poate lua orice valoare între $-\pi$ și π.

Scriind relația (13.56) sub forma

$$\sin \frac{\beta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} = \pm \sqrt{-\frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{2}},$$

* Vezi [77] pag. 198

relaţie care poate fi folosită pentru calculul constantei de distorsiune β, se vede că pentru β rezultă două valori egale şi de semn contrar, cuprinse între $-\pi$ şi $+\pi$; semnul dinaintea radicalului trebuie astfel ales, încît β să fie crescător cu frecvenţa.

Cazul II corespunde soluţiilor (13.57)

$$\text{ch}\,\alpha = 1 + \underline{Z}\,\underline{Y}; \qquad \beta = k\pi \qquad (k = 0, 2, 4, \ldots, 2n). \tag{13.58}$$

Deoarece $\alpha \geqslant 1$, această soluţie este valabilă numai atunci cînd

$$\underline{Z}\underline{Y} \geqslant 0.$$

În acest caz, constanta de atenuare ia valoarea dedusă din relaţia (13.58), constanta de distorsiune fiind nulă; funcţionarea filtrului este deci, în bandă de atenuare.

Din relaţia (13.58) se poate deduce

$$\text{sh}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\text{ch}\,\alpha - 1}{2}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}\,\underline{Y}}{2}}.$$

Cazul III corespunde tot soluţiilor (13.57) luate sub forma

$$\text{ch}\,\alpha = -(1 + \underline{Z}\,\underline{Y}); \qquad \beta = \pm k\pi; \qquad (k = 1, 3, 5, \ldots, 2n+1). \tag{13.59}$$

Această soluţie este valabilă numai atunci, cînd

$$\underline{Z}\underline{Y} \leqslant -1.$$

Şi în acest caz filtrul funcţionează în bandă de atenuare.

Relaţia (13.59) poate fi pusă şi sub forma

$$\text{ch}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{-\underline{Z}\,\underline{Y}}{2}}.$$

Pentru diferite valori ale frecvenţei de lucru, expresia $\frac{1}{2}\underline{Z}\,\underline{Y}$ poate lua valori corespunzătoare celor trei cazuri examinate, care definesc condiţiile de lucru ale filtrului la aceste frecvenţe; se pot determina astfel, benzile de trecere şi de atenuare şi frecvenţele de tăiere.

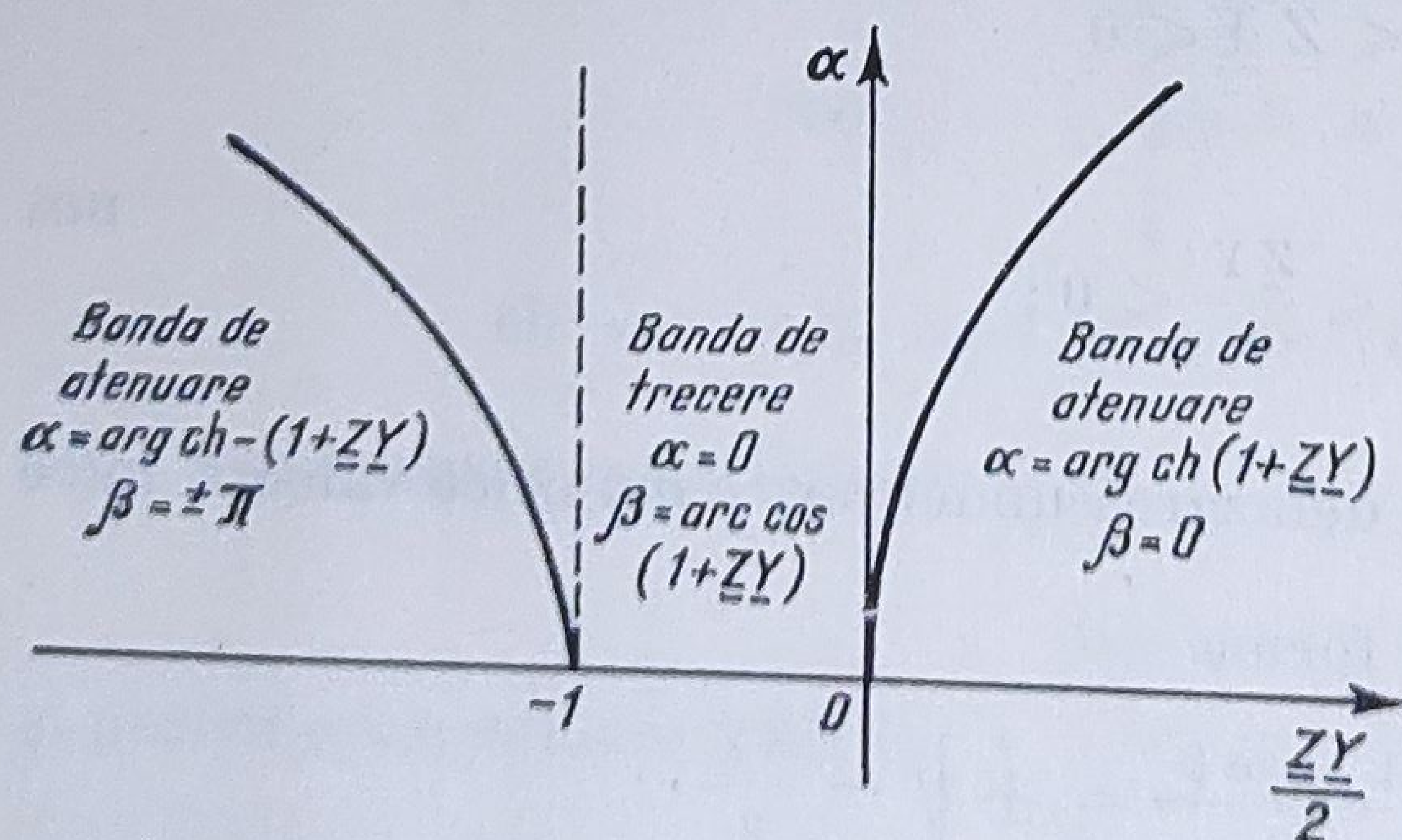


Fig. 13.16. Curbele atenuării $\alpha = \psi\left(\frac{ZY}{2}\right)$ pentru filtrele în lanţ.

În figura 13.16 este reprezentată variaţia constantei de atenuare α în funcţie de mărimea $\frac{1}{2}\underline{Z}\,\underline{Y}$, corespunzătoare tipului de filtre examinat.

Este uşor de văzut, că dacă $\frac{1}{2}\underline{Z}\,\underline{Y}$ ia toate valorile între $-\infty$ şi $+\infty$, atunci

cînd frecvenţa ia valori cuprinse între 0 şi ∞, se relizează toate cele trei cazuri analizate.

Frecvenţele de tăiere corespund frecvenţelor pentru care

$$\frac{1}{2}\underline{Z}\,\underline{Y} + 1 = 0 \qquad \text{şi} \qquad \underline{Z}\,\underline{Y} = 0.$$

13.3.2.2. **Aplicaţie: Filtru trece bandă.** Să considerăm un lanţ cu cuadripoli în care impedanţele $\underline{Z}$ sînt constituite dintr-o bobină de inductanţă L în serie cu un condensator de capacitate C_1 iar admitanţele $\underline{Y}$ dintr-un condensator de capacitate C_2; în aceste condiţii, o celulă în π a filtrului este formată din impedanţa $\underline{Z}_\pi = \mathrm{j}\left(L\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right)$, iar admitanţele respective $\underline{Y} = \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\,C_2\omega$ (fig. 13.17).

Din relaţia (13.52) se deduce imediat

$$\mathrm{ch}\underline{\gamma} = -1 + \frac{1}{2}\frac{C_2}{C_1} - \frac{1}{2}LC_2\omega^2 = \lambda, \tag{13.60}$$

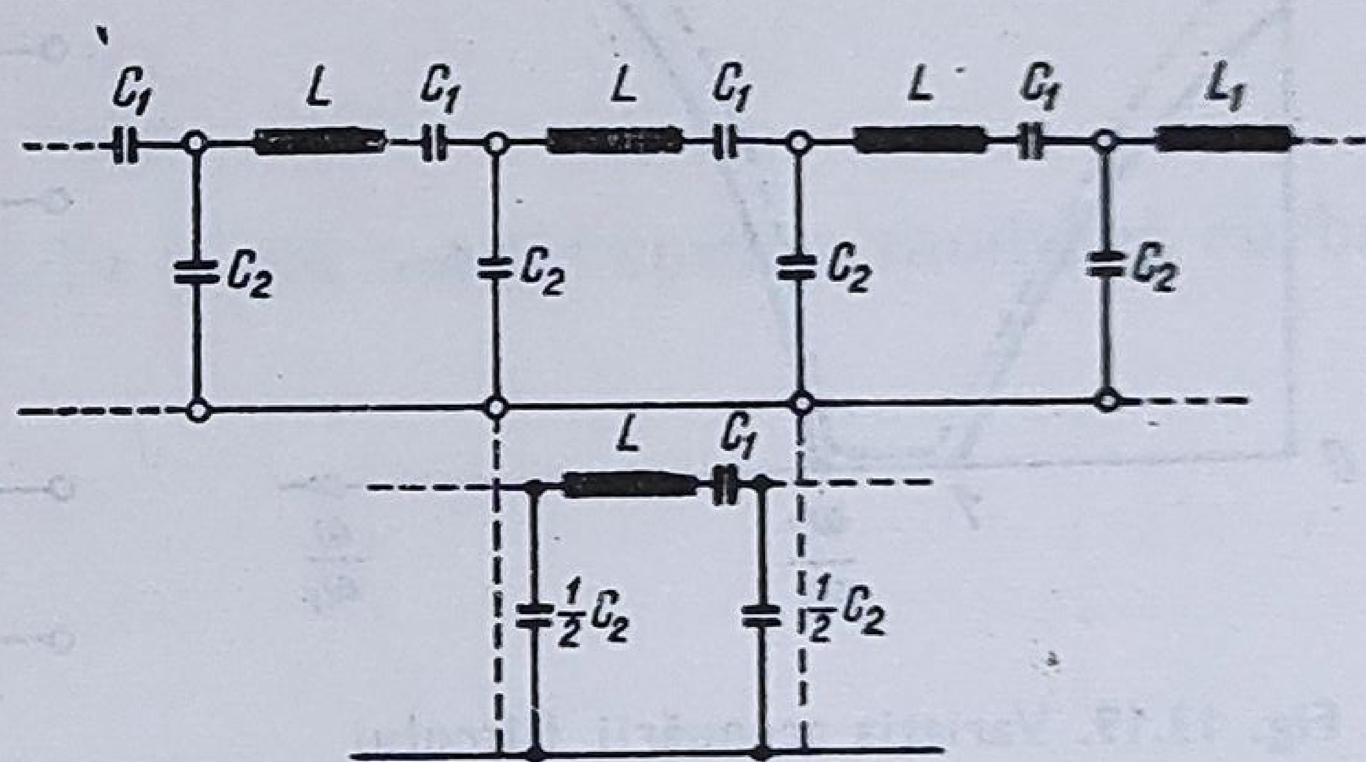


Fig. 13.17. Filtru în lanţ şi celula corespunzătoare.

care se vede că este o mărime reală. De asemenea, este uşor de văzut că funcţia $\lambda = f(\omega)$ este o parabolă cu vîrful pe axa ordonatelor (fig. 13.18).

Frecvenţele de tăiere se obţin din relaţia (13.60) în care se face pe rînd $\lambda = \pm 1$. Se obţine

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}, \tag{13.61}$$

care corespunde rezonanţei laturii longitudinale, şi

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{LC_1} + \frac{4}{LC_2}}. \tag{13.62}$$

În afara benzii de trecere, factorul de atenuare este dat de relaţia (13.58), care, în cazul de faţă, ţinînd seama de relaţiile (13.61) şi (13.62), poate fi scrisă

$$\pm\,\mathrm{ch}\,\alpha = 1 - 2\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - 1}. \tag{13.63}$$

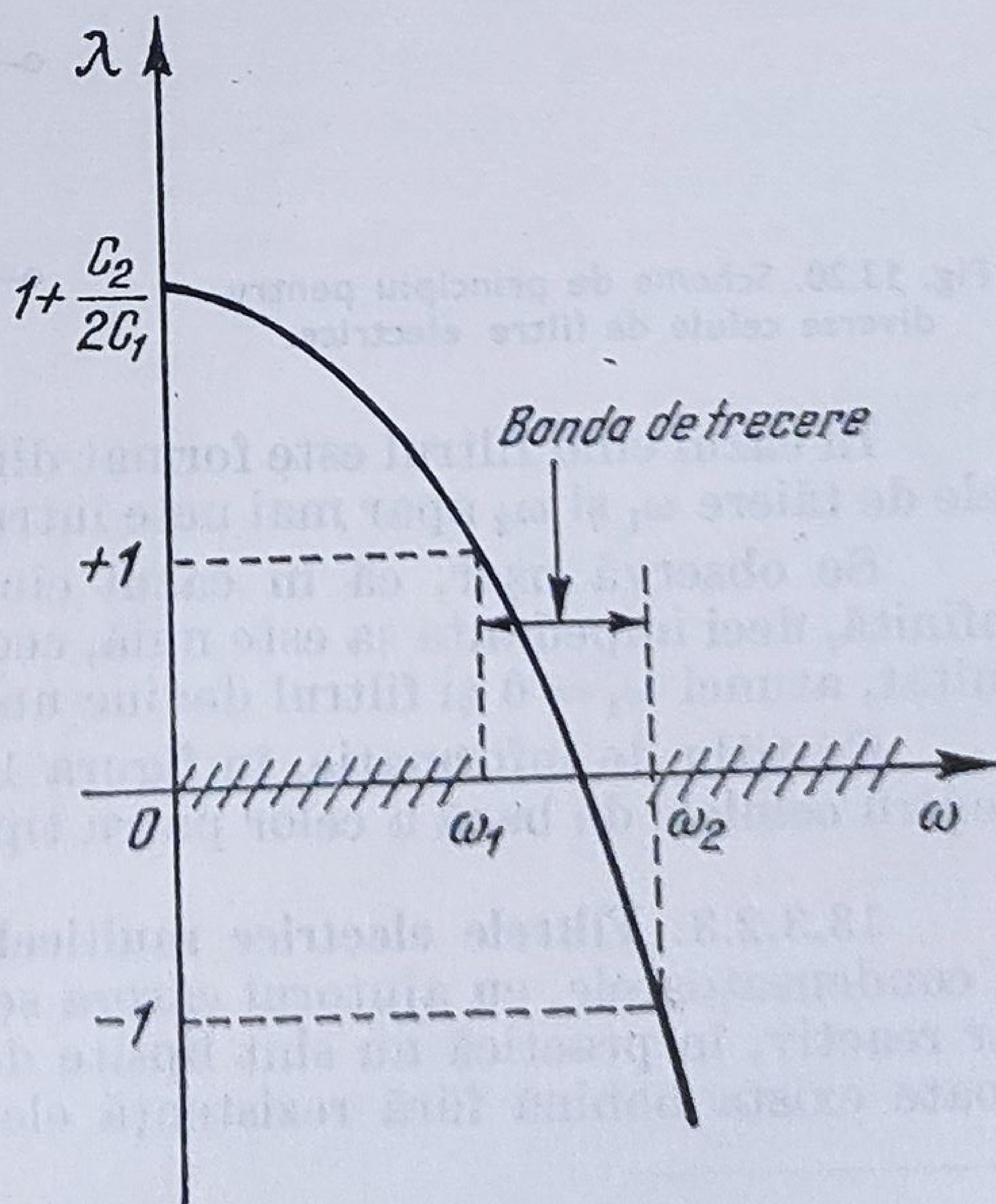


Fig. 13.18. Determinarea benzii de trecere.

Valoarea lui α se obține din tabele sau, dacă este suficientă o anumită aproximație, din dezvoltarea în serie a funcției ch α și reținînd primii doi termeni

$$\operatorname{ch} \alpha = 1 + \frac{1}{2} \alpha^2.$$

Semnul care trebuie luat în relație (13.63) este acela pentru care

$$\operatorname{ch} \alpha > 0.$$

În figura 13.19 este dată variația coeficientului de atenuare în funcție de frecvență.

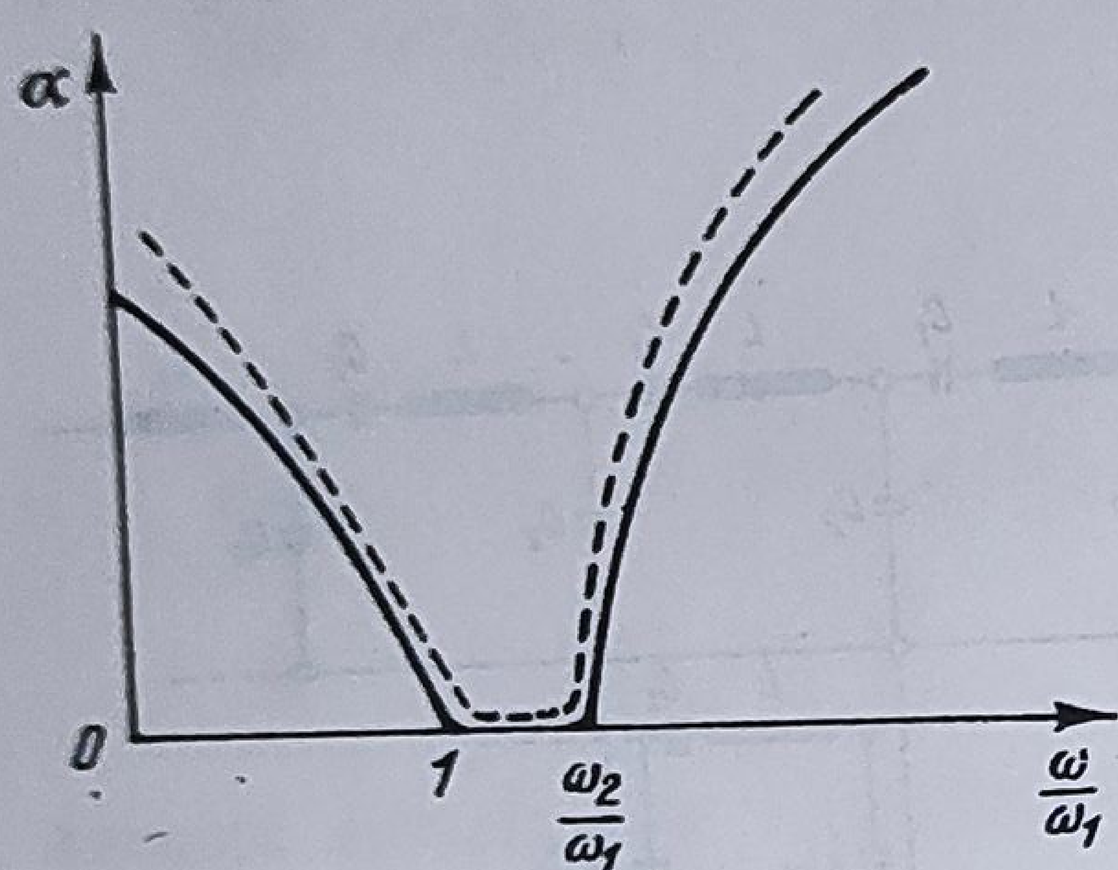


Fig. 13.19. Variația atenuării filtrului în funcție de frecvență.

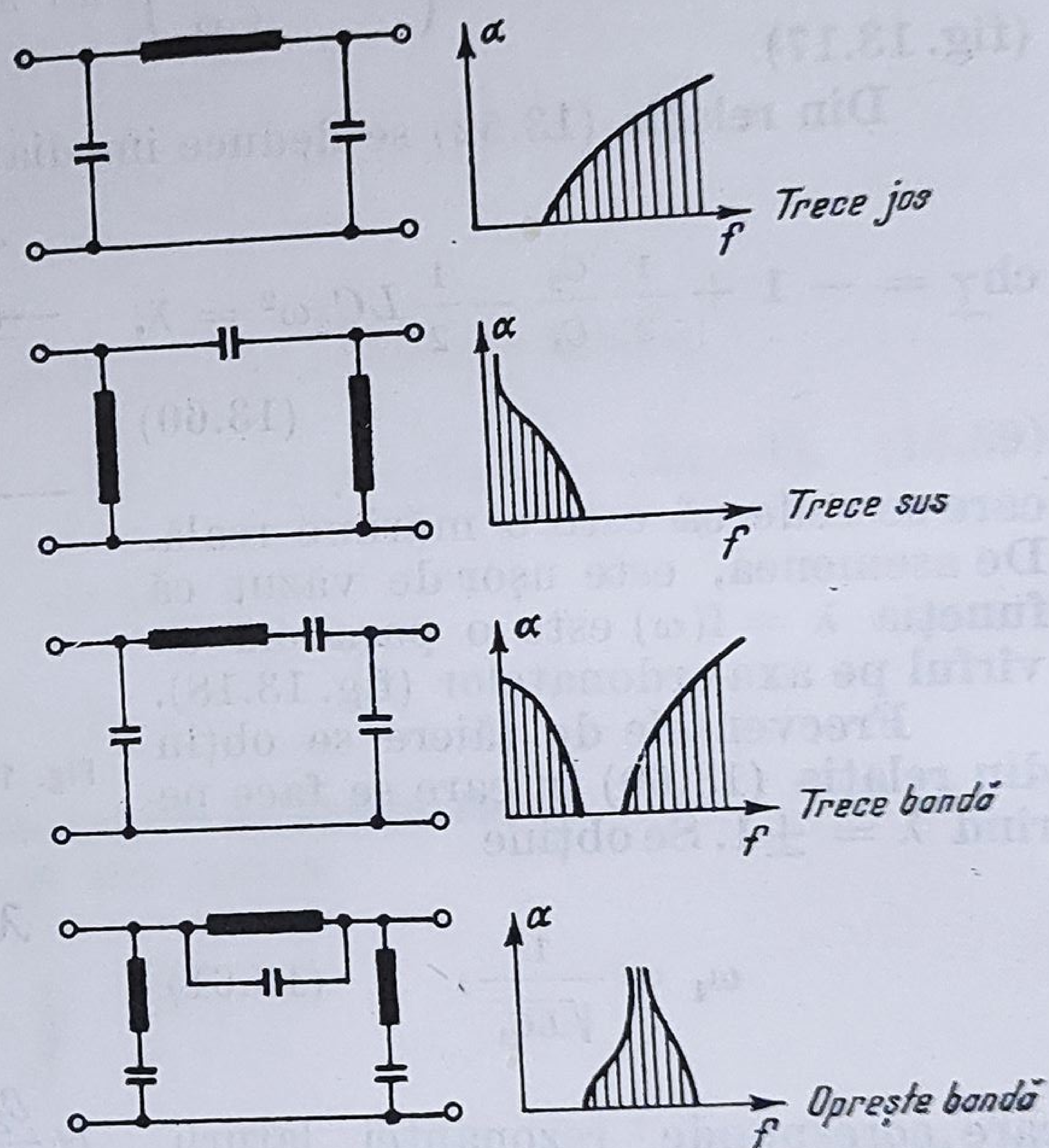


Fig. 13.20. Scheme de principiu pentru diverse celule de filtre electrice.

În cazul cînd filtrul este format dintr-un lanț de n celule identice, frecvențele de tăiere ω_1 și ω_2 apar mai nete întrucît atenuarea este în acest caz $n\alpha$.

Se observă ușor, că în cazul cînd capacitatea condensatorului C_1 este infinită, deci impedanța sa este nulă, ceea ce se poate realiza dacă este scurtcircuitat, atunci $\omega_1 = 0$ și filtrul devine un filtru trece jos* .

Cu titlu de informație, în figura 13.20 au fost date scheme de principiu pentru celulele de bază a celor patru tipuri de filtre în lanț** .

13.3.2.3. **Filtrele electrice multicelulare reactive reale.** Atît bobinele cît și condensatoarele, cu ajutorul cărora se realizează un filtru electric multicelular reactiv, în practică nu sînt lipsite de pierderi active, aceasta deoarece, nu poate exista bobină fără rezistență electrică și dielectric fără pierderi. Din

* Vezi 13.3.1.1.
** Pentru mai multe detalii a se vedea [265].

această cauză, banda de trecere a unui filtru electric nu are o atenuare nulă; valoarea atenuării care apare în banda de trecere se poate calcula, dacă în ecuaţiile (13.50), (13.51) sau (13.52) considerăm că λ nu este un număr real, ci un număr complex de forma

$$\underline{\lambda} = \lambda_1 + j\lambda_2.$$

Sistemul de ecuaţii (13.55) devine în acest caz

$$\operatorname{ch}\alpha\cos\beta = \lambda_1; \qquad \operatorname{sh}\alpha\sin\beta = \lambda_2,$$

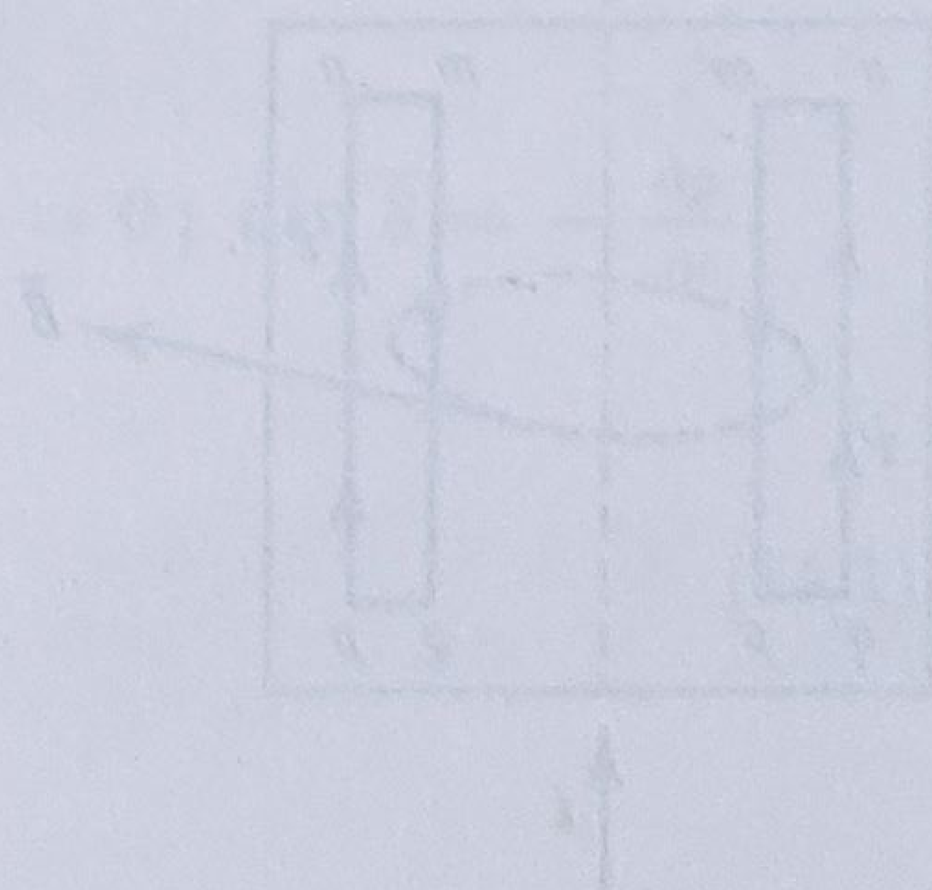
care rezolvat dă

$$\sin^2\beta = \frac{1}{2}(1-\lambda_1^2-\lambda_2^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(1-\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2 + \lambda_2^2}$$

şi

$$\operatorname{sh}\alpha = \frac{\lambda_2}{\sin\beta}.$$

Curba reprezentată punctat în figura 13.19 arată modul cum se modifică curba de atenuare din cauza pierderilor.



Capitolul XIV

PROPAGAREA CURENȚILOR ELECTRICI ȘI CÎMPURILOR ELECTROMAGNETICE ÎN CONDUCTOARE MASIVE, ÎN REGIM ARMONIC SINUSOIDAL. EFECTUL PELICULAR

14.1. DISTRIBUIREA CURENTULUI ELECTRIC ÎNTR-UN CONDUCTÓR MASIV DE FÓRMĂ DREPTUNGHIULARĂ

14.1.1. GENERALITĂȚI

Dacă un conductor masiv de lungime infinită este străbătut de un curent electric variabil în timp, experiența ne arată că acest curent nu se repartizează uniform pe întreaga secțiune a conductorului; el are tendința să se localizeze către periferire, astfel că densitatea de curent este mai redusă în centrul conductorului, decît la periferie. Acest efect este cu atît mai pronunțat, cu cît secțiunea dreaptă a conductorului este mai mare și cu cît variația curentului este mai rapidă. În cazuri limită, un conductor masiv se comportă aproape ca un tub cilindric găurit de același diametru, ceea ne arată că, în asemenea cazuri, materialul nu este bine utilizat. Ca o consecință, atunci cînd este necesar ca materialul de instalații să fie ușor (pe bordul avioanelor, sau al navelor) se utilizează curenți de înaltă frecvență și conductoare tubulare.

Fenomenul poate fi explicat ușor calitativ. Să considerăm un conductor cilindric. Curentul care circulă în acest conductor, paralel cu axa sa și în sensul săgeții (fig. 14.1) produce un cîmp magnetic în însuși interiorul conductorului: liniile de cîmp sînt cercuri concentrice. Curentul variind, va varia și fluxul produs de acest cîmp; din această cauză, în diverse secțiuni longitudinale vor apărea forțe electromotoare de inducție și deci, curenți care vor produce fluxuri ce vor căuta să se opună cauzei care i-a produs, conform legii lui LENZ. Astfel, într-o secțiune oarecare, curenții simetrici $mnpq$ și $m'n'p'q'$ și care se produc de o parte și de alta a axei, au același sens cu sensul curentului principal către periferia conductorului și sens contrar cu acesta către centru. În consecință, ei au tendința să întărească curentul către periferie și să-l micșoreze către centru.

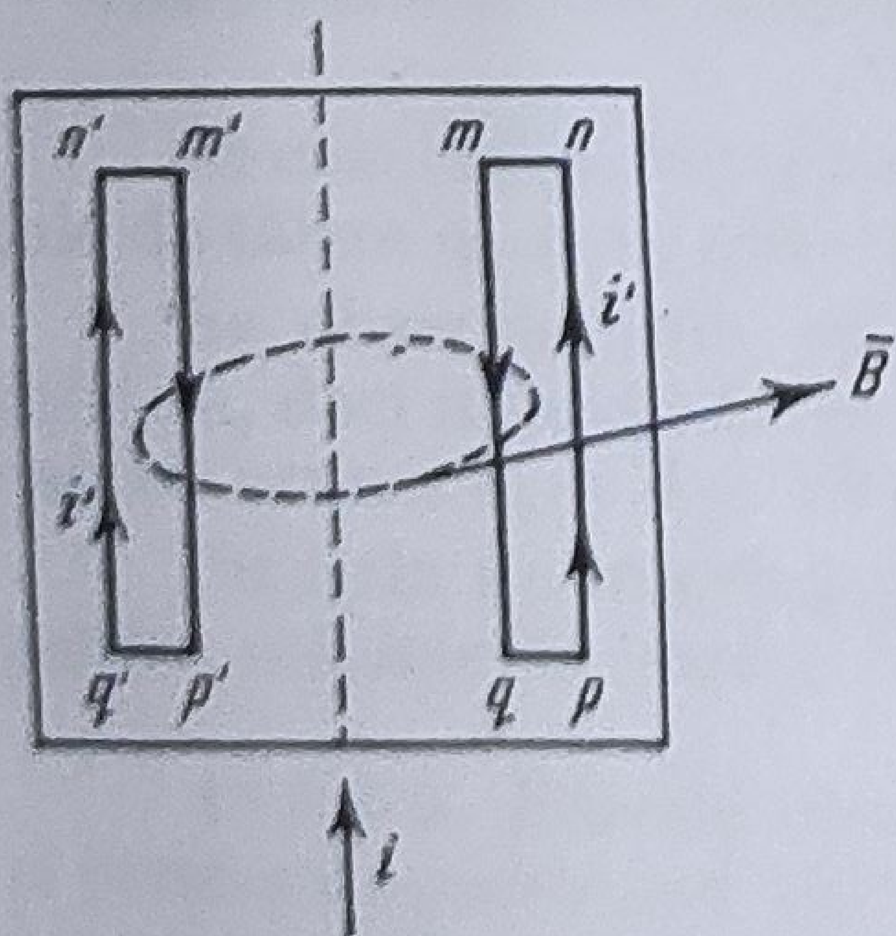


Fig. 14.1. Producerea fenomenului de concentrare a densității de curent la periferia conductorului.

Cum valoarea cîmpului magnetic variază în interiorul cilindrului proporțional cu raza*, fenomenul va fi mai accentuat la periferie decît în ax. Pe de altă parte, acești curenți paraziți nu sînt în fază cu curentul principal; rezultă, că în secțiune va varia și faza curentului rezultant.

* Vezi 3.2.5.2.

14.1.2. STUDIUL CANTITATIV AL FENOMENULUI ÎN CAZUL UNEI BARE DE SECȚIUNE DREPTUNGHIULARĂ, DE LUNGIME INFINITĂ ȘI A CĂREI LĂȚIME ESTE MICĂ ÎN RAPORT CU ÎNĂLȚIMEA

14.1.2.1. Stabilirea ecuației generale de propagare. Fie o bară infinit lungă, avînd secțiunea $ABCD$ dreptunghiulară cu înălțimea sa $2b$ și lățimea mult mai mică $2a$, astfel că $a \ll b$ (fig. 14.2). Această bară poate reprezenta de exemplu o bară colectoare dintr-o cameră de conexiuni a unei centrale electrice. Să presupunem că ea e străbătută de un curent electric i. Ne propunem să găsim repartiția acestui curent în secțiunea dreaptă a acestei bare. Presupunînd că bara este destul de îndepărtată de orice conductor exterior, singurul cîmp care poate modifica repartiția de curent este cîmpul propriu al curentului i. Din cauze de simetrie, densitatea de curent va fi aceeași în doua puncte situate simetric în raport cu axa yy' a secțiunii drepte.

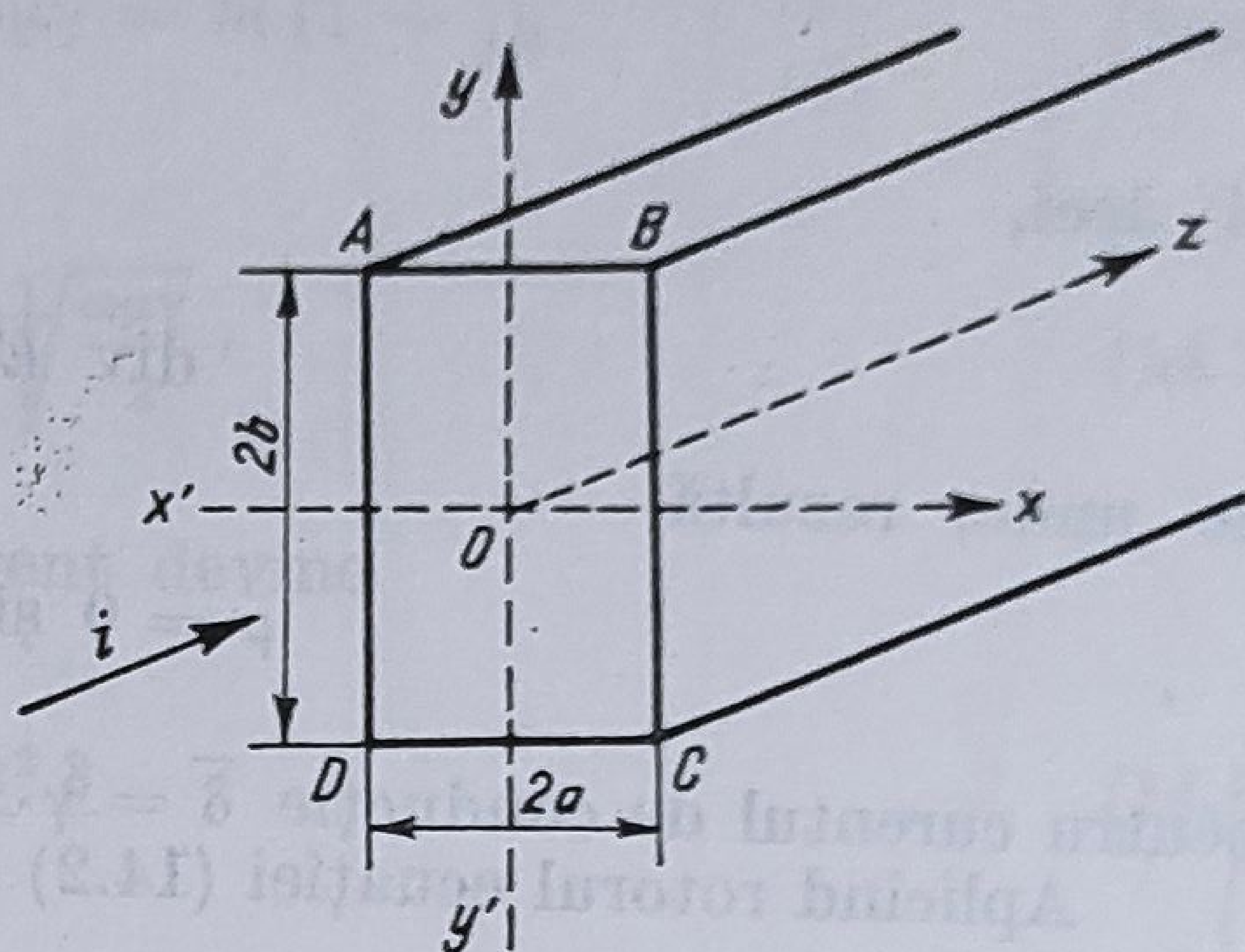


Fig. 14.2. Bara de secție dreptunghiulară.

Înălțimea barei $2b$, fiind presupusă foarte mare față de lățimea sa, putem admite că liniile de cîmp de inducție magnetică sînt paralele cu axa $y'y$ și că ele se închid sub forma unor bucle dreptunghiulare; de asemenea, admitem că densitatea de curent este uniformă în orice plan paralel cu fețele laterale. Aceste ipoteze sînt posibile dacă se neglijează fenomenele ce se produc la extremitățile AB și CD ale secțiunii drepte.

Utilizînd ecuațiile lui MAXWELL

$$\text{rot}\, \overline{H} = \overline{\delta} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot}\, \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

și relațiile*

$$\varepsilon \overline{E} = \overline{D}; \; \overline{B} = \mu \overline{H}; \; \overline{\delta} = \gamma \overline{E}; \; \text{div}\, \overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}; \; \text{div}\, \overline{H} = 0; \; \text{div}\, \overline{\delta} = -\frac{d\rho}{dt},$$

pentru conductorul dat se poate scrie

$$\text{rot}\, \overline{H} = \overline{\delta} + \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \tag{14.1}$$

și

$$\text{rot}\, \overline{E} = -\mu \frac{\partial \overline{H}}{\partial t}. \tag{14.2}$$

* γ este conductivitatea conductorului și ρ este sarcina electrică volumetrică.

La frecvenţe mici ($f < 10^{-11}$ Hz), pentru conductoare uzuale, curentul de deplasare este neglijabil faţă de curentul de conducţie $\left(\varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \ll \gamma \overline{E}\right)$. În aceste condiţii, din relaţia (14.1) rezultă

$$\overline{E} = \frac{1}{\gamma} \text{ rot } \overline{H}$$

şi deci,

$$\text{div } \overline{E} = 0$$

de unde, rezultă

$$\rho = 0 \text{ şi div } \overline{\delta} = 0, \tag{14.3}$$

pentru curentul de conducţie $\overline{\delta} = \gamma \cdot \overline{E}$.

Aplicînd rotorul ecuaţiei (14.2) se obţine

$$\text{rot rot } \overline{E} = \frac{1}{\gamma} \text{ rot rot } \overline{\delta} = -\frac{1}{\gamma} \Delta \overline{\delta} + \frac{1}{\gamma} \text{ grad div } \overline{\delta} = -\mu \text{ rot } \frac{\partial \overline{H}}{\partial t} =$$

$$= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{ rot } \overline{H},$$

sau ţinînd seama de relaţiile (14.1) şi (14.3) se obţine

$$\Delta \overline{\delta} = \mu \gamma \frac{\partial \overline{\delta}}{\partial t}, \tag{14.4}$$

care este ecuaţia generală de distribuire a curenţilor în secţiunea conductorului.

În cazul particular considerat, densitatea δ a curentului de conducţie, de-a lungul axei z în întreg conductorul, nu-şi schimbă sensul şi nu depinde decît de x, ecuaţia (14.4) se poate scrie

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = \mu \gamma \frac{\partial \delta}{\partial t}. \tag{14.5}$$

14.1.2.2. Integrarea ecuaţiei de repartiţie a densităţii de curent în cazul regimului armonic sinusoidal permanent. Fie

$$i = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \psi),$$

curentul alternativ sinusoidal ce străbate bara. Densitatea de curent corespunzătoare poate fi scrisă în mărimi complexe sub forma

$$\underline{\delta} = \delta \underline{|\omega t + \psi}$$

şi atunci, ecuaţia (14.5) se poate scrie

$$\frac{d^2\underline{\delta}}{dx^2} = j\omega\mu\gamma\underline{\delta},$$

sau punînd

$$\underline{k} = m + jn = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = m(1 + j), \tag{14.6}$$

în care*

$$m = n = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}, \tag{14.7}$$

ecuaţia de repartiţie a densităţii de curent devine

$$\frac{d^2\underline{\delta}}{dx^2} = \underline{k}^2\,\underline{\delta} \tag{14.8}$$

ecuaţia analoagă cu ecuaţia liniilor lungi**.

Integrala generală a acestei ecuaţii este

$$\underline{\delta} = \underline{A}_1\,\varepsilon^{-\underline{k}x} + \underline{A}_2\,\varepsilon^{-\underline{k}x}.$$

Ţinînd seama de faptul, că din cauză de simetrie, densitatea de curent trebuie să fie aceeaşi de o parte şi de alta a axei $y'y$, rezultă $\underline{A}_1 = \underline{A}_2 = \underline{A}$ şi deci

$$\underline{\delta} = \underline{A}(\varepsilon^{\underline{k}x} + \varepsilon^{-\underline{k}x}) = 2\,\underline{A}\,\mathrm{ch}\,\underline{k}x = 2\,\underline{A}\,\mathrm{ch}\,(1 + j)\,mx. \tag{14.9}$$

Fie $\underline{\delta}_a$ densitatea de curent pe feţele laterale ale barei ($x = a$); ecuaţia (14.9) devine în acest caz

$$\underline{\delta}_a = 2\,\underline{A}\,\mathrm{ch}\,\underline{k}\,a$$

şi eliminînd pe $\underline{A}$ între această relaţie şi ecuaţia (14.9) se obţine

$$\underline{\delta} = \underline{\delta}_a\frac{\mathrm{ch}\,\underline{k}\,x}{\mathrm{ch}\,\underline{k}\,a}. \tag{14.10}$$

Sub această formă, ecuaţia care dă repartiţia densităţii pe secţiunea conductorului este identică cu aceea a curentului pe o linie lungă, cu constantele uniform răspîndite şi cu extremitatea receptoare legată în scurtcircuit***.

---

* Ridicînd la pătrat relaţia (14.6) se găseşte

$m^2 + n^2 + 2jmn = j\omega\mu\gamma$, de unde $m^2 - n^2 = 0$ şi $2mn = \omega\mu\gamma$, de unde, $m = n = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$.

** Vezi 12.1.3.2.

*** Vezi 12.1.6.5.

Ținînd seama de expresia (14.6) a lui $\underline{k}$, relația (14.10) se poate scrie

$$\underline{\delta} = \underline{\delta}_a \frac{\text{ch } mx \cos mx + \text{j sh } mx \sin mx}{\text{ch } ma \cos ma + \text{j sh } ma \sin ma}. \tag{14.11}$$

Valoarea efectivă a densității de curent este

$$\delta = \delta_a \sqrt{\frac{\text{ch } 2\,mx + \cos 2\,mx}{\text{ch } 2\,ma + \cos 2\,ma}}, \tag{14.12}$$

în care δ_a este valoarea efectivă a lui $\underline{\delta}_a$. Defazajul lui $\underline{\delta}$ față de $\underline{\delta}_a$ este dat de relația

$$\psi = \text{arc tg (th } mx \text{ . tg } mx) -$$
$$- \text{arc tg (th } ma \text{ . tg } ma).$$

Fig. 14.3. Variația densității de curent în secțiunea barei.

În figura 14.3 este dată variația densității de curent în raport cu lățimea barei.

În cazul cînd ω tinde către zero, m tinde de asemenea către zero* și δ tinde către $\underline{\delta}_a$, oricare ar fi x: rezultă că densitatea de curent de la periferia conductorului va fi aceeași cu densitatea de curent $\underline{\delta}$ din interiorul secțiunii, oricare ar fi x; este cazul curentului continuu pentru care densitatea de curent este uniformă pe toată secțiunea.

Dacă ma este mare, adică, dacă grosimea conductorului este mare, sau frecvența este mare, sau permeabilitatea mediului este mare, densitatea de curent în centrul secțiunii tinde către zero și curentul tinde să se localizeze către periferia conductorului.

14.1.2.3. Impedanța proprie a conductorului. Prin definiție această impedanță este egală cu raportul dintre diferența de potențial $\underline{U}$ între două secțiuni drepte ale barei, situate la o distanță l între ele și curentul $\underline{I}$ total care trece prin conductor

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}.$$

Curentul total care trece prin secțiunea de grosime $2a$ și de înălțime $2b$ este

$$\underline{I} = 2\,b \int_{-a}^{a} \underline{\delta}\, dx = \frac{2b\ \underline{\delta}_a}{\text{ch } \underline{k}\, a} \int_{-a}^{a} \text{ch } \underline{k}\, x\, d\,x = \frac{4b\ \underline{\delta}_a}{\underline{k}} \text{th } \underline{k}\, a.$$

* Vezi relația (14.7)

Rezultă

$$\underline{Z} = \frac{\underline{k}}{4} \frac{\underline{U}}{b\,\underline{\delta}_a} \operatorname{cth} \underline{k}a.$$

Densitatea de curent $\underline{\delta}_a$ este aceea care s-ar găsi în conductor dacă frecvența ar fi infinit mică; deci $\underline{\delta}_a$ este în fază cu $\underline{U}$ (fluxul exterior conductorului fiind neglijat); rezultă dar, că

$$R_0 = \frac{U}{4ab\delta_a}$$

reprezintă rezistența conductorului în curent continuu.

Putem scrie deci

$$\underline{Z} = \underline{k}\, a\, R_0 \operatorname{cth} \underline{k}\, a \tag{14.13}$$

sau

$$\underline{Z} = a\, R_0\, m\,(1 + \mathrm{j}) \frac{\operatorname{ch} ma \cos ma + \mathrm{j} \operatorname{sh} ma \sin ma}{\operatorname{sh} ma \cos ma + \mathrm{j} \operatorname{ch} ma \sin ma}.$$

Înmulțind cu conjugata numitorului, expresia lui $\underline{Z}$ devine

$$\underline{Z} = a\, R_0\, m\,(1 + \mathrm{j}) \frac{\operatorname{sh} 2ma - \mathrm{j} \sin 2ma}{\operatorname{ch} 2\,ma - \cos 2\,ma}. \tag{14.14}$$

Rezistența efectivă a conductorului este partea reală a expresiei (14.14)

$$R = R_0\, ma \frac{\operatorname{sh} 2\,ma + \sin 2\,ma}{\operatorname{ch} 2\,ma - \cos 2\,ma}, \tag{14.15}$$

iar reactanța efectivă a conductorului este partea complexă a expresiei (14.14)

$$\lambda\,\omega = X = R_0\, ma \frac{\operatorname{sh} 2\,ma - \sin 2\,ma}{\operatorname{ch} 2\,ma - \cos 2\,ma}. \tag{14.16}$$

Dacă ma este mare, adică, dacă grosimea barei este mare sau frecvența curentului alternativ este mare, funcțiile trigonometrice, la care amplitudinea nu depășește valoarea 1, pot fi neglijate față de funcțiile hiperbolice și deci tgh $2ma$ poate fi confundat cu unitatea*. Se va putea scrie deci

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\lambda\omega}{R_0} = a\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = ma. \tag{14.17}$$

* Avem $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{th} x = 1$. De exemplu, pentru $ma = 2$, sh $2ma = 27{,}29$ și ch $2\,ma = 27{,}3$ și rezultă tgh $2ma \cong 1$.

Rezultă dar, că pentru valorile mari ale frecvenţei, rezistenţa efectivă este egală cu reactanţa interioară a conductorului.

Din punct de vedere al pierderilor prin efect JOULE, se poate admite că totul se petrece ca şi cum curentul ar fi localizat la periferie, mod uniform, într-o coajă fictivă de grosime α astfel, încît

$$\frac{R}{2a\cdot 2b} = \frac{R_0}{2\alpha\cdot 2b}. \quad \text{Rezultă } \alpha = \frac{1}{m}. \tag{14.18}$$

Invers, dacă calculînd această coajă fictivă, se găseşte că ea este egală cu un sfert din grosimea $2a$ sau mai mică decît aceasta, atunci se poate aplica direct relaţia aproximativă (14.17).

Fie de exemplu, să calculăm coaja fictivă a unui conductor de cupru la o frecvenţă $f = 5\,000$ Hz. Avem pentru cupru

$$\mu_r = 1;\ \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{H}}{\text{m}};\ \gamma = 56\cdot 10^6 \text{ S/m};\ \omega = 2\pi\cdot 5\,000 = 10^4\pi$$

şi rezultă

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} = \sqrt{\frac{2}{10^4\pi\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 56\cdot 10^6}} = 0{,}95\,.\,10^{-3} \text{ m}.$$

Dacă bara are grosimea $2a = 20$ mm, raportul dintre rezistenţa efectivă a barei şi rezistenţa în curent continuu este, conform relaţiei (14.15)

$$\frac{R}{R_0} = \frac{a}{\alpha} = \frac{10}{0{,}95} \cong 10{,}5.$$

În cazul particular considerat, al unei bare de cupru, relaţia (14.18) poate fi scrisă

$$\alpha = \frac{1}{150\sqrt{f}}, \tag{14.19}$$

în care f este frecvenţa curentului alternativ. Se poate determina astfel, pentru diverse frecvenţe, grosimea de pătrundere. În tabloul 14.1 sînt date această grosime de pătrundere şi raportul rezistenţelor pentru o bară de cupru avînd o grosime de 20 mm

Tabelul 14.1

f (Hz)	50	5000	10^4	10^6	10^8	10^{10}
α (mm)	9,4	0,95	0,66	$66\cdot 10^{-3}$	$6{,}6\cdot 10^{-3}$	$0{,}66\cdot 10^{-3}$
R/R_0	1,06	10,5	15,1	151	1510	15100

14.1.2.4. Disiparea de energie în conductor. Încălzirea prin inducţie. Ţinînd seama de expresia diferenţială a legii lui JOULE*, puterea disipată în conductor prin efectul JOULE pe unitatea de suprafaţă liberă este

$$p_s = \int_{-a}^{a} \frac{\delta^2}{\gamma}\, dx,$$

sau ţinînd seama de expresia (14.12) a densităţii de curent,

$$p_1 = \frac{\delta_a^2}{\gamma m} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2\, ma + \sin 2\, ma}{\operatorname{ch} 2\, ma + \sin 2ma} = \frac{\delta_a^2}{\gamma m}\, \mathrm{f}(ma).$$

Dat fiind, că pentru ma mare $\mathrm{f}(ma)$ tinde către 1, se poate scrie cu suficientă aproximaţie

$$p_1 = \frac{\delta_a^2}{\gamma m} = \frac{\delta_a^2}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = E_a^2 \sqrt{\frac{2\gamma}{\omega \mu}}, \tag{14.20}$$

deoarece $\overline{\delta}_a = \gamma \overline{E}_a$.

Din ecuaţiile (14.1) şi (14.2), ţinînd seama de condiţiile (14.3) se deduc ecuaţiile de propagare a cîmpului electric sau magnetic sub forma

$$\Delta \overline{E} = \mu\gamma \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \tag{14.21}$$

şi

$$\Delta \overline{H} = \mu\gamma \frac{\overline{H}}{t} \tag{14.22}$$

ceea ce arată că propagarea cîmpului electromagnetic se face în acelaşi mod ca şi densitatea de curent $\overline{\delta}$.

Cunoscînd densitatea de curent, cîmpul electric se determină imediat din relaţia $\overline{\delta} = \gamma \overline{E}$ şi pentru cazul particular al regimului armonic este

$$\underline{E} = \frac{\underline{\delta}_a}{\gamma} \frac{\operatorname{ch} \underline{k}\, x}{\operatorname{ch} \underline{k}\, a} = \underline{E}_a \frac{\operatorname{ch} \underline{k}\, x}{\operatorname{ch} \underline{k}\, a}. \tag{14.23}$$

Cîmpul electric are aceeaşi direcţie cu δ şi deci nu depinde decît de x. Pentru determinarea cîmpului magnetic $\overline{H}$ se porneşte de la relaţia (14.2); ţinînd seama că rezultă

$$E_x = E_y = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{\partial \overline{E}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{E}}{\partial z} = 0$$

rezultă

$$-\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial x}. \tag{14.24}$$

* Vezi 2.1.43. relaţia (2.28)

În cazul curentului alternativ și înlocuind pe $\underline{E}$ cu valoarea sa dată de relația (14.23), se obține

$$\underline{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \underline{k} \, \underline{E}_a \frac{\text{sh} \, \underline{k} \, x}{\text{sh} \, \underline{k} \, a},$$

sau ținînd seama de relația (14.6), după calcule simple, relația de mai sus devine

$$\underline{H} = \underline{H}_a \frac{\text{sh} \, \underline{k} \, x}{\text{ch} \, \underline{k} \, a}, \tag{14.25}$$

unde

$$\underline{H}_a = \frac{\gamma \underline{E}_a}{(1 + j) \, m} = \frac{\gamma \underline{E}_a}{\underline{k}}. \tag{14.26}$$

Din relația (14.24) rezultă că vectorul intensității cîmpului magnetic este îndreptat în sensul axei *oy* și este deci, perpendicular pe vectorul intensității cîmpului electric $\overline{E}$ care este îndreptat în sensul axei *Oz*. Vectorul lui POYNTING corespunzător*

$$\overline{S} = \overline{E} \times \overline{H}$$

ne arată că unda corespunzătoare cîmpului electromagnetic respectiv se propagă din *exteriorul* conductorului către interiorul lui**.

Ca funcție de timp, relația (14.26) ne arată că intensitatea cîmpului magnetic este *în urma* intensității cîmpului electric cu argumentul $\frac{\pi}{2}$.

Disiparea de energie electrică, determinată mai sus, este utilizată în încălzirea materialelor prin inducție; în această operație, piesa de încălzit este supusă, fără un contact material, unui cîmp electromagnetic de intensitate mare E_a și H_a pentru care adîncimea de pătundere și deci frecvența de utilizat, este în funcție de grosimea zonei de încălzit. Astfel, pentru piese subțiri sau pentru călire superficială se va utiliza o frecvență înaltă; pentru o încălzire mai profundă se vor utiliza frecvențe joase**.

Efectul pelicular studiat poate fi folosit și pentru a proteja o porțiune din spațiu contra unei unde electromagnetice perturbatoare, cu ajutorul unui acoperămînt metalic în care unda respectivă nu pătrunde la adîncimi mai mari de 5 sau 6 ori α. Acestea sînt blindajele electromagnetice cu ajutorul cărora se ecranează diverse montaje, cabluri etc. și care se pot realiza foarte ușor atunci cînd frecvențele sînt foarte mari și deci α este foarte mic ***.

14.1.2.5. **Efectul de vecinătate******. Dacă două conductoare parcurse de curent alternativ sînt așezate paralel, unul lîngă altul, au loc fenomene asemănătoare cu efectul pelicular, cu următoarele consecințe:

— dacă cei doi curenți au același sens, densitatea de curent scade în părțile mai apropiate ale conductoarelor și crește în părțile mai depărtate;

---

* Vezi 15.2.1.1.
** Vezi și 14.1.3.2.
*** Vezi tabloul 14.1
**** Vezi [190] pag. 268

— dacă cei doi curenţi au sensuri inverse, densitatea creşte în părţile apropiate şi scade în cele depărtate.

Acest fenomen poartă numele de *efectul de vecinătate* şi are aceleaşi consecinţe ca şi efectul pelicular, privitor la creşterea rezistenţei în curent alternativ.

14.1.3. STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU DE STABILIRE A CURENTULUI ELECTRIC ÎNTR-UN CONDUCTOR MASIV DE FORMĂ DREPTUNGHIULARĂ

14.1.3.1. Stabilirea ecuaţiei generale. Reluînd ecuaţia (14.5) care dă repartiţia densităţii de curent

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = \mu\gamma \frac{\partial \delta}{\partial t},$$

căreia i se aplică transformarea LAPLACE *, se obţine

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{L}\,\delta}{\partial x^2} = \mu\,\gamma\,s\,\mathfrak{L}\,\delta - \mu\,\gamma\,\delta_0 \qquad (14.27)$$

în care $\mathfrak{L}\,\delta$ este imaginea densităţii de curent căutată şi δ_0 densitatea de curent, existentă în secţiune la momentul iniţial.

Pentru integrarea ecuaţiei (14.27) să notăm

$$k = \sqrt{\mu\gamma s} = m\sqrt{s}, \qquad (14.28)$$

unde $m = \sqrt{\mu\gamma}$.

Cu acestea, ecuaţia (14.27) poate fi scrisă

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{L}\,\delta}{\partial\, x^2} - k^2\,\mathfrak{L}\,\delta = -\,m^2\,\delta_0.$$

Integrînd această ecuaţie fără membrul doi, se obţine

$$\mathfrak{L}\,\delta = A_1\,\varepsilon^{kx} + A_2\,\varepsilon^{-kx},$$

sau ţinînd seama de simetria secţiunii ($A_1 = A_2 = A$),

$$\mathfrak{L}\,\delta = 2A \text{ ch } kx.$$

Fie $\mathfrak{L}\delta_1$ o soluţie particulară a ecuaţiei (14.27); rezultă

$$-\,k^2\,\mathfrak{L}\,\delta_1 = -\,m^2\delta_0$$

şi deci,

$$\mathfrak{L}\,\delta_1 = \frac{m^2}{k^2}\,\delta_0 = \frac{\delta_0}{s},$$

* Vezi justificarea aplicării transformării LAPLACE primului membru al ecuaţiei în 12.2.2.

2 – c. 229
4

astfel, că soluţia generală a ecuaţiei (14.27) este

$$\mathfrak{L}\,\delta = 2A \text{ ch } kx + \frac{\delta_0}{s}.$$

Pentru determinarea constantei de integrare, se presupune că la marginea conductorului ($x = a$), densitatea respectivă este constantă şi are valoarea δ_a.

Punînd

$$\frac{\delta_0}{s} = \mathfrak{L}\,\delta_0\,,$$

rezultă

$$\mathfrak{L}(\delta_a - \delta_0) = 2\,A \text{ ch } ka$$

şi deci,

$$2A = \frac{\mathfrak{L}(\partial_a - \delta_0)}{\text{ch } ka},$$

astfel, că soluţia generală a ecuaţiei (14.27) este

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}\delta &= \mathfrak{L}(\delta_a - \delta_0)\frac{\text{ch } kx}{\text{ch } ka} + \mathfrak{L}\,\delta_0\,, \\ &\text{sau} \\ \mathfrak{L}(\delta - \delta_0) &= \mathfrak{L}\,(\delta_a - \delta_0)\frac{\text{ch } kx}{\text{ch } ka} \end{aligned}\right\} \qquad (14.29)$$

14.1.3.2. Aplicaţie. Stabilirea unui curent electric staţionar. Fie o bară de lăţime $2a$, înălţime $2b$ şi lungime l, a cărei conductanţă este γ şi căreia la timpul $t = 0$, i se aplică la extremităţi tensiunea constantă U; se presupune că înaintea acestui moment, bara respectivă nu era străbătută de nici un curent. În aceste condiţii

$$\delta_0 = 0 \text{ şi } \delta_a = \frac{U\gamma}{l} = Const.$$

şi relaţia (14.29) devine

$$\mathfrak{L}\,\delta = \frac{\delta_a}{s}\cdot\frac{\text{ch } kx}{\text{ch } ka}. \qquad (14.30)$$

Pentru găsirea originalului expresiei (14.30) se aplică formula dezvoltării lui HEAVISIDE

$$\delta = \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{i=1}^{n}\frac{A(s_i)}{s_i \cdot B'(s_i)}\cdot \varepsilon^{s_i t},$$

în care, în cazul problemei studiate,

$$A(s) = \delta_a \operatorname{ch} kx, \qquad B(s) = \operatorname{ch} ka,$$

şi

$$B'(s) = \frac{am}{2\sqrt{s}} \operatorname{sh} ka,$$

ţinînd seama de expresia (14.28) a lui k.

Rădăcinile numitorului ecuaţiei (14.30), în afară de $s = 0$, sînt date de ecuaţia

$$\operatorname{ch} ka = 0 \quad \text{sau} \quad \cos(-jka) = 0.$$

Ţinînd seama de relaţia (14.28), rădăcinile acestei ecuaţii sînt

$$s_n = -\frac{(2n+1)^2}{a^2m^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2, \quad n \in [0, \infty). \tag{14.31}$$

Se obţine deci,

$$A(s_n) = \delta_a \operatorname{ch} j\,(2n+1)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{a} = \delta_a \cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{a},$$

$$s_n B'(s_n) = -\frac{1}{2}(2n+1)\frac{\pi}{2}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}(2n+1)\frac{\pi}{2}(-1)^n,$$

$$A(0) = \delta_a \text{ şi } B(0) = 1;$$

rezultă astfel:

$$\delta = \frac{U\cdot\gamma}{l}\left[1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\varepsilon^{-\beta_n t}\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}\right],$$

unde s-a notat

$$\beta_n = \frac{(2n+1)^2}{a^2m^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4\pi\mu\gamma}\left[\frac{2n+1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}\right]^2$$

Cunoscînd expresia densităţii de curent, se poate determina expresia curentului; se obţine

$$i = 2b\int_{-a}^{a}\delta\, dx = \frac{4\,ab\,U\gamma}{l}\left[1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{-\beta_n t}}{(2n+1)^2}\right].$$

Rezistenţa în regim permanent, în curent continuu fiind

$$R_0 = \frac{l}{4\,ab\,\gamma},$$

conductanța tranzitorie a conductorului este

$$g = \frac{i}{u} = \left[1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{-\beta_n t}}{(2n+1)^2}\right]G_c.$$

Rezultă dar, că în timpul regimului tranzitoriu, rezistența conductorului este mai mare decît în curent continuu; aceasta înseamnă că secțiunea utilizată va fi de forma unei cruste periferice, de grosime α, a cărei valoare nulă la momentul inițial, crește în funcție de timp. Scriind că și în acest caz efectul JOULE este același, adică

$$g \cdot 2a \cdot 2b = 2\alpha \cdot 2b\, G_c$$

rezultă

$$\alpha = \frac{g}{G_c}a = a\left[1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{-\beta_n t}}{(2n+1)^2}\right].$$

Pe de altă parte, factorul de amortizare

$$\beta_n = \frac{1}{4\pi\mu\gamma}\left[\frac{2n+1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}\right]^2,$$

fiind invers proporțional cu permeabilitatea μ și cu conductivitatea γ, timpul de stabilire a unui curent continuu va fi mai mare într-o bară de fier decît într-una de cupru.

Este interesant de observat că, întrucît la $t = 0$ $\alpha = 0$ și la $t = \infty$ $\alpha = a$, rezultă că un curent staționar se stabilește în secțiunea respectivă de la periferie către interior, ceea ce confirmă și în acest mod cele stabilite în paragraful 14.1.2.4.

14.1.4. REPARTIȚIA CURENTULUI ELECTRIC ÎN BARE MASIVE AȘEZATE ÎN CRESTĂTURI

14.1.4.1. Generalități. Fie o bară foarte lungă — în raport cu dimensiunile liniare ale secțiunii — așezată în fundul unei crestături dreptunghiulare, tăiată într-un material feromagnetic a cărui saturație este redusă astfel, încît permeabilitatea sa poate fi presupusă infinit mare față de permeabilitatea aerului (fig. 14.4,*a*); în aceste condiții, liniile de cîmp produse de curentul ce străbate conductorul masiv, sînt sensibil linii drepte perpendiculare pe cele două fețe ale crestăturii. Fundul crestăturii fiind o suprafață echipotențială magnetică, conductorul se găsește în aceleași condiții ca și un conductor de grosime dublă și de lățime infinită așezat în aer (fig. 14.4,*b*). Se obține aceeași situație ca cea studiată în paragraful 14.1.2.2.

Rezultă, că în acest caz curentul tinde să părăsească fundul crestăturii și să se localizeze în partea superioară a conductorului.

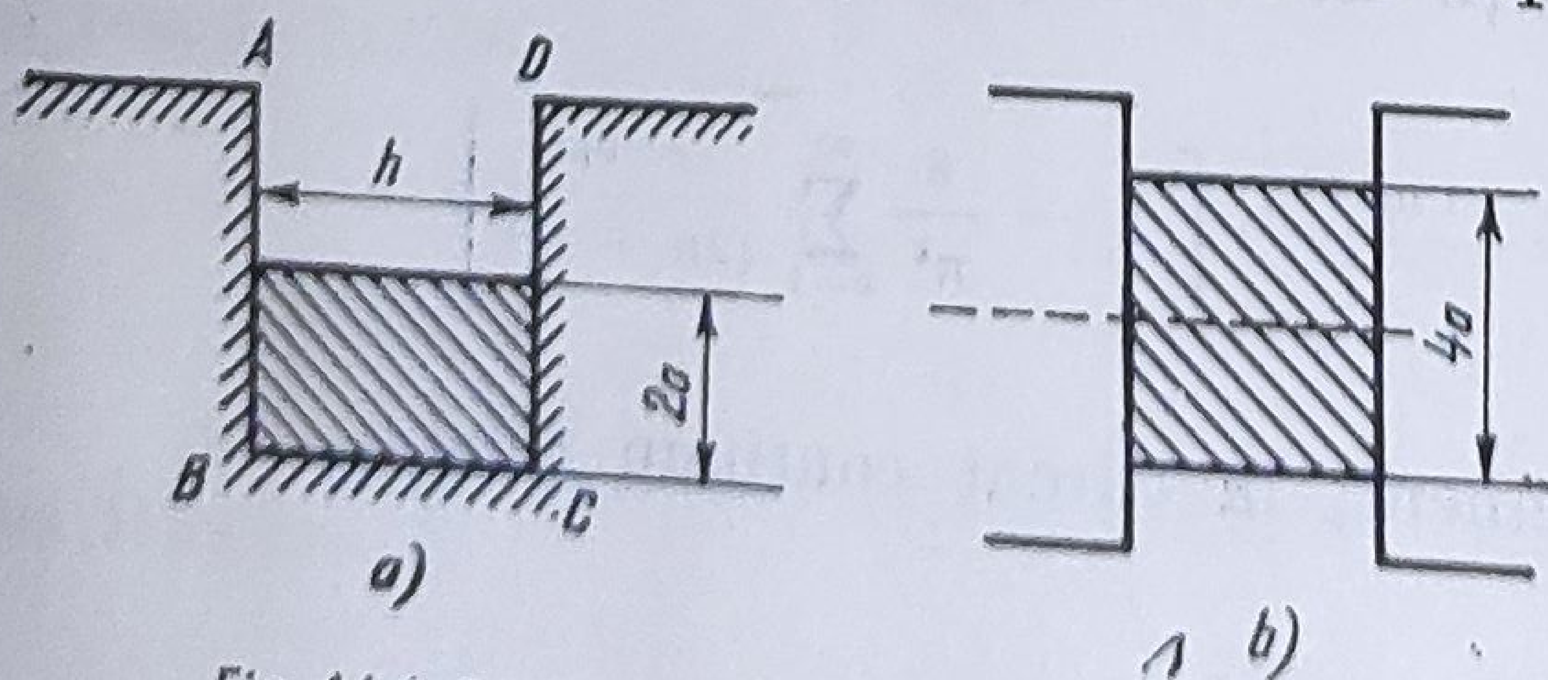


Fig. 14.4. Bară masivă în fund de crestătură: *a*) bara simplă; *b*) bara și imaginea ei.

14.1.4.2. Calculul densității de curent în conductoarele așezate într-o crestătură de curenți alternativi. Să considerăm o crestătură — de exemplu crestătura unei mașini electrice — în care se găsesc așezate bare identice de secțiune dreptunghiulară avînd grosimea a și înălțimea h, formînd p straturi (fig. 14.5). Să presupunem că fiecare conductor este străbătut respectiv de curenții alternativi sinusoidali $\underline{I}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n, \ldots, p$) diferiți între ei. Fie $\underline{H}$ intensitatea cîmpului magnetic într-un plan situat la distanța x de fundul crestăturii * și $\underline{\delta}$ densitatea de curent căutată. Calculul se simplifică dacă se presupune că întreaga secțiune a crestăturii este ocupată de conductoare. În acest caz însă, trebuind ca solenația să nu se schimbe, rezultă că va trebui să se mărească rezistivitatea barelor în raportul h/b și deci, conductivitatea barelor se va micșora în raportul b/h.

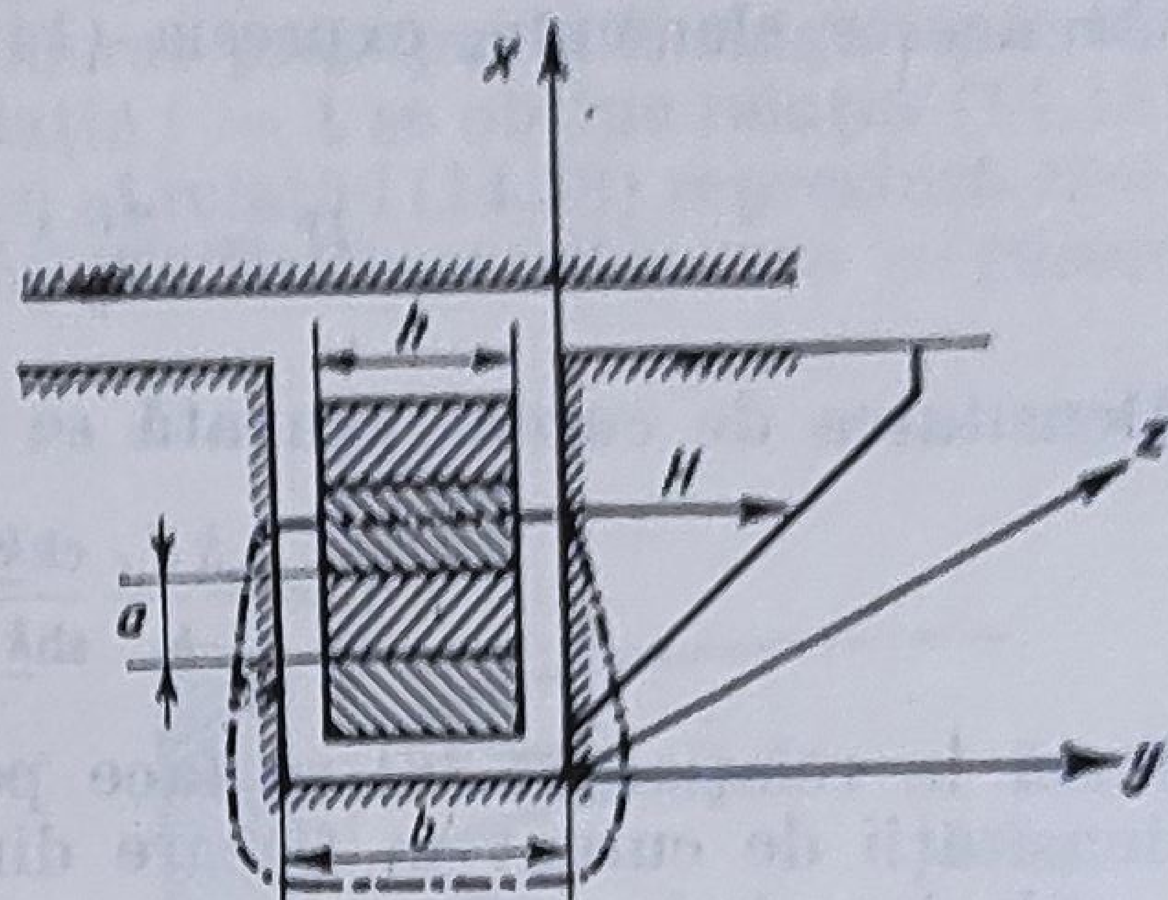


Fig. 14.5. Crestătură deschisă conținînd mai multe conductoare parcurse de curenți alternativi.

Luînd un sistem de axe în care ox este paralelă cu pereții verticali ai crestăturii, axa oy paralelă cu fundul crestăturii și axa oz de-a lungul barelor și ținînd seama de ipotezele făcute ($a \ll h$), rezultă ** că $\underline{E}_x = \underline{E}_y = 0$ și $\underline{H}_z = \underline{H}_y = 0$, existînd astfel componente pentru $\underline{E}$ (și deci și pentru $\underline{\delta}$) numai de-a lungul axei z și pentru $\underline{H}$ numai de-a lungul axei y. În acest caz, ecuațiile (14.1) și (14.2) se vor scrie

$$\frac{\partial \underline{H}}{\partial x} = \underline{\delta} = \frac{b}{h}\gamma\, \underline{E}, \tag{14.32}$$

$$\frac{\partial \underline{E}}{\partial x} = \mathrm{j}\, \omega\mu \underline{H}. \tag{14.33}$$

Eliminînd pe $\underline{E}$ între aceste două relații se obține

$$\frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial x^2} = \mathrm{j}\frac{b}{h}\omega\mu\gamma\, \underline{H} = k^2 \underline{H},$$

unde am notat $k^2 = (1+\mathrm{j})m'$ și $m' = \sqrt{\frac{b}{h}\omega\mu\gamma}$, care integrată dă

$$\underline{H} = \underline{A}\,\mathrm{ch}\, \underline{k}x + \underline{B}\,\mathrm{sh}\, \underline{k}x. \tag{14.34}$$

Pentru determinarea constantelor de integrare se procedează în modul următor : Luînd originea axelor de coordonate la baza conductorului de ordinul i se obține pentru $x = 0$ și $x = a$, corespunzător suprafeței superioare a aceluiași conductor, $\underline{H}_0 = \underline{A}$ și $\underline{H}_a = \underline{A}$ ch $\underline{k}a$ + $\underline{B}$ sh $\underline{k}a$, de unde rezultă valoarea constantei $\underline{B}$. Pe de altă parte, aplicînd legea circuitului magnetic o dată pe la baza acestui conductor și a doua oară pe la partea superioară a lui se găsește

$$\underline{H}_0 = \frac{\underline{J}_{i-1}}{b} \quad \text{și} \quad \underline{H}_a = \frac{\underline{J}_i}{b}$$

* Vezi 3.2.5.3.
** Vezi 14.1.2.1.

unde am notat (14.35)

$$\underline{J}_{i-1} = \sum_{i=0}^{i-1} \underline{I}_i \text{ şi } \underline{J}_i = \underline{J}_{i-1} + \underline{I}_i \,.$$

Cu aceste elemente, expresia (14.34) a intensităţii cîmpului magnetic devine

$$\underline{H} = \frac{\underline{J}_{i-1}}{b} \cdot \frac{\text{sh}\underline{k}(a-x)}{\text{sh}\underline{k}\,a} + \frac{\underline{J}_i}{b} \frac{\text{sh}\underline{k}\,x}{\text{sh}\underline{k}\,a} \,.$$

Densitatea de curent căutată se deduce din relaţia (14.32) şi se obţine

$$\underline{\delta} = \frac{\underline{k}\,\underline{J}_i}{b} \frac{\text{ch}\underline{k}\,x}{\text{sh}\underline{k}\,a} - \frac{\underline{k}\,\underline{J}_{i-1}}{b} \frac{\text{ch}\underline{k}(a-x)}{\text{sh}\underline{k}\,a} \,. \tag{14.36}$$

Dacă în relaţia (14.36) se face pe rînd $i = 1, 2, \ldots, p$ se obţine repartiţia densităţii de curent în fiecare din cei p conductori aşezaţi în crestătură. În particular cînd

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \ldots = \underline{I}_p = \underline{I},$$

repartiţia densităţii în conductorul de ordinul p se obţine făcînd în relaţiile (14.35) $\underline{J}_{p-1} = (p-1)\underline{I}$ şi $\underline{J}_p = p\underline{I}$, găsindu-se

$$\underline{\delta} = \frac{\underline{k}\,\underline{I}}{b} \cdot \frac{p\,\text{ch}\underline{k}\,x - (p-1)\,\text{ch}\,\underline{k}(a-x)}{\text{sh}\,\underline{k}\,a}, \tag{14.37}$$

relaţie cunoscută *.

Pierderile prin efect JOULE într-o porţiune din conductorul de ordinul i de înălţime dx se obţin pornind de la relaţia (2.28); pierderile totale în conductor sînt

$$P = \frac{hl}{\gamma} \int_0^a \delta^2 \, dx,$$

unde l este lungimea conductorului.

Dacă se notează cu R_i rezistenţa efectivă a conductorului, definită prin relaţia

$$P = R_i I_i^2$$

şi cu

$$R_0 = \frac{1}{\gamma a h}$$

rezistenţa în curent continuu, se obţine **

$$\frac{R_i}{R_0} = \varphi(m'a) + (i-1)\, i\, \psi(m'a) \tag{14.38}$$

în care

$$\varphi(m'a) = m'a \frac{\text{sh}\, 2m'a + \sin 2m'a}{\text{ch}\, 2m'a - \cos 2m'a}$$

---

* Vezi [161] pag. 322.
** Vezi [161] pag. 323.

şi

$$\psi(m'a) = 2m'a \frac{\text{sh } m'a - \sin m'a}{\text{ch } m'a + \cos m'a},$$

m' fiind definit mai înainte. Primul termen al ecuaţiei (14.38) corespunde acţiunii cîmpului magnetic în conductorul considerat presupus a fi singur în crestătură; într-adevăr, dacă facem în această relaţie $i = 1$ se obţine relaţia (14.15) determinată în aceste condiţii. Al doilea termen al relaţiei (14.38) reprezintă efectul produs de curenţii FOUCAULT datoraţi cîmpului conductorilor care se găsesc

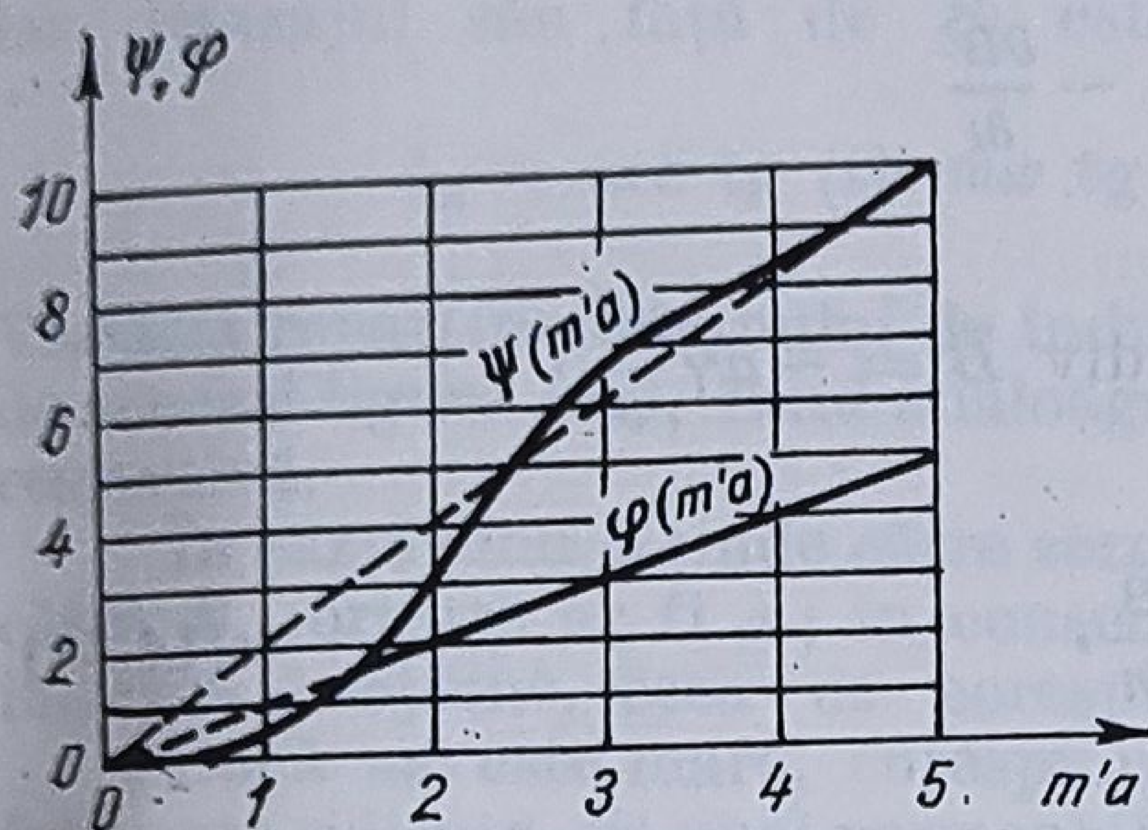


Fig. 14.6. Variaţia funcţiilor $\varphi(m'a)$ şi $\psi(m'a)$.

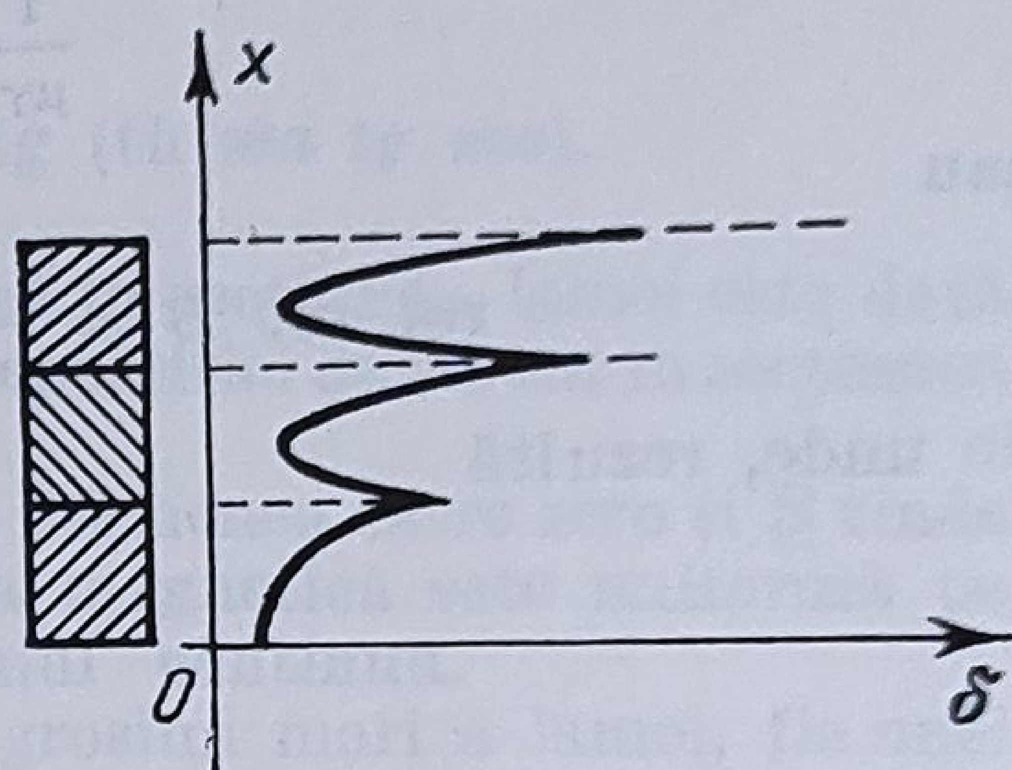


Fig. 14.7. Distribuţia de curent în cele trei conductoare din crestătură.

dedesubtul conductorului considerat şi care sînt străbătuţi de curenţii respectivi. În figura 14.6 este dată variaţia funcţiilor $\varphi(m'a)$ şi $\psi(m'a)$, iar în figura 14.7 este dată repartiţia densităţii de curent în conductoarele dintr-o crestătură pentru ** $i = 3$ şi $m'a = 3$.

14.2. PROPAGAREA CÎMPULUI MAGNETIC ÎN LAME

14.2.1. STABILIREA ECUAŢIEI GENERALE

Fie o bară plată de lungime infinită, aşezată într-un cîmp magnetic variabil, a cărui linii de cîmp sînt în orice punct, normale pe secţiunea $ABCD$ a barei (fig. 14.8). Acest cîmp poate fi produs de un curent variabil care străbate o bobină aşezată în jurul barei. Cîmpul acesta va induce în bară curenţi, care din motive de simetrie şi deoarece s-a presupus că lăţimea $2a$ a barei este mică faţă de înălţimea sa h, vor avea un traseu paralel cu axa yy' şi se vor închide prin bucle rectangulare. Ne propunem să găsim legea de repartiţie a inducţiei magnetice în bară.

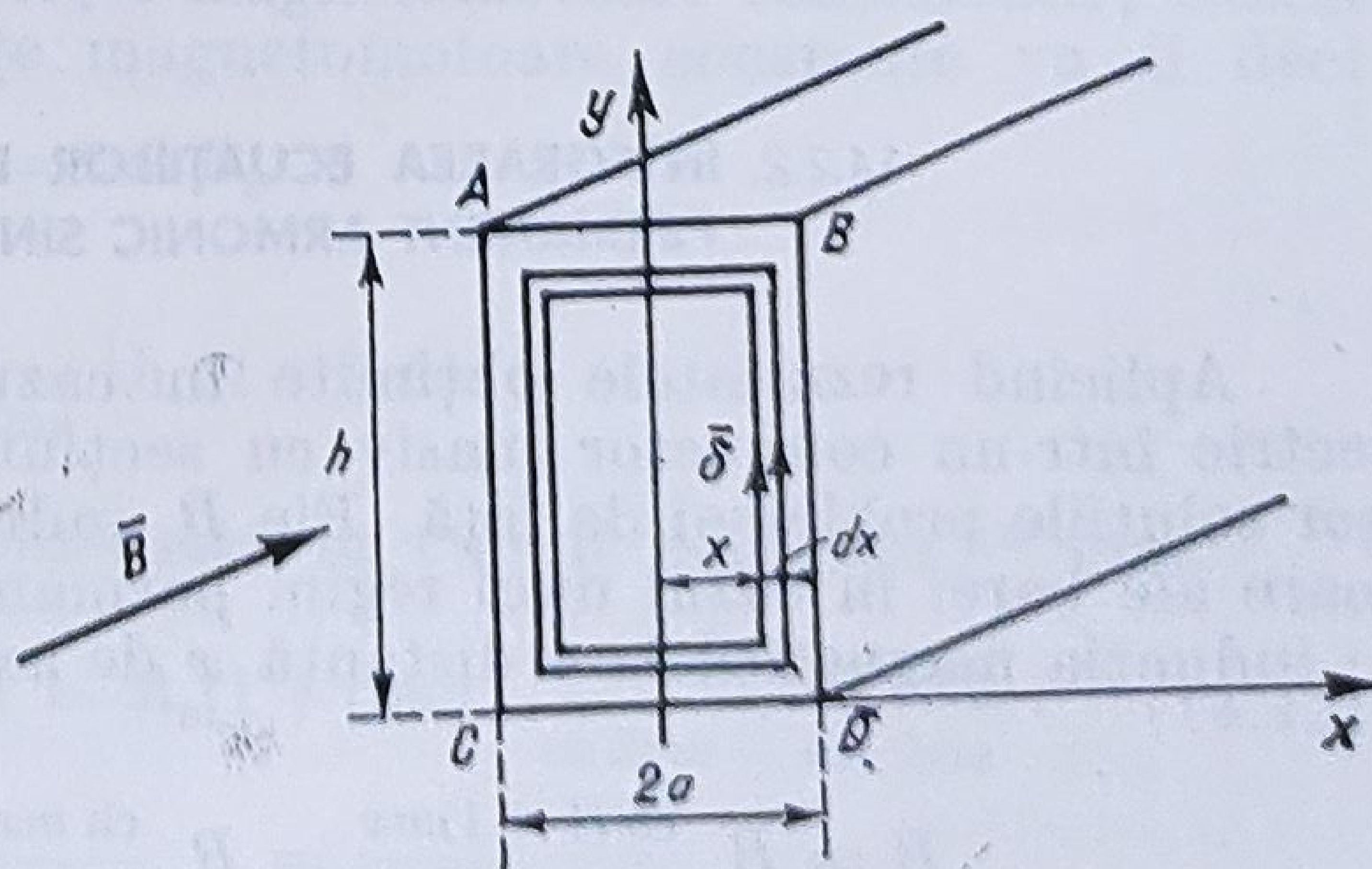


Fig. 14.8. Lamă plată în cîmpul magnetic.

* Vezi [161] pag. 324.

Pornind de la ecuaţiile lui MAXWELL, în care se presupune că densitatea curentului de deplasare este neglijabilă, împărţind ecuaţia (14.1) cu γ şi ţinînd seama de legile de material corespunzătoare, se obţine

$$\frac{1}{\mu\gamma}\,\mathrm{rot}\ \overline{B} = \overline{E};$$

introducînd această valoare în ecuaţia (14.2) rezultă

$$\frac{1}{\mu\gamma}\,\mathrm{rot\ rot}\ \overline{B} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

sau

$$\mathrm{rot\ rot}\ \overline{B} = -\Delta\overline{B} + \mathrm{grad\ div}\ \overline{B} = -\mu\gamma\frac{\partial \overline{B}}{\partial t},$$

de unde, rezultă

$$\Delta\overline{B} = \mu\gamma\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}, \tag{14.39}$$

care este ecuaţia de propagare a cîmpului de inducţie magnetică pe secţiunea plană a lamei considerate. Această ecuaţie este de aceeaşi formă cu ecuaţia (14.4) şi în consecinţă, legea de propagare a cîmpului de inducţie magnetică este analoagă cu aceea a distribuirii densităţii de curent electric pe secţiunea dreaptă, a unui conductor masiv, de formă dreptunghiulară.

Şi în acest caz, ţinînd seama că $2a \ll h$, se poate scrie

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu\gamma\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{14.40}$$

În acelaşi mod, se găseşte şi ecuaţia repartiţiei densităţii curentului de inducţie care apare în lama respectivă

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = \mu\gamma\frac{\partial \delta}{\partial t}. \tag{14.41}$$

14.2.2. INTEGRAREA ECUAŢIILOR DE PROPAGARE ÎN CAZUL UNUI REGIM PERMANENT ARMONIC SINUSOIDAL

Aplicînd rezultatele obţinute în cazul studiului distribuirii curentului electric într-un conductor masiv cu secţiunea dreptunghiulară * se vor găsi uşor soluţiile problemei de faţă. Fie $\underline{B}_a$ inducţia magnetică pe suprafeţele exterioare ale barei în cazul unui regim permanent armonic sinusoidal de pulsaţie ω; inducţia magnetică la o distanţă x de axa lamei va fi

$$\underline{B} = \underline{B}_a\frac{\mathrm{ch}\,(1+\mathrm{j})mx}{\mathrm{ch}\,(1+\mathrm{j})ma} = \underline{B}_a\frac{\mathrm{ch}\,mx\cos mx + \mathrm{j}\,\mathrm{sh}\,mx\sin mx}{\mathrm{ch}\,ma\cos ma + \mathrm{j}\,\mathrm{sh}\,ma\sin ma}, \tag{14.42}$$

* Vezi 14.1.2.2.

în care,

$$m = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}.$$

Amplitudinea inducţiei magnetice este

$$B = B_a \sqrt{\frac{\text{ch } 2mx + \cos 2mx}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma}},$$

iar defazajul său faţă de $\underline{B}_a$ este

$$\psi_B = \text{arc tg (th } mx \text{ tg } mx) - \text{arc tg (th } ma \text{ tg } ma).$$

Variaţia repartiţiei cîmpului de inducţie magnetică în secţiunea lamei este dată de aceeaşi figură 14.3, fiind analoagă cu variaţia repartiţiei de curent în secţiunea respectivă.

În cazul cînd ω tinde către zero, m tinde de asemenea către zero şi $\underline{B}$ tinde către $\underline{B}_a$, oricare ar fi x; în consecinţă, inducţia magnetică este uniformă pe întreaga secţiune, ceea ce corespunde curentului continuu.

Dacă ma este mare, corespunzînd fie unei grosimi mari a lamei, fie unei frecvenţe ridicate, fie unei permeabilităţi mari a materialului, inducţia magnetică în centrul secţiunii tinde către zero şi inducţia maximă se va găsi la periferia conductorului *.

14.2.3. IMPEDANŢA APARENTĂ A CIRCUITULUI DE EXCITAŢIE

14.2.3.1. Determinarea reluctanţei proprii a lamei. Fluxul total care străbate secţiunea de lăţime $2a$ şi de înălţime h va fi

$$\underline{\Phi} = h\int_{-a}^{a} \underline{B}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,h\underline{B}_a}{(1+\mathrm{j})m}\,\text{th }(1+\mathrm{j})\,ma.$$

Inducţia periferică B_a nu este modificată de curenţii induşi în masa lamei; ea este aceeaşi cu aceea care ar produce o forţă magnetomotoare constantă, de aceeaşi mărime cu amplitudinea forţei magnetomotoare considerată; fluxul continuu corespunzător acestei forţe magnetomotoare constante va fi deci

$$\Phi_0 = 2ahB_a$$

şi în consecinţă,

$$\frac{\underline{\Phi}}{\Phi_0} = \frac{1}{(1+\mathrm{j})ma}\,\text{th }(1+\mathrm{j})\,ma;$$

reluctanţa efectivă, raportată la reluctanţa în curent continuu ** este

$$\underline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_0(1+\mathrm{j})ma \text{ cth }(1+\mathrm{j})ma = \mathcal{R}_0(1+\mathrm{j})ma\,\frac{\text{sh } 2ma - \mathrm{j}\sin 2ma}{\text{ch } 2ma - \cos 2ma}. \quad (14.43)$$

---

* Vezi şi 14.1.2.4

** Din $\underline{\mathcal{R}} = \frac{\mathcal{M}}{\underline{\Phi}}$ şi $\mathcal{R}_0 = \frac{\mathcal{M}}{\Phi_0}$ rezultă $\underline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_0\frac{\Phi_0}{\underline{\Phi}}$.

Ea cuprinde o parte reală (corespunzînd unui flux în fază cu forţa magnetomotoare)

$$\mathcal{R}_1 = ma\ R_0 \frac{\text{sh } 2ma + \sin 2ma}{\text{ch } 2ma - \cos 2ma}$$

şi o parte complexă (corespunzînd unui flux în cuadratură şi în urmă cu forţa magnetomotoare)

$$\mathcal{R}_2 = ma\ R_0 \frac{\text{sh } 2ma - \sin 2ma}{\text{ch } 2ma - \cos 2ma}.$$

14.2.3.2. **Impedanţa aparentă a circuitului de excitaţie.** Fie un circuit magnetic închis, format din tole şi excitat cu ajutorul unei înfăşurări avînd N spire (fig. 14.9). Fie $\underline{I}$ curentul de excitaţie şi $\underline{U}$ tensiunea sinusoidală aplicată la borne, R rezistenţa înfăşurării. Dacă $\underline{\Phi}$ este fluxul din circuitul magnetic, atunci se poate scrie

$$\underline{U} = R\underline{I} + jN\underline{\Phi}\omega.$$

Însă,

$$\underline{\Phi} = \frac{N\underline{I}}{\underline{\mathcal{R}}} \text{ şi deci } \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + j\frac{N^2\omega}{\underline{\mathcal{R}}}.$$

Fig. 14.9. Circuit magnetic excitat.

Înlocuind pe $\mathcal{R}$ prin valoarea sa dată de relaţia (14.43), se obţine

$$\frac{1}{\underline{\mathcal{R}}} = \frac{1}{\mathcal{R}_0(1+j)ma \text{ cth } (1+j)ma} =$$

$$= \frac{1-j}{2ma\,\mathcal{R}_0}\text{th}(1+j)ma = \frac{1-j}{2ma\,\mathcal{R}_0}\frac{\text{sh } 2ma + j\sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma}$$

şi deci

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + \frac{1+j}{2ma}\cdot\frac{N^2\omega}{\mathcal{R}_0}\frac{\text{sh } 2ma + j\sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma}. \quad (14.44)$$

Observînd că $\frac{N_0}{\mathcal{R}} = L_0$ este inductanţa bobinei în cazul cînd n-ar exista fier, relaţia (14.44) se poate scrie

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + \frac{1+j}{2ma}L_0\omega\frac{\text{sh } 2ma + j\sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma} =$$

$$= \left[R + \frac{L_0\omega}{2ma}\frac{\text{sh } 2ma - \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma}\right] + j\left[\frac{L_0\omega}{2ma}\frac{\text{sh } 2ma + \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma}\right]. \quad (14.45)$$

Din relaţia (14.45) rezultă, că în cazul unei bobine cu miez de fier, rezistenţa aparentă este mărită cu

$$R_1 = \frac{L_0\omega}{2ma}\frac{\text{sh } 2ma - \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma},$$

care tinde către $\frac{L_0\omega}{2ma}$ cînd ma întrece cîteva unităţi; reactanţa aparentă $L\omega$ este însă micşorată, tinzînd tot către $\frac{L_0\omega}{2ma}$ cînd ma creşte.

Într-adevăr, s-a văzut că *, pentru $ma = 2$, sh $2ma = 27,29$, ch $2ma = 27,3$, sin $2ma = 0,76$, cos $2ma = 0,65$ şi în consecinţă, liniile trigonometrice pot fi neglijate faţă de cele hiperbolice şi tg h $2ma = 1$.

În figura 14.10 este dată variaţia mărimilor **

$$\frac{R_1}{L_0\omega} = \frac{1}{2ma} \frac{\text{sh } 2ma - \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma} \quad \text{şi} \quad \frac{L\omega}{L_0\omega} = \frac{1}{2ma} \cdot \frac{\text{sh } 2ma + \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma}.$$

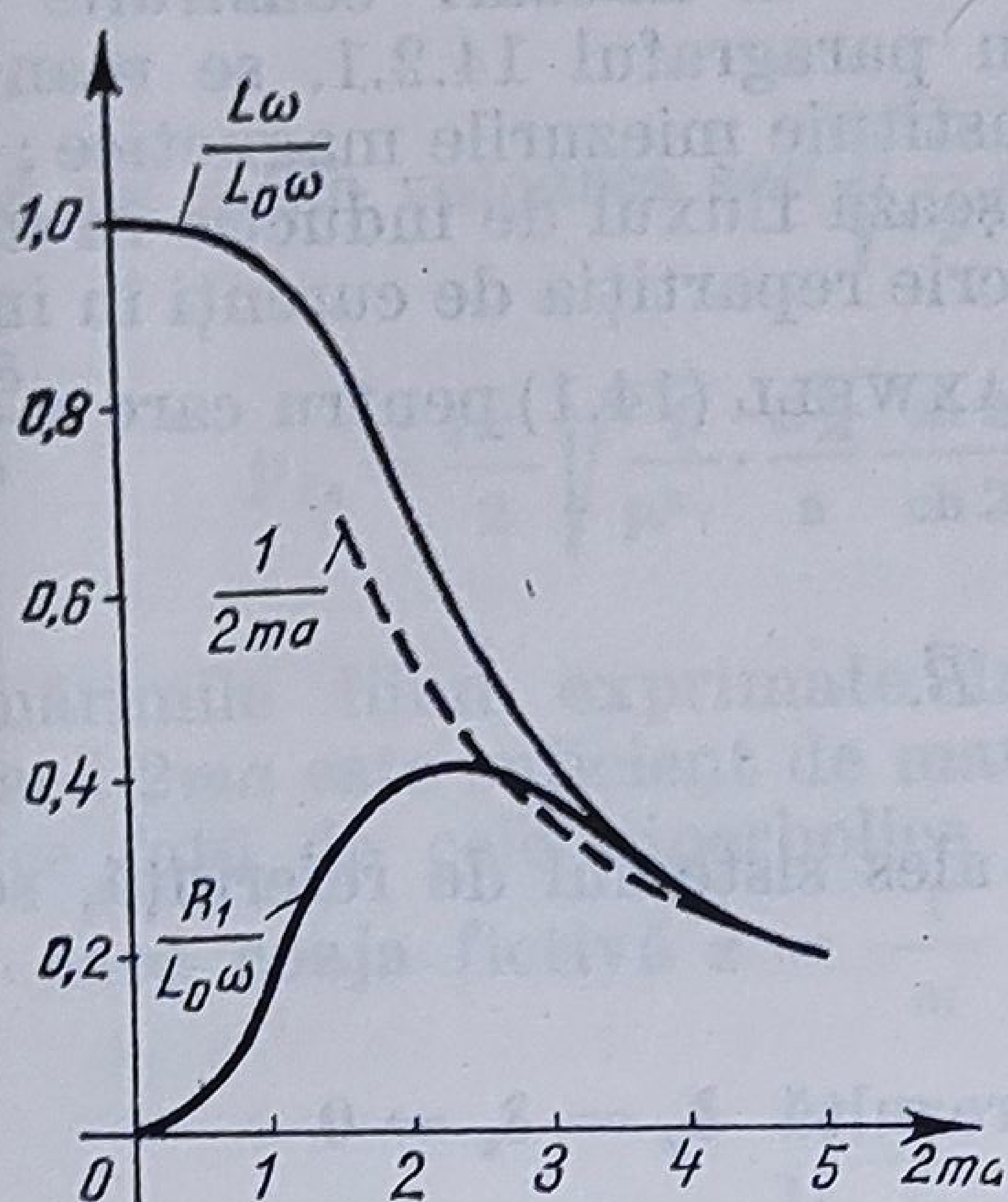


Fig. 14.10. Variaţia mărimilor $R_1/L_0\omega$ şi $L\omega/L_0\omega$ în funcţie de $2ma$.

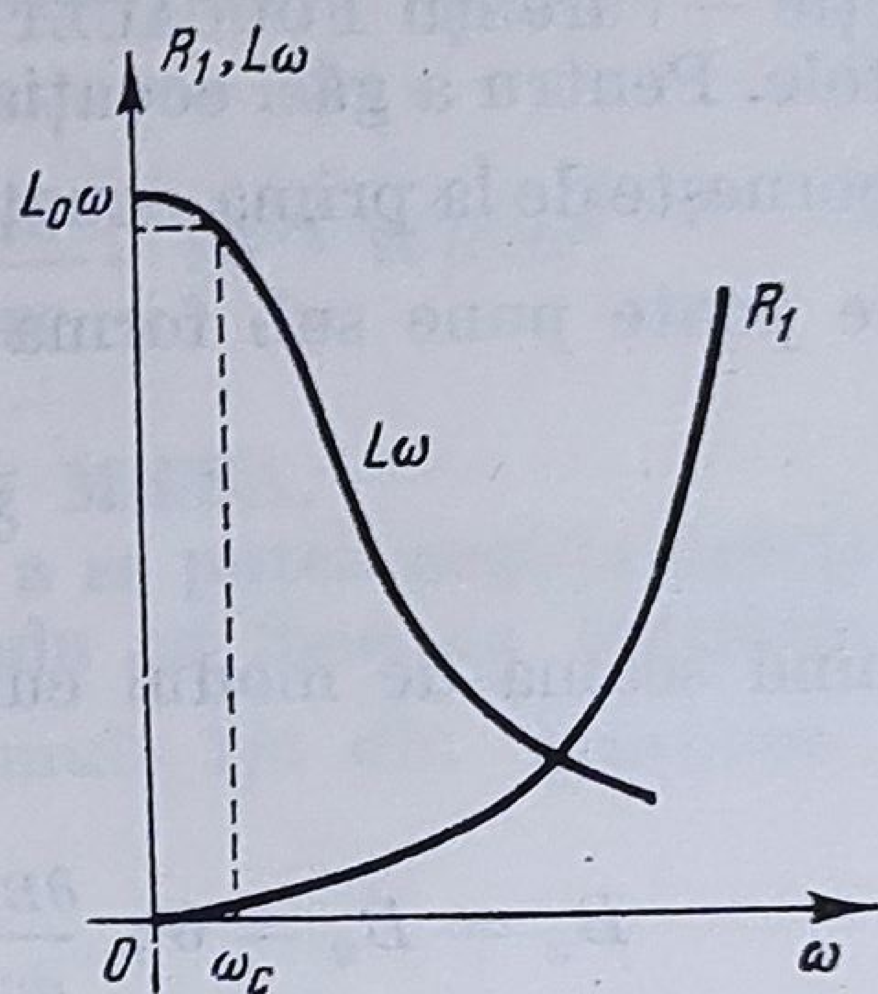


Fig. 14.11. Variaţia mărimilor R şi $L\omega$ în funcţie de ω.

Dacă ma este foarte mic, atunci ***

$$\frac{R_1}{L_0\omega} \cong \frac{(ma)^2}{6} = \frac{a^2}{3}\mu\gamma\omega \quad \text{şi} \quad \frac{L\omega}{L_0\omega} = 1.$$

Dacă ma este mare, rezultă

$$R_1 \cong L\omega \cong \frac{L_0\omega}{2ma} = \frac{L_0}{2a}\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\gamma}}.$$

În figura 14.11 sînt date **** curbele de variaţie a lui R_1 şi $L\omega$ în funcţie de pulsaţia ω.

Din figura 14.10 se vede că limita de la care scăderea reactanţei este importantă, cu alte cuvinte scăderea fluxului produs de bobina de excitaţie este mare, este pentru $2ma = 1$. Această valoare defineşte, pentru o anumită grosime de tolă frecvenţa critică după care utilizarea tolei este neeconomică; valoarea acestei frecvenţe se deduce din relaţia

$$2ma = 1$$

* Vezi 14.1.2.3. exemplul numeric.
** Vezi [115, II], pag. 249.
*** Se obţine prin dezvoltarea în serie a funcţiilor trigonometrice şi hiperbolice.
**** Vezi [115, II] pag. 249.

şi este

$$f_c = \frac{1}{(2a)^2 \pi\mu\gamma}.$$

Reciproc, pentru o frecvenţă dată se defineşte în acelaşi mod grosimea critică a unei tole după care aceasta începe să fie prost utilizată.

14.2.4. PIERDERI DE ENERGIE ÎN CIRCUITELE MAGNETICE

14.2.4.1. **Pierderi prin curenţi Foucault în miezuri construite din tole feromagnetice.** Efectul pelicular descris în paragraful 14.2.1. se manifestă şi în pachetele de tole feromagnetice care constituie miezurile magnetice; curenţii de inducţie — curenţii Foucault—îmbrăţişează fluxul de inducţie în interiorul fiecărei tole. Pentru a găsi ecuaţia care descrie repartiţia de curenţi în interiorul tolei, se porneşte de la prima ecuaţie a lui Maxwell (14.1) pentru care $\varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \ll \gamma \bar{E}$ şi care se poate pune sub forma

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \bar{B}. \tag{14.46}$$

Ţinînd seama de modul cum a fost ales sistemul de referinţă, se poate scrie

$$B_x = B_y = 0; \; \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \text{ şi rezultă } \delta_x = \delta_z = 0$$

şi deci, ecuaţia (14.46) se poate scrie, în cazul unui regim permanent armonic sinusoidal

$$\underline{\delta} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \underline{B}}{\partial x}.$$

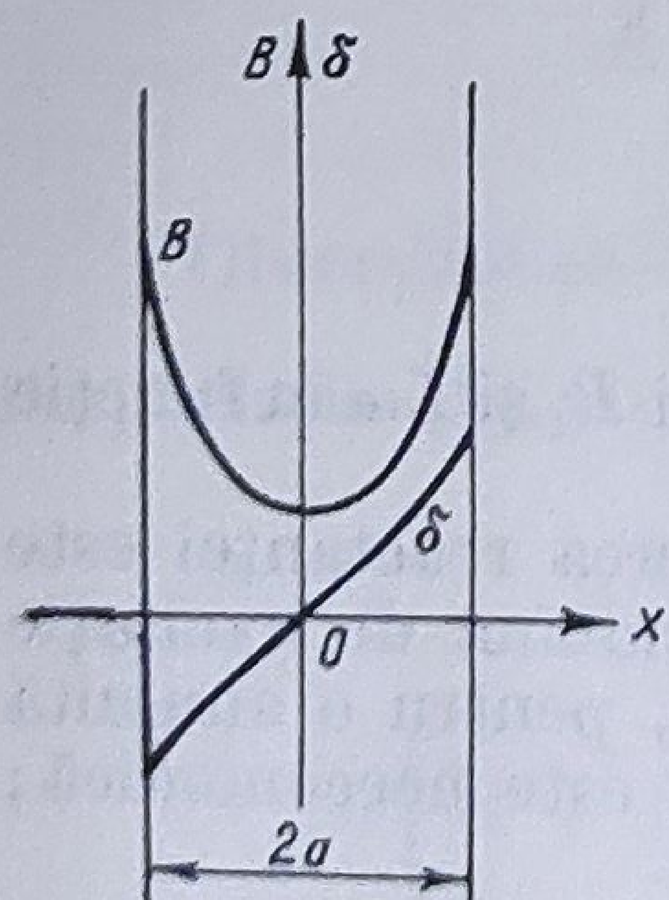


Fig. 14.12. Distribuirea cîmpului de inducţie magnetică şi a densităţii de curent într-o tolă de fier.

Ţinînd seama de valoarea lui B dată de relaţia (14.42) se obţine

$$\underline{\delta} = -\frac{(1+j)m}{\mu} B_a \frac{\text{sh } (1+j)mx}{\text{ch } (1+j)ma}, \tag{14.47}$$

a cărei valoare efectivă este

$$\delta = \frac{m\sqrt{2}}{\mu} B_a \sqrt{\frac{\text{ch } 2mx - \cos 2mx}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma}}. \tag{14.48}$$

În figura 14.12 sînt date * distribuţia cîmpului de inducţie magnetică şi a densităţii de curent într-o secţiune dreaptă a tolei; liniile de cîmp de inducţie sînt împinse din centru către exterior.

* Vezi [161] pag. 327

Pierderile de energie în tola de fier pe unitatea de timp şi de volum sînt date de relaţia (2.28)

$$p_{Fe} = (1/\gamma)\,\delta^2_{med} = \frac{1}{2a\gamma}\int_{-a}^{a}\delta^2\,dx$$

sau, ţinînd seama de relaţia (14.48) şi punînd $B_M = \sqrt{2}\ B_a$ inducţia maximă la periferia lamei, se obţine

$$p_{Fe} = \frac{mB_M^2}{2\mu^2\,a\gamma}\cdot\frac{\text{sh}\,2ma - \sin 2ma}{\text{ch}\,2ma + \cos 2ma};$$

înlocuind pe m cu valoarea sau $\sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu\gamma}$, rezultă

$$p_{Fe} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{f}{\mu^3\gamma}}\cdot\frac{B_M^2}{a}\,\frac{\text{sh}\,2ma - \sin 2ma}{\text{ch}\,2ma + \cos 2ma}\cdot 10^{-6}\ \text{W/cm}^3, \qquad (14.49)$$

toate mărimile fiind exprimate în unităţi MKSA.

Dacă $2ma$ este suficient de mare pentru a se putea neglija funcţiile trigonometrice faţă de cele hiperbolice şi confunda tg $2ma$ cu unitatea, cu alte cuvinte dacă coaja fictivă $\alpha = \frac{1}{m}$ este cel mult 1/4 din grosimea lamei *, atunci

$$P_F \cong \sqrt{\frac{f}{\mu^3\gamma}}\,\frac{B_M^2\sqrt{\pi}}{2a}\,10^{-6}\ \text{W/cm}^3. \qquad (14.50)$$

Dezvoltînd în serie funcţiile trigonometrice şi hiperbolice din relaţia (14.49), se obţine :

$$\frac{\text{sh}\,2ma - \sin 2ma}{\text{ch}\,2ma + \cos 2ma} = \frac{\frac{(2ma)^3}{3!} + \frac{(2ma)^7}{7!} + \ldots}{1 + \frac{(2ma)^4}{4!} + \ldots}$$

Presupunînd pe ma foarte mic astfel, încît să putem neglija pe $\frac{(2ma)^4}{4!}$ faţă de unitate şi oprindu-ne la primul termen al dezvoltării seriei de la numărător, rezultă

$$\frac{\text{sh}\,2ma - \sin 2ma}{\text{ch}\,2ma + \cos 2ma} \cong \frac{(2ma)^3}{3!}$$

şi deci,

$$p_{Fe} = \frac{\pi^2}{6}(2a)^2\gamma\, f^2\, B_M^2\, 10^{-6}\ \text{W/cm}^3. \qquad (14.51)$$

---

* Vezi 14.1.2.3.

În cazul cînd ma este mare, conductivitatea intră la numitorul expresiei (14.50) a pierderilor; pierderile cresc cu temperatura. Dacă ma este mic, conductivitatea intră la numărătorul expresiei pierderilor (14.51) şi deci, acestea scad cu temperatura.

Practic aceste pierderi se calculează cu o relaţie de forma

$$p_F = C_F\left(\frac{f}{100}\right)^2 B^2$$

în care C_F este un coeficient dat în tabloul 14.2.

Pentru micşorarea pierderilor de putere prin curenţi turbionari, în curent alternativ circuitul magnetic se realizează în condiţii speciale şi anume:

— Construcţia este astfel concepută, încît să limiteze posibilităţile de închidere a curenţilor turbionari, ceea ce în instalaţiile de joasă frecvenţă se obţine executînd circuitul magnetic din table de oţel (tole) aşezate paralel cu liniile de cîmp ale cîmpului şi izolate între ele cu hîrtie sau lac; metoda are dezavantajul că scumpeşte construcţia şi măreşte secţiunea totală necesară circuitului magnetic, prin introducerea straturilor izolante, inutile din punct de vedere al conducerii fluxului. În acelaşi scop, în instalaţiile de frecvenţă mare circuitul magnetic se realizează din pulberi feromagnetice presate cu o umplutură neconductoare.

— Materialul magnetic din circuit trebuie să aibă o rezistivitate mare, ceea ce, în cazul tolelor, se realizează prin adaos de siliciu; tolele devin însă casante şi se prelucrează greu, producînd o mare uzură a sculelor.

Trebuie menţionat că pierderile de putere prin curenţi turbionari apar atît în cazul circuitului magnetic imobil situat într-un cîmp magnetic variabil, aşa cum s-a presupus mai sus, cît şi în cazul unui circuit magnetic mobil situat într-un cîmp magnetic constant, mai ales cînd direcţia deplasării este perpendiculară pe direcţia liniilor de cîmp ale acestuia. În ultimul caz frecvenţa f reprezintă frecvenţa de magnetizare.

Curenţii turbionari produc un flux (de reacţie) care, conform principiului lui LENZ, se opune fluxului iniţial (inductor) aşa încît fluxul Φ rezultant în circuitul magnetic este mai mic decît fluxul inductor. Datorită acestui fapt inductanţa bobinei se micşorează de asemenea ($L = \Phi/I$).

14.2.4.2. **Pierderi de energie prin fenomenul de histerezis** *. După cum s-a arătat la descrierea unui ciclu complet de histerezis, pe unitatea de volum a circuitului magnetic se pierde energia

$$W = \oint_c H\mathrm{d}B.$$

Practic această energie se calculează cu o relaţie de forma $W = \eta B^n$, în care η este un coeficient care depinde de natura materialului, B este valoarea maximă a inducţiei, iar exponentul n are valoarea 1,6 pentru $B < 1$ T sau valoarea 2 pentru $B > 1$ T. Alţi autori propun formule de forma

$$W = \alpha' B + \beta' B^2,$$

în care termenul $\alpha' B$ poate fi neglijat pentru $B > 1$ T.

* Vezi şi 3.7.3.4.

În curent alternativ, se descrie un ciclu de histerezis complet la fiecare perioadă, adică în timpul $T = \frac{1}{f}$, aşa încît la această pierdere de energie, corespunde o putere pierdută

$$p_H = \frac{W}{T} = fW.$$

Menţionăm de asemenea că în formulele practice puterea pierdută se raportează nu la unitatea de volum, ci la unitatea de masă (kg) a circuitului magnetic. Una din aceste formule practice este

$$p_H = \frac{f}{100}(\alpha B + \beta B^2) \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}},$$

în care, pentru tolele obişnuite din construcţia maşinilor şi transformatoarelor, coeficienţii α şi β sînt daţi de tabloul 14.2.

Tabloul 14.2

	Grosimea tolelor mm	α	β	C_H	C_F	Pierderi totale pe kilogram la inducţia $B = 1$ T W/kg
Tolă de dinam (tole obişnuite)	0,5 0,35	0,9 0,9	3,5 3,8	4,4 4,7	5,6 3,2	3,6 3,15
Tolă de transformator	0,5 0,35	0,4 0,3	2,6 2,1	3,0 2,4	1,2 0,6	1,8 1,35

Pentru inducţii $B > 1$ T se foloseşte relaţia

$$p_H = C_H \frac{f}{100} B^2,$$

coeficientul $C_H = \alpha + \beta$ fiind de asemenea indicat în tabloul 14.2.

14.2.4.3. **Pierderi în fier.** Prin pierderi în fier se înţelege suma

$$p_H + p_F = p_{\mathrm{Fe}}$$

a pierderilor prin histerezis şi curenţi turbionari. Pentru un material şi o frecvenţă dată aceste pierderi depind de valoarea inducţiei. Pentru caracterizarea calităţilor materialelor magnetice se obişnuieşte să se dea valoarea pierderilor în fier la inducţia de 1 T. Pentru cîteva categorii de tole obişnuite, laminate la cald, aceste pierderi sînt indicate în ultima coloană a tabloului 14.2, şi au valori de 1,35—3,6 W/kg. Trebuie însă menţionat, că în ultimii 15 ani s-au realizat tole laminate la rece, într-un singur sens, supuse unor tratamente termice speciale în atmosferă inertă; la aceste tole, dacă liniile de cîmp ale cîmpului sînt paralele cu direcţia laminării cifra de pierderi la inducţia de 1 T coboară sub 0,8 W/kg; dacă însă, liniile de cîmp sînt perpendiculare pe direcţia laminării se obţin rezultate mai slabe decît cu tolele obişnuite.

În cele ce preced, fenomenele de histerezis şi curenţi turbionari au fost considerate numai sub aspectul lor negativ. Ele pot avea însă şi aplicaţii practic. Astfel, cu ajutorul curenţilor turbionari induşi de un cîmp alternativ într-o placă de aluminiu sau cupru se pot obţine motoare mici, cu randament mic, dar simple, pentru acţionarea dispozitivelor de înregistrare la contoare, acţionarea discurilor de patefon etc., sau se pot obţine frîne prin aşezarea unui disc mobil de cupru sau de aluminiu într-un cîmp constant. Mai importantă este aplicarea la cuptoarele de inducţie pentru topit. Aceste cuptoare, conţinînd încărcătura de topit, sînt înconjurate de un conductor (inductor) prin care trece curent alternativ, de obicei de o frecvenţă mai mare de 50 Hz; materialul din cuptor se încălzeşte cu ajutorul „pierderilor în fier". De asemenea trebuie menţionat că în ultimul timp fenomenele de „pierderi în fier" au fost aplicate şi la încălzirea sau călirea metalelor. Piesa care trebuie încălzită sau călită este introdusă într-un cîmp magnetic alternativ cu frecvenţa de valoare cuprinsă între 500 Hz pînă la mai multe sute de mii Hz, în funcţie de dimensiunile piesei şi adîncimea stratului care urmează să fie încălzit. Se obţine o încălzire mult mai rapidă şi mai uşor de controlat; întregul proces tehnologic poate fi automatizat cu mijloace simple *.

14.3. REPARTIŢIA CURENTULUI ELECTRIC ÎN CONDUCTOARE CILINDRICE

14.3.1. STABILIREA ECUAŢIEI GENERALE

Fie o bară cilindrică, de lungime infinită, de rază a, de conductivitate γ şi permeabilitate μ, parcursă de un curent i (fig. 14.13).

Ecuaţia care dă distribuţia densităţii de curent în secţiunea dreaptă a acestui conductor se obţine ca şi în cazurile precedente integrînd sistemul de ecuaţii a lui MAXWELL scrise în acest caz particular. Vom avea deci,

$$\text{rot}\,\overline{H} = \delta,$$

$$\text{rot}\,\delta = -\mu\gamma\frac{\partial \overline{H}}{\partial t},$$

cele două ecuaţii, în care δ este numai densitatea de curent de conducţie.

Derivînd prima ecuaţie în raport cu t se obţine

Fig. 14.13. Conductor cilindric.

$$\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\,\overline{H} = \text{rot}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} = \frac{\partial \delta}{\partial t}. \tag{14.52}$$

Aplicînd rotorul celei de a doua ecuaţii obţinem

$$\text{rot rot}\,\delta = -\Delta\delta + \text{grad div}\,\delta = -\mu\gamma\,\text{rot}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t},$$

* Vezi şi 14.1.2.4.

de unde, ţinînd seama de relaţia (14.3),

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \overline{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \Delta \overline{E} = \frac{1}{\gamma\mu} \Delta \overline{\delta}. \tag{14.53}$$

Comparînd relaţiile (14.52) şi (14.53) se obţine ecuaţia căutată

$$\Delta \overline{\delta} = \mu \gamma \frac{\partial \overline{\delta}}{\partial t}. \tag{14.54}$$

Vectorul $\overline{\delta}$ nevariind în direcţie, ci numai în mărime, ecuaţia poate fi scrisă numai pentru module:

$$\Delta \delta = \mu\gamma \cdot \frac{\partial \delta}{\partial t} \tag{14.55}$$

Laplacianul din membrul întîi

$$\Delta \delta = \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2}$$

se reduce numai la primii doi termeni, ultimul termen fiind nul deoarece densitatea de curent nu variază decît în planul secţiunii.

Trecînd la coordonate polare, r fiind distanţa de la centru la punctul considerat, ecuaţia generală (14.55) devine

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta}{\partial r} = \mu \gamma \frac{\partial \delta}{\partial t}. \tag{14.56}$$

14.3.1. INTEGRAREA ECUAŢIEI ÎN CAZUL UNUI CURENT ALTERNATIV SINUSOIDAL, ÎN REGIM PERMANENT

Fie

$$\underline{\delta} = \delta \underline{|\psi}$$

o densitate de curent alternativă sinusoidală în timp.

Introducînd această valoare în ecuaţia (14.56) se obţine

$$\frac{\partial^2 \underline{\delta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{\delta}}{\partial r} = \mathrm{j}\mu\omega\gamma\, \underline{\delta},$$

sau punînd

$$\underline{k} = m + \mathrm{j}n = \sqrt{\mathrm{j}\,\mu\,\omega\,\gamma},$$

în care

$$m = n = \sqrt{\frac{1}{2}\mu\omega\gamma} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}},$$

ecuaţia devine

$$\frac{\partial^2 \underline{\delta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{\delta}}{\partial r} = \underline{k}^2\, \underline{\delta}, \tag{14.57}$$

care mai poate fi scrisă sub forma

$$\frac{\partial^2 \underline{\delta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{\delta}}{\partial r} + (\mathrm{j}\underline{k})^2 \underline{\delta} = 0$$

sau

$$\frac{\partial^2 \underline{\delta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{\delta}}{\partial r} - \mathrm{j}\lambda^2 \underline{\delta} = 0. \tag{14.58}$$

Ecuaţia (14.58) este o ecuaţie de tip BESSEL de ordinul zero avînd soluţia generală *

$$\underline{\delta} = \underline{A}_1 \mathrm{J}_0 (r\lambda \mathrm{j}^{\frac{3}{2}}) + \underline{A}_2 \mathrm{Y}_0 (r\lambda \mathrm{j}^{\frac{3}{2}}),$$

în care $\mathrm{J}_0(z)$ este funcţia BESSEL de ordinul zero iar $\mathrm{Y}_0(z)$ este funcţia NEUMANN de ordinul zero **. Variaţia acestor funcţii este dată în figura 14.14.

Pentru $Z \to 0$ funcţia Y_0 tinde către infinit. Întrucît densitatea de curent este finită şi în centrul conductorului ($r = 0$) chiar atunci cînd $\gamma = \infty$, trebuie ca $\underline{A}_2 = 0$.

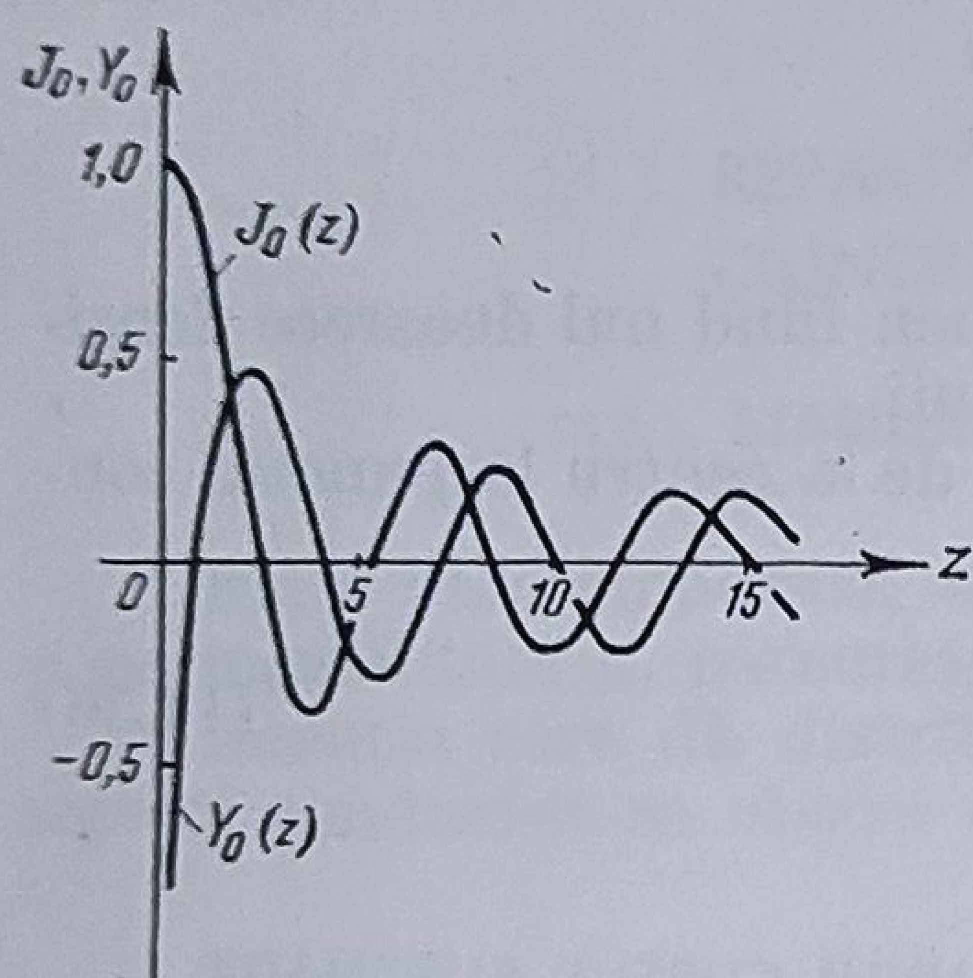


Fig. 14.14. Variaţia funcţiilor BESSEL şi NEUMANN de ordinul zero.

În consecinţă, soluţia ecuaţiei (14.57) este

$$\underline{\delta} = \underline{A}_1 \mathrm{J}_0 (r\lambda \mathrm{j}^{3/2}).$$

Pentru determinarea constantei $\underline{A}_1$ scriem că la periferia conductorului, $r=a$ densitatea de curent $\underline{\delta} = \underline{\delta}_a$; rezultă imediat

$$\underline{\delta} = \underline{\delta}_a \frac{\mathrm{J}_0 (r\lambda \mathrm{j}^{3/2})}{\mathrm{J}_0 (a\lambda \mathrm{j}^{3/2})}, \tag{14.59}$$

relaţie analoagă cu relaţia (14.10) obţinută în cazul conductoarelor cu secţiunea rectangulară.

Funcţiile BESSEL de ordinul zero din expresia (14.59) avînd argumentul complex, sînt ele însăşi numere complexe. Pe de altă parte, ele nu pot fi calculate cu ajutorul tabelelor. Se introduc funcţiile KELVIN de argument real prin relaţia ***

$$\mathrm{J}_0 (z\ \mathrm{j}^{3/2}) = \mathrm{ber}\ z + \mathrm{j}\ \mathrm{bei}\ z,$$

unde ber z (BESSEL real) şi bei z (BESSEL imaginar) sînt funcţiile KELVIN ataşate funcţiei BESSEL $\mathrm{J}_0(z\ \mathrm{j}^{3/2})$.

Cu aceste funcţii, relaţia (14.59) se poate scrie

$$\underline{\delta} = \underline{\delta}_a \frac{\mathrm{ber}\,(\lambda r) + \mathrm{j}\ \mathrm{bei}\,(\lambda r)}{\mathrm{ber}\,(\lambda a) + \mathrm{j}\ \mathrm{bei}(\lambda a)}, \tag{14.60}$$

* Se poate rezolva ecuaţia (14.57) încercînd o soluţie de forma

$$\underline{\delta} = \underline{A}_0 + \underline{A}_1 r + \underline{A}_2 r^2 + \ldots + \underline{A}_n r^n + \ldots$$

şi prin identificare se găseşte rezultatul dat de relaţia (14.60)

** Vezi [4] pag. 381

*** Vezi [4] pag. 378.

relație analoagă cu relația (14.11) stabilită în cazul barelor de secțiune rectangulară.

Expresia (14.60) poate fi pusă și sub o altă formă. Dacă se notează

$$\text{ber}\ z + \text{j bei}\ z = M_0(z)\ \underline{|\theta_0(z)}$$

în care

$$M_0(z) = \sqrt{\text{ber}^2 z + \text{bei}^2 z}$$

și

$$\theta_0(z) = \text{arc tg}\ \frac{\text{bei}\ z}{\text{ber}\ z},$$

atunci se obține

$$\underline{\delta} = \underline{\delta}_a \frac{M_0(\lambda r)}{M_0(\lambda a)} \underline{|\theta_0(\lambda r) - \theta_0(\lambda a)}. \tag{14.61}$$

Luînd ca origine de fază unghiul corespunzător suprafeței conductorului, expresia (14.61) devine

$$\underline{\delta} = \underline{\delta}_a \frac{M_0(\lambda r)}{M_0(\lambda a)} \underline{|\theta_0(\lambda r)}.$$

Dacă λr este mare *, unghiul de fază $\theta_0(\lambda r)$ poate trece mult peste 2π. Pot exista deci, în interiorul conductorului domenii în care curenții să fie în opoziție (fig. 14.15). Raportul

$$\delta_a \frac{M_0(\lambda r)}{M_0(\lambda a)},$$

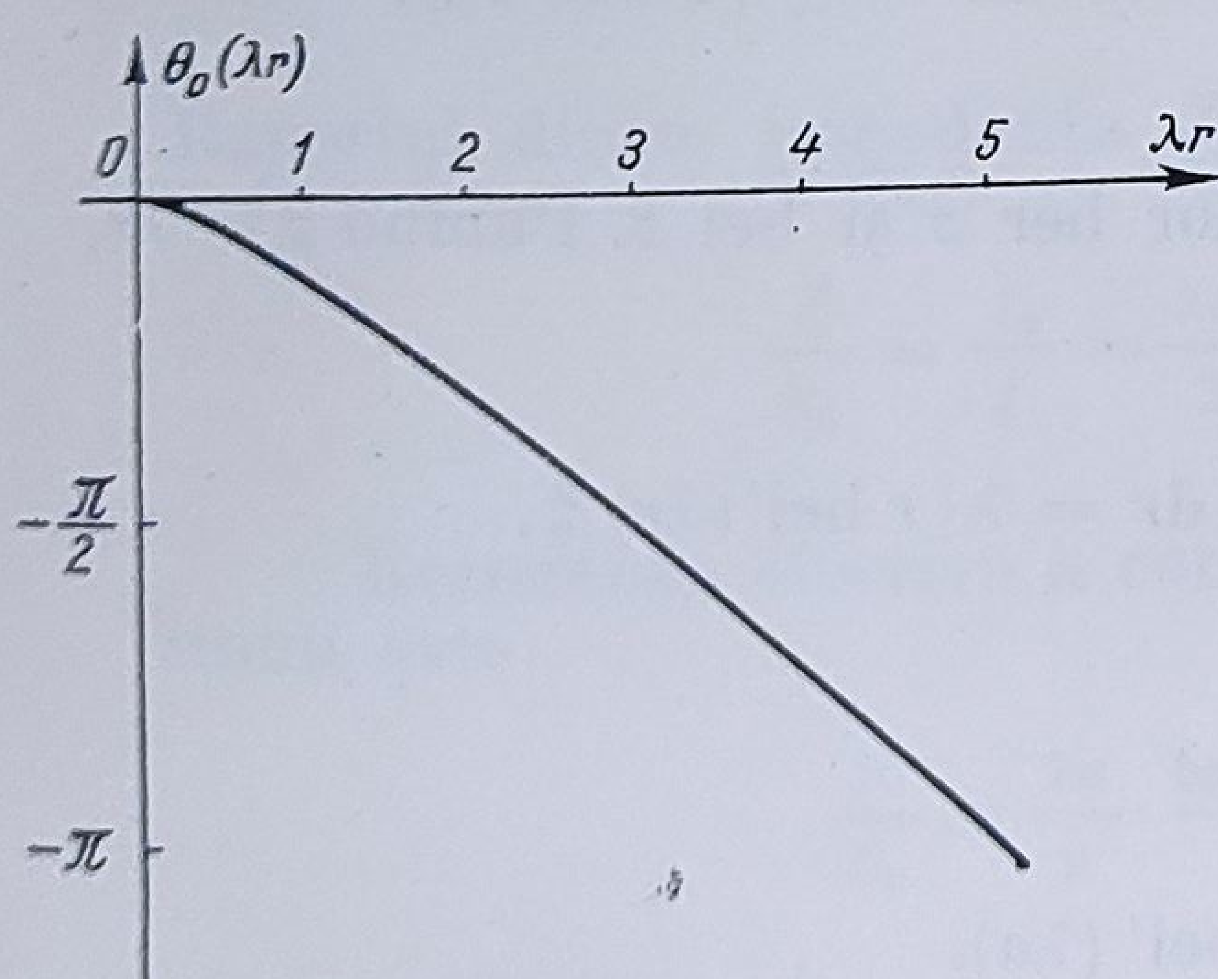


Fig. 14.15. Variația defazajului în raport cu parametrul λr.

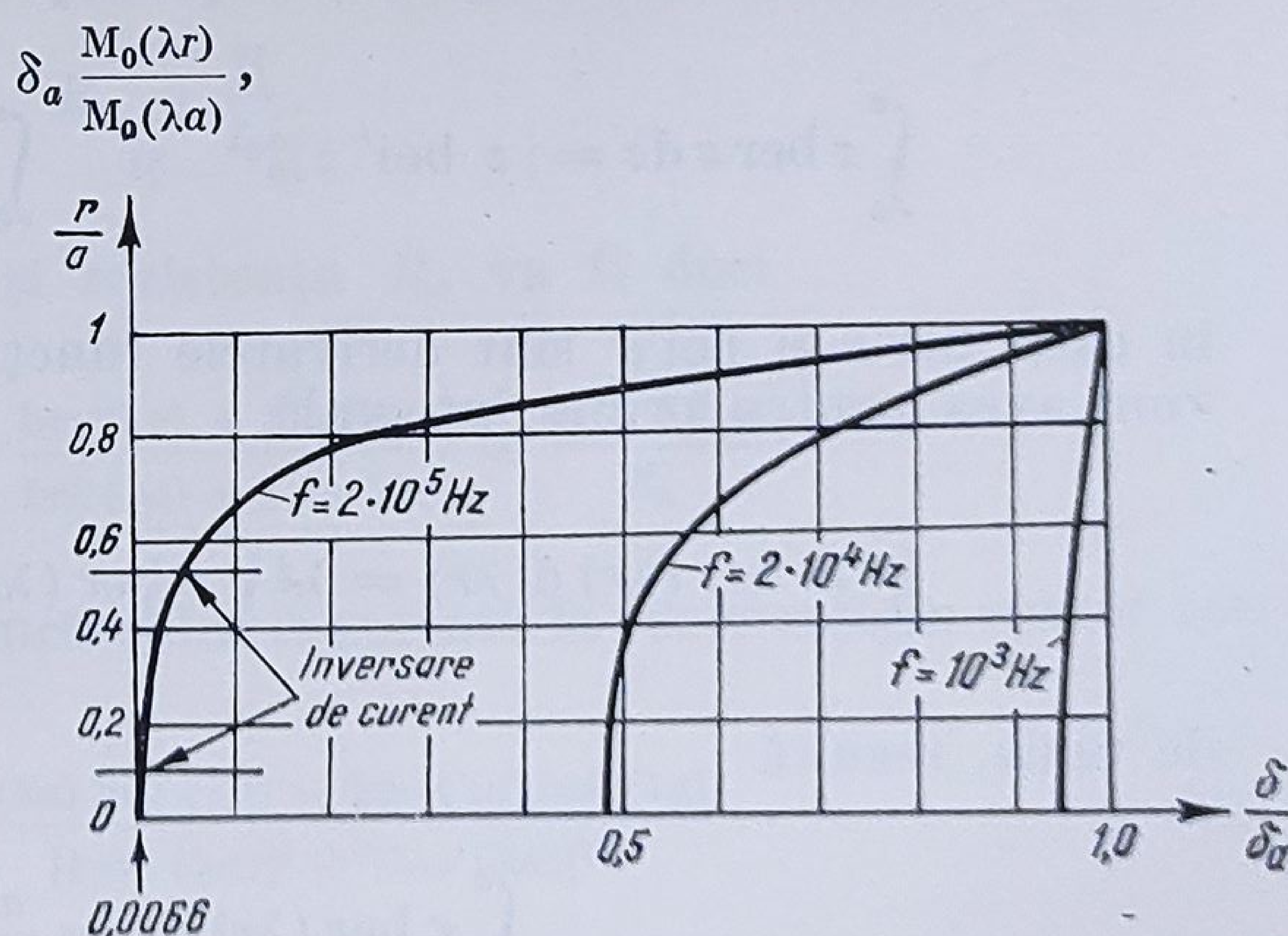


Fig. 14.16. Diagrama de pătrundere a curentului electric într-un conductor cilindric.

dă valoarea amplitudinii densității de curent în interiorul conductorului la o distanță r de axa acestuia.

În figura 14.16 este dată o reprezentare a pătrunderii curentului sau a densității de curent în funcție de distanța de la axa unui conductor cilindric,

---

* $\lambda = \mu\omega\gamma$ poate fi mare dacă permeabilitatea μ este mare, dacă frecvența f ($\omega = 2\pi f$) este mare sau dacă conductivitatea γ este mare.

avînd diametrul $2a=2$ mm şi pentru curenţi alternativi cu frecvenţele de 1000 Hz, 20 000 Hz şi 200 000 Hz. Trebuie observat, că pentru frecvenţa $f = 50$ Hz efectul pelicular respectiv este abia simţit.

14.3.3. DETERMINAREA IMPEDANŢEI PROPRII A UNUI CONDUCTOR CILINDRIC

14.3.3.1. Stabilirea expresiei curentului. Printr-o secţiune inelară de grosime $\mathrm{d}r$, situată la distanţa r de centrul conductorului, trece un curent

$$\mathrm{d}\,\underline{I} = 2\pi r\,\underline{\delta}\,\mathrm{d}r.$$

Curentul total care va trece prin întreaga secţiune a conductorului, va fi dat de relaţia

$$\underline{I} = 2\pi \int_0^a \underline{\delta}\, r\, \mathrm{d}r$$

sau, ţinînd seama de relaţia (14.60),

$$\underline{I} = \frac{2\pi \cdot \underline{\delta}_a}{\mathrm{ber}\,(\lambda a) + \mathrm{bei}(\lambda a)} \int_0^a [\mathrm{ber}\,(\lambda r) + \mathrm{j}\,\mathrm{bei}\,(\lambda r)]\, r\, \mathrm{d}r.$$

Pentru calculul integralei, se porneşte de la relaţiile cunoscute *

$$\int_0^a z\,\mathrm{ber}\,z\,\mathrm{d}z = |\,z\,\mathrm{bei}'\,z\,|_0^a \quad \text{şi} \quad \int_0^a z\,\mathrm{bei}\,z\,\mathrm{d}z = -\,|\,z\,\mathrm{ber}'\,z\,|_0^a,$$

în care $\mathrm{ber}'z$ şi $\mathrm{bei}'z$ sînt derivatele funcţiilor ber z şi bei z. Punînd $z = \lambda r$, vom avea pentru prima integrală

$$\int_0^a \lambda r\,\mathrm{ber}\,(\lambda r)\,\mathrm{d}(\lambda r) = \lambda^2 \int_0^a r\,\mathrm{ber}\,(\lambda r)\,\mathrm{d}r = \lambda\,|\,r\,\mathrm{bei}'\,(\lambda r)\,|_0^a,$$

de unde, rezultă

$$\int_0^a r\,\mathrm{ber}\,(\lambda r)\,\mathrm{d}r = \frac{a}{\lambda}\,\mathrm{bei}'\,(\lambda a).$$

În acelaşi mod se găseşte şi

$$\int_0^a r\,\mathrm{bei}\,(\lambda r)\,\mathrm{d}r = \frac{a}{\lambda}\,\mathrm{ber}'\,(\lambda a).$$

* Vezi [141] pag. 230.

Astfel, că expresia căutată a curentului este *

$$\underline{I} = \frac{2\pi a \,\underline{\delta}_a}{\lambda} \frac{\mathrm{bei}'(\lambda a) - \mathrm{j}\,\mathrm{ber}'(\lambda a)}{\mathrm{ber}(\lambda a) + \mathrm{j}\,\mathrm{bei}(\lambda a)} \tag{14.62}$$

a cărui modul este

$$I = \frac{2\pi a \,\delta_a}{\lambda} \sqrt{\frac{[\mathrm{bei}'(\lambda a)]^2 + [\mathrm{ber}'(\lambda a)]^2}{[\mathrm{ber}(\lambda a)]^2 + [\mathrm{bei}(\lambda a)]^2}}$$

şi are argumentul

$$\varphi = \mathrm{arc\,tg}\frac{\mathrm{ber}'(\lambda a)}{\mathrm{bei}'(\lambda a)} - \mathrm{arc\,tg}\frac{\mathrm{bei}(\lambda a)}{\mathrm{ber}(\lambda a)},$$

faţă de curentul la periferia conductorului luat ca origine de fază. Trebuie să observăm, că acest curent este egal cu curentul continuu ce ar străbate conductorul şi a cărui valoare $I_0 = \pi a^2 \delta_a$.

14.3.3.2. **Calculul impedanţei.** Impedanţa proprie a conductorului este

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\lambda a U}{2 I_0} \frac{\mathrm{ber}(\lambda a) + \mathrm{j}\,\mathrm{bei}(\lambda a)}{\mathrm{bei}'(\lambda a) - \mathrm{j}\,\mathrm{ber}'(\lambda a)},$$

U este tensiunea aplicată la extremităţile conductorului şi care s-a luat ca origine de fază. În curent continuu, rezistenţa corespunzătoare este

$$R_0 = \frac{U}{I_0}.$$

Raportul dintre impedanţa $\underline{Z}$ şi rezistenţa R_0 va fi deci

$$\frac{\underline{Z}}{R_0} = \frac{I_0}{\underline{I}} = \frac{\lambda a}{2} \cdot \frac{\mathrm{ber}(\lambda a) + \mathrm{j}\,\mathrm{bei}(\lambda a)}{\mathrm{bei}'(\lambda a) - \mathrm{j}\,\mathrm{ber}'(\lambda a)} = \frac{R + \mathrm{j}\,L\omega}{R_0}.$$

Rezistenţa efectivă a conductorului raportată la rezistenţa în curent continuu este

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\lambda a}{2} \cdot \frac{\mathrm{ber}(\lambda a)\,\mathrm{bei}'(\lambda a) - \mathrm{ber}'(\lambda a)\,\mathrm{bei}'(\lambda a)}{[\mathrm{ber}'(\lambda a)]^2 + [\mathrm{bei}'(\lambda a)]^2},$$

---

* Calculul curentului se putea face şi cu ajutorul relaţiei (14.59) găsindu-se

$$\underline{I} = \frac{2\pi a \,\underline{\delta}_a}{\lambda} \frac{J_1(\lambda a \mathrm{j}^{3/2})}{J_0(\lambda a \mathrm{j}^{3/2})} \Big| -\frac{3\pi}{4},$$

în care $J_1(z)$ este funcţia BESSEL de ordinul unu. Expresia curentului se obţine ţinînd seama de relaţia cunoscută (Vezi [4] pag. 361) $\int_{z_1}^{z_2} z\,J_0(z)\,dz = |z\,J_1(z)|_{z_1}^{z_2}$ şi de faptul că $\mathrm{j}^{-3/2} = 1 \Big| -\frac{3\pi}{4}$.

iar reactanţa internă a conductorului, raportată la aceeaşi rezistenţă, este

$$\frac{L\omega}{R_0} = \frac{\lambda a}{2} \frac{\mathrm{ber}(\lambda a)\,\mathrm{ber}'(\lambda a) + \mathrm{bei}(\lambda a)\,\mathrm{bei}'(\lambda a)}{[\mathrm{ber}'(\lambda a)]^2 + [\mathrm{bei}'(\lambda a)]^2}.$$

În tabloul 14.3 este dată variaţia raportului $\frac{R}{R_0}$ în funcţie de

$$\lambda a = a\sqrt{\mu\,\omega\,\gamma},$$

toate valorile fiind exprimate în unităţi MKSA:

Tabloul 14.3

λa	$\frac{R}{R_0}$
0	1
0,5	1,0000
1	1,0056
1,5	1,0258
2	1,0805
2,5	1,1747
3	1,3180
3,5	1,4920
4	1,6778
4,5	1,8628
5	2,0430
5,5	2,2190
6	2,3937
8	3,0956
10	3,7980
15	5,5620
20	7,3277
30	10,876

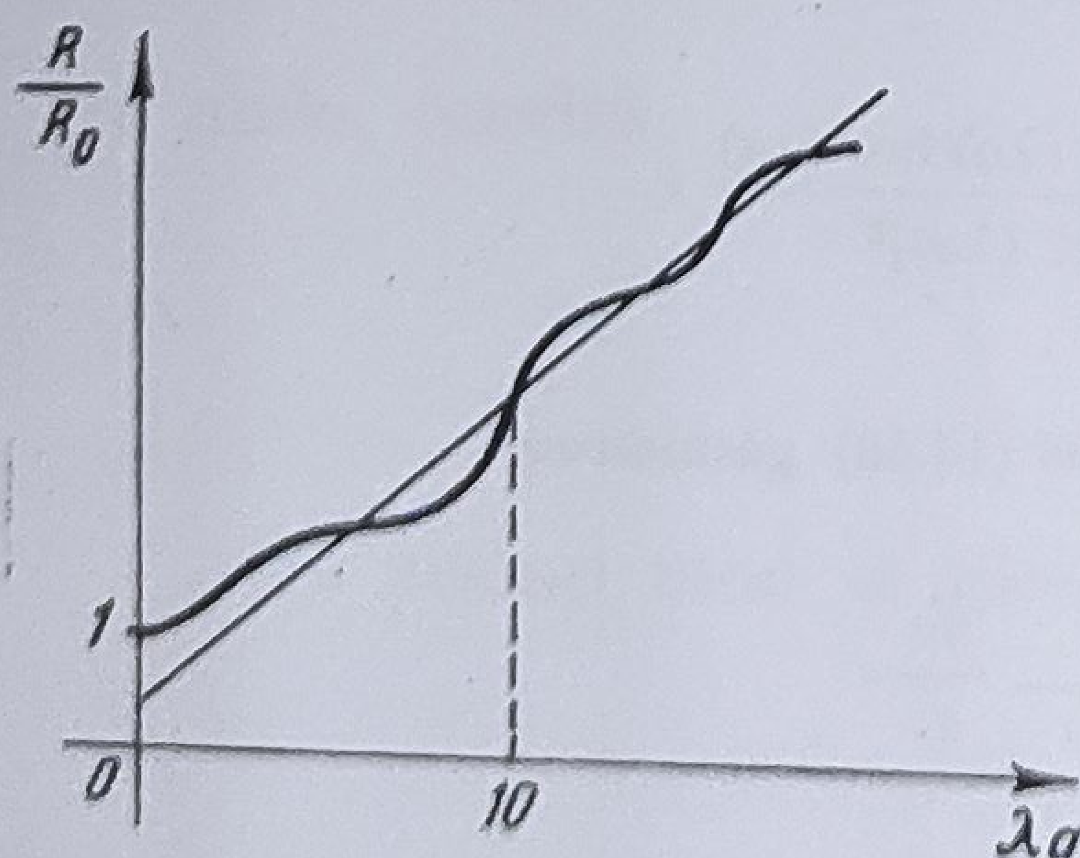


Fig. 14.17. Curba $(R/R_0) = f(\lambda a)$.

Construind curba $\frac{R}{R_0} = f(\lambda a)$ (fig. 14.17) se vede, că pentru valorile lui λa mai mari ca 10, variaţia lui $\frac{R}{R_0}$ în funcţie de λa devine sensibil liniară şi poate fi înlocuită cu asimptota ei avînd ecuaţia *

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\lambda a}{2\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{16} = 0{,}353\,(\lambda a) + 0{,}265. \tag{14.63}$$

Dacă λa devine atît de mare, încît să se poată neglija al doilea termen al ecuaţiei (14.63), ceea ce se întîmplă atunci cînd raza cilindrului este mare sau frecvenţa foarte mare, se poate scrie

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\lambda a}{2\sqrt{2}} = \frac{am}{2}\ ; \tag{14.64}$$

totul se întîmplă ca şi cum secţiunea conductorului ar fi redusă în raportul $2/am$, cu alte cuvinte, conductorul cilindric plin de diametru $2a$ ar fi înlocuit cu un cilindru găurit de rază a şi grosime α astfel ca

$$\frac{R}{\pi a^2} = \frac{R_0}{2\pi a \alpha},$$

de unde, rezultă ţinînd seama de relaţia (14.64)

$$\frac{R_0 \frac{am}{2}}{\pi a^2} = \frac{R_0}{2\pi a \alpha}$$

* Vezi [141] pag. 235.

şi deci,

$$\alpha = \frac{1}{m},$$

adică, aceeaşi grosime ca şi în cazul barelor plate *.

14.3.4. CABLUL DIVIZAT **

Fie un conductor cilindric format dintr-un mare număr de conductoare toronate astfel, ca să formeze un cablu.

Dacă lungimea pasului de cablare este foarte mare în raport cu diametrul cablului, se poate admite că toţi curenţii rămîn paraleli cu axa cablului şi că planurile care cuprind liniile de cîmp magnetic sînt normale pe această axă a cablului.

În acest caz :

1. Dacă permeabilitatea relativă a metalului este egală cu unitatea, nimic nu se schimbă în raport cu conductorul masiv, raportul $\frac{R}{R_0}$ va fi dat, cu suficientă aproximaţie de relaţiile stabilite mai înainte.

2. În cazul cînd cablul este constituit din materiale feromagnetice (cabluri de oţel-aluminiu, de exemplu), reluctanţa tuburilor de cîmp magnetic concentrice cu axa cablului va fi mult mai mare, decît aceea a aceloraşi tuburi în cazul conductorului masiv şi asta din cauza multiplelor întrefieruri care separă firele unele de altele ; cu alte cuvinte, permeabilitatea μ care intervine în expresia lui m este mult mai mică decît aceea a unui cilindru masiv de aceleaşi dimensiuni. În acest caz raportul $\frac{R}{R_0}$ va fi mult mai mic decît în cazul cilindrului plin, de aceleaşi dimensiuni.

3. Se poate omogeniza repartiţia de curenţi în fiecare fir a cablului şi utiliza astfel la maximum metalul care le constituie, dacă se transpun regulat conductoarele astfel că, pe lungimea utilizată, fiecare fir să ocupe pe rînd toate poziţiile posibile.

În cazul cînd pasul de cablaj nu este foarte mare faţă de diametrul secţiunii drepte, planurile tuburilor de cîmp sînt înclinate faţă de secţiunea dreaptă şi inducţia comportă o componentă dirijată în sensul axei cablului ; această componentă produce pierderi suplimentare şi măreşte astfel valoarea rezistenţei efective.

---

* Vezi 14.1.2.3.

** Vezi [107] pag. 811.

Capitolul XV

PROPAGAREA UNDELOR ELECTROMAGNETICE

15.1. UNDE ELECTROMAGNETICE

15.1.1. GENERALITĂŢI

Curenţii electrici variabili în timp, care străbat un circuit produc în vecinătatea acestuia un cîmp magnetic variabil; sarcinile variabile în timp produc în întreg spaţiul înconjurător un cîmp electric variabil. Cîmpuri electrice sau magnetice variabile pot produce şi corpurile electrizate sau magnetizate în mişcare.

S-a arătat, că aceste două fenomene, cîmp magnetic variabil şi cîmp electric variabil, sînt inseparabile unul de altul: producerea unuia dintre acestea într-o regiune a spaţiului atrage după sine producerea celuilalt.

Legătura care există între aceste cîmpuri şi curenţii electrici corespunzători sînt date de ecuaţiile lui MAXWELL care au fost stabilite mai înainte*

$$\left.\begin{aligned} \text{rot}\,\overline{H} &= \overline{\delta} + \frac{d\overline{D}}{dt}, \\ \text{div}\,\overline{D} &= \rho, \\ \text{div}\,\overline{B} &= 0, \\ \text{rot}\,\overline{E} &= -\frac{d\overline{B}}{dt}, \end{aligned}\right\} \tag{15.1}$$

completate cu relaţiile de legătură

$$\overline{D} = \varepsilon\overline{E};\quad \overline{B} = \mu\overline{H};\quad \overline{\delta} = \gamma\overline{E}, \tag{15.2}$$

valabile pentru un dielectric perfect, un mediu magnetic perfect şi un conductor liniar.

În cazul unui dielectric perfect, de permitivitate ε, $\overline{\delta} = 0$ şi prima ecuaţie (15.1) se poate scrie

$$\text{rot}\,\overline{H} = \varepsilon\frac{d\overline{E}}{dt}; \tag{15.3}$$

analog

$$\text{rot}\,\overline{E} = -\mu\frac{d\overline{H}}{dt}, \tag{15.4}$$

care arată strînsa legătură dintre cele două cîmpuri.

* Vezi 3.1.8 şi 3.3.2.

Să examinăm, în raport cu cele două ecuaţii fundamentale ale cîmpului electromagnetic* , mecanismul producerii unui cîmp magnetic** . Fie, pentru aceasta, circuitul simplu din figura 15.1, care este alimentat de o sursă de tensiune constantă şi care este întrerupt într-un punct oarecare. Diferenţa de potenţial care apare între extremităţile circuitului la locul întreruperii şi care este menţinută constantă de sursă, se traduce prin existenţa unui cîmp electric, materializat prin liniile de cîmp corespunzătoare ; în afară de aceasta, suprafaţa conductorului legat la borna pozitivă a sursei este acoperit cu sarcini pozitive, celălalt fiind acoperit cu sarcini negative. Legînd bornele A şi B împreună, sarcinile electrice vecine, de semn contrar, sînt puse în mişcare sub acţiunea forţelor electrice şi caută să se neutralizeze (fig. 15.2, a) ; mişcarea acestor sarcini acţionează ca un curent electric dirijat de la A către B, într-un element de curent care leagă cele două puncte de contact. Cîmpul electric dispare în timp ce ia naştere un curent de deplasare îndreptat de jos în sus şi ale cărui linii de curent (punctate pe figura 15.2, a) închid liniile de curent ale curentului de conducţie dintre A şi B. Această distribuţie de curenţi produce la rîndul său un cîmp magnetic, ale cărui linii de cîmp sînt cercuri concentrice pe conductorul respectiv, şi care este localizat în volumul aproape sferic în care apare curentul de deplasare. Acest cîmp magnetic produce la rîndul său un cîmp electric a cărui linii de cîmp înconjură liniile de cîmp magnetic. Forţa electromotoare indusă de-a lungul conturului format din liniile de curent ale curenţilor de conducţie şi de deplasare este opusă — conform legii lui LENZ-FARADAY — sensului acestor curenţi. În consecinţă, efectul cîmpului magnetic este să se opună stabilirii curentului, deci a dispariţiei cîmpului electric iniţial. Această forţă electromotoare de inducţie este cu atît mai mare cu cît viteza stabilirii curentului — deci a cîmpului magnetic — este mai mare. După un anumit timp configuraţia cîmpului este aceea dată în figura 15.2,b : neutralizarea sarcinilor electrice este realizată pe o porţiune însemnată a circuitului şi cîmpul electric este nul în spaţiul înconjurător, care este astfel sediul unui cîmp magnetic. Însă, în spaţiul din afara acestei zone, cîmpul electric are încă aceleaşi proprietăţi pe care le-a

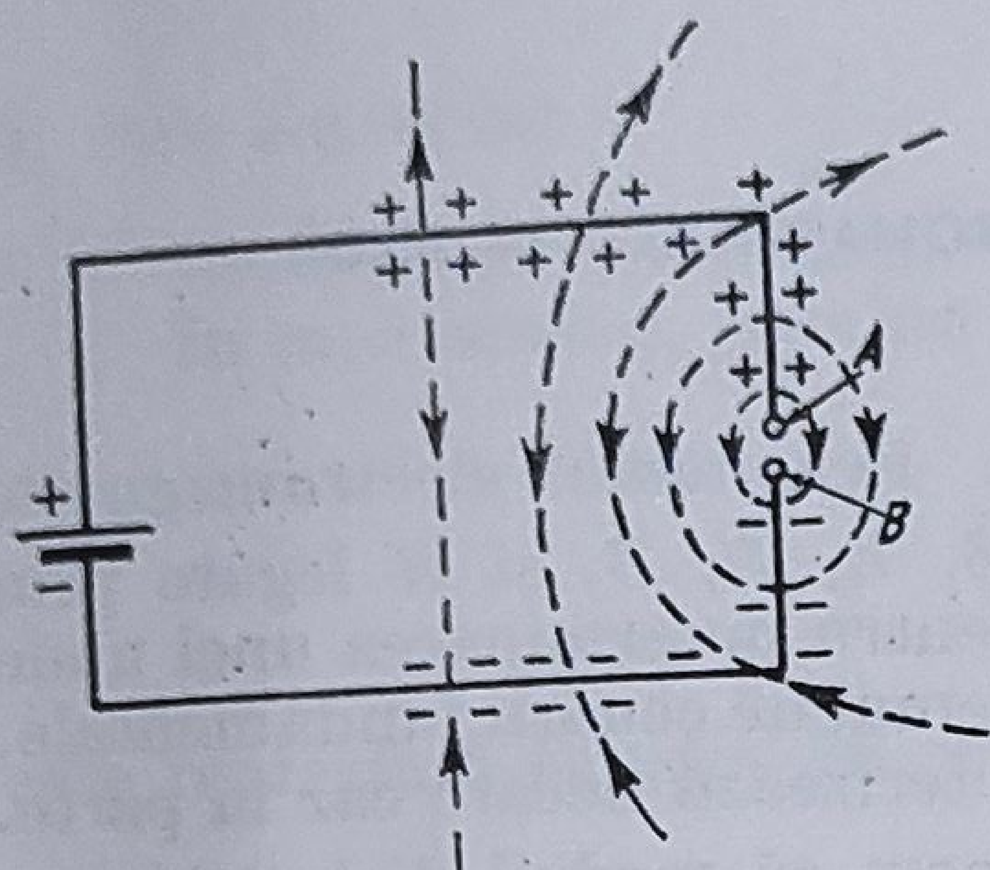


Fig. 15.1. Cîmpul electrostatic în vecinătatea unei întreruperi într-un circuit electric.

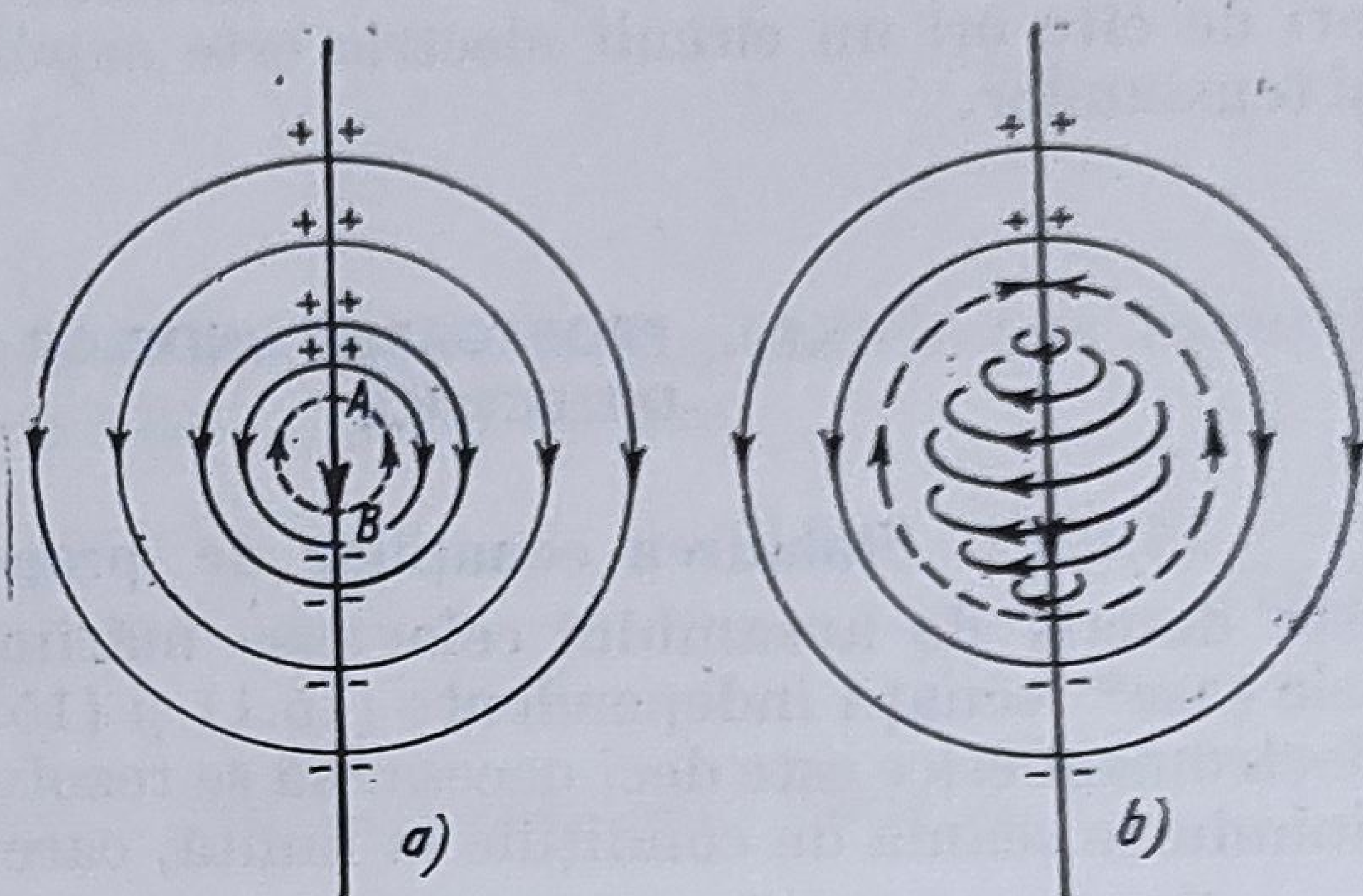


Fig. 15.2. Mecanismul producerii unui cîmp magnetic.

---

* Ecuaţiile (15.3) şi (15.4)
** Vezi [161] p. 471

avut înainte de închiderea circuitului. Fenomenele precedente se extind astfel, din aproape în aproape, pînă cînd spaţiul întreg este sediul unui cîmp magnetic. Ansamblul acestor fenomene de propagare a cîmpurilor electrice şi magnetice constituie *unda electromagnetică*. O asemenea undă electromagnetică ia naştere, ori de cîte ori un circuit electric este supus unei variaţii oarecare a curenţilor şi tensiunilor.

15.1.2. PROPAGAREA UNDELOR ELECTROMAGNETICE ÎN MEDII DIELECTRICE

15.1.2.1. Stabilirea ecuaţiilor de propagare. Fenomenul electromagnetic este descris de ansamblul celor şase mărimi ρ, $\overline{\delta}$, $\overline{E}$, $\overline{D}$, $\overline{B}$, şi $\overline{H}$ legate prin cele şase* ecuaţii independente (15.1) şi (15.2). Pentru determinarea unei unde electromagnetice este deci necesar să se rezolve sistemul de ecuaţii fundamentale, ţinîndu-se seama de condiţiile la limită, care caracterizează fiecare caz în parte.

Pentru simplificarea problemei, să presupunem că mediul dielectric este omogen şi liniar ; de asemenea, presupunem că în acest mediu nu există sarcini libere, deci $\rho = 0$.

Să luăm derivata parţială a relaţiei (15.3) în raport cu timpul ; observînd că

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \overline{H}) = \text{rot} \frac{\partial \overline{H}}{\partial t}$$

şi ţinînd seama de relaţia (15.4), se obţine

$$\mu \varepsilon \frac{d^2 \overline{E}}{dt^2} = - \text{rot rot } \overline{E} ; \tag{15.5}$$

dar,

$$\text{rot rot } \overline{E} = - \Delta \overline{E} + \text{grad div } \overline{E} .$$

Aplicînd divergenţa relaţiei (15.3), se obţine :

$$\text{div rot } \overline{H} = 0 = \varepsilon \text{ div} \frac{d \overline{E}}{dt} = \varepsilon \frac{d}{dt} \text{div } \overline{E} .$$

Cum în spaţiu nu există sarcini, ecuaţia lui POISSON dă div $\overline{D} = 0$ şi rezultă

$$\text{div } \overline{E} = 0,$$

---

* Ţinînd seama că din ultima ecuaţie (15.1), prin aplicarea divergenţei rezultă div $\overline{B} = 0$, din punct de vedere matematic a treia relaţie (15.1) constituie o consecinţă şi deci numărul de ecuaţii independente se reduce la şase.

astfel, că relaţia (15.5) devine:

$$\frac{d^2\overline{E}}{dt^2} = v^2 \Delta \overline{E}, \tag{15.6}$$

în care s-a notat $v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$.

Relaţia (15.6) reprezintă ecuaţia de propagare a cîmpului electric variabil. În mod analog, pornind de la relaţia (15.4) se obţine

$$\frac{d^2\overline{H}}{dt^2} = v^2 \Delta \overline{H}, \tag{15.7}$$

care reprezintă ecuaţia de propagare a cîmpului magnetic variabil.

15.1.2.2. **Potenţialele retardate. Relaţia lui LORENTZ.** Determinarea componentelor cîmpului electromagnetic se poate face uşor, utilizînd ecuaţiile lui MAXWELL şi relaţiile de legătură, pentru mediile omogene şi în cazul sistemului staţionar sau cuasistaţionar* . Determinarea acestor componente se face prin ecuaţiile

$$\overline{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \overline{A}}{\partial t}, \tag{15.8}$$

$$\overline{B} = \operatorname{rot} \overline{A}, \tag{15.9}$$

în care potenţialele V şi $\overline{A}$ sînt soluţiile ecuaţiilor (1.42)

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0$$

şi (3.73)

$$\Delta \overline{A} + \mu \overline{\delta} = 0$$

şi sînt**

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_\tau \frac{\rho d\tau}{r}$$

şi

$$\overline{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_\tau \frac{\overline{\delta} d\tau}{r}, \tag{15.10}$$

cu div $\overline{A} = 0$.

Potenţialele V şi $\overline{A}$, care se obţin astfel într-un punct situat la distanţa r de sarcinile şi curenţii electrici şi la momentul t, se numesc potenţiale instantanee şi din expresia lor nu se poate vedea propagarea undelor electromagnetice. Cazul acesta corespunde sistemelor staţionare. Pentru a studia un regim variabil

* Se numeşte cîmp cuasistaţionar acela care variază puţin în intervalul de timp T (de ordinul unei perioade) în care lumina parcurge dimensiunile maxime l a unui corp ($CT \gg 1$) astfel că viteza de propagare finită a cîmpului nu joacă nici un rol (Vezi [147] pag. 177).

** Vezi 1.2.1. şi 3.8.2.1.

oarecare, este necesar ca în expresia (15.10) a potențialului magnetic vector să se considere densitatea curentului total hertzian, adică, la densitatea $\bar{\delta}$ a curentului de conducție să se adauge densitatea $\partial \bar{D}/\partial t$ a curentului de deplasare. În aceste condiții, potențialul magnetic vector $\bar{A}$, care este acum o funcție integrală de $\partial \bar{D}/\partial t$ și de $\bar{\delta}$, nu mai constituie un mijloc comod de calcul a lui $\bar{B}$, și mai ales a lui $\bar{E}$ și $\bar{D}$ căci el necesită cunoașterea prealabilă a cîmpului de inducție electrică $\bar{D}$ și a derivatei sale.

Luînd în considerare potențialul magnetic vector, definit de relația (3.66)

$$\bar{B} = \text{rot}\ \bar{A},$$

relația (15.4) se poate scrie

$$\text{rot}\left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) = 0,$$

ceea ce arată că mărimea din paranteză derivă dintr-un potențial scalar, obținîndu-se o relație analoagă cu relația (15.8)

$$\bar{E} = -\,\text{grad}\ V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}.$$

Ținînd seama de această relație, din legea fluxului electric* rezultă

$$-\Delta V - \frac{\partial}{\partial t}\,\text{div}\ \bar{A} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \qquad (15.11)$$

De asemenea, aplicînd rotorul relației (3.66) și ținînd seama de prima ecuație (15.1) se obține

$$\text{rot}\ \bar{B} = \text{rot rot}\ \bar{A} = \mu\left(\bar{\delta} + \varepsilon\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\right),$$

sau, dezvoltînd dublul rotor a lui $\bar{A}$ și ținînd seama de relația (15.8) se obține

$$-\Delta \bar{A} + \text{grad div}\ \bar{A} = \mu\left(\bar{\delta} - \varepsilon\,\text{grad}\frac{\partial V}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2}\right), \qquad (15.12)$$

Relațiile (15.11) și (15.12) se pot scrie sub forma**

$$\Delta V - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\ \bar{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

și

$$\Delta \bar{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} + \mu\bar{\delta} = \text{grad}\left(\text{div}\,\bar{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right), \qquad (15.13)$$

în care s-a notat $\varepsilon\mu = 1/v^2$.

* Vezi relația (1.38) div $\bar{D} = \rho$ sau div $\bar{E} = \rho/\varepsilon$.

** Adăugind ambilor membri ai relației (15.11) expresia $-\varepsilon\mu\partial^2 V/\partial t^2$.

Ținînd seama că din relația (3.66), potențialul vector nu este determinat decît în raport cu gradientul unei funcții scalare arbitrare, iar din relația (15.8) rezultă că potențialul V nu este determinat decît în raport cu derivata în timp a aceleiași funcții scalare, se poate pune condiția ca potențialele $\bar{A}$ și V să îndeplinească condiția

$$\operatorname{div} \bar{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad (15.14)$$

care este *relația lui* LORENTZ. Relația (15.14) mai poate fi interpretată în sensul că parantezele din membrul doi ale relațiilor (15.13) sînt independente de timp.

În aceste condiții, ecuațiile (15.13) pot fi scrise sub forma

$$\Delta V - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon} = \square V + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0, \qquad (15.15)$$

$$\Delta \bar{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} + \mu \bar{\delta} = \square \bar{A} + \mu \bar{\delta} = 0, \qquad (15.16)$$

ecuații care generalizează ecuațiile (1.42) și respectiv (3.73), în care laplacianul Δ este înlocuit cu dalembertianul $\square$*.

Ecuațiile (15.15) și (15.16) — numite ecuațiile lui d'ALEMBERT, sînt *ecuațiile undelor electromagnetice neomogene* sau cu *membru doi*. Primul membru al lor este funcție de coordonatele x, y, z și de timpul t. Soluțiile lor sînt legate prin relația lui LORENTZ (15.14), ceea ce se verifică ușor**. Ecuația (15.14) — relația lui LORENTZ — reprezintă *ecuația undelor omogene* sau *fără membru doi*, care descrie un fenomen ondulat fără surse exterioare.

Pentru a integra*** ecuațiile (15.15) și (15.16) se consideră la timpul t într-un punct P o sarcină $q(t)$, situată într-un volum foarte mic, de formă sferică. La distanța r în jurul acestei sarcini, laplacianul lui V se scrie

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2}$$

și ecuația (15.15) devine

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0, \qquad (15.17)$$

---

* Operatorul $\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square$ se numește dalembertian.

** Luînd divergența relației (15.16) și adăugînd derivata în raport cu t a relației (15.15) înmulțită cu $1/v^2$, se obține, după calcule simple

$$\square \left(\operatorname{div} \bar{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu \left(\operatorname{div} \bar{\delta} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0,$$

membru al doilea al acestei egalități fiind tocmai ecuația continuității curentului electric (2.5). Vezi [147] pag. 199.

*** Vezi [115] vol. II, pag. 182

sau, întrucît în afara sarcinii considerată ρ e nul,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rV)}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \tag{15.18}$$

Soluţia acestei ecuaţii este de forma*

$$rV = F_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + F_2\left(t + \frac{r}{v}\right).$$

Întrucît singura sursă este sarcina q(t), funcţia F_2 nu există şi potenţialul căutat este

$$V(t) = \frac{F\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}, \tag{15.19}$$

ţinînd seama că distanţa r e foarte mică, ecuaţia (15.17) poate fi confundată cu ecuaţia lui POISSON (1.54) a cărei soluţie este în acest caz

$$V = \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon r}$$

şi în consecinţă, funcţia $F\left(t - \frac{r}{v}\right) = r\,V(t)$ devine

$$F(t) = \frac{q(t)}{4\pi r}$$

şi deci, relaţia (15.19)

$$V_r(t) = \frac{q\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\varepsilon r}.$$

În cazul unei repartiţii oarecare de sarcini, potenţialele într-un punct se adună şi atunci, expresia generală a potenţialului V_r căutat este**

$$V_r(t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_\tau \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}\,d\tau. \tag{15.20}$$

Întrucît, expresiile proiecţiilor potenţialului vector dau pentru ecuaţia (15.16) ecuaţii formal identice cu ecuaţia (15.15), soluţia acestei ecuaţii este :

$$A_r(t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_\tau \frac{\overline{\delta}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}\,d\tau. \tag{15.21}$$

---

* Vezi [271] pag. 221

** S-a notat cu V_r şi A_r pentru a indica *potenţiale retardate* sau *întîrziate*. Vezi [297] pag. 166.

Soluţiile (15.20) şi (15.21) ale sistemului de ecuaţii (15.15) şi (15.16) generalizează, în cazul unui regim electromagnetic oarecare soluţiile (1.47) şi (3.74) ale sistemului de ecuaţii (1.42) şi (3.73).

Se obţine astfel, în funcţie de sarcini şi de curenţi acţionînd la momentul $t-\frac{r}{v}$, potenţialele V_r şi $\bar{A}_r$ la momentul t şi la distanţa r, cu întîrzierea r/v, ceea ce explică durata de propagare.

Aceste potenţiale V_r şi A_r sînt *potenţialele retardate* sau *întîrziate.*

Întrucît, potenţialele retardate satisfac relaţia lui LORENTZ (15.14), prin intermediul ecuaţiilor (3.66) şi (15.8) se pot găsi cu ajutorul lor soluţiile în $\bar{E}$ şi $\bar{B}$ ale ecuaţiilor lui MAXWELL.

15.1.2.3. **Undele electromagnetice plane şi propagarea lor.** O undă electromagnetică se zice că este plană atunci cînd mărimile care o caracterizează depind numai de o singură coordonată, de exemplu de z. O astfel de undă este, cu suficientă aproximaţie, unda radiată de o antenă, dacă această undă se studiază într-un punct al spaţiului situat la o distanţă mare de punctul de radiere.

În cazul unei surse de dimensiuni foarte mici şi un cîmp electromagnetic care radiază în toate direcţiile din această sursă, undele obţinute sînt unde sferice care corespund unei alte soluţii a ecuaţiei de propagare

$$\frac{d^2\bar{E}}{dt^2} = v^2\,\Delta\bar{E}.$$

În apropiere de sursă, cele două cîmpuri nu sînt în fază şi viteza lor de propagare nu mai este v. Numai la o distanţă mare de sursă, în raport cu lungimea de undă, atunci cînd raza de curbură a sferei este suficient de mare în raport cu această lungime de undă se poate face aproximaţia că undele sînt plane şi deci, poate fi aplicată teoria ce urmează* . În acel punct, distanţa $\overline{NO}$, de la sursă la punctul considerat, formează un triedru al lui AMPÈRE împreună cu direcţiile cîmpurilor $\bar{E}$ şi $\bar{H}$, iar acestea sînt în fază şi se propagă cu viteza v.

Pe de altă parte, amplitudinea scade pe măsură ce ne îndepărtăm de sursă şi unda se desfăşoară pe o sferă de o suprafaţă mai mare; la o distanţă mare de sursă se poate spune că amplitudinea scade invers proporţional cu distanţa.

Antena produce atît cîmp magnetic cît şi cîmp electric variabil în timp. Dacă se presupune că pămîntul este un conductor perfect, $\gamma = \infty$, atunci vectorul $\bar{E}$ poate fi admis normal pe suprafaţa pămîntului. Într-adevăr, în acest caz, curenţii induşi în pămînt nu produc o cădere de tensiune în pămînt şi deci vectorul $\bar{E}$ nu are o componentă tangenţială faţă de pămînt.

Presupunem de asemenea că axa Oz este îndreptată de la antenă de-a lungul pămîntului şi fie o suprafaţă Σ care se găseşte în planul xoy situată la o mare



Fig. 15.3. Antena şi efectul ei la distanţă mare.

* Studiul undelor sferice nu se face în această lucrare el ieşind din cadrul ei.

distanță de antenă și a cărei dimensiuni sînt mici față de această distanță (fig. 15.3). În acest caz, în suprafața Σ considerată, care poate fi presupusă plană, întrucît raza ei de curbură este foarte mare, vectorul $\overline{E}$ este constant, căci el nu depinde de coordonatele x și y. Același lucru se poate spune și despre vectorul $\overline{H}$. Ambii vectori depind de coordonata z, căci o modificare a acesteia, modifică distanța de la centrul de radiere.

Fie τ volumul din punctul considerat, limitat de suprafața Σ, la care presupunem că dimensiunile sale sînt de asemenea foarte mici față de distanța de la antenă. În acest volum, toate razele ce se pot duce din centrul de radiere prin punctele suprafeței Σ pot fi presupuse paralele cu axa oz. Aceasta ne dă posibilitatea să admitem că mărimile $\overline{E}$ și $\overline{H}$, în regiunea din spațiu, limitată de volumul τ nu depind decît de coordonata z și deci, unda care se propagă în dielectric să fie considerată plană.

Scriind că vectorii $\overline{E}$ și $\overline{H}$ sînt independenți de coordonatele x și y, se obține

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial x} = 0 \,; \quad \frac{\partial \overline{H}}{\partial y} = 0 \,; \quad \frac{\partial \overline{E}}{\partial x} = 0 \,; \quad \frac{\partial \overline{E}}{\partial y} = 0$$

și deci $\overline{E}$ și $\overline{H}$ sînt funcții numai de z și t.

În aceste condiții, ecuațiile lui MAXWELL (15.3) și (15.4) pot fi scrise :

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (a) \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (b) \\ 0 &= \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (c) \end{aligned}\right\} \quad (15.26) \qquad \left.\begin{aligned} -\frac{\partial E_y}{\partial_z} &= -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (a) \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (b) \\ 0 &= -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (c) \end{aligned}\right\} \quad (15.27)$$

Întrucît, cîmpurile produse de sursă nu conțin componente continue, ele nefiind produse de curenți continui sau sarcini continue, rezultă că, cele două cîmpuri nu pot avea componente care să fie independente de timp și ecuațiile (15.26) și (15.27) dau

$$E_z = Const. = 0 \quad \text{și} \quad H_z = Const. = 0.$$

Alegem axele ox și oy astfel, încît vectorul $\overline{E}$ să fie îndreptat de-a lungul axei ox. În acest caz $E_y = 0$ și relațiile (15.26) și (15.27) dau

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

și rezultă,

$$H_x = Const. = 0.$$

Rezultă că vectorul $\overline{H}$ nu are componentă, decît de-a lungul axei oy și deci,

$$\overline{E} \perp \overline{H} \qquad (15.28)$$

adică, *în unda electromagnetică, care se propagă liber într-un mediu dielectric omogen și izotrop, vectorii $\overline{E}$ și $\overline{H}$ sînt perpendiculari unul pe altul.*

Cu aceste elemente, ecuațiile vectoriale de propagare (15.6) și (15.7) devin ecuații diferențiale simple, de ordinul doi, cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}, \tag{15.29}$$

$$\frac{d^2 H_y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 H_y}{dz^2}. \tag{15.30}$$

În aceste ecuații — ca și în cazul general — v reprezintă *viteza de propagare a undelor* și este

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \cdot \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n},$$

în care c este viteza luminii și $n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ este indicele de refracție al mediului care, în cazul general, pentru $\mu_r \cong 1$, este dat de relația lui Maxwell $n' = \sqrt{\varepsilon_r}$.

Soluțiile acestor ecuații sînt de forma*

$$\left.\begin{aligned} E_x &= F_1(z - vt) + F_2(z + vt) \\ H_y &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}[F_1(z - vt) - F_2(z + vt)]. \end{aligned}\right\} \tag{15.31}$$

Întrucît E_x și H_y nu au componente care să nu depindă de timp, nici funcțiile F_1 și F_2 nu vor avea asemenea componente.

Să interpretăm acum sensul soluțiilor particulare

$$\left.\begin{aligned} E_{x_1} &= F_1(z - vt), \\ H_{y_1} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} F_1(z - vt). \end{aligned}\right\} \tag{15.32}$$

În orice punct al spațiului, care se mișcă de-a lungul axei Oz cu viteză $\frac{dz}{dt} = v$, valorile E_x și H_y rămîn constante. În adevăr, poziția unui asemenea punct este determinată de coordonata

$$z = vt + z_0$$

și deci E_x și H_y în acest punct au valorile

$$E_{x_1} = F_1(vt + z_0 - vt) = F_1(z_0) = Const.,$$

$$H_{y_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} F_1(z_0) = Const.$$

Rezultă de aici, că diversele valori ale lui E_{x_1} sau H_{y_1} se propagă înspre partea pozitivă a axei Oz cu viteza v. În consecință, ecuațiile (15.32) determină unda electromagnetică care se propagă cu viteza v, în direcția pozitivă a axei Oz. Această undă se numește *unda directă*.

* Vezi [271], pag. 221.

44 – c. 220

Cu aceste elemente, ecuaţiile vectoriale de propagare (15.6) şi (15.7) devin ecuaţii diferenţiale simple, de ordinul doi, cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}, \tag{15.29}$$

$$\frac{d^2 H_y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 H_y}{dz^2}. \tag{15.30}$$

În aceste ecuaţii — ca şi în cazul general — v reprezintă *viteza de propagare* a undelor şi este

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \cdot \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n},$$

în care c este viteza luminii şi $n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ este indicele de refracţie al mediului care, în cazul general, pentru $\mu_r \cong 1$, este dat de relaţia lui Maxwell $n' = \sqrt{\varepsilon_r}$.

Soluţiile acestor ecuaţii sînt de forma*

$$\left.\begin{aligned} E_x &= F_1(z - vt) + F_2(z + vt) \\ H_y &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}[F_1\ (z-vt) - F_2(z + vt)]. \end{aligned}\right\} \tag{15.31}$$

Întrucît E_x şi H_y nu au componente care să nu depindă de timp, nici funcţiile F_1 şi F_2 nu vor avea asemenea componente.

Să interpretăm acum sensul soluţiilor particulare

$$\left.\begin{aligned} E_{x_1} &= F_1(z - vt), \\ H_{y_1} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} F_1(z - vt). \end{aligned}\right\} \tag{15.32}$$

În orice punct al spaţiului, care se mişcă de-a lungul axei Oz cu viteză $\frac{dz}{dt} = v$, valorile E_x şi H_y rămîn constante. În adevăr, poziţia unui asemenea punct este determinată de coordonata

$$z = vt + z_0$$

şi deci E_x şi H_y în acest punct au valorile

$$E_{x_1} = F_1(vt + z_0 - vt) = F_1(z_0) = Const.,$$

$$H_{y_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} F_1(z_0) = Const.$$

Rezultă de aici, că diversele valori ale lui E_{x_1} sau H_{y_1} se propagă înspre partea pozitivă a axei Oz cu viteza v. În consecinţă, ecuaţiile (15.32) determină unda electromagnetică care se propagă cu viteza v, în direcţia pozitivă a axei Oz. Această undă se numeşte *unda directă*.

* Vezi [271], pag. 221.

În acelaşi mod se arată că soluţia particulară

$$\left.\begin{aligned} E_{x_2} &= F_2(z + vt) \\ H_{y_2} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, F_2(z + vt) \end{aligned}\right\} \qquad (15.33)$$

determină unda electromagnetică care se mişcă cu viteza v, în direcţia negativă a axei Oz. Această undă se numeşte *unda inversă*.

Dacă axa Oz este îndreptată de la sursă către un punct oarecare, atunci *unda fundamentală* este unda directă. Unda inversă apare ca rezultat al reflexiei undei directe de un obstacol oarecare.

Între valorile absolute ale cîmpurilor electrice şi magnetice, *atît ale undei directe cît şi ale undei inverse*, există relaţia

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_c, \qquad (15.34)$$

care este o mărime reală avînd dimensiunile unei impedanţe; această impedanţă se numeşte *impedanţa caracteristică* sau *impedanţa de undă a mediului*. Pentru vid, valoarea numerică a impedanţei de undă este

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 377\ \Omega.$$

Pentru un dielectric oarecare, impedanţa caracteristică este

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\, Z_0 \cong \frac{1}{n'}\, Z_0 .$$

Din relaţia (15.34) rezultă

$$\frac{\mu H^2}{2} = \frac{\varepsilon E^2}{2}, \qquad (15.35)$$

ceea ce, arată că în cazul cînd există numai undă electromagnetică directă (sau numai undă inversă) energiile cîmpurilor magnetic şi electric sînt egale între ele.

Unda electromagnetică descrisă în cele ce preced, în care vectorii $\overline{E}$ şi $\overline{H}$ rămîn fiecare paraleli cu cîte o direcţie fixă, normale pe direcţia de propagare constituie o *undă electromagnetică plană polarizată liniar*.

15.1.2.4. Unda electromagnetică plană sinusoidală. Fie cazul particular în care E_x şi H_y sînt funcţii de timp, armonice sinusoidale. Să presupunem că nu există decît unda directă. Ecuaţiile (15.32) se vor scrie

$$\left.\begin{aligned} E_x &= F_1(z - vt) = E_m \cos(\omega t + \psi) \\ H_y &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, F_1(z - vt) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_m \cos(\omega t + \psi) = H_m \cos(\omega t + \psi), \end{aligned}\right\} \qquad (15.36)$$

în care ω este pulsaţia oscilaţiilor.

Pentru ca sistemele (15.32) și (15.36) să fie identice, trebuie ca

$$\omega t + \psi = k\ (z - vt), \tag{15.37}$$

în care k este o constantă ce trebuie determinată. Această relație trebuind să fie identică pentru orice valoare a lui t, va fi satisfăcută și pentru $t = 0$; rezultă $\psi = kz$, valoare care introdusă în relația (15.37) dă $k = -\omega/v$ și deci, $\psi = -\omega z/v$.

În consecință expresiile (15.36) ale celor două cîmpuri devin:

$$E_x = E_m \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right) \tag{15.38}$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_m \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right) = H_m \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right). \tag{15.39}$$

Să figurăm, pentru fiecare punct al axei Oz, vectorii cîmp electric și cîmp magnetic la timpul $t = 0$ (fig. 15.4); diagramele acestor vectori, care se reduc la componentele lor

$$E_x = E_m \cos \frac{\omega z}{v} \text{ și } H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_m \cos \frac{\omega z}{v} = H_m \cos \frac{\omega z}{v},$$

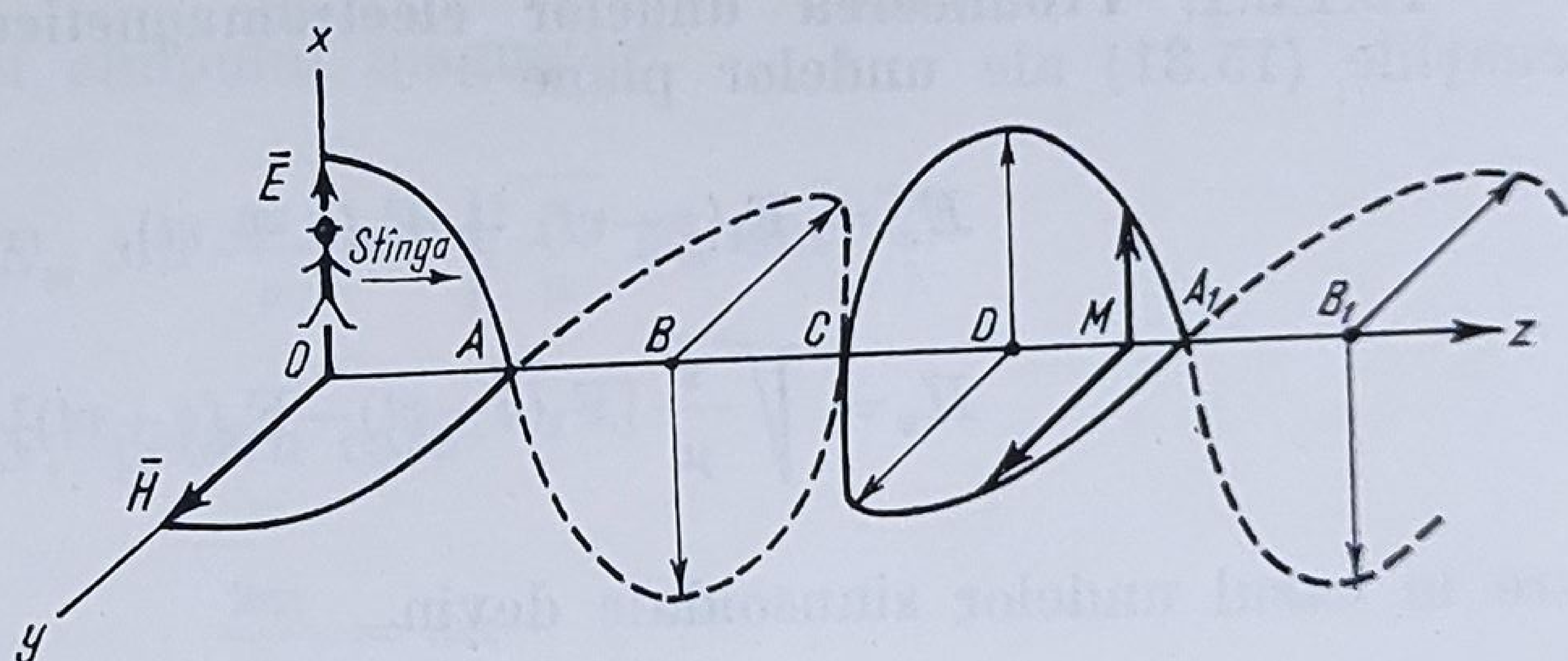


Fig. 15.4. Variația cîmpurilor electrice și magnetice în raport cu distanța pentru o undă plană sinusoidală.

sînt două sinusoide în planele xOz și yOz, care intersectează axa z în aceleași puncte și a căror ordonate maxime corespund de asemenea acelorași abscise respective.

Sensul de propagare este acel dat de AMPÈRE: pentru un observator așezat de-a lungul cîmpului electric E ce privește în direcția cîmpului magnetic H, undele se propagă către stînga sa.

Dacă dorim să trasăm curbele din figura 15.3 nu la momentul $t = 0$ ci la un moment t oarecare, într-un punct M', situat la o distanță z' de origine, trebuie duse în ordonate mărimi proporționale cu

$$\cos \frac{\omega (z' - vt)}{v} = \cos \omega \left(t - \frac{z'}{v}\right).$$

Aceste ordonate sînt identice cu acelea care corespund la timpul $t=0$ punctului M, și care sînt proporționale cu $\cos \frac{\omega z}{v}$, dacă $z' - vt = z$ sau $MM' = z' - z = vt$;

este suficient a se deplasa cele două sinusoide în direcţia Oz cu o lungime vt; această reprezentare geometrică se poate face în felul acesta, deoarece undele se propagă cu viteza v în sensul Oz şi parcurg o distanţă vt în timpul t.

La un moment dat, vectorii $\overline{E}$ şi $\overline{H}$ au aceeaşi valoare în două puncte M şi M_1, astfel alese încît cantităţile $\frac{\omega z}{v}$ şi $\frac{\omega z_1}{v}$ să difere cu 2π. Lungimea $(z_1 - z)$, care este perioada în spaţiul sinusoidelor trasate, se numeşte *lungimea de undă*, a undei electromagnetice. Avem

$$z_1 - z = 2\pi \frac{v}{\omega} = vT = \lambda. \tag{15.40}$$

Lungimea de undă este distanţa cea mai mică a două plane de undă în care cîmpurile electric şi magnetic au aceeaşi fază.

În vid, şi în aer, lungimea de undă este mai mare decît într-un mediu oarecare.

Atunci cînd se defineşte perioada unei oscilaţii electrice prin lungimea sa de undă, se înţelege întotdeauna lungimea de undă în vid. Lungimea de undă din aer diferă foarte puţin de aceasta.

15.1.3. UNDA ELECTROMAGNETICĂ STAŢIONARĂ

15.1.3.1. Producerea undelor electromagnetice staţionare. Să reluăm ecuaţiile (15.31) ale undelor plane

$$E_x = F_1(z - vt) + F_2(z + vt),$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,[F_1(z - vt) - F_2(z + vt)],$$

care în cazul undelor sinusoidale devin

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_m \cos\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + E_m \cos\omega\left(t + \frac{z}{v}\right), \\ H_y &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_m \cos\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_m \cos\omega\left(t + \frac{z}{v}\right); \end{aligned}\right\} \tag{15.41}$$

ele se compun din undele directă şi inversă, unda inversă provenind din reflectarea undei directe pe un obstacol.

Ecuaţiile (15.41) pot fi scrise, dacă se transformă suma cosinusurilor în produs:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= 2E_m \cos\frac{\omega z}{v} \cos\omega t, \\ H_y &= 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_m \sin\frac{\omega z}{v} \sin\omega t, \end{aligned}\right\} \tag{15.42}$$

a cărui variaţie pentru $t = 0$, $t = \frac{T}{8}$, $t = \frac{2T}{8}$ şi $t = \frac{3T}{8}$, sînt date în figura 15.5.

Cele două cîmpuri în fiecare punct al spaţiului unde se suprapun au aceeaşi fază şi sînt în cuadratură unul faţă de celălalt, atît în spaţiu, cît şi în timp.

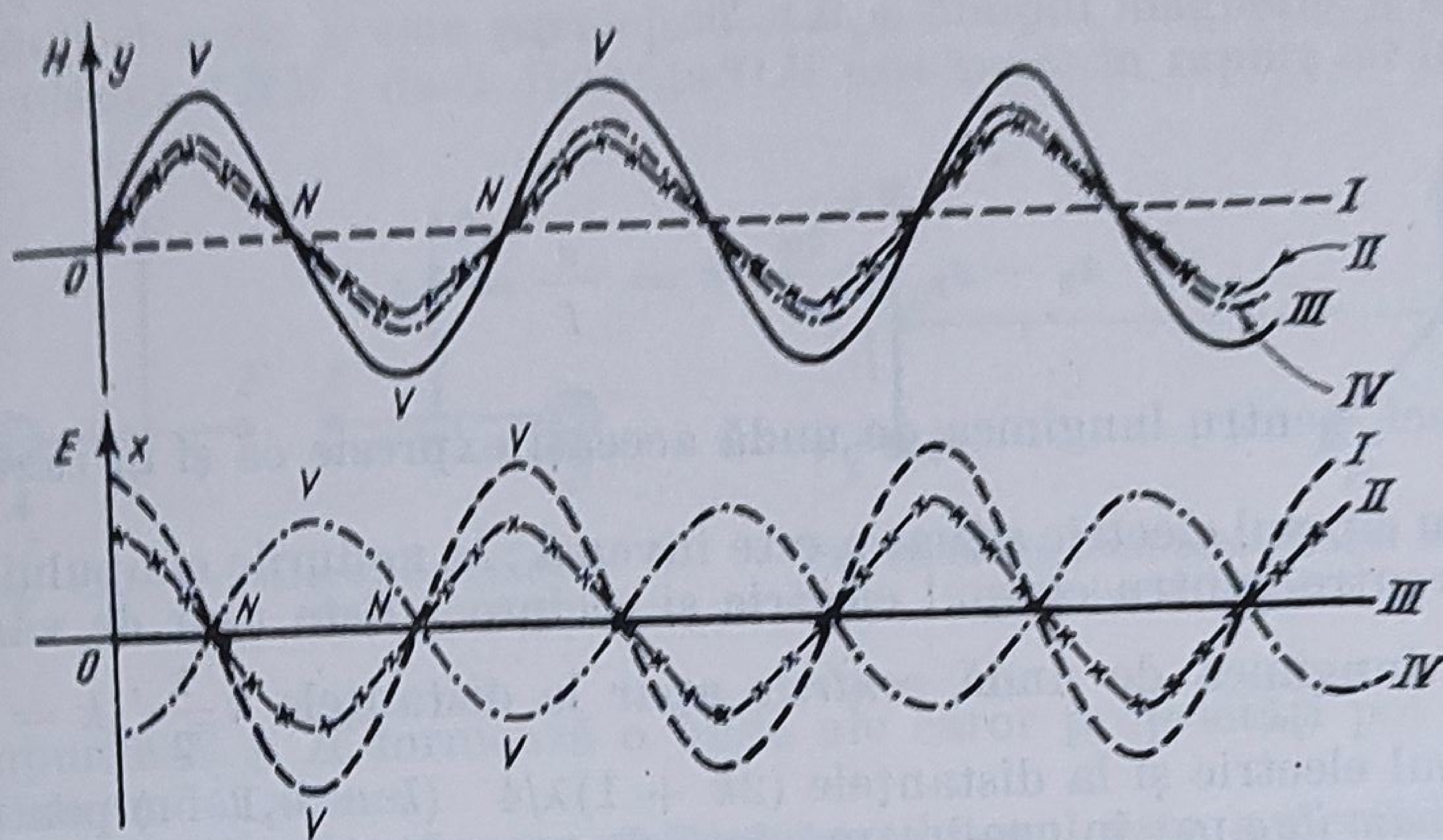


Fig. 15.5. Unde electromagnetice staţionare.

Amplitudinea variaţiei cîmpului magnetic*

$$2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_m \sin\frac{\omega z}{v} = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_m \sin\frac{2\pi z}{\lambda}$$

este nulă pentru punctele N, pentru care

$$\frac{2\pi z}{\lambda} = k\pi$$

adică pentru punctele pentru care distanţa de la origine este

$$z = k\frac{\lambda}{2};$$

şi este maximă pentru punctele V pentru care

$$\frac{2\pi z}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

adică pentru care distanţa de la origine este

$$z = (2k+1)\frac{\lambda}{4}.$$

* Din $\lambda f = v$ rezultă $f = v/\lambda$ şi $\omega = 2\pi f = 2\pi v/\lambda$.

Punctele N sînt *nodurile* cîmpului magnetic, iar punctele V sînt *ventrele* acestui cîmp.

Definind și în acest caz lungimea de undă ca fiind distanța dintre două puncte, z_1 și z_2, pentru care avem la același timp t aceeași amplitudine pentru unda cîmpului electric sau pentru aceea a cîmpului magnetic, se obține

$$\frac{\omega}{v} z_2 - \frac{\omega}{v} z_1 = 2\pi$$

și deci,

$$z_2 - z_1 = \frac{2\pi}{\omega} v = \frac{v}{f} = \lambda;$$

se obține deci, pentru lungimea de undă aceeași expresie ca și în cazul undelor mobile.

Pentru cîmpul electric situația este inversă : la nodurile cîmpului magnetic corespund ventre pentru cîmpul electric și reciproc. Este ușor de văzut că, în funcțiile de lungimea de undă *ventrele* apar la distanțele $k\frac{\lambda}{2}$ $(k = 0,1 ,\ldots)$ pentru cîmpul electric și la distanțele $(2k + 1)\lambda/4$ $(k = 0,1\ldots)$ pentru cîmpul magnetic ; *nodurile* apar în cuadratură față de precedentele și anume, la distanțele $(2k + 1)\lambda/4$ $(k = 0,1\ldots)$ pentru cîmpul electric și la distanțele $k\lambda/2$ $(k = 0,1\ldots)$ pentru undele magnetice.

În cazul propagării unei unde unice, cîmpurile electrice și magnetice ating valorile lor maxime succesive în toate punctele spațiului.

În cazul propagării a două unde identice, dar în sens contrariu, cîmpurile sînt nule sau ating valorile lor maxime succesive în puncte fixe în spațiu.

Aceste unde, obținute din suprapunerea a două unde identice, dar care se propagă în sensuri contrarii cu aceeași viteză, poartă numele de *unde staționare*.

15.1.3.2. **Experiențele lui Hertz.** Teoriile lui MAXWELL privind propagarea undelor electromagnetice, deduse de acesta în 1864 numai prin procesul de gîndire pornind de la descoperirile lui AMPÈRE și FARADAY, au fost verificate de HERTZ în 1888, adică după aproape 25 ani.

În circuitele electrice închise, formate dintr-un condensator ale cărui armături sînt legate între ele printr-un fir conductor și în care se produc oscilații electrice, radierea energiei electromagnetice este foarte mică. În adevăr, (fig. 15.6), dacă se consideră două elemente opuse ale circuitului, MN și $M'N'$, parcurse la timpul t de același curent de intensitate i, ele produc într-un punct P mai îndepărtat, cîmpuri magnetice opuse care se anulează aproape complet. De asemenea, cîmpul electric este foarte slab în afara spațiului limitat de armăturile condensatorului. Cea mai mare parte a energiei electrostatice rămîne localizată în acest spațiu aproape închis, precum și cea mai mare parte a energiei magnetice rămîne localizată în vecinătatea imediată a circuitului oscilant.

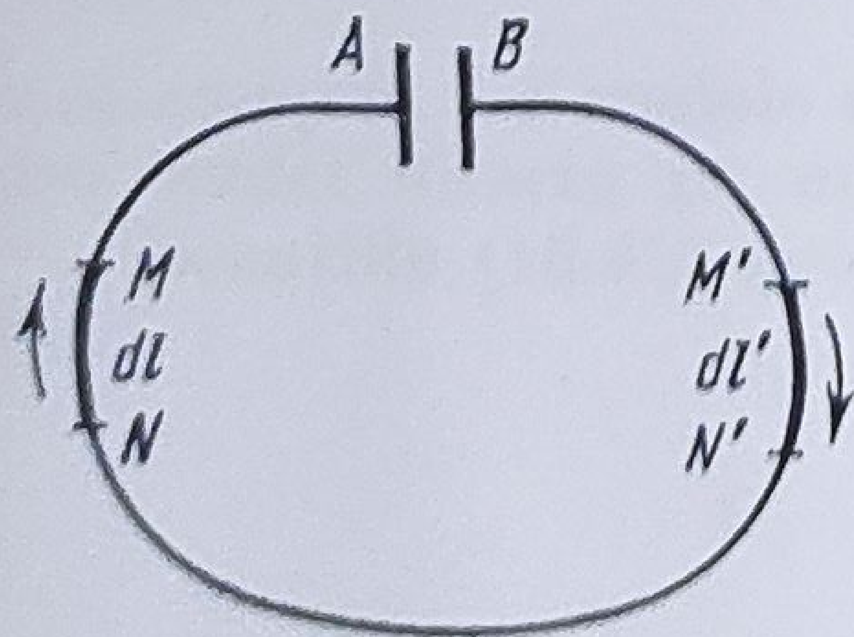


Fig. 15.6. Circuit electric cu condensator.

Pentru a obține o radiație mai intensă, HERTZ a folosit un *oscilator deschis*. Oscilatorul lui HERTZ este format din două sfere metalice, AB, care formează

armăturile condensatorului din figura 15.6 ; circuitul de descărcare este redus la două tije conductoare TT' terminate prin două sfere EE', între care ţîşneşte scînteia oscilantă (fig. 15.7). Aparatul este încărcat, legînd cele două borne P şi Q la bornele unei bobine de inducţie, o sursă de unde. Acest oscilator are aceeaşi simetrie ca şi un sistem format din două sarcini electrice egale şi de sens contrar, aşezate în două puncte A şi B şi reunite printr-un element de circuit (fig. 15.8) ; într-un punct M, situat în planul perpendicular pe AB în mijlocul său O, cîmpul electric $\overline{E}$ este paralel cu AB şi cîmpul magnetic $\overline{H}$ este perpendicular pe planul ABM ; dacă distanţa OM este mare în raport cu lungimea de

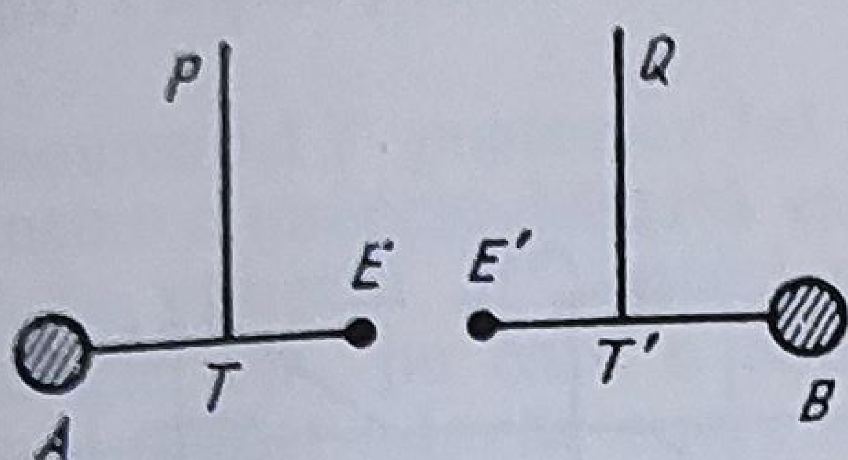


Fig. 15.7. Oscilatorul lui Hertz.



Fig. 15.8. Sistemul echivalent al oscilatorului lui Hertz.

undă, cîmpurile $\overline{E}$ şi $\overline{H}$ formează o undă ale căror proprietăţi pot fi asemuite cu acelea ale undei plane.

Descărcarea oscilantă care străbate oscilatorul este amortizată ; undele care le reprezintă sînt unde amortizate şi relaţiile stabilite în subparagraful 15.1.2.4. nu le reprezintă decît aproximativ. Sinusoidele care reprezintă cîmpurile la un moment dat în diferitele puncte ale spaţiului, precum şi acelea care reprezintă variaţia cîmpului în raport cu timpul într-un punct oarecare, trebuie înlocuite cu undele din figura 15.9, iar fiecărei scîntei îi corespunde în oscilator un *tren de oscilaţii* iar în spaţiu, un *tren de unde* (fig. 15.10).

Pentru obţinerea de unde continue, se utilizează un alt tip de oscilator (fig. 15.11), care este constituit dintr-un emiţător (circuit oscilant) cu antena respectivă*.

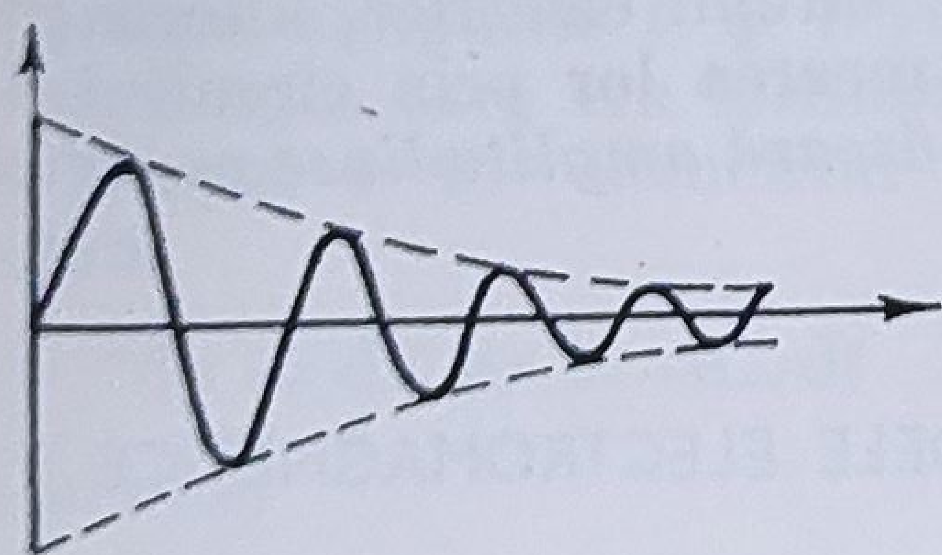


Fig. 15.9. Unde amortizate (pseudosinusoidale).

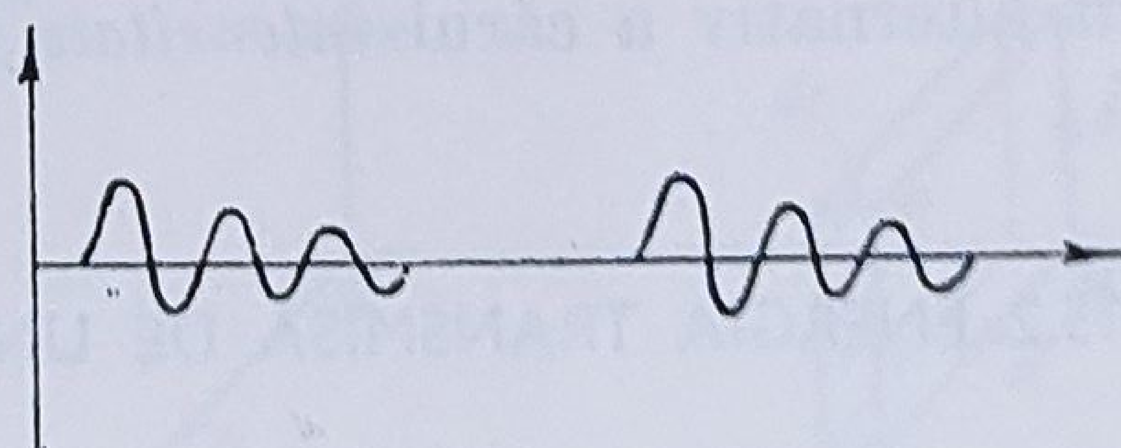


Fig. 15.10. Tren de unde.

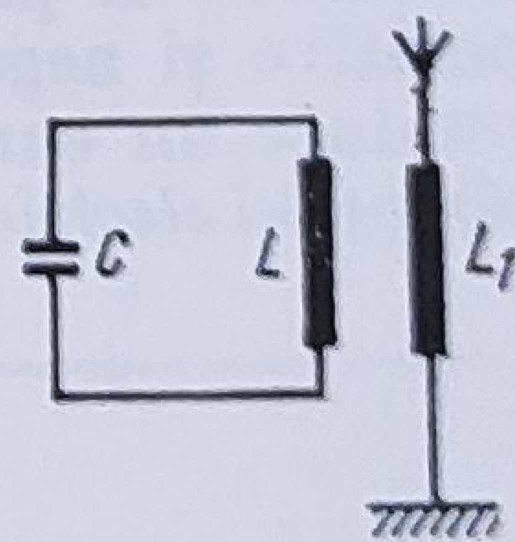


Fig. 15.11. Circuit oscilant cu antenă.

Cu oscilatorul lui Hertz la care capacitatea este redusă la capacitatea sferelor şi inductanţa la aceea a firului conductor, lungimea de undă, care se calculează cu relaţia

$$\lambda = 2\pi v \sqrt{LC}$$

este de ordinul de 2 mm, ceea ce corespunde la o frecvenţă de $15 . 10^{10}$ Hz.

*.Studiul emiţătorului şi antenei respective iese din cadrul lucrării de faţă.

Căutarea, în spațiu, a cîmpului electromagnetic care se propagă, se face cu ajutorul *rezonatorilor*. Aceștia sînt circuite în care se produc curenți oscilanți.

Rezonatorul lui HERTZ este format dintr-un cerc de cupru, de secțiune suficientă (fig. 15.12), întrerupt printr-o secțiune îngustă BV, între o sferă și vîrful unui șurub reglabil : trecerea curentului electric prin rezonator se manifestă printr-o scînteie ce apare între vîrful șurubului și sfera respectivă.

Experiențele lui HERTZ au următorul substrat teoretic : să presupunem că o undă electromagnetică se propagă de-a lungul direcției Oz, cîmpul electric fiind paralel cu axa Ox, iar cîmpul magnetic paralel cu axa Oy ; se obține astfel, unda electromagnetică. Dacă se așază un rezonator ca în poziția I (fig. 15.13),

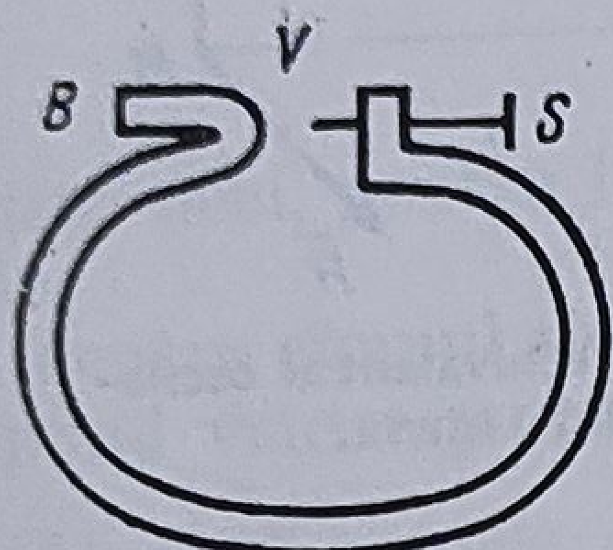


Fig. 15.12. Rezonatorul lui HERTZ.

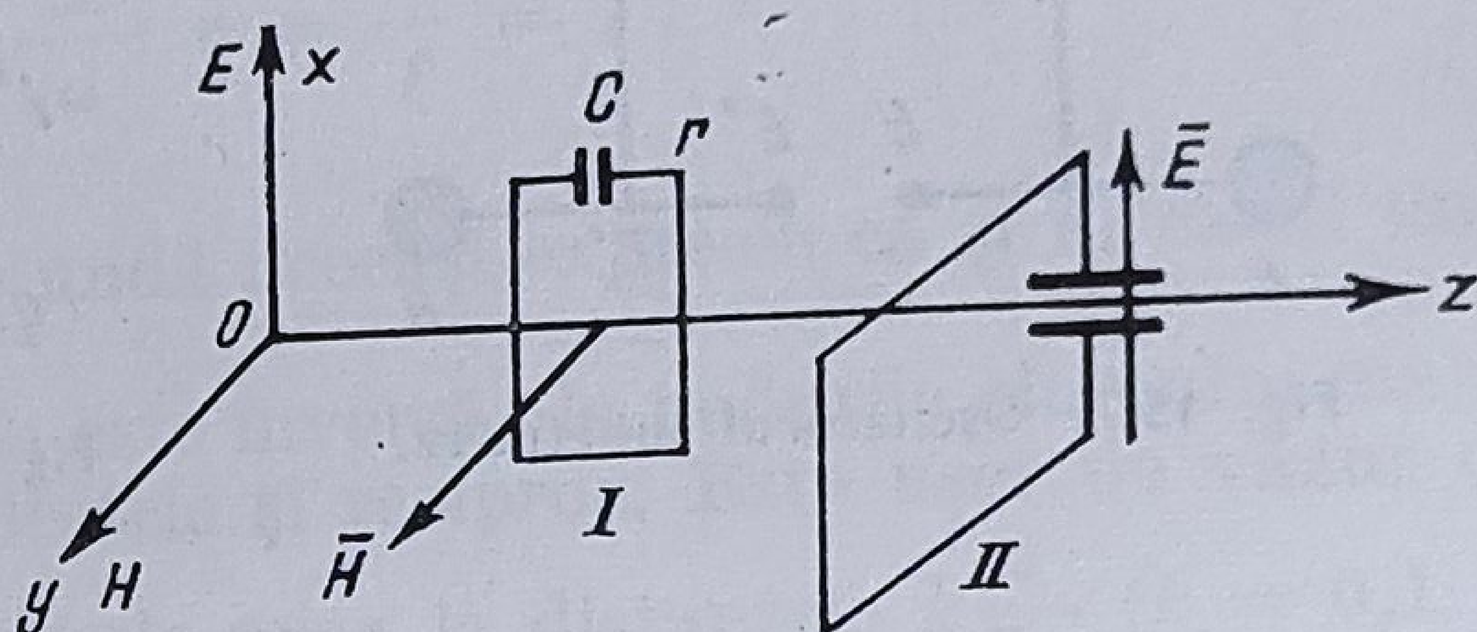


Fig. 15.13. Experiența lui HERTZ.

cu circuitul Γ în planul *xoz* și cu plăcile condensatorului paralele cu planul *xoy*, cîmpul electric, paralel cu plăcile condensatorului, nu exercită asupra acestora nici o influență ; însă circuitul Γ, străbătut de cîmpul $\bar{B} = \mu\bar{H}$, este sediul unei forțe electromotoare de inducție și deci a unui curent electric alternativ, a cărui *intensitate măsoară variațiile amplitudinilor cîmpului magnetic*. Dacă se așază rezonatorul în poziția II, cu circuitul Γ în planul *xoy* și plăcile condensatorului paralele cu planul yOz, cîmpul magnetic, paralel cu planul circuitului Γ nu mai produc nici un fenomen de inducție ; în schimb cîmpul electric alternativ $\bar{E}$ produce, prin influență electrostatică, sarcini electrice, alternativ pozitive și negative, pe plăcile condensatorului : trecerea lor prin circuitul Γ produce un curent alternativ a cărui *intensitate măsoară amplitudinea variației cîmpului electric*.

15.2 ENERGIA TRANSMISĂ DE UNDELE ELECTROMAGNETICE

15.2.1. PROPAGAREA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE

15.2.1.1. Cazul undelor plane directe. Să considerăm cazul undelor plane care se propagă numai într-o singură direcție. Fie un element de volum $d\tau$ situat într-un punct M. În acest punct cîmpurile electrice și magnetice sînt date de relațiile (15.32) sau (15.33). Fie de exemplu, unda directă

$$E_x = F_1(z - vt)$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, F_1(z - vt).$$

Un element de volum $d\tau$ conţine, la timpul t, o energie dW, care este suma energiilor electrostatică şi electromagnetică localizată în acest element:

$$dW = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\, d\tau = \frac{1}{2}\left[\varepsilon E\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H + \mu H\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E\right] d\tau = \sqrt{\varepsilon\mu}\, EH\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{v} EDd\tau = \frac{1}{v}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, F_1^2(z_0 - vt)\, d\tau.$$

În momentul t' posterior lui t, elementul de volum $d\tau$, situat în punctul M', va conţine o energie diferită sau poate nici una; un element de volum egal, dar situat în punctul M', astfel ca $MM' = z' - z = v(t' - t)$ va conţine exact aceeaşi energie dW, pe care a conţinut-o elementul de volum $d\tau$ dn punctul M la timpul t. Într-adevăr energia corespunzătoare este

$$dW' = \frac{1}{v}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, F_1^2(z' - vt')\, d\tau = \frac{1}{v}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, F_1^2[z + v(t' - t) - vt']\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{v}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, F_1^2(z - vt)\, d\tau = dW$$

căci $z' - vt' = z + v(t' - t) - vt' = z - vt$. În conformitate cu principiul conservării energiei, se poate spune că energia electromagnetică dW a fost transportată din punctul M în punctul M'. În consecinţă, *undele electromagnetice transportă energia electromagnetică în sensul de propagare a lor; această energie se propagă cu viteza v, normal pe planul undelor.*

Fie un element de suprafaţă $MNPQ$ a planului undei trecînd prin punctul M (fig. 15.14). Energia dW care trece prin acest element de suprafaţă, de arie $d\Sigma$, între timpurile t şi $t + dt$ este energia care era localizată la timpul t în elementul de volum

$$d\tau = d\Sigma\, dz = v d\Sigma\, dt$$

şi anume,

$$dW = \frac{1}{v} EH\, d\tau = EH\, d\Sigma dt.$$

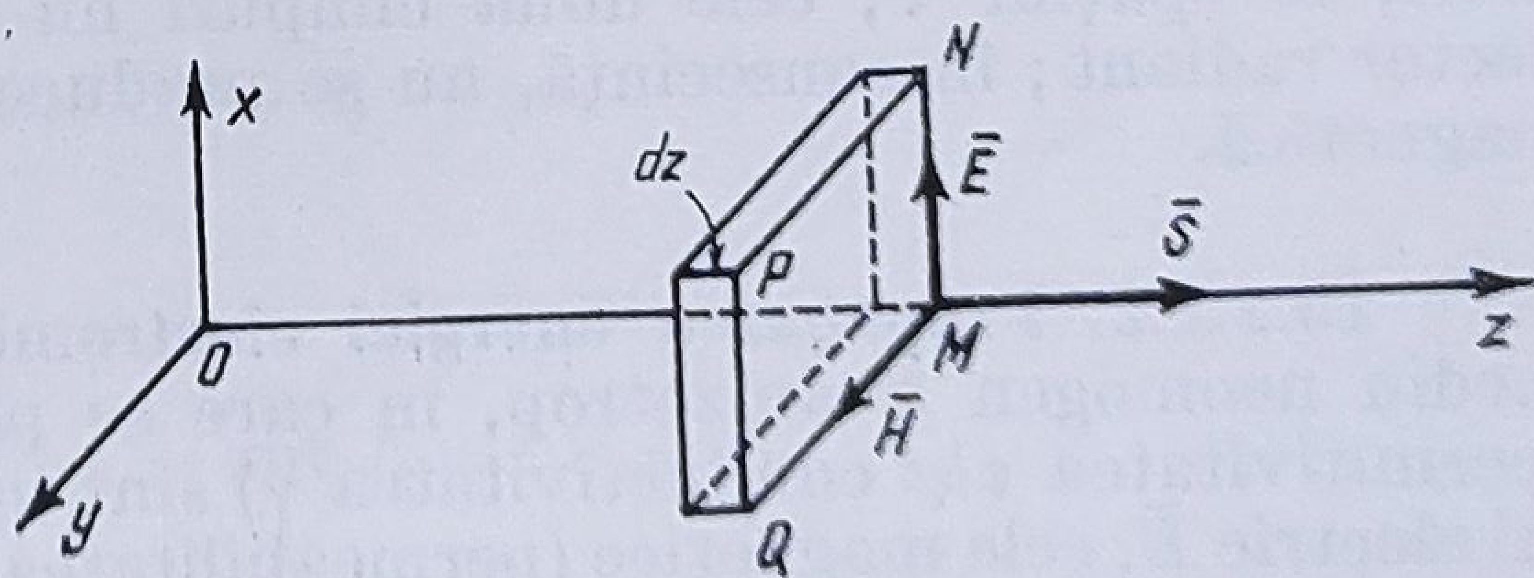


Fig. 15.14. Stabilirea vectorului POYNTING.

Pe unitatea de suprafaţă şi în unitatea de timp, apare energia

$$\frac{dW}{d\Sigma dt} = EH = S; \qquad (15.43)$$

această mărime are dimensiunile unei *densităţi superficiale* de putere; ea este normală pe suprafaţa $d\Sigma$ şi este îndreptată în sensul de propagare şi deci în sensul

vectorului viteză $\bar{v}$. Direcţia ei este deci, perpendiculară pe planul vectorilor $\bar{E}$ şi $\bar{H}$; ea poate fi reprezentată prin vectorul

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}, \tag{15.44}$$

care se numeşte *vectorul fluxului de energie electromagnetică* sau *vectorul radiant* sau *vectorul* POYNTING.

Sensul lui este dat de sensul triedrului lui AMPÈRE şi este întotdeauna în direcţia propagării.

Expresia (15.44) a fost stabilită în cazul particular al unui mediu omogen şi izotrop şi în cazul că există sau numai unda directă sau numai unda inversă. Ea este adevărată însă şi în cazul general.

Trebuie subliniat că mărimile lui $\bar{E}$ şi $\bar{H}$ din expresia lui $\bar{S}$ trebuie să fie cele două componente ale cîmpului electromagnetic, adică trebuie să fie legate între ele prin ecuaţiile lui MAXWELL (15.3) şi (15.4).

În adevăr, fie cazul unei simple suprapuneri de cîmpuri continui electric şi magnetic (fig. 15.15), independente unul de altul, realizate cu ajutorul unui condensator plan şi a unui magnet permanent. În spaţiul τ delimitat, există concomitent cîmpul electric al condensatorului încărcat şi cîmpul magnetic al magnetului permanent. Fiecare din aceste cîmpuri constituie o parte a procesului electromagnetic: cîmpul electric este legat de sarcinile elementare, care se mişcă în dezordine pe suprafaţa armăturilor condensatorului, iar cîmpul magnetic este legat de curenţii elementari (curenţii amperieni) care există în interiorul magnetului permanent. Între aceste două fenomene nu există însă nici o legătură, ci numai o simplă suprapunere a celor două cîmpuri, electric şi magnetic, în spaţiul τ; cele două cîmpuri nu formează deci componentele unui vector radiant; în consecinţă, nu se produce vreo deplasare de energie electromagnetică.

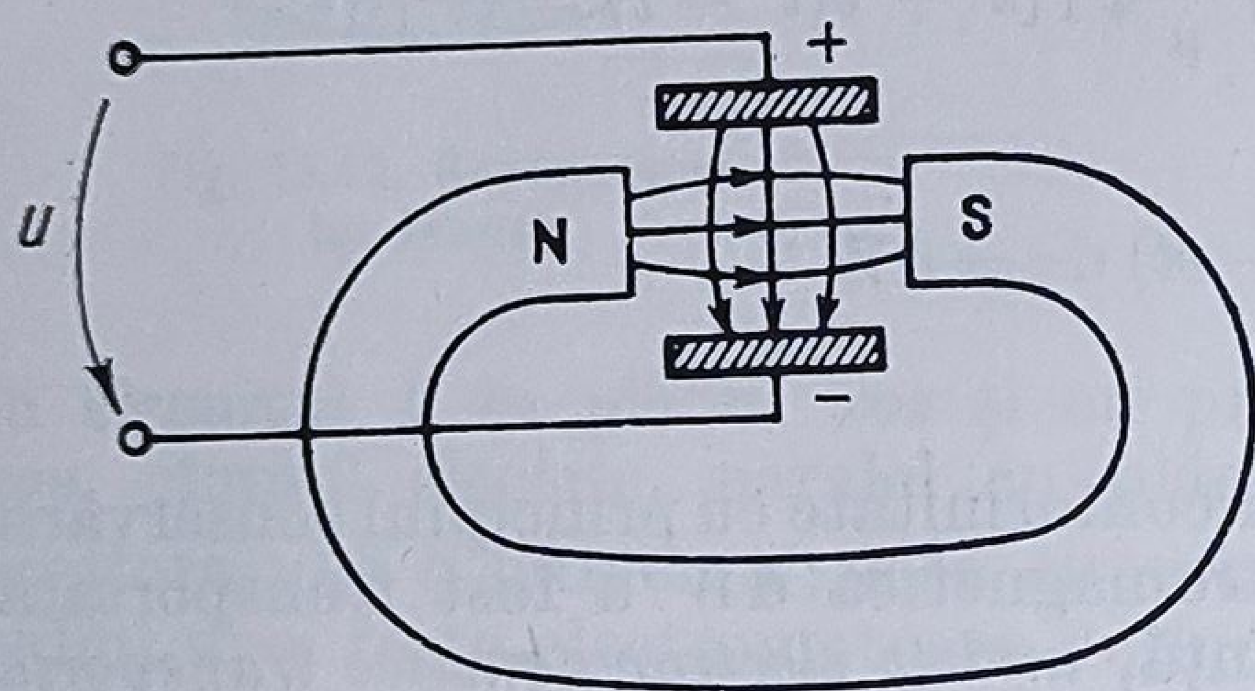


Fig. 15.15. Cîmpuri, electric şi magnetic, care nu satisfac ecuaţiilor lui MAXWELL.

15.2.1.2. **Propagarea energiei electromagnetice în cazul general.** Fie un mediu neomogen şi anizotrop, în care se presupune că proprietăţile electrice (permitivitatea ε şi conductivitatea γ) sînt independente de intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$, cele magnetice (permeabilitatea μ) sînt independente de intensitatea cîmpului magnetic $\bar{H}$, însă rămîn constante în fiecare punct al spaţiului.

Fie un volum oarecare τ în acest spaţiu, limitat de o suprafaţă Σ. Energia cîmpurilor electrice şi magnetice cuprinsă în volumul τ poate fi pusă sub forma

$$W_e + W_m = \frac{1}{2}\int_\tau (\bar{E}\bar{D} + \bar{H}\bar{B})\,\mathrm{d}\tau.$$

Presupunem că această energie variază în timp în volumul dat. Scăderea acestei energii este dată de relaţia

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = -\frac{1}{2}\int_\tau \frac{\partial}{\partial t}(\bar{E}\,\bar{D} + \bar{H}\,\bar{B})\;\mathrm{d}\tau.$$

În cazul general, vectorul $\overline{D}$ nu coincide în direcție cu vectorul $\overline{E}$. Se poate scrie succesiv

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{E}\cdot\overline{D}) = \frac{\partial}{\partial t} E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z) = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_x E_x^2 + \varepsilon_y E_y^2 + \varepsilon_z E_z^2) =$$

$$= \left(E_x \frac{\partial D_x}{\partial t} + E_y \frac{\partial D_y}{\partial t} + E_z \frac{\partial D_z}{\partial t}\right) = \overline{E}\cdot\frac{\partial \overline{D}}{\partial t}.$$

La fel se arată că

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{H}\cdot\overline{B}) = \overline{H}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}.$$

Se obține deci :

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = -\int_\tau \left(\overline{E}\frac{d\overline{D}}{\partial t} + \overline{H}\frac{d\overline{B}}{dt}\right) d\tau.$$

Presupunem că în volumul respectiv există curenți de conducție, sarcini electrice libere și surse de energie electromagnetică, ce transformă energia de o formă oarecare în energie electromagnetică (cîmpuri electrice imprimate $\overline{E}_i$). Vom avea în acest caz

$$\overline{\delta} = \overline{\delta}_c + \rho\overline{v} \quad \text{şi} \quad \overline{\delta}_c = \gamma(\overline{E} + \overline{E}_i);$$

rezultă

$$\overline{E} = \frac{\overline{\delta}_c}{\gamma} - \overline{E}_i.$$

Din prima ecuație a lui MAXWELL, ținînd seama de relațiile precedente, se deduce

$$\frac{\partial \overline{D}}{\partial t} = \text{rot}\,\overline{H} - \overline{\delta}_c - \rho\overline{v},$$

iar din a doua

$$\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = -\text{rot}\,\overline{E}.$$

Introducînd aceste expresii în relația (15.45) se obține

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = -\int_\tau \delta_c \overline{E}_i\, d\tau + \int_\tau \frac{\delta c^2}{\gamma} d\tau + \int_\tau \rho\,\overline{v}\overline{E}\, d\tau - \int_\tau (\overline{E}\,\text{rot}\,\overline{H} - \overline{H}\,\text{rot}\,E)\, d\tau. \tag{15.46}$$

Dar

$$\overline{E}\,\text{rot}\,\overline{H} - \overline{H}\,\text{rot}\,\overline{E} = -\text{div}\,[\overline{E}\times\overline{H}] \quad \text{şi} \quad \int_\tau \text{div}\,[\overline{E}\times\overline{H}]\,d\tau = \int_\Sigma [\overline{E}\times\overline{H}]\,d\Sigma$$

astfel, că relaţia (15.46) se poate scrie

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = -\int_\tau \bar{\delta}_c \bar{E}_i \,d\tau + \int_\tau \frac{\delta c^2}{\gamma} d\tau + \int_\tau \rho \bar{v} \bar{E} \,d\tau + \int_\Sigma \bar{S} \,d\bar{\Sigma} \quad (15.47)$$

ţinînd seama de (15.44).

Înmulţind relaţia (15.47) cu dt şi scriind-o sub forma

$$dt \int_\tau \delta_c \bar{E}_i \,d\tau = \frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m)\,dt + dt \int_\tau \frac{\delta_c^2}{\gamma} d\tau + dt \int_\tau \rho \bar{v} \bar{E} \,d\tau + dt \int_\Sigma \bar{S} \,d\bar{\Sigma} \quad (15.48)$$

sau

$$dW_s = dW_J + dW_m + \frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m)\,dt + dW_{rad}, \quad (15.49)$$

care se interpretează după cum urmează :

— termenul $dW_s = dt \int_\tau \bar{\delta}_c \bar{E}_a \,d\tau$ reprezintă energia dată de sursă în volumul τ considerat ;

— termenul $dW_j = dt \int_\tau \frac{\delta_c^2}{\gamma} d\tau$ reprezintă energia absorbită în volumul τ din cauza conductibilităţii mediului, adică energia care se transformă în căldură ;

— termenul $dW_m = dt \int_\tau \rho \bar{v} \bar{E} d\tau$, reprezintă energia cheltuită pentru accelerarea sarcinilor libere care se găsesc în volumul τ, adică pentru mărirea energiei cinetice a acestor sarcini* ;

— termenul $\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m)\,dt$ reprezintă variaţia energiei electromagnetice în volumul τ ;

— termenul $dW_{rad} = \left(\int_\Sigma \bar{S} \,d\bar{\Sigma}\right) dt$ reprezintă energia radiantă ce iese din volumul τ.

Relaţia (15.48) a fost stabilită în ipoteza că în volumul τ nu se consumă nici un lucru mecanic pentru deplasarea corpurilor conductoare încărcate cu sarcini electrice sau circuite străbătute de curenţi, ceea ce s-a exprimat prin aceea că parametrii ε, μ şi γ au fost consideraţi constanţi în orice punct al spaţiului şi independenţi de cîmpul electromagnetic existent ; aceasta înseamnă, că atît conductoarele cît şi mediul au fost considerate în repaus.

Relaţia (15.48) reprezintă legea conservării energiei electromagnetice într-un asemenea caz.

În cazul cînd sistemul dat nu cuprindea surse de energie electromagnetică în interiorul volumului τ, rezultă $\bar{E}_i = 0$ şi relaţia (15.49) se poate scrie

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m)\,dt = dW_J + dW_m + dW_{rad}, \quad (15.50)$$

* Avem succesiv

$$\rho \bar{v} \bar{E} \,d\tau = \bar{v} \bar{E} \,dq = \bar{v} \,d\bar{F} = d\bar{F} \frac{dl}{dt}$$

care reprezintă lucrul mecanic pe unitatea de timp a forţelor ponderomotoare ale cîmpului electric cheltuit pentru accelerarea sarcinilor electrice.

relaţie care arată că bilanţul energetic este realizat în dauna micşorării energiei cîmpului electromagnetic care se găseşte în volumul respectiv.

15.2.2. PREZENŢA FENOMENELOR REACTIVE ÎN PROPAGAREA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE

C. I. BUDEANU a arătat* că propagarea energiei electromagnetice este însoţită de fenomene reactive. Considerînd acelaşi regim de funcţionare ca şi în subparagraful precedent**, prima ecuaţie a lui MAXWELL scrisă între vectori complecşi conjugaţi şi a doua între vectorii complecşi simpli dau

$$\mathrm{rot}\underline{\overline{H}}^* = \underline{\overline{\delta}}^* + \rho\underline{\overline{V}}^* - \mathrm{j}\,\omega\,\varepsilon\,\underline{\overline{E}}^* \quad \text{şi} \quad \mathrm{rot}\underline{\overline{E}} = -\,\mathrm{j}\,\omega\,\mu\,\underline{\overline{H}}. \tag{15.51}$$

Introducînd aceste expresii, precum şi relaţia $\overline{\delta}_c = \gamma\,(\underline{\overline{E}} + \underline{\overline{E}}_i)$ în relaţia

$$\underline{\overline{E}}\,\mathrm{rot}\underline{\overline{H}}^* - \underline{\overline{H}}^*\mathrm{rot}\underline{\overline{E}} = -\ \mathrm{div}\ [\underline{\overline{E}} \times \underline{\overline{H}}^*]$$

se obţine

$$(\underline{\overline{E}}\ \underline{\overline{\delta}}_c^*) = \frac{\delta_c^2}{\gamma} + \mathrm{j}\,2\omega\left[\left(\frac{1}{2}\,\mu H^2 - \frac{1}{2}\,\varepsilon E^2\right) + \frac{1}{2}\,\rho_m\,v^2\right] + \mathrm{div}\ [\underline{\overline{E}} \times \underline{\overline{H}}^*], \tag{15.52}$$

în care*** ρ_m este densitatea de masă, a corpusculilor avînd densitatea de sarcină electrică volumetrică ρ.

Ecuaţia (15.52) reprezintă forma punctuală a principiului conservării, aplicat acestui fenomen radiant.

Integrînd ecuaţia (15.52) pe un volum τ şi aplicînd teorma divergenţei, se obţine

$$\int_\tau (\underline{\overline{E}}_a \cdot \underline{\overline{\delta}}_c^*)\,\mathrm{d}\tau = \int_\tau \frac{\delta c^2}{\gamma}\,\mathrm{d}\tau + \mathrm{j}\,2\,\omega\,[(W_m - W_e)] + \int_\Sigma [\underline{\overline{E}} \times \underline{\overline{H}}^*]\,\mathrm{d}\overline{\Sigma} \tag{15.53}$$

în care primul termen reprezintă puterea complexă produsă în interiorul volumului τ, $\int_\tau (\delta_c^2/\gamma)\,\mathrm{d}\tau$ este puterea activă consumată prin efect JOULE, W_m şi W_e valorile medii ale energiilor cîmpurilor magnetice şi electrice, W_e valoarea medie a energiei cinetice a sarcinilor libere, toate în interiorul aceluiaşi volum. Ultimul termen este puterea complexă transmisă către exterior prin suprafaţa Σ: expresia $[\underline{\overline{E}} \times \underline{\overline{H}}^*] = \underline{\overline{S}}$ este forma complexă a vectorului radiant.

Dacă mediul este lipsit de sarcini libere oscilante, relaţia (15.53) se reduce la forma

$$\int_\tau (\underline{\overline{E}}_i \cdot \underline{\overline{\delta}}_c^*)\,\mathrm{d}\tau = \int_\tau \frac{\delta c^2}{\gamma}\,\mathrm{d}\tau + \mathrm{j}\,2\,\omega\,(W_m - W_e) + \int_\Sigma [\underline{\overline{E}} \times \underline{\overline{H}}^*]\,\mathrm{d}\overline{\Sigma} \tag{15.54}$$

---

* Vezi [66]

** Vezi 15.2.1.2.

*** Termenul $\mathrm{j}2\omega(1/2)\rho_m v^2$ provine din $\rho\,\overline{E}\,\overline{v}^* = \mathrm{j}\,\rho_m\,\omega\,\overline{v}\cdot\overline{v}^*$. Aceasta presupune că în acest fenomen de convecţie sarcinile electrice libere oscilează cu pulsaţia cîmpului electric E şi fără frecare.

Primul și ultimul termen al relației (15.54) pot fi puși sub forma explicită

$$\int_{\tau} (\underline{\overline{E}}_i \cdot \underline{\overline{\delta}}_c^*) \, d\tau = \int_{\tau} (\overline{E}_i \cdot \overline{\delta}_c) (\cos \varphi + j \sin \varphi) \, d\tau \tag{15.55}$$

$$\int_{\Sigma} [\underline{\overline{E}} \times \underline{\overline{H}}^*] \, d\overline{\Sigma} = \int_{\Sigma} [\overline{E} \times \overline{H}] (\cos \varphi + j \sin \psi) \, d\overline{\Sigma}, \tag{15.56}$$

în care φ și ψ reprezintă defazajele în timp între E_i și δ, respectiv E și H; unghiurile φ și ψ sînt funcții de punct, primul în volumul τ iar al doilea pe suprafața Σ. Introducînd relațiile (15.55) și (15.56) în relația (15.54) și separînd părțile reale și cele complexe, se obține

$$P = \int_{\tau} (\overline{E}_i \cdot \overline{\delta}_c) \cos \varphi \, d\tau = \int_{\tau} \frac{\delta_c^2}{\gamma} \, d\tau + \int_{\Sigma} [\overline{E} \times \overline{H}] \cos \psi \, d\overline{\Sigma} \tag{15.57}$$

$$Q = \int_{\tau} (\overline{E}_i \cdot \overline{\delta}_c) \sin \varphi \, d\tau = 2\,\omega\,(W_m - W_e)_{\tau} + \int_{\Sigma} [\overline{E} \times \overline{H}] \sin \psi \, d\overline{\Sigma}. \tag{15.58}$$

Relațiile (15.57) și (15.58) reprezintă expresiile conservării puterilor activă și reactivă în volumul τ. Toți termenii relației (15.58) au semnificații de puteri reactive; primul termen este puterea reactivă produsă în interiorul volumului τ; ultimul termen este puterea reactivă transmisă către exteriorul volumului τ; termenul $2\omega\,(W_m - W_e)$ este puterea reactivă absorbită* de mediul magnetic și electric din același volum τ.

Rezultă dar, că se poate vorbi de putere reactivă și de conservarea ei și în fenomene energetice radiante, întocmai ca și în cazul rețelelor electrice cu frecvență constantă**.

Puterea reactivă (14.48) transmisă de fenomenul radiant din volumul τ în spațiul înconjurător τ' este la rîndul ei absorbită sub forma $2\omega\,(W_m - W_e)$ în acest nou spațiu și diferența este retransmisă mai departe și așa mai departe. Dacă în acest nou spațiu nu există un cîmp imprimat activ, atunci primul membru din relațiile (15.42), (15.53), (15.54), (15.57) și (15.58) se anulează; în special, relația (15.58) devine

$$2\omega(W_m - W_e) + \int_{\Sigma'} [\overline{E} \times \overline{H}] \sin \psi \, d\Sigma' = 0, \tag{15.59}$$

care exprimă puterea reactivă primită (negativă) de la spațiul anterior τ și cea transmisă mai departe (pozitivă), Σ' fiind suprafața care limitează noul spațiu.

Pînă la o anumită distanță, socotită din punctul unde este aplicat cîmpul imprimat complex $\underline{\overline{E}}_i$, mare în raport cu lungimea de undă ($r \gg \lambda$), orice putere reactivă este absorbită în spațiile respective. De la această distanță mai departe nu mai există fenomene ractive. Se regăsește, pe această cale, că în toate punctele îndepărtate energiile specifice magnetică și electrică trebuie să fie egale ***.

---

* Expresia $2\omega\,[(1/2\,\mu H^2 - (1/2)\,\varepsilon E^2]$ din relația (15.52) reprezintă *puterea reactivă specifică*.

** Vezi 4.3.7.5.

*** Vezi și 15.1.2.3.

De asemenea, se regăsește că în această regiune, cîmpurile $\bar{E}$ și $\bar{H}$ trebuie să fie în fază ($\psi = 0$). În vecinătatea unui circuit străbătut de un curent ($r \ll \lambda$), puterea reactivă specifică se reduce la $2\omega W_m$, deoarece în acest caz $(1/2)\,\varepsilon E^2 \ll \ll (1/2)\,\mu H^2$.

15.2.3. PROPAGAREA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE PE LINIILE ELECTRICE

15.2.3.1. **Cazul curentului alternativ sinusoidal armonic.** Să presupunem că la extremitatea O a unui fir conductor cilindric foarte lung Oz se aplică un potențial alternativ de frecvență $f = \omega/(2\pi)$, (fig. 15.16)* ; în conductor se va produce un curent alternativ de aceeași frecvență, a cărui intensitate într-un element de conductor MM', la timpul t, este i.

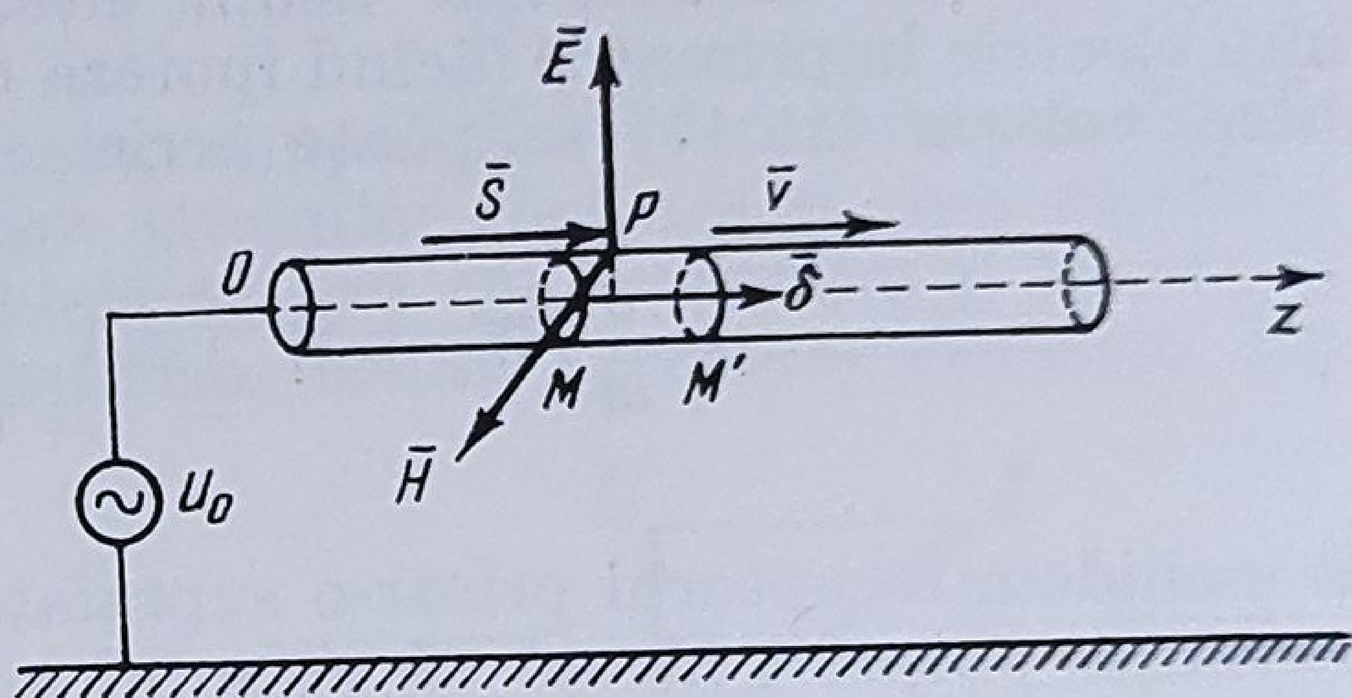


Fig. 15.16. Linie de curent alternativ.

Curentul i, a cărui densitate este $\bar{\delta}$, produce în punctul P din vecinătatea suprafeței elementului un cîmp magnetic $\bar{H}$, perpendicular pe planul definit de axa Oz a cilindrului și de punctul P.

Diferitele puncte ale conductorului sînt la potențiale diferite ; fie u potențialul elementului de conductor MM', q sarcina electrică răspîndită pe suprafața conductorului și $\bar{E}$ intensitatea cîmpului electric în punctul P din vecinătatea conductorului ; cîmpul $\bar{E}$ este normal pe suprafața conductorului și în direcția razei.

Cîmpurile $\bar{E}$ și $\bar{H}$ sînt legate între ele prin ecuațiile lui MAXWELL (15.1) și (15.2) ; ele formează o undă plană care se propagă în direcția Oz, cu viteza $\bar{v}$, corespunzătoare mediului înconjurător, vectorul POYNTING fiind $\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$.

Se poate admite că, în punctul P, cîmpul electric $\bar{E}$ este proporțional cu potențialul u — din care derivă — și cîmpul $\bar{H}$ este proporțional cu curentul i — care îl produce. Rezultă că, undelor electromagnetice din mediul dielectric

$$E_x = F_1(z - vt) = E_m \cos\omega\left(t - \frac{z}{v}\right),$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,F_1(z - vt) = H_m \cos\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)$$

le corespund oscilațiile din conductor

$$u = \varphi\,(z - vt) = U \cos\omega\left(t - \frac{z}{v}\right),$$

$$i = \sqrt{\frac{c}{l}}\,\varphi(z - vt) = I\cos\omega\left(t - \frac{z}{v}\right),$$

* De fapt o diferență de potențial față de pămînt.

în care c şi l sînt capacitatea şi inductivitatea lineică a conductorului şi $v = 1/\sqrt{lc}$.

În consecinţă, în curent alternativ transmisia energiei electromagnetice pe o linie electrică se realizează prin intermediul cîmpurilor electromagnetice care se propagă în dielectric de-a lungul conductoarelor liniei. Aceasta rezultă ca o consecinţă logică, a faptului că energia potenţială a curentului electric — energia electromagnetică — se localizează în mediul dielectric. Energia, adusă de alternator în punctul O se propagă printr-o undă electromagnetică şi curentul i, pe care această undă îl induce în conductor, nu este decît un fenomen accesoriu al cărui efect principal este să canalizeze energia electromagnetică de-a lungul conductorului şi să o împiedice să radieze în toate direcţiile.

Dacă se examinează acum situaţia la receptor, unde neexistînd un cîmp electric imprimat şi făcînd ipoteza că în dielectric nu există sarcini electrice libere, relaţia (15.47) se poate scrie

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = \int_\tau \frac{\delta_c^2}{\gamma}\,\mathrm{d}\tau + \int_\Sigma \bar{S}\,\mathrm{d}\,\bar{\Sigma}. \qquad (15.60)$$

Să închidem receptorul printr-o suprafaţă închisă oarecare Σ_1; ţinînd seama de convenţia obişnuit făcută că versorul normalei este pozitiv atunci cînd sensul acesteia este din interior către exterior, în cazul de faţă, vectorul radiant pătrunde din exteriorul suprafeţei către interiorul ei şi deci (fig. 15.17) $\mathrm{d}\bar{\Sigma}_1 = -\,\mathrm{d}\bar{\Sigma}$. Relaţia (15.60) poate fi scrisă deci

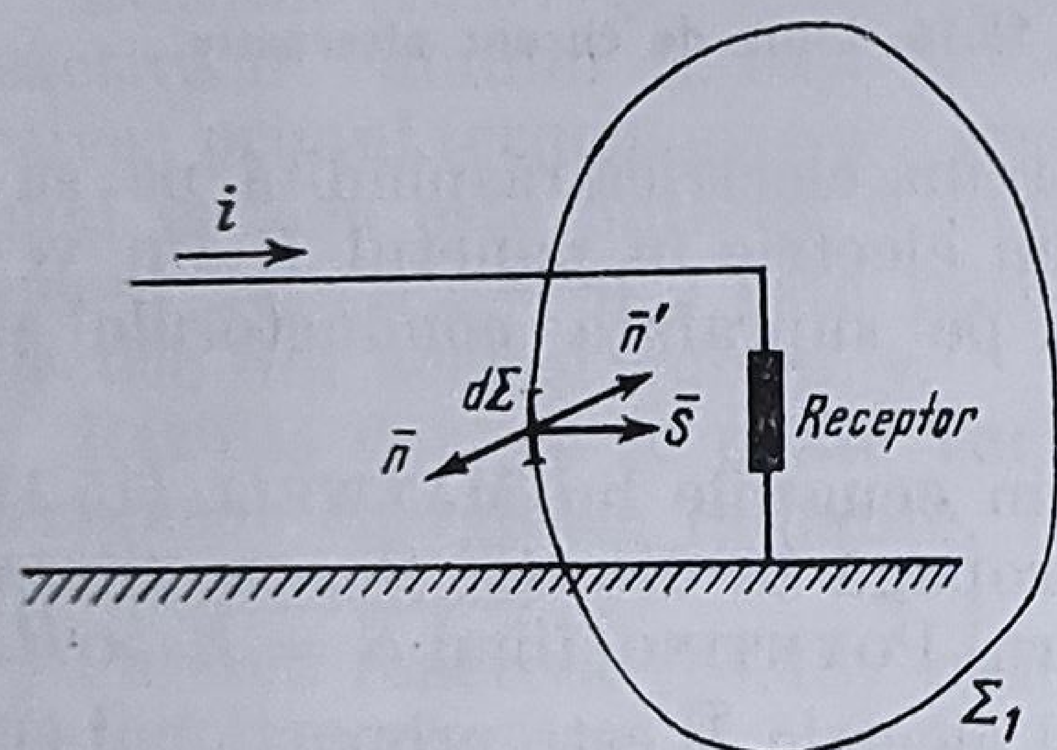


Fig. 15.17. Receptor la capătul unei linii electrice de curent alternativ.

$$\int_{\Sigma_1} \bar{S}\,\mathrm{d}\,\bar{\Sigma}_1 = \int_{\tau} \frac{\delta_c^2}{\gamma}\,\mathrm{d}\,\tau + \frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m), \qquad (15.61)$$

a cărei interpretare este imediată: energia consumată prin efect JOULE în linie şi receptor precum şi variaţia energiei electromagnetice în receptor este compensată de energia radiantă ce pătrunde prin suprafaţa Σ.

15.2.3.2. Cazul curentului continuu. În cazul curentului continuu, propagarea energiei electromagnetice se realizează prin micşorarea sarcinilor electrice sub acţiunea unui cîmp electric $\bar{E}$, luat în sens larg. Cîmpul $\bar{E}$ este îndreptat, de-a lungul conductorului, în sensul de propagare, adică de la sursă către receptor.

Ţinînd seama că, în cazul curentului continuu $\partial(W_e+W_m)/\partial t = 0$, relaţia (15.61) devine

$$\int_\Sigma \bar{S}\,\mathrm{d}\,\bar{\Sigma}_1 = \int_\tau \frac{\delta_c^2}{\gamma}\,\mathrm{d}\,\tau,$$

ceea ce înseamnă că întreaga energie radiantă, adusă de cîmpul electromagnetic, se transformă în energie JOULE (căldură), energia radiantă pătrunzînd în conductor prin suprafaţa laterală Σ a acestuia. Într-adevăr, la limită, cîmpul electric

$\bar{E}$ este tangent la conductor şi paralel cu axa acestuia (fig. 15.18); cîmpul magnetic $\bar{H}$ este de asemenea tangent la conductor într-un plan perpendicular pe axa acestuia. Rezultă dar că vectorul radiant este îndreptat către interiorul conductorului.

Pentru exemplificare, fie r raza conductorului considerat, l lungimea lui şi R rezistenţa sa electrică. În aceste condiţii, se obţine:

$$S = E_t H = \frac{Ri}{l} \cdot \frac{i}{2\pi r} = \frac{1}{2\,\pi r l} \cdot Ri^2 = \frac{Ri^2}{\Sigma}$$

şi deci

$$S.\Sigma = Ri^2 = P_J.$$

Trebuie observat însă, că în realitate, cîmpul $\bar{E}$ este rezultanta dintre cîmpul imprimat E_i, care produce mişcare sarcinilor electrice şi deci curentul electric, al cărui sens şi direcţie este paralelă cu axa conductorului şi în sensul de propagare (fig. 15.19) şi cîmpul coulombian datorit sarcinilor electrice din

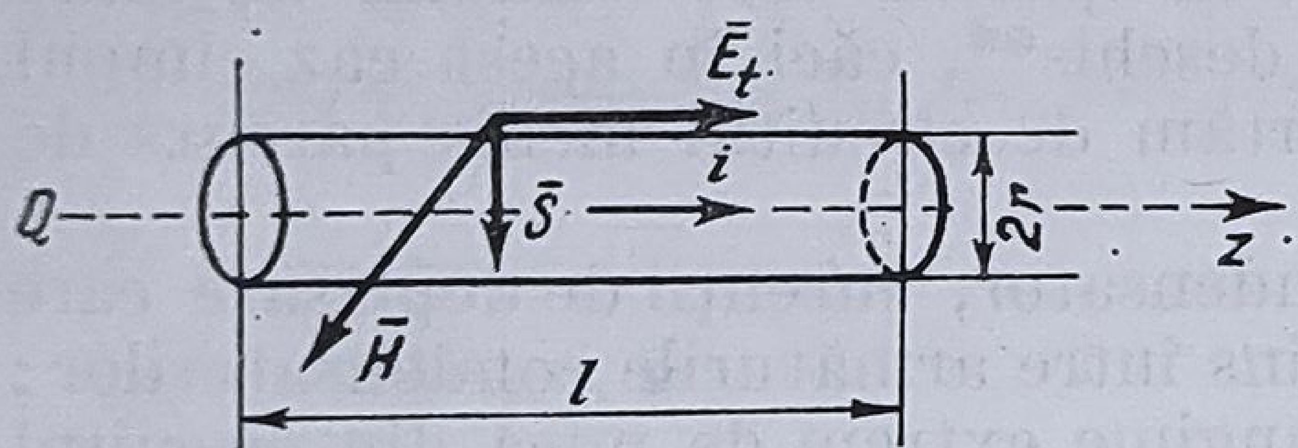


Fig. 15.18. Pătrunderea energiei radiante într-un conductor de curent continuu.

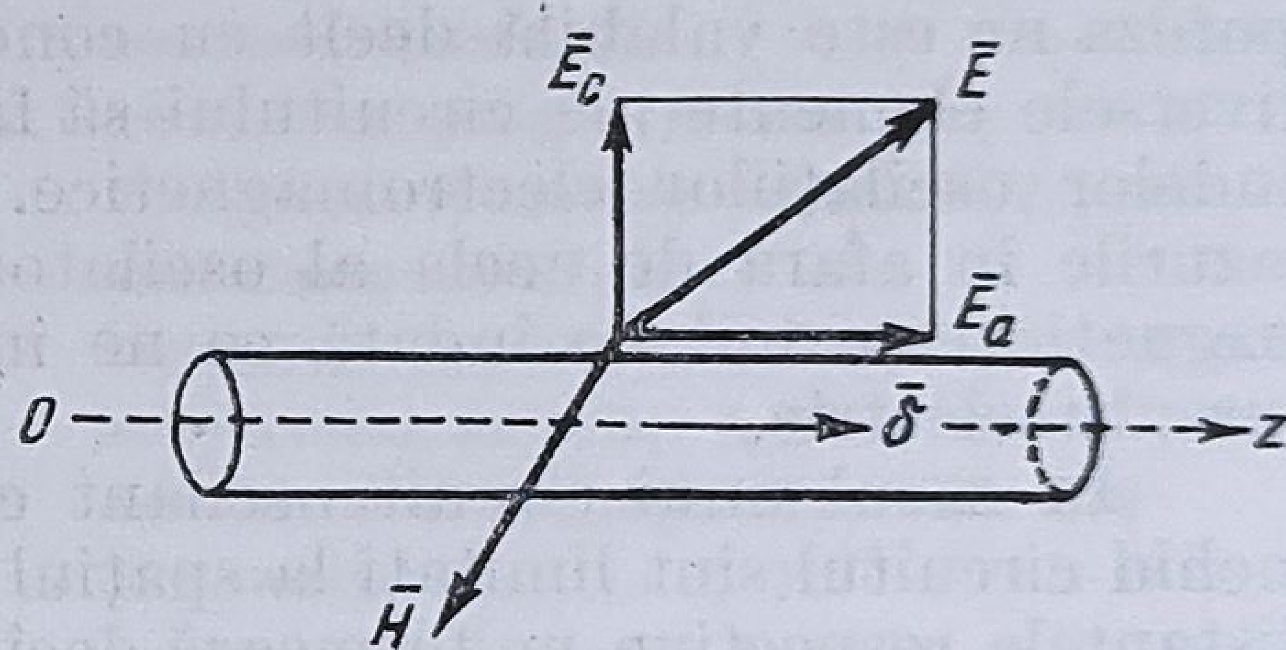


Fig. 15.19. Conductor de curent continuu.

conductor* care este normal pe suprafaţa conductorului. Cum cîmpurile $\bar{E}_c$ şi $\bar{H}$ sînt constante şi nu sînt legate prin ecuaţiile lui MAXWELL, ele nu produc un vector radiant POYNTING şi deci în curent continuu energia electromagnetică nu se propagă prin cîmp.

15.2.3.3. **Valabilitatea ipotezelor făcute în studiul curenţilor electrici cuasistaţionari****. În studiul curenţilor cuasistaţionari — curenţii alternativi — s-a făcut ipoteza că intensitatea curentului electric este, în fiecare moment, aceeaşi în toate punctele circuitului. Studiul propagării energiei electromagnetice de-a lungul conductoarelor*** arată că, această intensitate a curentului electric este, în diferitele puncte ale liniei electrice şi în acelaşi moment, o funcţie periodică de distanţă, perioada corespunzătoare fiind egală cu lungimea de undă din mediul înconjurător. *În consecinţă, în cazul cînd lungimea circuitului este neglijabilă în raport cu lungimea de undă a oscilaţiilor electromagnetice ce-l parcurg, se pot neglija variaţiile de la un punct la altul al circuitului şi ipoteza unui curent electric constant este întotdeauna valabilă.*

Această condiţie este în general satisfăcută şi în cazul circuitelor oscilante închise, funcţionînd în regim tranzitoriu. Prezenţa condensatorului de capaci-

* Vezi 2.1.2 regimul fiind staţionar, numărul de sarcini în unitatea de volum este constant.
** Vezi 4.3.3.2
*** Vezi şi cap. XII

tate foarte mare în raport cu capacitatea proprie a conductoarelor circuitului, are ca efect producerea unei perioade $T = 2\pi\sqrt{LC}$ destul de mare, căreia îi corespunde lungimea de undă $\lambda = \frac{2\pi}{n} c_0 \sqrt{LC}$, foarte mare în raport cu lungimea circuitului ; în această relaţie c_0 este viteza luminii şi $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$. Această condiţie este întotdeauna satisfăcută în reţelele de distribuţie de curent alternativ pentru care frecvenţa fiind de 50 Hz, lungimea de undă corespunzătoare este de 6000 km ; ea este satisfăcută adesea şi în cazul liniilor telefonice pentru care frecvenţa e de ordinul 1000 Hz la care corespunde o lungime de undă de 300 km. Trebuie observat totuşi că liniile telefonice ating adesea lungimi de 300 km şi că anumite linii electrice de transmitere de energie electrică ating astăzi lungimi importante, al căror ordin de mărime ating sfertul de undă. Pentru studiul acestor feluri de linii se va utiliza întotdeauna teoria corespunzătoare, singura care poate da soluţia problemei studiate* .

În studiul cîmpului magnetic produs de curenţii alternativi s-au folosit aceleaşi metode ca şi în cazul curentului staţionar, făcîndu-se ipoteza, că în acelaşi moment, curentul este acelaşi în orice punct al circuitului. Şi în acest caz ipoteza nu este valabilă decît cu condiţia ca distanţa punctului considerat la diversele elemente ale circuitului să fie neglijabile faţă de lungimea de undă a undelor oscilaţiilor electromagnetice. Această ipoteză este valabilă în toate cazurile în afară de acela al oscilatorului deschis**, căci în acest caz cîmpul magnetic este nul de îndată ce ne îndepărtăm de circuitul închis parcurs de curentul electric.

În cazul unui circuit oscilant cu condensator, curenţii de deplasare care închid circuitul sînt limitaţi la spaţiul cuprins între armăturile condensatorilor ; distanţele respective nu formează decît o lungime extrem de mică din circuitul total şi în consecinţă, curenţii de deplasare corespunzători pot fi neglijaţi în aplicarea legilor electromagnetismului acestor circuite. În cazul circuitelor oscilante deschise acest lucru nu mai este posibil şi studiul acestor circuite se face utilizînd legile electromagnetismului ţinînd seama de aceşti curenţi de deplasare, utilizînd în consecinţă ecuaţiile lui Maxwell.

În sfîrşit, în cazul frecvenţelor înalte şi pentru conductoare altele decît acelea care au o secţiune foarte mică (conductoare practic filiforme), nu se mai poate aplica legea lui Ohm decît cu condiţia de a se ţine seama de forţele electromotoare de inducţie care există în masa conductorului***. De asemenea, legea Joule, valabilă sub forma sa obişnuită pentru fiecare element al unui circuit simplu format din conductoare filiforme sau fiecărui element al secţiunii unui conductor gros, nu poate fi aplicat ansamblului acestui conductor decît cu condiţia de a se introduce în calcul o valoare a rezistenţei variabilă cu frecvenţa ****.

---

* Vezi Cap. XII.
** Vezi 15.1.3.2.
*** Vezi 3.3.2.4.
**** Vezi 14.1.2.4.

Index alfabetic*

* Indicațiile : *I*, 17; *II*, 436 se citesc : volumul *I*, pag. 17; volumul *II*, pag. 436.

Bibliografie

Abreviaţii. În această bibliografie au fost utilizate următoarele abreviaţii:

A.G.I.R.	Asociaţia Generală a Inginerilor din România
A.T.M.	Archiv für Technische Messen
Atti R. Acad. Sci. Torino	Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino
Bul. A.S.É.	Bulletin de l'Association Suisse des Électriciens
Bul. mat. et phys. de l'École. Polyt.	Bulletin de mathématiques et de physique de l'École Polytechnique de Bucarest.
Bul. I.P.B.	Buletinul Institutului Politehnic Bucureşti
Bul. I.R.E.	Buletinul Institutului Român de Energie
Bul. S.F.É.	Bulletin de la Société Française des Électriciens
Bul. St. Acad. St. Tehn. Chim.	Buletinul ştiinţific al Academiei R.P.R., Ştiinţe Tehnice şi Chimice
C.E.I.	Commission Électrotechnique Internationale
C.I.G.R.É.	Conférence Internationale des Grands Réseaux Électriques.
C.R. Acad. Sc. Paris	Comptes — rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris
E.T.Z.	Elektrotechnischer Zeitschrift
G.M.	Gazeta Matematică
I.R.E.	Institutul Român de Energie
Proc. I.E.E.	Proceedings of the Institution of Electrical Engineering London
R.G.E.	Revue Générale de l'Électricité
Rediconti dell'A.E.I.	Rediconti dell' Associazione Elettrotecnica Italiana
Rev. roum. sci. techn. Electrotechn. et Energ.	Revue roumaine des sciences techniques, série Électrotechnique et Énergétique.
St. cerc. energ. electr.	Studii şi cercetări de energetică şi electrotehnică, Bucureşti.

1. ABASOHN, E. *Asupra determinării pe cale grafică a armonicilor unei funcţii periodice.* Gazeta Matematică, XXVI, Bucureşti, 1920, p. 81—85 şi 105—108.
2. ALEXIU, I. şi alţii. *Circuite cu semiconductoare. Aparate de măsurat.* Bucureşti, Editura tehnică, 1970.
3. AMPÈRE, A. M. *Mémoires sur l'électromagnétisme et l'électrodynamique.* Paris, Ed. Gauthier Villars, 1921.
4. ANGOT, A. *Compléments de mathématiques.* Paris, Ed. de la Revue d'Optique, 1949.
5. ANTONIU, I. S. *Étude du fonctionnement des appareils de mesure dans un régime déformant.* Bul. d'Études et de Recherches Techniques, Bucarest, I — 1949, p. 5—82.
6. ANTONIU, I.S. *Asupra calculului puterii în curent alternativ cu ajutorul cantităţilor complexe.* Electricitatea nr. 6, Bucureşti, 1952, p. 34.
7. ANTONIU, I. S. *Introducere în aplicarea calculului matriceal la studiul circuitelor electrice.* Bucureşti, Editura Academiei, 1953.
8. ANTONIU, I. S. *Calculul operaţional şi aplicaţiile lui în electrotehnică.* Electrotehnica nr. 5—6, Bucureşti, 1955, p. 163.
9. ANTONIU, I. S. *Operatorul de reprezentare a sistemelor polifazate simetrice.* Electrotehnica nr. 8, Bucureşti, 1955, p. 364.
10. ANTONIU, I. S. *Chestiuni speciale de electrotehnică.* Bucureşti, Editura Academiei, 1956.

11. A N T O N I U, I. S. *Funcționarea contoarelor de inducție într-un regim deformant.* Bul. I.P.B., XVIII, București, 1956.

12. A N T O N I U, I. S. *Electrotehnică și măsuri electrice*, vol. I, (litografiat). București, Litografia Ministerului Învățămîntului, 1957.

13. A N T O N I U, I. S. *Electrotehnică și măsuri electrice*, vol. II, (litografiat). București, Litografia Ministerului Învățămîntului, 1957.

14. A N T O N I U, I. S. *Electrotehnică și măsuri electrice*. vol. III, (litografiat). București, Litografia Ministerului Învățămîntului, 1958.

15. A N T O N I U, I. S. *Mesure de la puissance réactive en régime déformant.* Bul. I.P.B., XX, București, 1958, p. 75–84.

16. A N T O N I U, I. S. *Influence du régime déformant sur les conditions de mesure de la puissance et de l'énergie active.* Rapport no. 301. C.I.G.R.É., Paris, 1958.

17. A N T O N I U, I. S. *Calculul matriceal și tensorial în electrotehnică.* București, Editura tehnică, 1962.

18. A N T O N I U, I. S. *Semnul puterilor activă și reactivă în circuitele electrice de curent alternativ.* Standardizarea, XIV, 6–7, București, 1962, p. 351–358.

19. A N T O N I U, I. S. *Der verformende Betriebzustand der energetischen Systeme und die betreffenden Folgen* . Wissenschaftlichen Zeitschrift der Elektrotechnik, no. 9, Berlin, 1967, p. 81–91.

20. A N T O N I U, I. S., A D Ă M U Ț, I. *Contribuții la definirea vitezei de propagare a unui semnal pe lanțurile de cuadripoli.* St. cerc. energ.electr., XVI, nr. 3, București, 1966, p. 531–558.

21. A N T O N I U, I. S., A D Ă M U Ț, I., D A M I A N, I. N. *Contribution au problème de la détermination du temps de propagation sur une chaîne finie de quadripôles à l'aide d'un calculateur électronique digital.* Rev. Roum. Sci. Tech. Electrotechn. et Energ., XIII, no. 2, Bucarest, 1968, p. 199–214.

22. A N T O N I U, I. S., C O N S T A N T I N E S C U, L. *Linia lungă ca limita unui lanț de cuadripoli infinit.* Bul. I.P.B., XXXIV, nr. 1, București, 1972, p. 51–60.

23. A N T O N I U, I. S., L E O N, M. *Sur la mesure des grandeurs énergétiques en régime déformant — mesure des puissances.* Documents du Congrès MESUCORA, Paris, 1967, rapport 20 — B — 3.

24. A N T O N I U, I. S., L E O N, M., T U D U C E, R. *PQD-mètre, appareil pour la mesure des puissances et énergies actives, réactives et déformantes dans un régime énergétique déformant.* Documents du Congrès MESUCORA, Paris, 1973, rapport no. 18.

25. A R N O L D, E. *Wechselstromtechnik*, vol. I, Berlin, Springer Verlag, 1923.

26. A T A B E K O V, G. L., M A M I K O N I A N, L. G. *Primenenie komplecsnih shem zamestieniice dlia rascieta perehodnih professov.* Elektricestvo, no. 4, Moskva, 1949, p. 67.

27. A T A B E K O V, G. I. *Protecția prin relee a rețelelor de înaltă tensiune.* (Traducere din limba rusă) București, Editura tehnică, 1952.

28. A T A B E K O V, G. I. *Teoreticieskie osnovî elektrotehniki*, vol. II, Moskva, Izdatelstvo Energhiia, 1966.

29. A U G E R, M., B E R G E R O T, I. L. *Influence des harmoniques sur la précision des compteurs (wattheuremètres) à induction.* Bulletin de la Direction des études et recherches de l'Électricité de France — série *B*, no. 2, Paris, 1972, p. 5–44.

30. B A E R W A L D, H. G. *Die Eigenschaften Symmetrischen 4n — Pole.* Sitzberichte der Preussiche Akademie der Wissenschaften, XXXIII, Berlin, 1931, p. 784–829.

31. B A T T I S O N, M. J. *Some Effects of the Frequency Dependency of Transmission — Line Parameters.* Proc. I.E.E., CXVI no. 7, London, 1969, p. 1209–1216.

32. B A R B A G E L A T A, A. *Sulla misure delle grandezze non sinusoidali di frequenza industriale.* Communicazione alla XXXVII riunione annuale dell'Associazione Elettrotecnica Italiana, Firenze, 25 settembre 1932.

33. B A U D O U X, P., B E A U F A Y S, O. *Théorie des circuits.* Bruxelles, Ed. Presses Académiques Européennes, 1968.

34. B A Y A R D , M. *Théorie des réseaux de Kirchhoff.* Paris, Ed. de la Revue d'Optique, 1954.
35. B E C K E R , R. *Theorie der Elektricitäts.* Leipzig, B.G. Teubner Verlag, 1933.
36. B E L F I L S, G. *Mesure du ,,residu" des courbes de tension par la méthode du pont filtrant.* R.G.E., XIX, Paris, 1926, p. 523—529.
37. B E L F I L S, G. *Note sur la mesure du résidu des courbes de tension alternative par la méthode du pont filtrant.* R.G.E., XXXI, Paris, 1932, p. 267.
38. B E R C O V I C I, M. *Calculul matriceal al rețelelor electrice.* Bul. I.P.B., XXVIII, București, 1961, p. 147—173.
39. B E R G E, C. *Théorie des graphes et ses applications.* Paris, Ed. Dunod, 1958.
40. B E S S O N O V, L. A. *Analiticieskii rasciet elektricieskih țepei s uscietom ghisterezica.* Elektricestvo, nr. 3, Moskva, 1949, p. 47.
41. B E S S O N O V, L. A. *Applied Electricity for Engineers.* Moscow, Mir Publisher, 1968.
42. B L O N D E L, A. *Sur les puissances et hormonances mutuelles des courants alternatifs non sinusoidaux.* Buletin I.R.E., București 1930.
43. B L O N D E L, A. *Sur une méthode d'impédances simples ou mutuelles globales de phase pour le calcul des systèmes polyphasés deséquilibrés.* Rapport no. 11, Congrès International d'Électricité, Paris, 1932.
44. B L O N D E L, A. *Les courants alternatifs.* Paris, Ed. J. B. Baillière et Fils, 1933.
45. B L O N D E L, A. *Introduction aux applications du calcul symbolique de Heaviside aux problèmes de l'électrotechnique.* R.G.E. XXXIX, Paris, 1936, p. 83, 133, 179, 219.
46. B O Ë, L., R O M A I N, P. *Dipôles, quadripôles et calcul matriciel.* Paris, Ed. Chiron, 1963.
47. B O U C H E R O T, P. *La séparation des puissances réelle et magnétisante dans les calculs relatifs aux courants alternatifs.* Revue Electrique, VI, Paris, 1906, p. 289.
48. B O U C H E R O T, P. *Le transfert des puissances active et réactive d'un réseau à un autre.* L'Industrie Electrique, 23^e année, Paris, 1914, p. 277.
49. B O U C H E R O T, P. *Sujets spéciaux relatifs aux fonctionnements des machines et appareils à courants alternatifs.* Cours de l'École Supérieure de l'Électricité, Paris, 1928—1929, p. 5—9.
50. B O U T H I L L O N, L. *Les tenseurs et l'électricité.* Bul. S.F.E., VI^e série, IX, Paris, 1949, p. 212.
51. B R I L L O U I N, L. *Les filtres électriques et la théorie des matrices.* R.G.E., XXXIX, Paris, 1936, p. 3.
52. B R I L L O U I N, L. *Les tenseurs en mécanique et en élasticité.* Paris, Ed. Masson, & Cie, 1938.
53. B R I L L O U I N, L., P A R O D I, M. *Propagation des ondes dans les milieux périodiques.* Paris, Ed. Masson, & Cie, 1956.
54. B R U H A T, G. *Cours de physique générale. Electricité.* Paris, Ed. Masson, & Cie, 1944.
55. B R U N N, A. v o n *Graphische Methoden zur Lösung von Wechselstrom Problemen.* Basel, Benno Schwabe, & Co Verlag, 1938.
56. B U D E A N U, C. *Puissances réactives et fictives.* Bucarest, Editura I.R.E., 1927.
57. B U D E A N U, C.I. *Les différentes opinions et conceptions concernant la notion de puissance réactive en régime quelconque.* Bucarest, Editura I.R.E. 1928.
58. B U D E A N U, C. *Quelques considérations sur le role physique des puissances instantanées dans un système de production et de distribution d'énergie électrique.* Bul. de Math. et de Phys. de l'École Polyt., 1^er année, no. 1, Bucarest, 1929, p. 53.
59. B U D E A N U, C. *Quelques considérations sur les espaces supérieurs.* Bul. de Math. et de Phys. de l'École Polyt., VIII, Bucarest, 1936—1937, p. 38.
60. B U D E A N U, C. *Curs de măsuri electrice.* vol. II (litografiat), București, Editură proprie, 1946.
61. B U D E A N U, C. *Asupra compensării și localizării fenomenelor deformate într-o rețea electrică.* Revista Universității ,,C.I. Parhon" și a Politehnicii, nr. 1, București, 1952, p. 129.
62. B U D E A N U, C. *Asupra formei de undă a mașinilor electrice.* St. cerc. energ. electr., II, București, 1952, p. 17.
63. B U D E A N U, C. *Aspectul general fizic al fenomenelor reactive electrice și electromagnetice.* St. cerc. energ. electr., IV, București, 1954, p. 7.

64. B U D E A N U, C. *Metode de calcul în regim de curenți nesinusoidali*. St. cerc. energ. electr., V, București, 1955. p. 531.
65. B U D E A N U, C. *Bazele electrotehnicii*. vol. I. București, Editura Ministerului Învățămîntului, 1957.
66. B U D E A N U, C. *Sur la présence et la conservation de la puissance réactive dans un phénomène radiant*. C. R. Acad. Sc., CCXLVI, Paris 1957, p. 1571—1574.
67. B U D E A N U, C. *Sistemul practic de mărimi și unități*. București, Editura Academiei, 1956.
68. B U D E A N U, C. *Sur la corrélation entre la présentation des phénomènes électromagnétiques et le problème des grandeurs et unités* R.G.E., LXVII, Paris, 1958, p. 225—232.
69. B U D E A N U, C., A N T O N I U, I. S. *L'étude des phénomènes déformants dans une installation industrielle de distribution*. Rapport no. 329, C.I.G.R.É., Paris, 1948.
70. B U D E A N U, C., A N T O N I U, I. S. *Asupra problemei măsurării puterii și energiei electrice într-un regim deformant*. Electricitatea nr. 1, București, 1951, p. 9.
71. B U D E A N U, C., G H E O R G H I U, M., H O R T O P A N, V., Ș T E F Ă N E S C U, N. *Bazele teoretice ale electricității. Probleme*. Vol. I. București, Editura tehnică, 1958.
72. C A H E N, F. *Électrotechnique*. T.I. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1962.
73. C A H E N, F. *Électrotechnique*. T. II. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1963.
74. C H O L E W I C K I, T. *Macierzova Analiza Obwodów Liniowych*. Warszawa, Panstowe Wydawnictwo Naukowe, 1958.
75. C A R S O N, J. R. *Elektrische Ausgleichvorgänge und Operatorenrechnung*. Berlin, J. Springer Verlag, 1929.
76. C A R T I A N U, G. *Über das stabilitäts problem der linearen und nicht linearen elecktrischen Kreisen*. Wissenschaftlichen Zeitschrift des Hochschule für Elektrotechnik, Ilmenau, 1957, p. 105.
77. C A R T I A N U, G. *Bazele radiotehnicii*. Vol. II. București, Editura didactică și pedagogică, 1962.
78. C A S P E R, L. *Einführung in die komplexe Behandlung von Wechselstromaufgaben*. Berlin, Springer Verlag, 1929.
79. C A S T E L L O, P. *Clé des schémas électriques*. Paris, Ed. Dunod, 1965.
80. C E S T N U T, H., M A Y E R, R.—W. *Servomécanismes et Régulation*. T.I. Paris, Ed. Dunod, 1957.
81. C H I O D I, C. *Pont filtrant pour la mesure du ,,residu'' des courbes de tension alternative non parfaitement sinusoïdale et des courbes de tension continue non parfaitement constantes et leur analyse harmonique*. C.E.I., rapport no. 2—201, Paris, 1919.
82. C H O L E W I C K I, T. *Electrotehnika Teoretyczna*. T.I. & II. Warszawa, Wydawnitcwa Naukowo —Techniczne, 1967.
83. C H O W, Y., C A S S I G N O L, E. *Théorie et applications des graphes de transfert*. Paris, Ed. Dunod, 1965.
84. C L A R K E, E. *Analiza circuitelor sistemelor electroenergetice* (traducere din limba americană). București, Editura tehnică, 1973.
85. C O A T E S, C. L. *Flow-Graph, Solution of liniar algebraic Ecuations*. I.R.E. Transaction on Circuit Theory, CT-6, New-York, 1959, p. 170—187.
86. C O N S T A N T I N E S C U, I. *Aspects physiques et mathématiques des phénomènes transitoires*. Bul. de Math. et de Phys. de l'Ecole Polyt., XIII, Bucarest, 1942. p. 131.
87. C O N S T A N T I N E S C U, I. *Transmisii electromagnetice*. București, Coop. de editură Politehnica, 1948.
88. C O R L Ă Ț E A N U, V., Ș E R B A N, G. *Armonicile 5 și 7 la transformatoarele trifazate și metodele de amortizare a acestora*. Electrotehnica nr. 3, București, 1958, p. 77.
89. C R U G, C. A. *Bazele electrotehnicii*. vol. I. București, Editura tehnică, 1952.
90. C R U G, C. A. *Bazele electrotehnicii*, vol. II. București, Editura tehnică, 1953.
91. D A C O S, F. *Electricité théorique*. Paris, Ed. Dunod, 1946.
92. D A L A V E R D E, A. *Le grandi linnee di transmissione d'energia*. Milano, Libreria editrice Politecnica, 1947.
93. D'A N G E L O, H. *Time varying Networks*. Boston, Ed. Allyn & Bacon 1969.

94. D E B R U Y N, H. P. *Le critère de Nyquist et sa démonstration.* R.G.E., LXV, 7, Paris, 1956, p. 419.
95. D E L L A R I C C I A, A. *Décomposition et effets des courants polyphasés non équilibrés.* Bulletin Montéfiore, no. 8, Liège, 1930.
96. D E N I S P A P I N, M., K A U F M A N N, A. *Cours de calcul opérationnel.* Paris, Ed. Albin Michel, 1950.
97. D E N I S P A P I N, M., K A U F M A N N, A. *Cours de calcul tensoriel appliqué.* Paris, Ed. Albin Michel, 1953.
98. D E N I S P A P I N, M., K A U F M A N N, A. *Cours de calcul matriciel appliqué.* Paris, Ed. Albin Michel, 1957.
99. D E R U S S O, P. M., R O Y, R. J., C L O S E, C. M. *State variables for Engineers.* New York, Ed. J. Wiley, 1967.
100. D E S O E R, C. A., K U H, E. S. I. *Basic Circuit Theory.* New York, Ed. Mc Graw-Hill, 1969.
101. D I T K I N, V. A., P R U D N I K O V, A. P. *Formulaire pour le calcul opérationnel.* Paris, Ed. Masson & Cie, 1967.
102. E D E L M A N N, H. *Berechnung elektrischer Verbundnetze.* Berlin, Springer Verlag, 1963.
103. E G E R V A R Y, E. *Matrixok diadicus elöällitásán alápulo módszer blineáris alakok transzformáciojára és lineáris egyenletrendszerek megoldására.* A Magyar Tudományos, Akadémia. Alkalmazott Matematikai intézetének közlémenigei, vol. II. Budapest, 1954.
104. E S C A N É, J. N. *Fonctions d'une variable complexe.* Paris, Ed. Masson & Cie, 1972.
105. F A L L O U, J. *Courants de court-circuit.* Paris, Ed. J. B. Baillière et. Fils, 1933.
106. F A L L O U, J. *Les réseaux de transmission d'énergie électrique.* Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1933.
107. F A L L O U, J. *Leçons d'électrotechnique générale,* T.I. & II. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1939.
108. F A R A D A Y, M. *Experimental Researches in Electricity.* London, Ed. R. Taylor and W. Francis, 1855.
109. F E L D T K E L L E R, R. *Vierpoltheorie.* Leipzig, S. Hirzel Verlag, 1943.
110. F R A E N K E L, A. *Theorie der Wechselströme.* Berlin, Springer Verlag, 1930.
111. F R A N K L I N, P. *Fourier Methods.* New York, Ed. McGraw-Hill, 1949.
112. F R A N S U A, A. *Cîteva precizări în legătură cu aplicarea de către G. Kron a calculului matriceal în structura rețelelor electrice complexe.* St. cerc. energ. electr. VI, nr. 4, București, 1956, p. 461.
113. F R E C H É T, M., R O M A N N, R. *Représentation des lois empiriques par des formules approchées.* Paris, Ed. L. Eyrolles, 1930.
114. F R Y Z E, S. *Définition générale de la puissance active, réactive et apparente dans un système à deux fils.* Bul. I.R.E., no. 16, Bucarest, 1932.
115. F R Ü H L I N G, A. *Cours d'Électricité.* T.I. & II, Paris, Ed. Dunod, 1966.
116. G A R D N E R, M. F., B A R N E S, J. L. *Transient in linear Systems.* T.I. New York, Ed. J. Wiley & Sons, 1949.
117. G E R L A C H, M. *Berechnung von Kurzschluss Strömen.* Berlin, Springer Verlag, 1958.
118. G R A N I E R, J. *Les systèmes oscillants.* Paris, Ed. Dunod, 1936.
119. G R A N I E R, J. *Introduction à l'étude des champs Physiques.* Paris, Dunod, 1941.
120. G R A Y, A., M A T E W S, G. B. *Funcțiile Bessel și aplicațiile lor în fizică* (traducere din limba engleză). București, Editura tehnică, 1958.
121. G R I X, W. *Polaraufnahmen einfacher und kombinierten Wechselstromschwingungen.* E.T.Z. Berlin, 1921. p. 717—720, 752—756.
122. G U E L F O N D, A. D. *Calcul des différences finies.* Paris, Ed. Dunod, 1963.
123. G U I L L E M I N, E. A. *Syntesis of passive Networks.* New York, Ed. J. Wiley, 1957.
124. G U I L L E M I N, E. A. *Introductory Circuit Theory.* New York, Ed. J. Wiley, 1958.
125. G U I L L E M I N, E. A. *The Matematics of Circuit Analysis.* New York, Ed. J. Wiley, 1959.
126. G U T E N M A H E R, L. L. *Elektriceskie modeli.* Moskva, Gosudarstvennoe Izdatelstvo, 1949.
127. H A K, J. *Beitrag zur Analyse von Wechselstromkurven.* E. T. Z., Berlin, 1921, p. 484—486.
128. H A U F F E, G. *Die symbolische Bechandlung der Wechselströme.* Berlin, Springer Verlag, 1928.

129. HAUFFE, G. *Ortskurven der Starkstromtechnic*. Berlin, Springer Verlag, 1932.
130. HEAVISIDE, O. *Electromagnetic Theory*. vol. I, 1833, vol. II, 1899; vol. III, 1912, Londra retipărit în Dover Publications, New York, 1950.
131. HERTWIG, H. *Induktivitäten*. Berlin, Verlag für Radio-Foto-Kinotechnik, 1954.
132. HLADIK, J. *La transformation de Laplace à plusieurs variables*. Paris, Ed. Masson & Cie, 1969.
133. HOCHRAINER, A. *Symmetrische Komponenten in Drehstromsystemen*, Berlin, Springer Verlag, 1957.
134. HOMMEL, G. *Die Leistungsgrössen bei einphasigen Wechselströmen*. A.T.M., V 340—1, Berlin, 1934.
135. HOMMEL, G. *Die Leistungsgrössen bei mehrphasigen Wechselströmen*. A.T.M., V 340—2, Berlin, 1934.
136. HORT, W. *Technische Schwingungslehre*. Berlin, Springer Verlag, 1922.
137. HUELSMAN, L. P. *Circuits, Matrices and linear Vector Spaces*. New York, Ed. Mc Graw-Hill, 1963.
138. HURWITZ, A. *Über die Bedingungen, unter welchen eine gleichung nur Wurzeln mit negativen reelen Teilen besitzt*. Mathematische Annalen, 46, Band, Zürich, 1895, p. 273.
139. HÜTTE *Manualul inginerului*. București, Editura A.G.I.R., 1947.
140. ILIOVICI, A. *Les coordonnées symétriques en électrotechnique*. Paris, Ed. J. B. Baillière et Fils, 1934.
141. JANET, P. *Leçons d'Électrotechnique générale*, T. II. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1926.
142. JANET, P. *Leçons d'Électrotechnique générale*. T. III. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1928.
143. JANET, P. *Le calcul symbolique d'Heaviside et ses applications à l'électrotechnique*. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1938.
144. JAVID, M., BRENNER, L. *Analysis, Transmission and Filtering of Signals*. New York, Ed. Mc Graw-Hill, 1963.
145. JOSEPS, H. J. *Heaviside's Electric Circuit Theory*. London, Ed. Mathuen, 1946.
146. KAFKA, H. *Die ebene Vectorrechnung und ihre Anwendungen in der Wechselstromtechnik*, T.I. Leipzig, B.G. Teubner Verlag, 1926.
147. KAHAN, T. *Précis de physique théorique moderne*, T.I. Paris, Ed. Presses Universitaires de France, 1960.
148. KALANTAROV, P.L., TEITLIN, L.A. *Calculul inductanțelor* (traducere din limba rusă). București, Editura tehnică, 1958.
149. KAPLAN, W. *Operational Methods for linear Systems*. London, Addison-Wesley Publishing, 1962.
150. KEMP, P. *Theory of alternating Current Wawe Forms*. London, Ed. Chapman & Hall, 1934.
151. KEMP, P. *The j Operator for electrical Engineers*. London, Ed. MacMillan, 1957.
152. KENNELLY, A.E. *Les applications élémentaires des fonctions hyperboliques à la science de l'ingénieur électricien*. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1922.
153. KOCIN, N. E. *Calculul vectorial și introducere în calculul tensorial*. București, Editura tehnică, 1954.
154. KÖNIG, H., KRONDL, M., LANDOLT, M. *L'introduction du système d'unités Giorgi*. Bul. A.S.É. no. 15, Zürich, 1949.
155. KONTOROVICI, M. I. *Calculul operațional și fenomenele tranzitorii în circuitele electrice* (traducere din limba rusă). București, Editura tehnică, 1955.
156. KRAUSE, J. *Lineare Signalflussgraphen in der Antriebstechnik*. Elektrie, 7, Berlin, 1968, p. 275—278.
157. KRON, G. *Tensor Analysis of Networks*. New York, Ed. J. Wiley, 1939.
158. KRON, G. *A short Course in Tensor Analysis for Electrical Engineers*. New York, Ed. J. Wiley, 1942.
159. KRON, G. *The Misapplication of Graph Theory to electrical Network*. Repport no. 616 L 142, General Electric Laboratory, Schanectady, New York, 1961.

160. KUO, B. C. *Linear Networks and Systems*. New York, Ed. McGraw-Hill, 1967.
161. KÜPFMÜLLER, K. *Electricité théorique et appliquée*. Paris, Ed. Dunod, 1959.
162. LAGASSE, J. *Étude des circuits électriques*, T.I & II. Paris, Ed. Eyrolles, 1965.
163. LALESCU, T. *Sur les fonctions polygonales périodiques*. R.G.E., V, Paris, 1919, p. 43.
164. LALESCU, T. *Introducere la teoria ecuaţiilor integrale*. Bucureşti, Editura Academiei, 1956.
165. LANDAU, L., LIFCHITZ, E. *Théorie du Champ*. Moscou, Editions de la Paix, 1964.
166. LANDAU, L., LIFCHITZ, E. *Électrodynamique des milieux continus*. Moscou, Editions Mir, 1969.
167. LANDOLT, M. *Komplexe Zahlen und Zeiger in der Wechselstromlehre*. Berlin, Springer Verlag, 1936.
168. LANGMUIR, I., COMPTON, K. T. *Electric Discharges in Gasez*, R.M.Ph., III, New York, 1931, p. 191.
169. LAVANCHY, C. *Calcul électriques des lignes par l'emploi de diagrammes et d'abaques*. Paris, Éditions de la R.G.E., 1926.
170. LAVANCHY, C. *Étude et construction des lignes électriques aériennes*. Paris, Ed. J. Baillière et Fils, 1932.
171. LE CORBEILLER, P. *Matrix Analysis of Electric Networks*. New York, Ed. J. Wiley, 1950.
172. LENIN, I. V. *Materialism şi empiriocriticism*. Bucureşti, Editura politică, 1959.
173. LEVI-CIVITA, T. *Caractéristiques des sistèmes différentiels et propagation des ondes*. Paris, Ed. Felix Alcan, 1932.
174. LOVASS-NAGY, V., GYÖRY, T. *Csatolt rezgökörök matematicai viszgálata a matrix-számitás segits égérel*. A Magyar Tudományos Akádemia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményeiből, III, Budapest, 1954, p. 65.
175. LURIE, V. S. *Kajuştiaiasia moştianost trexfaznoi sistemi*. Electricestvo, nr. 1, Moskva, 1951, p. 47.
176. MACFARLANE, A. G. J. *System Matrices*. Proc. I.E.E., CVX, London, 1968, p. 749–754.
177. MALLETT, E. *Vector for Electrical Engineers*. London, Ed. Chapman & Hall, 1933.
178. MANNING, L. A. *Electrical Circuits*. New York, McGraw-Hill, 1966.
179. MANSUROV, N. N., POPOV, V. M. C. *Electrotehnică teoretică* (traducere din limba rusă). Bucureşti, Editura tehnică, 1952.
180. MARINESCU, M., POPOV, V. M. *Rezolvarea reţelelor cuprinzînd elemente neliniare*. Bul. St. Acad. St. Tehn. Chim., IV, Bucureşti, 1952, p. 73.
181. MASON, S., ZIMMERMANN, H. J. *Electronic Circuits, Signals and Systems*. New York, Ed. J. Wiley, 1962.
182. MAXWELL, J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, T.I & II. Oxford, Ed. Clarendon, Press, 1904.
183. MEEROV, M. V. *Bazele reglării automate a maşinilor electrice*. Bucureşti, Editura tehnică, 1954.
184. MEEROVICI, E. A., EFROIMOVICI, I. A., *O summe visştih garmoniciecikh kratnoi periodicinosti pri nesinusoidalnîh peremennîh*. Elektricestvo, nr. 12, Moskva, 1948, p. 76.
185. MEEROVICI, E. A. *Geometriciescaia teoriia electricieskih ţepei*. Elektricestvo, nr. 2, Moskva. 1947, p. 30.
186. MEEROVICI, E. A. *Primenenie metoda simmetricinîh sostavliainştiih dlia issledovaniia neustanovivşishia profesov v trexfaznîh ţepiah*. Elektricestvo, nr. 4, Moskva, 1952, p. 19.
187. MIKUSINSKI, J. *Operatoren Rechnung*. Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1957.
188. MOCANU, C. I. *Cercetări asupra topologiei reţelelor electrice*. Buletinul ştiinţific al Academiei Militare Tehnice, II, 2, Bucureşti, 1956.
189. MOCANU, C. I. *O teoremă în studiul reţelelor electrice prin calculul matriceal*. St. cerc. energ. electr., VI, 4, Bucureşti, 1956, p. 473.

190. MOCANU, C. I. *Bazele electrotehnicii, III—4. Curenţi variabili în conductoare masive* (litografiat). Bucureşti, I.P.B., 1969.
191. MORAND, M. *Introduction mathématique aux théories physique modernes, 1ère partie.* Paris, Ed. Vuibert, 1947.
192. MORARU, A. *Maşini electrice* (litografiat). Bucureşti, I.P.B., 1972.
193. MÜLLER, O. *Einführung in die symbolische Methode der Wechselstromtechnik.* Leipzig, Dr. Max Jönecke Verlag, 1935.
194. NASLIN, P. *Les régimes variables dans les systèmes linéaires et nonlinéaires.* Paris, Ed. Dunod, 1962.
195. NEIMAN, L. R., KALANTAROV, P.L. *Bazele teoretice ale electrotehnicii* (traducere din limba rusă). vol. I, II & III. Bucureşti, Editura energetică, 1955.
196. NECULCEA, E. *Problema generală a electrostaticii.* G. M., XIV, Bucureşti, 1908—1909, p. 5—9.
197. NICOLAU, E. *Cîmpuri şi unde electromagnetice.* Bucureşti, Editura Academiei R.S.R., 1972.
198. NICOLAU, E. *Radiaţia electromagnetică.* Bucureşti, Editura Academiei R.S.R., 1973.
199. NICOLESCU, M. *Analiza matematică*, vol. II, Bucureşti, Editura tehnică, 1958.
200. NOVACU, V. *Introducere în electrodinamică.* vol. I. Bucureşti, Editura Academiei, 1955.
201. NYQUIST, H. *Regeneration Theory.* Bell System Techn. Journal, XI, New York, 1934, p. 279—331.
202. OBERDORFER, G. *Die Ortskurventheorie der Wecheselstromtechnik*, München, R. Oldenbourg Verlag, 1934.
203. OBERDORFER, G. *Lehrbuch der Elektrotechnik*, Bd. I & II, Berlin, R. Oldenbourg Verlag, 1944.
204. OERSTÄDT, C. *Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticam.* Annalen der Physik und Chemie, LX, Berlin 1820, p. 295.
205. ONICESCU, O., GALBURA, G. *Algebra*, vol. I. Bucureşti, Editura Colecţia Natura, 1948.
206. ORLICH, E. *Die Theorie der Wechselströme.* Leipzig, B.G. Teubner Verlag, 1912.
207. ORSINI, L. Q. *Théorie et pratique des circuits électrotechniques*, Paris, Ed. Dunod, 1957.
208. ORTUSI, J. *Étude mathématique des circuits de l'électronique, T.I. Analyse des circuits.* Paris, Ed. Masson & Cie, 1966.
209. OTS-CHEVALIER, L. *Essai d'une théorie générale des diagrammes vectoriels en electricité.* R.G.E. Paris, T. VII, 1920, p. 315 et 342; T. XI, 1922, p. 563, 603, 643 et 848.
210. PARODI, M. *Introduction à l'étude de l'analyse symbolique.* Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1957.
211. PARTENI ANTONI, C., ANTONIU, I. S. *Comportarea maşinilor electrice la unda de şoc.* Bucureşti, Editura Academiei, 1957.
212. PAVEL, E. *Utilizarea grafurilor de fluenţă la studiul reţelelor şi sistemelor electrice.* Energetica, XIII, nr. 1, Bucureşti, 1965.
213. PEEK JR., F. W. *Phénomènes diélectriques dans la technique des hautes tensions.* Paris, Ed. Delagrave, 1924.
214. PENESCU, C. *Automatica şi telemecanica sistemelor energetice*, vol. I, Bucureşti, Editura Academiei, 1958.
215. PENESCU, C. *Considérations sur le couplage en parallèle des alternateurs, par la méthode de l'autosynchronisation.* Rapport no. 101, C.I.G.R.É, Paris 1958.
216. PENFIELD, JR., P., SPENCE, R., DUINKER, S., *Tellegen's Theorem an electrical Networks* Massachusetts. Ed. The Massachusetts Institute of Technology, 1970.
217. PEREKALIN, M. A. *Electricieskie ţepi.* Moskva. Gosenergoizdat, 1950.
218. PERIN, J. *Electricité.* Paris. Ed. Herman, 1941.
219. PEPSON, S. V. *Metod razlojenia rabocih harakteristik v riad Furie.* Elektricestvo, nr. 3, Moskva, 1948, p. 61.
220. PESTARINI, G. M. *Contributo allo studio dei sistemi electrici polifasi per mezo dell analisi in sistemi simetrici.* Atti R. Accad. Sci., LXXIV—I, 5, Torino, 1939, p. 619.

221. P E T R O I A N U, A. *O metodă topologică de determinare directă a impedanțelor proprii și de transfer a rețelelor electrice.* Rev. Electrotehnica, nr. 10, București, 1967.

222. P L Ă C I N Ț E A N U, I. I. *Electromagnetismul.* București, Editura Academiei Române, 1941.

223. P L A N K, M. *Electromagnétisme* (traduit de l'allemand). Paris. Ed. F. Alcan, 1939.

224. P O L I V A N O V, K. M., I A H I N S O N, B. I. *K rascetu neustanovirșegosia rejima v țepnih shemah.* Elektricestvo, nr. 4, Moskva, 1948, p. 57.

225. P O M E Y, J. B. *Démonstration du théorème d'Hurwitz sur les conditions nécessaires à l'existence d'un régime oscillatoire.* R.G.E., XXVI, Paris, 1929, p. 519.

226. P O M E Y, J. B. *Applications des imaginaires au calcul vectoriel.* Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1933.

227. P O N C E L O T, P. *Précis d'électromagnétisme théorique.* Paris, Ed. Dunod, 1963.

228. P O P E S C O, A. T. *Sur l'application de la méthode des discontinuités à l'analyse harmonique des fonctions périodiques.* Bul. I.P.B.T, XX, Bucarest, 1958, p. 69.

229. P O P E S C U, A. T. *Curs de Electrotehnică II, partea I. Analiza armonică a funcțiilor periodice nesinusoidale.* București, Ed. I.P.B., 1947.

230. P O P E S C U, C., L E F T E R, C. *Materiale electrotehnice.* București, Editura didactică și pedagogică, 1970.

231. P Ö S C H L, K. *Mathematische Methoden in der Hochfrequenztechnik.* Berlin, Springer Verlag, 1956.

232. P O T O L E A, E. *Calculul regimului permanent al sistemelor electrice.* București, Editura tehnică, 1967.

233. P O W E R, H. M. *Canonical Form for the Matrices of linear Discrete — Time Systems,* Proc. I.E.E., CXVI, London, 1969, p. 1245—1252.

234. P R E D A, M. *O metodă de calcul a schemelor electrice echivalente.* Electrotehnica, VIII, București, 1960, p. 131.

235. P U G E T, L. *Note sur le calcul des coefficients de la série de Fourier,* R.G.E., V, Paris, 1919, p. 439.

236. Q U A D E, W. *Wirk-, Blind-und Scheinleistung bei Wechselströmen mit beliebiger Kurvenform.* Archiv für Elektrotechnik, XXVIII, Berlin, 1934, p. 130.

237. Q U A D E, W. *Über Wechselströme mit beliebiger Kurvenform in Dreiphasen-system.* Archiv für Elektrotechnik, XXVIII, Berlin, 1934, p. 798.

238. Q U I N E T, J. *Théorie et pratique des circuits de l'électronique et amplificateurs.* T.I, II & III. Paris, Ed. Dunod, 1964.

239. R Ă D U L E Ț, R. *Bazele teoretice ale electrotehnicii,* vol. II (litografiat). București, Editura Energetică de Stat, 1954.

240. R Ă D U L E Ț, R. *Bazele teoretice ale electrotehnicii,* vol. III & IV (litografiat). București, Editura Învățămîntului, 1955.

241. R Ă D U L E Ț, R. *Système des espèces de grandeurs macroscopiques primitives d'état electromagnétique,* Rev. roum. sci. techn. Electrotechn. et Energ., XVI, Bucarest, 1961, p. 189.

242. R Ă D U L E Ț, R., T I M O T I N, A., Ț U G U L E A, A. *Introducerea parametrilor tranzitorii în studiul circuitelor electrice liniare avînd elemente nefiliforme și pierderi suplimentare.* St. cerc. energ. electr. XVI, nr. 4, București, 1966, p. 857.

243. R I C H A R D S O N, D. E. *Electrical Network Calculation.* New York, Ed. Van Nostrand, 1946.

244. R Î J I C, I. M., G R A D S T E I N, J. S. *Tabele de integrale, sume, serii și produse* (traducere din limba rusă). București, Editura tehnică, 1955.

245. R O B I C H A U D, L. P. A., B O I S V E R T, M., R O B E R T, J. *Graphes de fluence.* Paris-Quebec, Ed. Eirolles-Laval, 1961.

246. R O S E N B R O C K, H. H. *System Matrices giving positive-real Transfer-Function Matrices.* Proc. I.E.E., CXV, London, 1968, p. 328.

247. R O S E N B R O C K, H. H. *System Matrices giving lossless positive-real Transfer-Function Matrices.* Proc. I.E.E., CXV, London, 1968, p. 330.

248. R O Ș U, A. A., M I R E S C U, P. *Teoria grafelor.* București, Editura militară, 1968.

249. ROUGÉ, R. *Représentation algébrique des caracteristiques magnétiques*. Bull. S.F.E., IV, 2e série. Paris, 1936, p. 881.
250. ROUTH, E. J. *Advanced Part of the Dinamics of a System of Rigid Bodies*. London, Ed. MacMillan, 1930.
251. RÜDENBERG, R. *Fenomene tranzitorii în sistemele energetice* (traducere din limba germană). București, Editura tehnică, 1959.
252. SAGAU, A. *Théorie générale des réseaux en régime linéaire*. Paris, Ed. Dunod, 1966.
253. SALVADORI, M. G., BARON, M. L. *Metode numerice în tehnică* (traducere din limba engleză). București, Editura tehnică, 1972.
254. SAVER, R., SZABO, I. *Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs*. Berlin, Springer Verlag, 1967.
255. SCHNESSL, F. *Die Kurzschlussvorgänge*. Berlin, VEB Verlag Technik, 1959.
256. SHEA, R. F. *Principes des circuits à transistors*. Paris, Ed. Dunod, 1956.
257. SIGORSKI, V. P. *Metodi analiza electricieschih shem c mnogopoliusnımi elementami*. Kiev, Tehnicieskoi Literaturi, 1958.
258. SIGORSKI, V. P. *Analiz elektronnıh shem*. Kiev, Tehnicieskoi Literaturi, 1960.
259. SIGORSKI, V. P., PETRENKO, A. I. *Osnovi teorii elektronnıh schem*. Kiev, Izdatelstvo Tehnika, 1967.
260. SILVA, G. *Galileo Ferraris, il campo magnetico rotante e il motore asincrono*. Rediconti dell' A.E.I., Torino, 1947.
261. STĂNCULESCU, F. *Rezolvarea circuitelor electrice neliniare cu ajutorul transformării Laplace*. St. cerc. energ. electr., X, București, 1960, p. 369.
262. STARKEY, B. J. *Laplace Transforms for Electrical Engineers*. London, Ed. MacMillan, 1954.
263. ȘTEFĂNESCU, N., GHEORGHIU, M. *Precizări în legătură cu noțiunile de sursă de tensiune și sursă de curent*. Buletinul științific al Academiei Militare Tehnice, II, nr. 3, București, 1956.
264. ȘTEFĂNESCU, N., GHEORGHIU, M. *Curenții trifazici*. București, Editura Academiei Tehnice Militare, 1957.
265. ȘTEFĂNESCU, S. *Filtre electrice*. București, Editura tehnică, 1967.
266. STERE, R. *Aparate electronice de măsură și control*. București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
267. STOKVIS, L. G. *Sur la création des harmoniques 3 dans les alternateurs par suite des deséquilibrage des phases*, C.R. Acad. Sc., CLIX, Paris, 1914, p. 46—49.
268. STRATTON, J. A. *Electromagnetic Theory*. New York, Ed. Mc Graw-Hill, 1941.
269. STRELCOV, S. P. *Introducere în teoria oscilațiilor*. București, Editura tehnică, 1954.
270. STOILOV, S. *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*. vol. I & II. București, Editura Academiei, 1954.
271. STURM, C. *Curs d'Analyse*. T. II. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1909.
272. ȘORA, C. *Le quadripôle électrique*. Paris, Ed. Masson & Cie. 1969.
273. TAMM, I. E. *Bazele teoriei electricității* (traducere din limba rusă). București, Editura tehnică, 1956.
274. TEUMIN, I. I. *Îndreptar privind regimurile electrice tranzitorii*. București, Editura tehnică, 1956.
275. THIELEMANS, L. *Calculs, diagrammes et régulation des lignes de transport d'énergie à longue distance*. R.G.E., VIII, Paris, 1920, p. 403.
276. THOMPSON, H. A. *Alternating-Current and Transient Circuit Analysis*. New York, Ed. Mc. Graw-Hill, 1957.
277. TIMASCHEEFF, A. *Stabilität elektrischer Drehstrom Kraftübertragungen*. Berlin, Springer Verlag, 1940.
278. TIMOTIN, A., HORTOPAN, V. *Lecții de Bazele Electrotehnicii*, vol. I. București, Editura didactică și pedagogică, 1962.
279. TOLSTOV, H. P. *Serii Fourier*. București, Editura tehnică, 1955.

280. TURNEY, T. H. *Le calcul d'Heaviside.* Paris, Ed. Gauthier-Villars 1950.
281. ȚUKKERMAN, M. L. *Mostovie sheml i matricinte preobrazovaniia.* Elektricestvo, no. 4, Moskva, 1948, p. 60.
282. ULIANOV, S. A. *Scurtcircuite în sistemele electrice* (litografiat). București, Editura Energetică de Stat, 1954.
283. VASILESCO KARPEN, N. *Recherches sur l'effet magnétique des corps electrisés en mouvement.* Thèses. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1904.
284. VLADIMIROV, V. S. *Les functions de plusieurs variables complexes et leur application à la théorie quantiques des champs.* Paris, Ed. Dunod, 1967.
285. VORONOV, R. A. *Obsceskaia teoria cetîrehpoliusnikov i mnogopoliusnikov.* Moskva, Gozenergoisdat, 1951.
286. WAGNER, C. F., EVANS, R. D. *Symmetrical Components.* New York, Ed. McGraw-Hill, 1933.
287. WEISS, A. von, KLEINWÄCHTER, H. *Übersicht über die Theoretische Elektrotechnik, II-er Teil.* Leipzig. Akademische Verlagsgesellschaft, 1956.
288. WILLERS, F. A. *Harmonische Analyse durch abschnittweise Integration* A.T.M., V 3620—5, Berlin, 1942.
289. WILLERS, F. A. *Harmonische Analysatoren.* A.T.M., V 3620—6. Berlin, 1942.
290. WILLERS, F. A. *Analyse periodischer Functionen mittels gleichanständiger Ordinaten.* A.T.M., V 3620—7. Berlin, 1942.
291. ZALESKI, A. M. *Transportul energiei electrice.* București, Editura tehnică, 1951.
292. ZEVEKE, G., IONKIN, P., NETUSHIL, A., STRAKHOV, S. *Analysis of Elektric Circuits.* Moskaw. Mir Publishers, 1969.
293. ZLATEV, M. P. *Osnovi na elektro tehnikata.* Sofia, Ed. Tehnika, 1964.
294. * * * *A.E.F. Ausschuss fur Einheiten und Formelgrössen Elektrotechnischen Zeitschrift.* 62. Jahrgang 1941, p. 717, 733, 749, 765, 781.
295. * * * *Lexiconul Tehnic Român.* ed. II, vol. 4.
296. * * * *Lexiconul Tehnic Român.* ed. II, vol. 7.
297. * * * *Lexiconul Tehnic Român,* ed. II, vol. 12,
298. * * * *Manualul inginerului electrician.* vol. I, București, Editura tehnică, 1953.
299. * * * *Théorie des graphes* : Journée Internationale d'études. Paris, Ed. Dunod, 1967.

TABLE DES MATIÈRES

TOME I

I-ère partie

LES BASES PHISYQUES DE L'ÉLECTROTECHNIQUE INTRODUCTION DANS LA THÉORIE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Chapitre I

ÉLECTROSTATIQUE

Chapitre III

ÉLECTRODYNAMIQUE

Chapitre V

LE COURANT ALTERNATIF SINUSOÏDAL POLYPHASÉ SYMÉTRIQUE

TOME II

Chapitre VI

ÉTUDE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES À COURANTS ALTERNATIFS EN RÉGIME PERMANENT

Chapitre VII

LES CIRCUITS ÉLECTRIQUES À COURANTS ALTERNATIFS EN RÉGIME TRANSITOIRE

III-e partie

FONCTIONNEMENT DES SYSTÈMES À COURANTS ALTERNATIFS EN RÉGIMES ANORMAUX

Chapitre VIII

LE COURANT ALTERNATIF POLYPHASÉ NON SYMÉTRIQUE. LE RÉGIME DÉSÉQUILIBRÉ

Chapitre IX

LE COURANT ALTERNATIF MONOPHASÉ NON-SINUSOÏDAL

LE RÉGIME DÉFORMANT

Chapitre X

MÉTHODES SPÉCIALES DE CALCUL DU RÉGIME TRANSITOIRE

Chapitre XI

SYSTÈMES NON LINÉAIRES À COURANTS ALTERNATIFS

IV-e partie

PROPAGATION DE L'ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Chapitre XII

THÉORIE DES LIGNES LONGUES

Chapitre XIII

CHAÎNES DE QUADRIPÔLES

Chapitre XIV

PROPAGATION DES COURANTS ÉLECTRIQUES ET DES CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS DES CONDUCTEURS MASSIFS, EN RÉGIME HARMONIQUE SINUSOÏDAL

Chapitre XV

PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

CONTENTS

VOLUME I

Part I

PHYSICAL FUNDAMENTALS OF ELECTROTECHNICS. INTRODUCTION TO THE THEORY OF ELECTROMAGNETIC FIELD

Chapter I

ELECTROSTATICS

Chapter II

ELECTROKINETICS

Chapter III

ELECTRODYNAMICS

Part II

SINUSOIDAL ALTERNATING CURRENT

Chapter IV

SINGLE-PHASE SINUSOIDAL ALTERNATING CURRENT

Chapter V

SYMMETRICAL MULTI-PHASE SINUSOIDAL ALTERNATING CURRENT

VOLUME II

Chapter VI

STUDY OF STEADY STATE ALTERNATING CURRENT CIRCUITS SYSTEMS

Chapter VII

TRANSIENT STATE IN ALTERNATING CURRENT CIRCUITS

Part III

ABNORMAL STATE ALTERNATING CURRENT SYSTEMS

Chapter VIII

NON-SYMMETRICAL POLYPHASE ALTERNATING CURRENT UNBALANCED STATE

Chapter IX

NON-SINUSOIDAL SINGLE-PHASE ALTERNATING CURRENT. DISTORTING STATE

Chapter X

SPECIAL METHODS OF CALCULATING TRANSIENT STATE

Chapter XI

ALTERNATING CURRENT NON-LINEAR SYSTEMS

Part IV

PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC ENERGY

Chapter XII

THEORY OF LONG LINES

Chapter XIII

CHAINS OF QUADRIPOLES

Chapter XVI

PROPAGATION OF SINUSOIDAL HARMONIC STATE ELECTRIC CURRENTS AND ELECTROMAGNETIC FIELDS THROUGH SOLID WIRES

Chapter XV

PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES

ERATĂ

Pag.	Rîndul	În loc de:	Se va citi:
90	rel. (6.102)	$A_{12} = -\dfrac{\mathfrak{S}_{11}\mathfrak{S}_{22} \cdot \mathfrak{S}_{12}\mathfrak{S}_{21}}{\mathfrak{S}_{21}}$	$A_{12} = -\dfrac{\mathfrak{S}_{11} \cdot \mathfrak{S}_{22} - \mathfrak{S}_{12}\mathfrak{S}_{21}}{\mathfrak{S}_{21}}$

Plan editură Nr. 5289 B.
Coli de tipar 46,50. Tiraj 5180 ex. legate 1/1.
Bun de tipar 12.12.74. Apărut 1974


I. P. „Informația" c. 229

Vol. I și vol II Lei 66,20